С.Л. Василенко

# Обобщенные структуры и степенные аналоги-расширения золотого сечения: алгебраический подход

Рассмотрены алгебраические уравнения (структуры), решение которых включает константу золотого сечения либо не содержит. От простейшего классического тринома с единичными коэффициентами – до общего уравнения *n*-го порядка с целочисленными коэффициентами.

Обобщение – суть учения

В связи с разного рода обобщениями золотого сечения (ЗС), включая ложные, возникает вопрос: может ли быть у золотоносной гармонии своя математика? – Да, может. Этот подраздел математики непосредственно связан с золотым числом Ф и его проявлением в "мире вещей", когда вполне правомерно использовать понятие «математика золотоносной гармонии», определяющее соответствующую специальную область исследований [1].

Укороченное словосочетание «математика гармонии» (А.Стахов, С.Абачиев Г.Мартыненко и др.) имеет неопределенный и гносеологически невыразимый смысл, а его применение в качестве наименования для указанной специальной области исследований выглядит явно дисгармонично и вводит в заблуждение принципиального характера.

В мире наличествует множество самых разнообразных гармоничных связей – согласованных отношений между элементами, которые по многим оценкам создают ощущение целостности, порядка и красоты.

Точно так существует и множество разделов-направлений в математике.

Термин «математика гармонии» автоматически подразумевает математику тотально всеобщей гармонии бытийного мира. И если этот термин используется для наименования области математических исследований золотоносной гармонии, то введение в заблуждение состоит в том, что золотоносная гармония является частной гармонией бытийного мира, а вовсе не его тотально всеобщей гармонией [1].

Введение в заблуждение может делаться неумышленно из-за невежества, а может и намеренно, дабы ухищрением и подменой понятий завысить свой авторитет в научном мире.

Приманка часто срабатывает. В результате действительно золотой математический феномен Ф "размазывается" и тонет в бесчисленных множествах чисел с золотым грамматическим определением (прилагательным), да ещё и со своей отдельно взятой математикой, претендующей на всеобщность.

## Введение.

В научной педагогике наиважнейшей является теза: «повторение – мать учения».

В области познания мироздания и генерирования возобновляемой информации таковым является обобщение, углубление и/или систематизация новых знаний.

Познавательный человек хочет "зреть в корень". Желает понять причинно-следственные закономерности происходящих процессов. Увидеть картинки в виде цельных панорамных объектов, как вдоль, так и вширь, заглядывая в глубину происходящего.

Мыслить пространно, многогранными концептуальными образами и категориями.

В духе классического обобщения с его мысленным переходом от отдельных фактов и событий к их отождествлению в мыслях. И далее от одной мысли к другой – более общей и глобально-фундаментальной [2].

Обобщение понятий – логическая операция, обратная ограничению, когда осуществляется переход *от видового понятия к родовому,* путем отбрасывания от первого часть видообразующих признаков.

После исключения признака содержание уменьшается, а объем понятия увеличивается.

Например, акула → хищная рыба → рыба.

В частности, если мы желаем пойти по пути обобщения модели золотого сечения, но уже с новыми константами-решениями, то видовое или отличительное ограничение "золотое" логически следует опустить.

Остается просто "сечение". Без какой либо терминологической окраски золотистости, позолоты, либо с новым уточняющим дополнением.

Поэтому любые «обобщенные золотые сечения» (ОЗС) или «золотые сечения» во множественном числе [3–5], далекие от константы ЗС, терминологически не выдерживают критики и по своим названиям являются образованиями надуманными и нелепыми. Говоря языком-сленгом неформалов, ОЗС – это типичный фэйк (англ. *fake* поддельный). Подделка-фальсификация с намеренным вбрасыванием ложной информации в качестве броского названия, рассчитанного на сенсацию и привлечение внимания на фоне широко известной константы ЗС.

В итоге подобной мозговой активности синтезируется продукт «научной балды» [6] как «околонаучной деятельности с непомерной и сознательной гиперболизацией несущественных результатов».

Так, квадрат является частным случаем прямоугольника и ромба одновременно, поэтому обладает всеми их свойствами. Но никто в математике не называет прямоугольник или ромб обобщенным квадратом. У них свои собственные наименования.

Более сдержан в оценках Г.Аракелян [7]: «Метафорическое выражение "обобщение золотого сечения", строго говоря, не вполне некорректно. Нельзя обобщать конкретную пропорцию, а тем более константу; другое дело теория или модель, принцип, уравнение и вообще теоретическая конструкция». – Но тогда и называть нужно соответствующим образом. Например, как в иерархии развития-обобщения чисел. Натуральные, целые, рациональные и иррациональные, вещественные (действительные), комплексные. Каждое последующее расширение сопровождается новым специальным термином.

**Постановка задачи.**

Итак, мы рассмотрели несоответствия в наименованиях:

– широкое название "математика гармонии" де-факто означает узкий предмет исследований, ограниченный ЗС и последовательностям Фибоначчи;

– "обобщенные золотые сечения" – наоборот содержит модели и константы, не имеющие к самому ЗС ни прямого, ни косвенного отношения, хотя позолота в названии неправомерно сохраняется, как ухищренный прием или недобросовестный рекламный трюк.

В целом тема не новая и не раз становилась предметом дискуссий.

Анализ явных нестыковок позволяет в дальнейшем минимизировать терминологический нигилизм и отчетливее обозначать предметную область исследований.

Математическое понятие золотой пропорции связано с равенством отношений при мысленном разделении некоторого целого объекта на две аддитивные непересекающиеся части. Можно оперировать и просто суммой, без привязки к делимому объекту: сумма двух величин так относится к одной из них, как эта величина – к другой $(a + b)/b = b/a$.

