С.Л. Василенко

Золотой калейдоскоп. Часть 8. Место встречи изменить нельзя...

Недавно исполнилось 45 лет криминальной драме «Место встречи изменить нельзя» (ноябрь, 1979). Название характеризует твердую договоренность о встрече в определенном месте, как символ надежности, преданности и даже трагизма человеческих отношений.

Действия картины происходили в августе–ноябре 1945 года в послевоенной Москве.

Фильм снят по сюжету романа братьев Вайнеров «Эра милосердия», – именно такой один из персонажей Бомзе видит грядущую эпоху в истории человечества. С осязаемой связью с ноосферным мышлением и нравственностью, основанной на золотом правиле:

не делайте другим то, что вы не желаете для себя,
и поступайте (*делайте*) с другими так, как хотели бы, чтобы с вами поступили.

Золотое правило нравственности, как основополагающий мировой этический принцип и/или общефилософский, политико-правовой и моральный закон обозначил-утвердил ещё Христос в нагорной проповеди: «Итак, во всем, как хотите, чтобы с вами поступали люди, так поступайте и вы с ними, ибо в этом закон и пророки» (Мф. 7:12).

В китайской философии, в частности у Конфуция, золотое правило сводится к простым словам: взаимность и любовь к ближнему.

В похожих формах-вариациях встречается в трудах древнегреческих мыслителей.

Первый аспект золотого правила – *не делай так* – правило справедливости; второй аспект – *делай так* – правило милосердия (по В.С. Соловьеву).

Милосердие тесно связано с золотым правилом жизни и глубоко ассоциируется с математическим "золотым сечением" (ЗС).

Сохранение многообразия жизни на Земле в гармонии с природой теоретик ноосферизма А.И. Субетто обозначает, как ноосферное милосердие.

Эра милосердия придет не раньше, чем мы будем к ней готовы. Она наступит, когда люди станут жить не по блатным понятиям, а по законам божьего разумения (Г.А. Вайнер)

Однако важная мысль об эре милосердия почти полностью ушла из фильма.

«Милосердие не поповский инструмент, а та форма взаимоотношений, к которой мы все стремимся» (Бомзе), что мило сердцу, мило<u>сть</u> серд<u>ца</u>.

«И как хотите, чтобы с вами поступали люди, так и вы поступайте с ними» (Лк. 6:31).

Религиозно-философский опыт сконцентрировался в христовых заповедях из нагорной проповеди в виде девяти евангельских заповедей о блаженствах.

Блаженны (счастливы) (Мф. 5:3-10): 1) нищие духом, 2) плачущие, 3) кроткие, 4) алчущие и жаждущие правды, 5) милостивые, 6) чистые сердцем, 7) миротворцы, 8) изгнанные за правду, 9) вы, когда будут поносить вас и гнать и всячески неправедно злословить за Меня. Пятая заповедь (в новом русском переводе: блаженны милосердные, потому что и к ним будет проявлено милосердие) является наиболее призывной и важной.

Без милосердия каждый из нас остается без надежды.

Не случайно говорят: надежда умирает последней, – dum spiro, spero.

Структурно заповеди вписываются в «магическое число семь плюс-минус два» – кошелек или правило американского ученого-психолога Миллера [1, с. 564-581] – закономерность, согласно которой кратковременная человеческая память, как правило, не может запомнить и повторить более 7 ± 2 элементов.

Итак, два фундаментальных добродетелей, два уровня морали: золотое правило как этика справедливости и заповедь любви как этика милосердия [2]. Они хорошо транспонируются на математику золотого отношения (*golden ratio*), где всё гармонично, выверено и достаточно просто. Хотя в природе ЗС не очень на виду, и возможно, скрывает свои «тайны за *семью* печатями» либо сильно подавляется флуктуирующими шумами.

1. Задача на движение по дороге.

Помните школьные математические задачки на движение? – Многие из них начинаются словами: «Из пункта A в пункт B (from A to B) ...».

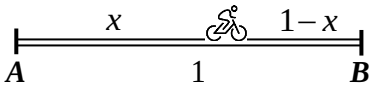
Далее в разных интерпретациях подключаются всевозможные объекты: велосипедисты и мотоциклисты, автомобили, поезда, самолеты, ракеты...

И даже тараканы с мухами.

Между тем, во всех этих задачах сокрыто золотое отношение (golden ratio).

Выберем велосипед – экологически чистый и полезный для здоровья вид транспорта.

Итак, из пункта A в пункт B выехал велосипедист.



Двигаемся по дороге, и сравниваем отношения путей-расстояний:

- весь путь между пунктами / удаленность от пункта A (пройденный путь);
- удаленность от пункта A / удаленность от пункта B.

В определенный момент времени эти отношения однозначно становятся равными:

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x} \;\rightarrow\; x^2=1-x \quad\rightarrow\quad x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\phi=\Phi^{-1}\approx 0{,}6180\,.$$

Для поиска решений подобных задач полезно применение графиков [3].

Графические и геометрические методы показывают характер изменения переменных и делают решение наглядным, прозрачным, а потому более понятным.

Кроме того, во многих задачах не так просто найти ответ алгебраическим путем.

В нашем случае решение достаточно простое (рис. 1).

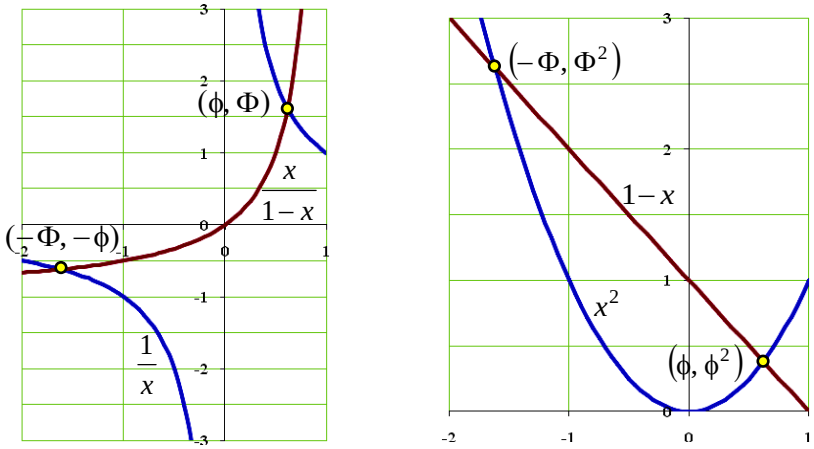


Рис. 1. Золотоносное решение задачи о велосипедисте

Заметим, что оно также содержит отрицательное значения аргумента, которое выводит велосипедиста за пределы интервала [0, 1] и приводит к понятию «деления единичного отрезка внешним образом».

На рисунке 2 приведены графические золотоносные решения [4], которые демонстрируют в разных вариантах золотоносные встречи-пересечения прямых с разомкнутыми кривыми-кониками в виде парабол и гипербол.

Что и говорить, просто и со вкусом.

Остается только облачить графические результаты в приятные кулинарные формы.

Мы же двигаемся дальше...