Решение пропорции сводится к вычислению корней квадратного уравнения с единичными коэффициентами и в области положительных чисел приводит к иррациональной константе $\Phi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1{,}618$ как отношению частей.

Возможно ли построение обобщенных структур на основе золотой пропорции? – В принципе, да. Хотя образуемые модели теряют простоту, наглядность и очарование, присущие исходной классической форме.

Основных путей развития задачи всего два:

– собственно золотые модели с встроенной константой ЗС;

– распространение подхода в задаче ЗС на новые структуры-образования, не имеющие отношения к ЗС.

**Предостережения-ограничения.**

Феерический звукоряд искусственного восхваления и фетишизации золотого сечения (правильнее – отношения) порой не знает границ. Вследствие численной похожести или искусственной подгонки под желаемый результат, ему нередко приписываются самые невообразимые проявления в предметах исследований.

Приведем типичный пример высокопарного пафоса и голословного сочинительства:

«ЗС – это наиболее часто (?) встречающаяся пропорция близких к равновесию оппозиций во всех (?) системах мироздания, известная с древности, отражающая энергетически наиболее выгодное, оптимальное (гармоническое) соотношение его частей, обеспечивающее их устойчивость и длительное существование.

Закономерности ЗС проявляются в строении и свойствах химических веществ, в генных структурах, в планетарных и космических системах, в распределении суши и моря, во многих процессах и явлениях.

Прослеживается связь таких, казалось бы, несопоставимых явлений, как колебания солнечной оси, процент поверхности, пораженной засухой, активность питания термитов, интенсивность действия обезболивающих препаратов, индекс водной активности, вероятности рождения мальчиков – и везде колебания рассматриваемых величин находятся в отношении ЗС» [5].

Можно ещё как-то принять данные утверждения-славословия на веру. Если бы они давались на уровне гипотез, как некоторые оценочные приближения. Но нет…

Всё выдается за чистую монету. Как свершившиеся доказанные события и факты.

Кстати, вовсе не во благо, а во вред истинной значимости золотого феномена.

На наш взгляд, допустимо считать правомерным использование золотоносной риторики только тогда, когда проявление константы золотого сечения не вызывает сомнения. Когда золотая модель точно воспроизводит исследуемый процесс в его деталях и возможных отклонениях.

В противном случае имеет место некое предположение, и не более того.

В равной мере подходят и другие числовые конструкции, близкие к значению Ф.

В частности, величина $6/\pi^2 \approx 0{,}608 \approx Ф^{-1}$, как вероятность несократимости дроби произвольного целочисленного деления $a/b$, и многие другие величины из банка данных модельных структур "квазиЗС", похожих на константу золотого сечения [8], но с совершенно иной физико-математической основой.

Или распределение центров семян в корзинке цветка подсолнечника, как гексагональная радиально-растущая структура наиболее плотной упаковки [9].

Шестой порядок с присущим углом $\pi/6 = 30^o$, свойственный плотной упаковке неживого, в результате роста "атомов" в решетке приблизительно воспринимается как пятый порядок центральной симметрии, характерный для живых объектов, с формированием главного угла расхождения семян $\theta = 5\cdot\pi/6 = 2{,}61799 \approx Ф^2$ (в радианах) на логарифмической спирали. Многие считают его "золотым" (вероятно, ошибочно), ввиду практической близости величин $\theta \approx Ф^2$ с относительной погрешностью – 0,0015 %.

**Пути расширения задачи ЗС.**

В понятийном аспекте золотоносные термины-эпитеты должны отбрасываться или уходить на задний план, как только мы переходим на структуры, которые в своей основе не содержат константу Ф.

В то же время допустимо говорить о развитии задачи и/или модели ЗС. Но уже без золотой окраски. Используя отдельные свойства и закономерности исходной задачи, и стремясь продолжить их позитивные начала-тенденции на более сложные объекты. Например, триномы общего вида [10].

Расширение задач, родственных с золотым сечением, может осуществляться разнообразными способами, в частности, алгебраически: повышением размерности исходной модели, добавлением дополнительных членов, введением варьируемых коэффициентов, заменой целочисленных величин на вещественные аналоги и др.

Действительно, если посмотреть глубже, то практически «любой алгебраический полином с доминирующим положительным корнем, так или иначе, отражает деление единичного отрезка на две части в определенной пропорции» [11]. Пусть достаточно сложной, ненаглядной и трудно интерпретируемой.

В то же время исследования феномена ЗС показывают, что его исходная алгебраическая форма $x^2 - x - 1 = 0$ с парой корней $(-\phi,\ \Phi)$, где $\phi = \Phi^{-1}$, не одинока.

В разных вариациях она способна видоизменяться и трансформироваться, приводя к обновленным структурам, в основе которых по-прежнему остается константа ЗС.

**Не всё то золото, что блестит.**

Не все структуры, содержащие золотоносное решение, равнозначны.

Так, трином золотого сечения, дополненный двучленным множителем с корнями $\pm 1$

$$\left(x^2 - x - 1\right)\cdot(x \pm 1) = 0\,,$$

продолжает оставаться моделью ЗС так, что эквивалентные возвратные (разностные) уравнения с их численными рекурсиями

$$\begin{cases} x^3 = 2x + 1, & f_n = 2f_{n-2} + f_{n-3}; \\ x^3 = 2x^2 - 1, & f_n = 2f_{n-1} - f_{n-3}; \end{cases} \qquad A = \lim_{n\to\infty} f_n / f_{n-1} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

имеют аттрактор $A$ (предельное отношение соседних членов), равный Ф, как наибольший по модулю корень характеристического алгебраического уравнения.

Дополним теперь исходный трином золотого сечения двучленом с корнями $\pm 2$

$$\left(x^2 - x - 1\right)\cdot(x \pm 2) = 0\,.$$

Модель продолжает быть похожей на ЗС, имея пару корней $(-\phi,\ \Phi)$.

Однако эквивалентные рекуррентные формы

$$\begin{cases} x^3 = 3x^2 - x - 2, & f_n = 3f_{n-1} - f_{n-2} - 2f_{n-3}; \quad A = 2 \\ x^3 = -x^2 + 3x + 2, & f_n = -f_{n-1} + 3f_{n-2} + 2f_{n-3}; \quad A = -2 \end{cases}$$

имеют уже другие аттракторы *A*, которые являются максимальными по модулю и численно больше золотой константы Ф.

Считать ли последние модели золотоносными? – Ответ неоднозначный.

На наш взгляд, продолжение "золотой" терминологии в этом случае становится слабо обоснованным, поскольку разностный аналог тяготеет к иным полюсам-аттракторам.

Характеристическое алгебраическое уравнение вроде и содержит золотые корни. Но его "генетика", увы, уже принципиально иная. – Эквивалентная рекуррентная последовательность устойчиво проскакивает константу Ф и асимптотически устремляется к числу-двойке.

Поэтому не всё то золото, что блестит…

Смотреть нужно не только на внешний вид модели, но и внутреннее содержание.

Тем самым отличать истинно золотую модель-структуру от всякого поверхностного подобия с навязываемым показным блеском.

**Золотоносные триномы.**

1. Триномы второй степени.

**1.1.** Базовая золотоносная модель в виде разностного (возвратного) уравнения $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ с дискретным "временем" $n$ интерпретируется нами как схема

«з а в т р а = с е г о д н я + в ч е р а».

Весовые коэффициенты одинаковы и равны единице.

В результате имеем двучленно-аддитивное сложение, формирующее числовую последовательность, которая стремится к своему аттрактору – константе золотого сечения в виде предельного отношения соседних членов-элементов ряда $\lim f_{n+1}/f_n = \Phi$.

Возьмем алгебраическое квадратное уравнение общего вида $x^2 = px + q$ и соответствующую для него рекурсию $f_{n+1} = pf_n + qf_{n-1}$.

Понятно, что с увеличением коэффициента $p$ возрастает значимость слагаемого "сегодня". Аналогично с ростом $q$ более существенным становится добавка "вчера".

Положительный корень уравнения (он же аттрактор рекурсии) равен

$$x = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

Если положить $q = k(k + p)$, где $k$ – натуральное число, то подкоренное выражение становится квадратом $p^2 + 4q = p^2 + 4kp + 4k^2 = (p + 2k)$, а корень представляется целым числом $x = p + k$:

$$x^2 - px - k(k + p) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = p + k.$$

То есть квадратное уравнение общего вида допускает целые решения (табл. 1).

*Таблица 1*

**Коэффициенты квадратного уравнения *p, q*, дающие целочисленные корни-решения $x = p + k$**

| | $q$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p/k =$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| **1** | 2 | 6 | 12 | 20 | 30 | 42 | 56 | 72 | 90 |
| **2** | 3 | 8 | 15 | 24 | 35 | 48 | 63 | 80 | 99 |
| **3** | 4 | 10 | 18 | 28 | 40 | 54 | 70 | 88 | 108 |
| **4** | 5 | 12 | 21 | 32 | 45 | 60 | 77 | 96 | 117 |
| **5** | 6 | 14 | 24 | 36 | 50 | 66 | 84 | 104 | 126 |

Исходя из этого, общее квадратное уравнение никак не может быть «обобщенным ЗС».

Ибо множества всех целых или рациональных чисел – счетные (исчислимые и эквивалентные множеству натуральных чисел), множество всех действительных (рациональных и иррациональных) чисел несчетно.

Поэтому целые числа никак не могут обобщать иррациональные.

Таким образом, общей структурой является модель в виде тринома второй степени $x^2 = px + q$, независимо от факта существования обособленной золотой модели $x^2 = x + 1$, приводящей к иррациональному решению Ф.

В частном случае, положив выше $k=1$ и разделив на $x$, получаем $x = p + \frac{p+1}{x} = 0$.

Положительный корень данного уравнения равен $x = p+1$, то есть $\frac{p+1}{x} = 1$.

Отсюда следует, что посредством цепных дробей с парой соседних натуральных чисел образуется бесконечное множество любопытных единичных тождеств:

$$\frac{2}{1+\frac{2}{1+\frac{2}{1+\dots}}} = \frac{3}{2+\frac{3}{2+\frac{3}{2+\dots}}} = \frac{4}{3+\frac{4}{3+\frac{4}{3+\dots}}} = \dots = \frac{p+1}{p+\frac{p+1}{p+\frac{p+1}{p+\dots}}} = \dots \equiv \mathbf{1}\cdot$$

Приняв практически любое начальное значение $x$, включая комплексное число, путем многократного применения рекурсии $x = \frac{p+1}{p+x}$ в результате получается единица с заданной степенью точности (округления).

**1.2.** В свое время (1985) G.Lord [12] решил элегантную задачу эффективного представления $n$-й степени константы золотого сечения в виде непрерывной цепи, содержащей числа Люка $L_n$:

$$\Phi^n = L_n - \frac{(-1)^n}{L_n -} \; \frac{(-1)^n}{L_n -} \dots$$

как корень квадратного уравнения для степени числа Ф

$$x^2 - L_n x + (-1)^n = 0 \quad \rightarrow \quad x = L_n + \frac{(-1)^n}{x};$$

$$x = \Phi^n = L_n - \frac{(-1)^n}{L_n - \frac{(-1)^n}{L_n - \dots}} \approx 1{,}618^n$$

К этой форме можно легко прийти [13], если вспомнить красивую аналитическую формулу Бернулли–Бине для чисел Люка $L_n = \Phi^n + (-\Phi)^{-n}$ и теорему Виета о сумме и произведении корней квадратного уравнения.