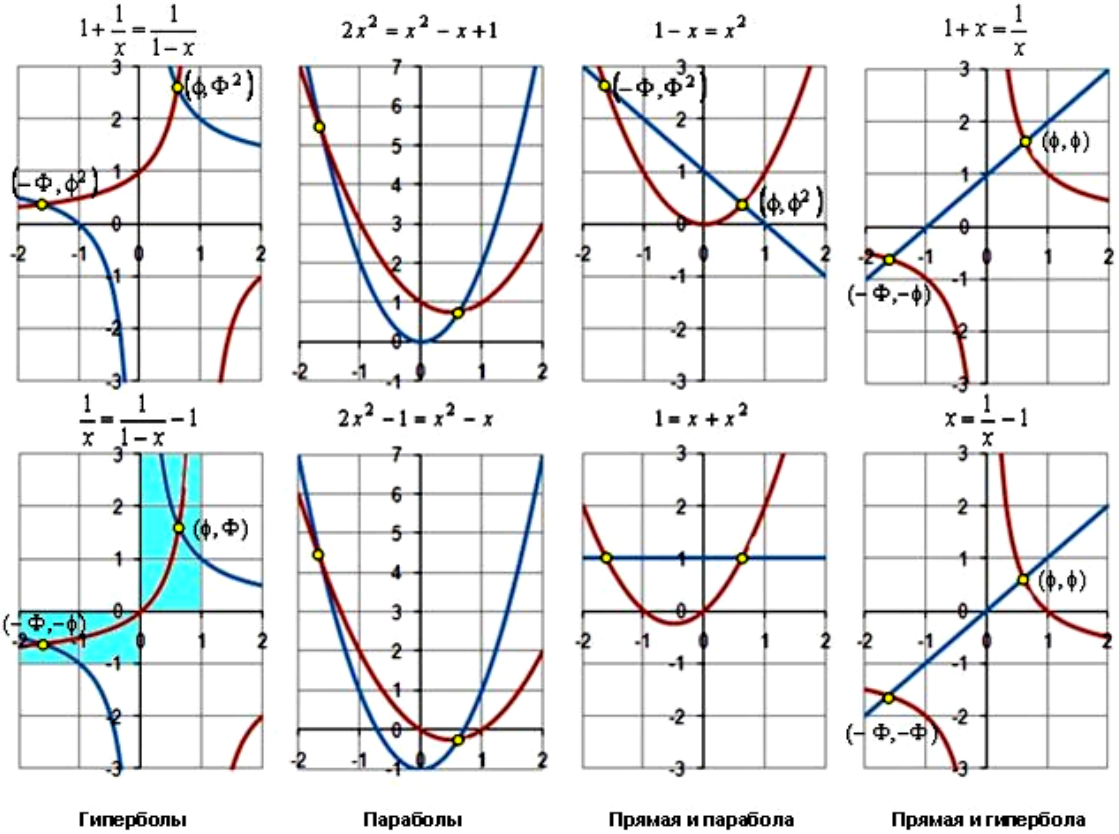


Рис. 2. Золотоносные решения при "встрече-пересечении" прямых, парабол и гипербол

2. Гипербола, косинус и ЗС.

В геометрии известна общая проблема контактного числа K_n (*Kissing number* – числа поцелуев) – определения наибольшего количества непересекающихся единичных $(n–1)$-мерных сфер, которые могут касаться центральной единичной сферы в n-мерном евклидовом пространстве.

Задачу можно также рассматривать как упаковку сфер в сферическом пространстве или локальный аналог упаковки сфер в евклидовом пространстве.

На сегодня математически доказаны точные значения таких контактных чисел:

$$K_1 = 2, \quad K_2 = 6, \quad K_3 = 12, \quad K_4 = 24, \quad K_8 = 240, \quad K_{24} = 196560.$$

Для остальных n пока определены нижние и верхние оценки K_n.

К слову, недавно [5] были улучшены нижние границы для чисел $K_{17} \div K_{21}$, которые держались почти 60 лет! Видимо, в этом и состоит общая тенденция постепенного сужения границ с перспективой точного решения для 5-го и 6-го порядков: $K_5 = 40 \div 44$, $K_5 = 72 \div 77$.

Обратимся к более простой задаче двумерного "целования" функций: сдвинем по оси x функцию косинуса $\cos x \to \cos(x-c)$ так, чтобы она коснулась гиперболы $1/x$ (рис. 3).

В точке касания значения функций, а также их производных, равны между собой:

$$\begin{cases} 1/x = \cos(x-c) \\ -1/x^2 = -\sin(x-c) \end{cases} \quad \left| \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \right| \Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} = 1, \quad x^4 - x^2 - 1 = 0, \quad x = \sqrt{\Phi};$$

$$\cos(x-c) = \frac{1}{x}, \quad \sqrt{\Phi} - c = \arccos\frac{1}{\sqrt{\Phi}}, \quad c = \sqrt{\Phi} - \arccos\sqrt{\phi}, \qquad 0 < x < 2\pi.$$

Уравнение касательной: $f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=-\frac{1}{\Phi}\left(x-\sqrt{\Phi}\right)+\frac{1}{\sqrt{\Phi}}=-\phi\,x+2\sqrt{\phi}$.

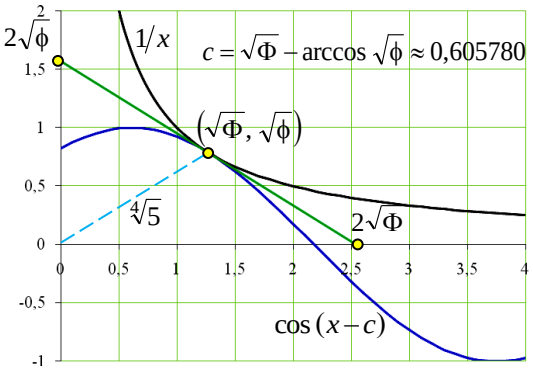


Рис. 3. Место "встречи-поцелуя" косинусоиды и гиперболы

Как видим, точка встречи функций обуславливает присутствие золотой константы Φ.

При этом длина радиус-вектора равна $\sqrt{\phi+\Phi}=\sqrt[4]{5}\approx 1{,}4953$.

Число $c=\sqrt{\Phi}-\arccos\sqrt{\phi}\approx 0{,}605780$ представлено в сетевой энциклопедии целочисленных последовательностей [6].

3. Максимальный угол обзора.

Некоторые "недоброхоты" частенько и поделом нарекают ЗС "нежизнеспособным" в контексте отсутствия практического выхода, в частности, реализации на физическом уровне.