Допустимо также ввести дополнительный коэффициент пропорциональности $p$. – Кстати, не обязательно положительный.

Задавшись, например, парой корней $\lambda_{1,2} = p \cdot \left\{\Phi^n,\ (-\Phi)^{-n}\right\}$, приходим к характеристическому уравнению:

$$x^2 - pL_n x + (-1)^n p^2 = 0,$$

где $L_n$ – числа Люка ($n$ = 0, 1, 2 ...): 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29 ... – двучленно-аддитивная последовательность Фибоначчи $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ с начальными условиями $(L_0, L_1) = (2,\ 1)$.

Итак, получаем бесконечное множество квадратных уравнений общего вида, дающих не только степени золотой константы $\Phi^{\pm n}$, но также их пропорциональное изменение, включая масштабирование (усиление или ослабление), за счет параметра $p$.

Отсюда становится понятным происхождение в уравнении квадрата $p^2$, – в результате произведения корней, имеющих один и тот же коэффициент пропорциональности.

Если $p$ – целое число, то квадратное уравнение имеет целочисленные коэффициенты.

Полученное соотношение вполне подходит под категорию обобщенного квадратичного уравнения (модели) золотого сечения <второго порядка>.

Именно уравнения! Никакого обобщения самого ЗС здесь, конечно, нет и в помине.

При желании степени образуемых корней $\Phi^{\pm n}$ можно назвать «семейством степеней золотой константы».

Это по-настоящему *обобщенная модель золотого сечения*. Она имеет множество вариаций. Но все они – суть золотой константы $\Phi$.

Терминологически ничего не нарушено.

Никаких своеволий или искусственности.

Числа Люка можно также определить для отрицательных индексов по формуле

$$L_{-n} = (-1)^n L_n: \quad \ldots\ 18, -11, 7, -4, 3, -1, 2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18\ \ldots$$

В общем случае с учетом знака при коэффициенте имеем две пары корней

$$x^2 \pm L_n x + (-1)^n = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -\Phi^n, & (-1)^{n+1}\phi^n, \\ (-1)^n\phi^n, & \Phi^n \end{cases}, \qquad \phi = \Phi^{-1} \approx 0{,}618\,.$$

Примеры решений:

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \Phi^2 \approx 2{,}618; \qquad x^2 - 4x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \Phi^3 \approx 4{,}235;$$

$$x^2 - 7x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \Phi^4 \approx 6{,}854; \qquad x^2 - 11x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \Phi^5 \approx 11{,}090;$$

$$x^2 + 7x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -\phi^4 \approx -0{,}146; \qquad x^2 + 11x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \phi^5 \approx 0{,}090\,.$$

Рассмотренная форма квадратного уравнения с числами Люка позже была обобщена [14] для последовательности $w(a_1, a_2; p, q)$ согласно квадратному уравнению общего вида и произвольным начальным условиям $(a_1, a_2)$. – Естественно, без какого-либо обобщения золотой пропорции.

**1.3.** Рассмотренные золотоносные модели-триномы являются частными случаями более общей триномиальной структуры с целыми коэффициентами, которые равны отношениям чисел Фибоначчи:

$$x^k - \frac{F_{kn}}{F_n} x + (-1)^n \frac{F_{(k-1)n}}{F_n} = 0\ ,$$

$$n = 1: \qquad x^k - F_k x - F_{k-1} = 0, \qquad x = \Phi\,,$$

$$k = 2: \qquad x^2 - L_n x + (-1)^n = 0, \qquad x = \Phi^n,$$

с учетом начального значения $F_1 = 1$ и формулы удвоения $F_{2n} = F_n L_n$.

Величины $\frac{F_{kn}}{F_n}$, $\frac{F_{(k-1)n}}{F_n}$ – целые (табл. 2).

*Таблица 2*

**Алгебраические триномы – носители золотой константы**

| $n$ | | Степень тринома $k$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | $\Phi$ | $x^2–x–1$ | $x^3–2x–1$ | $x^4–3x–2$ | $x^5–5x–3$ | $x^6–8x–5$ |
| 2 | $\Phi^2$ | $x^2–3x+1$ | $x^3–8x+3$ | $x^4–21x+8$ | $x^5–55x+21$ | $x^6–144x+55$ |
| 3 | $\Phi^3$ | $x^2–4x–1$ | $x^3–17x–4$ | $x^4–72x–17$ | $x^5–305x–72$ | $x^6–1292x–305$ |
| 4 | $\Phi^4$ | $x^2–7x+1$ | $x^3–48x+7$ | $x^4–329x+48$ | $x^5–2255x+329$ | $x^6–15456x+2255$ |
| 5 | $\Phi^5$ | $x^2–11x–1$ | $x^3–122x–11$ | $x^4–1353x–122$ | $x^5–15005x–1353$ | $x^6–166408x–15005$ |
| 6 | $\Phi^6$ | $x^2–18x+1$ | $x^3–323x+18$ | $x^4–5796x+323$ | $x^5–104005x+5796$ | $x^6–1866294x+104005$ |

В частности, справедливы следующие соотношения [15]:

$F_{2n}/F_n = L_n$ – числа Люка, A000032;

$F_{3n}/F_n = a_n = L_{2n}+(-1)^n = 5F_n^2+3(-1)^n = 2a_{n-1}+2a_{n-2}-a_{n-3}$, A047946;

$F_{4n}/F_n = a_n = L_nL_{2n} = L_{3n}+(-1)^nL_n = 3a_{n-1}+6a_{n-2}-3a_{n-3}-a_{n-4}$, A083564;

$F_{5n}/F_n = L_nL_{3n}+1 = L_{4n}+(-1)^nL_{2n}+1 = 25\left[F_n^4+(-1)^nF_n^2\right]+5$, A103326;

$F_{6n}/F_n = L_nL_{4n}+L_n = L_{5n}+(-1)^nL_{3n}+L_n$;

$F_{7n}/F_n = L_nL_{5n}+L_{2n}+(-1)^n = L_{6n}+(-1)^nL_{4n}+L_{2n}+(-1)^n$;

$F_{8n}/F_n = L_nL_{6n}+L_{3n}+(-1)^nL_n = L_{7n}+(-1)^nL_{5n}+L_{3n}+(-1)^nL_n$.

В общем случае для ненулевых натуральных значений $k$, $n$ имеем формулу суммирования

$$\frac{F_{kn}}{F_n} = \sum_{j=0}^{(k-1)/2}(-1)^{jn}L_{(k-2j-1)n}\,.$$

Другие "золотые" вариации:

$$x^{2k} = x^k+1 \quad \rightarrow \quad x^k = \Phi\,;$$
$$x^{2k} = L_kx^k-(-1)^k \quad \rightarrow \quad x = \Phi\,.$$

Второе уравнение образуется из уравнения $z^2-L_kz+(-1)^k=0$ с корнем $z=\Phi^k$ путем замены $z=x^k$.

2. Повышение степени золотых триномов.

**2.1.** В уравнении золотой пропорции $x^2=x+1$ произведем ряд последовательных умножений на величину $x$ и выполним несложные замены $x^2$. В итоге получаем трехчленное уравнение высокой степени $k$ с коэффициентами – числами Фибоначчи:

$$\begin{cases} x^2 = x+1, \\ x^3 = x^2 + x = \ 2x+1, \quad \ldots \quad \Rightarrow \quad x^k = F_k x + F_{k-1}. \\ x^4 = 2x^2 + x = 3x+2, \end{cases}$$

Действительно, убедившись в правильности последнего соотношения для некоторых $k \geq 2$, по индукции устанавливаем его справедливость и при $k+1$:

$$x^{k+1} = F_k x^2 + F_{k-1} x = F_k (x+1) + F_{k-1} x = (F_k + F_{k-1}) x + F_k = F_{k+1} x + F_k .$$

По сути, это модель запаздывания и коэффициентами – числами Фибоначчи.

Эквивалентная рекурсия $a_n = F_{k+1} \cdot a_{n-k+1} + F_k \cdot a_{n-k}$ имеет аттрактор, равный положительному действительному корню тринома – константе золотого сечения Ф.

Последовательность формируется уже не по данным "вчера" – "сегодня", а на основе более поздней предыстории процесса. В результате скорость сходимость к аттрактору существенно уменьшается.

**2.2.** Аналогично можно показать "золотоносность" модели $x^k = F_k x^2 - F_{k-2}$.

Для этого уравнение $x^{k-2} = F_{k-2} x + F_{k-3}$ умножим на $x^2$ и преобразуем:

$$x^k = F_{k-2} x^3 + F_{k-3} x^2 = F_{k-2} \left(2x^2 - 1\right) + F_{k-3} x^2 = (2F_{k-2} + F_{k-3}) x^2 - F_{k-2} = F_{k-2} x^2 - F_{k-2} .$$

Допустим симбиоз бесконечного встроенного радикала и цепной дроби:

$$x^{k+1} = F_{k+1} x + F_k \quad \rightarrow \quad x^k = F_{k+1} + \frac{F_k}{x} \quad \rightarrow \quad x = \Phi = \sqrt[k]{F_{k+1} + \frac{F_k}{\sqrt[k]{F_{k+1} + \frac{F_k}{\sqrt[k]{F_{k+1} + \ldots}}}}} \approx 1{,}618 .$$

Числа Фибоначчи можно рассматривать и для отрицательных значений индекса, как двусторонне-бесконечный ряд, удовлетворяющий тому же рекуррентному соотношению.

При этом члены с отрицательными индексами легко получить путем обратного вычисления "назад" или $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$.

$$\begin{aligned} x^k &= F_k x + F_{k-1} \quad \rightarrow \quad -\phi,\ \Phi ; \\ x^{-k} &= F_k x \pm F_{k+1} \quad \rightarrow \quad \{-\Phi,\ \phi ;\ -\phi,\ \Phi\}. \end{aligned}$$

Например,

$$\begin{aligned} x^{-5} &= 5x+8 \quad \rightarrow \quad -\Phi,\ \phi ; \\ x^{-5} &= 5x-8 \quad \rightarrow \quad -\phi,\ \Phi ; \\ x^{6} &= 8x+5 \quad \rightarrow \quad -\phi,\ \Phi . \end{aligned}$$

В случае произвольного выбора-добавления коэффициентов, модель в общем случае не содержит константу золотого сечения Ф и терминологически переходит в категорию лженаучных ОЗС [3–5] – множества золотых сечений из страны абсурдистан – иронического названия гипотетического государства, в котором абсурдные вещи становятся нормой (Вацлав Гавел, первый президент Чехии).