Отчасти они правы. Но не стоит судить так строго.

Например, в пяти частях нашей многоплановой работы «Деление пополам и золотая пропорция» [7] рассматривались прикладные физические задачи по механике, электромагнетизму, теории относительности и др.

Разберем ещё один, весьма показательный пример.

Пусть на высоте h вертикальной оси находится глаз наблюдателя (рис. 4-а).

На горизонтальной оси даны две точки $a<b$ соответственно под углами $\alpha<\beta$.

Отрезок $b-a$ виден под углом обзора $\theta=\beta-\alpha$.

Очевидно, что в крайних точках наблюдателя ($h\to 0,\ h\to\infty$) угол обзора $\theta\to 0$.

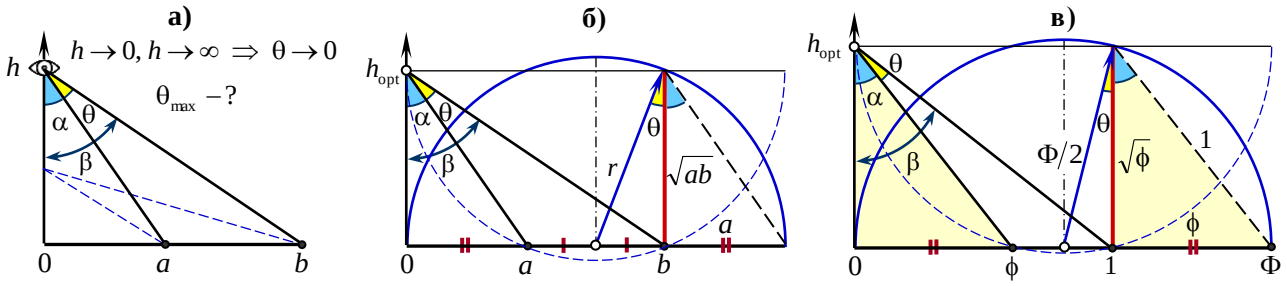


Рис. 4. Оптимальный угол обзора или расходимости:
а) общий вид; б) геометрическое построение; в) пример с золотым отношением

Найдем оптимальную высоту h_{opt} с максимальным углом обзора или углом расходимости θ_{max}, который также связан с углом рассеивания от источника света.

Используем тригонометрическое свойство монотонного возрастания тангенса угла в диапазоне от 0 до 90 градусов.

Наибольшему углу $\theta = \beta - \alpha$ соответствует наибольший тангенс этого угла:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \frac{b/h - a/h}{1 + b/h \cdot b/h} = (b-a)\frac{h}{ab + h^2} = f(h).$$

Приравняем нулю производную функции $f(h)$ и определим искомые параметры:

$$f'(h) = (b-a)\frac{ab - h^2}{(ab + h^2)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad h_{opt} = \sqrt{ab}, \quad \theta_{max} = \operatorname{arctg}\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}.$$

Таким образом, угол обзора максимален с высоты, равной среднему геометрическому двух отрезков a и b.

Для геометрического способа построения среднего геометрического двух длин (отрезков) нужно (рис. 4-б):

- от точки b достроить отрезок длиной a;
- на сумме двух отрезков построить полуокружность как на диаметре;
- из точки b восстановить перпендикуляр до пересечения с окружностью.

Высота прямоугольного треугольника, вписанного в полуокружность – это среднее геометрическое из отрезков, на которые она разбивает гипотенузу.

Радиус $r = (a+b)/2$ – среднее арифметическое отрезков.

Золотое отношение в явном виде отсутствует, но можно привести характерный пример, как частный случай с малой золотой константой (рис. 4-в):

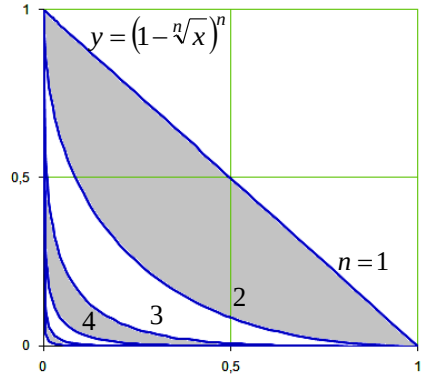
$$\underline{b = 1}, \quad a = \phi \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg}\theta_{max} = \frac{\sqrt{\phi^3}}{2}, \quad \theta_{max} \approx 13{,}65^{\circ};$$

$$a = \phi^2 \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg}\theta_{max} = \frac{1}{2}, \qquad \theta_{max} \approx 28{,}65^{\circ}.$$

Как видим (рис. 4-в), образуется неповторимый прямоугольный треугольник Кеплера с уникальной геометрической пропорцией сторон $(1 : \sqrt{\phi} : \phi)$.