Итак, принципиальное отличие между псевдонаучными «обобщенными золотыми сечениями» и обобщенными моделями золотого сечения заключается в следующем:

1. Золотое сечение – единственно. Одновременно в русскоязычной математике по иронии судьбы ЗС стало собственным именем константы $\Phi \approx 1.618$, которая априори не обобщается.
2. Модельные структуры ЗС могут составлять множество. Но все они приводят к целой степени константы $\Phi^k$, $|k| = 1, 2, 3, \ldots$

**Золотая модель с внешними условиями.**

В нашей работе [16] изложены основы нового подхода к обобщению задач, приводящих к уникальной константе ЗС.

Впервые для ЗС используется аддитивная модель с внешними условиями $g(n)$ в виде неоднородного уравнения $f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = g(n)$, характерного для открытых систем.

Для сходимости модели к золотому аттрактору $\Phi$ функция $g(n)$ не должна расти со скоростью, превышающей скорость увеличения степенной функции $\Phi^n$.

"Перебить" золотой аттрактор можно лишь такой функцией, возрастание которой происходит быстрее, чем $\Phi^n$.

Например, добавление степенной функции $g(n) = g^n$ может "сломать" золотой аттрактор $A$, если основание $g > \Phi$:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + g^n \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \Phi, & g \le \Phi, \\ A = g, & g > \Phi. \end{cases}$$

То есть золотой аттрактор $\Phi$ сменяется на аттрактор $g$.

Другими словами, двучленно-аддитивная рекурсия $f_n$ стремится к своему аттрактору золотого сечения Ф, если "мощность" обмена-взаимодействия $g(n)$ системы с окружающей средой не превышает $\Phi^n$.

В данном контексте, влияние функции $g(n)$ в золотой модели напоминает действие вируса. Сначала иммунитет работает, и модель не замечает его присутствия, настраиваясь на волну своего "кровного" аттрактора Ф.

По мере того, как вирус набирает силу, модель перестраивается и перестает быть золотой.

**Степенное направление развития модели ЗС.**

Если взять за основу модель золотого сечения $x^2 = x + 1$ и придать ей динамику развития, то можно выйти на самые различные уровни, вплоть до алгебраического уравнения общего вида. Понятно, что от самой структуры ЗС, не говоря уже о константе золотого сечения Ф, при этом остаются "рожки да ножки".

Усложнять алгебраическую модель ЗС можно разными путями-способами. Один из них заключается в наращивании целой степени многочлена, оставляя по-прежнему три члена, как и в квадратном уравнении [17].

Изменять порядок модели можно двояко: относительно правой или левой частей.

1) Пусть переменная равна отношению целого к части $x = 1/a$.

Тогда имеем $(1/a)^{m-1} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{1-a} = \dfrac{1}{1/a - 1}$ или $x^{m-1} = \dfrac{1}{x-1}$, откуда получаем триномиальное уравнение с сохранением "связки" старших степеней $x^m = x^{m-1} + 1$.

При этом часть целого равна $a_x = x^{-1}$, изменяясь от 0,5 до 1 (рис. 1).

2) Пусть переменная равна отношению частей $z = a/b$. Тогда имеем $(a/b)^{m-1} = \dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a/b+1}{a/b}$ или $z^{m-1} = \dfrac{z+1}{z}$, откуда получаем триномиальное уравнение с сохранением "связки" младших степеней $\left(z^1,\ z^0\right) = (z,\ 1)$ или двучленно-аддитивную модель с запаздыванием (задержкой) $z^m = z+1 \ \leftrightarrow\ z_n = z_{n-m+1} + z_{n-m}$.

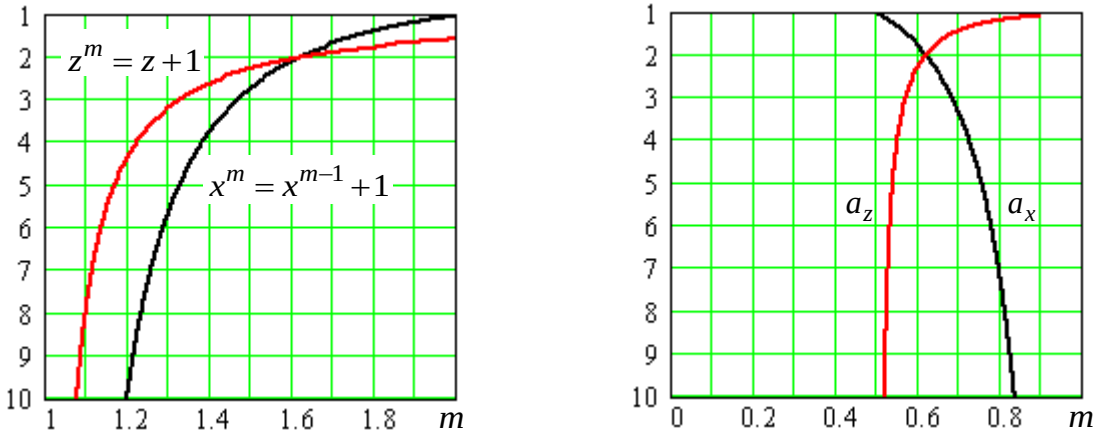



Рис. 1. Корни триномиальных полиномов для степенного развития модели золотого сечения и одна из двух соответствующих частей целого

При этом часть целого равна $a_z = z(1+z)^{-1}$, изменяясь от 1 до 0,5.

В частности, трином $z^3 = z+1$ и эквивалентная ему рекурсия $z_n = z_{n-2} + z_{n-3}$ – дают последовательность Падована.

Формально-триномиальная модель $x^m = x^{m-1}+1$ имеет широчайший спектр неординарных проявлений. От обычного деления пополам ($m = 1$) – через золотое сечение ($m = 2$), два минимальных числа Пизо – до условно-божественной модельной структуры ($m \to \infty$) с единицей-константой «Я есмь всё»:

$x = 2$, $\quad f_n = 2 f_{n-1}$ – деление пополам;

$x^2 = x+1$, $\quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ – кроличий ряд Фибоначчи с золотым аттрактором $\Phi \approx 1{,}618$;

$x^3 = x^2+1$, $\quad f_n = f_{n-1} + f_{n-3}$ – коровья последовательность Нараяна с аттрактором $\approx 1{,}466$;

$x^4 = x^3+1$, $\quad f_n = f_{n-1} + f_{n-4}$ – второе наименьшее число Пизо $\rho_2 \approx 1{,}380$;

$x^5 = x^4+1$, $\quad f_n = f_{n-1} + f_{n-5}$ – наименьшее число Пизо $\rho_1 \approx 1{,}325$;

……..

$x^k = x^{k-1}+1$, $\quad f_n = f_{n-1} + f_{n-k} \equiv 1$, $\quad k \to \infty$ – модельная структура единичного абсолюта.

Триномиальная модель старших охватывает жизненно-важные конструкции биологического деления пополам и золотой пропорции, которая, в частности, наблюдается в филлотаксисе растений.

Трином содержит два наименьших числа (константы) Пизо, степени которых «почти целые» и наиболее пригодны в качестве иррациональных оснований систем счисления.

Наконец, трином старших степеней включает в себя бесконечный единичный абсолют, что допускает концепцию-интерпретацию божественной гипотезы.

На наш взгляд, эти представления выделяют суть главных свойств триномов старших степеней, в отличие от искусственных терминологических наслоений-золочений, которые больше подходят на анекдотическую тезу: «куры передохли, высылайте новый телескоп»…

**Степенное золотоподобное разбиение единицы.**

Золотое сечение – это, по сути, арифметическое разбиение единицы на сумму числа и его квадрата $y^2 + y = 1$.

Или после замены: $x = 1/y \quad \Rightarrow \quad x^2 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

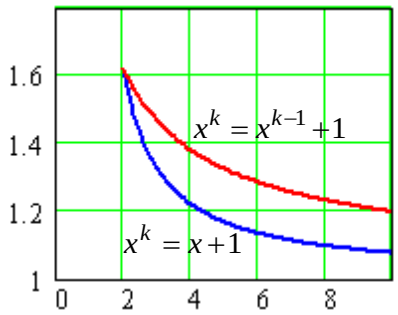


Рис. 2. Корни степенных триномов

В такой интерпретации естественным расширением структуры становятся такие варианты на основе трехчленов (триномов, рис. 2):

- единица как сумма числа и его *k*-й степени – уже известный нам трином старших степеней (относительно переменной $x$)

$$y^k + y = 1, \quad x = 1/y, \quad x^k = x^{k-1} + 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-k};$$

- единица в виде суммы двух соседних степеней числа – трином с запаздыванием

$$y^k + y^{k-1} = 1, \quad x = 1/y, \quad x^k = x + 1, \quad f_n = f_{n-k+1} + f_{n-k}.$$

Оба варианта допускают образование бесконечных вложенных радикалов, только относительно разных переменных, соответственно:

$$y^k = 1 - y \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt[k]{1 - \sqrt[k]{1 - \sqrt[k]{1 - \dots}}};$$

$$x^k = x + 1 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[k]{1 + \sqrt[k]{1 + \sqrt[k]{1 + \dots}}}.$$

**Модель *k*-боначчи.**

Деление отрезка единичной длины на две части $1 = a + b$ в золотом отношении имеет вид

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{b} \quad \text{или} \quad \frac{1}{a} = \frac{a}{1-a}.$$

Для деления на две части эти записи эквивалентны. Что-то похожее на взгляды пессимиста и оптимиста: стакан наполовину пустой или стакан наполовину полный.

Однако в своём развитии деления отрезка на три и больше составляющих изначально равнозначные пропорции приводят уже к различным моделям.

В частности, это зависит от того, что используется в качестве завершающего элемента: завершающий элемент $a$ или отклонение $1-b$ первого элемента от целого 1.

Что одинаково для двух частей целого, становится различным при делении на количество частей, большее двух.

Так, при делении единичного целого на три части $1 = a + b + c$ можно образовать две различные структуры:

$$x = \frac{1}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{1-a-b} \quad \Rightarrow \quad x^3 = x^2 + x + 1 \quad \text{– модель трибоначчи;}$$

$$x = \frac{1}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{1-a} \quad \Rightarrow \quad x^3 = x^2 + 1 \quad \text{– трином двух старших степеней.}$$

В первом случае завершающим элементом пропорции является последняя часть $c$, во втором – отклонение от целого первой части $a$.

В обоих случаях длины составляющих частей равны $(a, b, c) = \left(\lambda^{-1},\ a^2,\ 1-a-b\right)$, где λ – наибольший корень соответствующего алгебраического уравнения.

Формальное алгебраическое расширение-развитие ряда Фибоначчи и эквивалентного ему аналогу в виде золотого сечения по пути наращивания количества аддитивных слагаемых приводит к модели $k$-боначчи:

$$x^k = x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots 1 .$$

Рекуррентный аналог имеет вид:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + \ldots + f_{n-k} .$$

Последний член также равен $f_{n-k} = f_{n-k-1} + f_{n-k-2} + \ldots + f_{n-2k}$ и т.д.

Суммируя, получаем

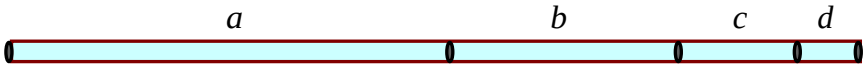
$$f_n = \sum_{j-1,\ j\neq 0\,(\mathrm{mod}\,k)}^{\infty} f_{n-j} .$$

Соответственно система $k$-боначчи легко идентифицируется (квалифицируется) нами как *задача о крайнем и* $(k-1)$ *средних отношениях*: целое так относится к первому, как оно ко второму, которое, в свою очередь, – к третьему … и так далее до последнего <отрезка>:

$$x = \frac{1}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \ldots = \frac{h}{1-a-b-c-\ldots-h} \quad \Rightarrow \quad a^k + a^{k-1} + \ldots + a = 1$$

$$x = \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad x^k = x^{k-1} + \ldots + x + 1 -$$ модель $k$-боначчи.

Например, для четырех отрезков $k = 4$ расположение трех точек деления приобретает вид (задача о крайнем и трех средних отношениях):




И так далее до бесконечности. В пределе $k \to \infty$ имеет место типичная дихотомия $\sum_k 2^{-k} = 1$ или задача «о крайнем и бесконечном количестве средних отношений».

При этом каждые два соседних отрезка относятся в соотношении $1:2$.

Характеристическое уравнение $k$-боначчи легко приводится к триному [11].

Достаточно сначала умножить на $x$:

$$x^{k+1} = x^k + \left(x^{k-1} \ldots + x^2 + x\right) = x^k + \left(x^k - 1\right) = 2x^k - 1,$$

затем разделить на $x^k$:

$$x = 2 - x^{-k} \quad \Rightarrow \quad x + x^{-k} = 2 .$$

Таким образом, модель сводится к простому и наглядному правилу:

сумма величины и ее обратной $k$-й степени равна двум.

Или среднее арифметическое величины и ее обратной $k$-й степени равно единице.

В части общности моделей *k*-боначчи и золотого сечения, то она буквально "генетическая" [11].

Это, пожалуй, самое правильное и логически выверенное расширение модели, органически следующее за золотой пропорцией. Причем, не выходя за пределы планиметрии. Понятно, что никакого золота в решении нет и близко. – Ни по наличию константы ЗС, ни по названию в контексте ОЗС.

**Заключение.**

Формальное расширение модели ЗС "развивает" ее отдельные стороны. Причем весьма замечательно. При этом могут теряться или "размазывать" свою эффектность другие отличительные свойства.

Эти свойства "растворяются" так, что золотоносные качества блекнут. Образуемые модели уже никак не тянут на характеристику обобщения ЗС, попросту теряя и не развивая многие полезные свойства ЗС.

Вероятно, эта способность золотого сечения еще раз подтверждает его уникальность.

Все другие развития-расширения, вплоть до алгебраического уравнения общего вида, имеют право на существование в качестве основообразующих структур. Но никакого отношения к ЗС уже не имеют. Ни по содержанию, ни по терминологии обобщения.

Всевозможные расширения на частные случаи алгебраического уравнения общего вида, конечно, можно транспонировать на модель ЗС с отражением её отдельные свойства. Только методологически это ничего не дает.

**Литература:**

1. Селегин Р.П. О соотношении гармонии и математики, или о чём спорят А.П. Стахов и С.Л. Василенко (заметки на полях) // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.23936, 09.11.2017. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163487.htm.

2. Горский Д.П. Вопросы абстракции и образование понятий. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 352 с.

3. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа // Украинский математический журнал. – 2004, т. 56, № 8, 1143–1150 / АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17008, 21.11.2011. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322039.htm.

4. Сороко Э.М. Золотые сечения, процессы самоорганизации и эволюции систем: введение в общую теорию гармонии систем: 4-е изд. – М.: Кн. дом Либроком, 2012. – 264 с.

5. Коновалов А.А. Обобщенные золотые сечения и их проявления в природных системах // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16980, 14.11.2011. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322030.htm.

6. Василенко С.Л. Научная балда // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 04.09.2011. – https://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11333.html // Математич. и историч. исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.09.2011. – https://www.artmatlab.ru/articles.php?id=48&sm=2.

7. Аракелян Г. О мировой гармонии, теории золотого сечения и её обобщениях // АТ. – М.: Эл. № 77-6567,публ.17064, 06.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322065.htm.

8. Василенко С.Л. Квазизолотая пропорция в структурированных системах // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16054, 30.08.2010. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161694.htm.

9. Василенко С.Л. Так такового золотого сечения в природе нет // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 29327, 28.01.2025. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009b/02321337.htm.

10. Василенко С.Л. Триномиальные аналогии с золотым сечением // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 31.05.2014. – https://www.artmatlab.ru/articles.php?id=115&sm=2.

11. Василенко С.Л. Фантомы золотого сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 01.07.2012. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=77&sm=2.

12. Lord G. B-530, 531. Problems Solved // The Fibonacci Quarterly, **23.3** (1985), 280–281. – https://www.fq.math.ca/Scanned/23-3/elementary23-3.pdf.

13. Василенко С.Л. Реструктуризация золотого сечения: от частного к общему // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17556, 03.07.2012. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161975.htm.

14. Shannon A.G., Horadam A.F. Generalized Fibonacci Continued Fractions // The Fibonacci Quarterly, **26.3** (1988), 219–223. – https://www.fq.math.ca/Scanned/26-3/shannon.pdf.

15. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS) / Founded in 1964 by N.J.A. Sloane. – http://oeis.org/.

16. Василенко С.Л. Новые рекуррентные формы золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16997, 18.11.2011. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322035.htm / Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 20.11.2011. – https://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11534.html.

17. Василенко С.Л. Триномы старших степеней: от деления пополам и золотого сечения – до модели единичного абсолюта // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 07.06.2015. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/15014.html / АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 21966, 09.04.2016. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162924.htm.

© Василенко, 2025
Харьков, Украина