4. Площадь "зебры" между кривыми Ламе.

Чередующиеся рисунки белых и темных полос зебры способствуют терморегуляции, а также отпугивают докучливых насекомых, особенно мух цеце, которые, как правило, не любят садиться на полосатые поверхности, что связано с разной поляризацией света и изменением отражательной способности.



Кривая Ламе (G. Lame, 1818) – плоская алгебраическая кривая, уравнение которой в декартовых прямоугольных координатах имеет вид $\left(\frac{x}{a}\right)^q + \left(\frac{y}{b}\right)^q = 1$. В частности, q = 2 – эллипс, q = 2/3 и $a = b$ – астроида и т.д.

Рассмотрим случай $a = b = 1,\ q = 1/n$ и найдем суммарную площадь закрашенной области "зебры" между кривыми Ламе $\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y} = 1, \quad x, y \geq 0, \quad n \in N$: между первой и второй, третьей и четвертой и так далее [8].

Выразим из уравнения $y = (1 - \sqrt[n]{x})^n$ и вычислим площадь, заключенную между n-й кривой и осями координат:

$$S_n = \int_0^1 \left(1-\sqrt[n]{x}\right)^n dx = \left\| \begin{array}{c} x = t^n \\ dx = nt^{n-1}dt \end{array} \right\| = n\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^n\,dt\,.$$

Далее определяем суммарную площадь S закрашенной области "зебры" (с заменой местами знака интеграла со знаком суммирования, дифференцированием в формуле геометрической прогрессии, заменой переменных):

$$S = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}S_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^1 n\,t^{n-1}(1-t)^n\,dt = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n\,t^{n-1}(1-t)^n\,dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{-t}\sum_{n=1}^{\infty} n\underset{q}{[-t(1-t)]^n}dt = \left\| \left(1+\sum_{n=1}^{\infty}q^n\right)' = \left(\frac{1}{1-q}\right)' \to \sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2} \right\| = \int_0^1 \frac{1-t}{[1+t(1-t)]^2}dt =$$

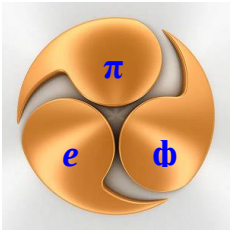
$$= \left\| u = t-\frac{1}{2} \right\| = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1/2-u}{\left(5/4-u^2\right)^2}du = \underset{\text{четная}}{\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1/2}{\left(5/4-u^2\right)^2}du} - \underset{\text{нечетная,=0}}{\int_{-1/2}^{1/2} \frac{u}{\left(5/4-u^2\right)^2}du} = \int_0^{1/2} \frac{du}{\left(5/4-u^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{4\sqrt{5}}{25}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{5}\left(1+\frac{4}{\sqrt{5}}\ln\Phi\right).$$

Итак, в окончательной формуле просматривается пятый порядок, а результат содержит логарифм золотой константы Ф.

Что с этим делать, честно говоря, пока не знаем. Разве что, бросаем ещё одну золотую монетку в общую копилку золотоносных свойств-проявлений в математике.

5. Вот и встретились три одиночества – три замечательных числа.



Мы уже обращались к теме о взаимосвязи троицы-триады базовых математических констант ПЕФ = (π, *e*, Ф), например, в работе [9].

Особо подчеркивалось, что они разноплановые: первые два трансцендентны, третье – целое алгебраическое, как положительный корень тринома $x^2 - x - 1$ с целыми коэффициентами.

Поэтому точные аналитические формулы связи между ними установить невозможно, разве что какие-либо приближенные равенства.

Строгие математические соотношения $F(\pi, e, \Phi) = 0$ можно образовать лишь на уровне предельных отношений: через ряды, непрерывные дроби, бесконечные суммы или интегралы. Тогда они выглядят точно, элегантно, достоверно и теоретически осмысленно.

Исследуем на сходимость "фаршированный" ряд [10]: $\sum_{n\ge 1} a_n$ с оценкой параметров $a_n = \dfrac{H_n n^{\pi}\pi^n n!}{F_n n^n}$ и частичных сумм $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Действительно, "фарш" ещё тот: гармонические числа $H_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$, числа Фибоначчи $F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ F_0 = 0,\ F_1 = 1$; степенная n^{π} и показательная π^n функции, факториал $n!$

Вдобавок знаменатель в последовательности a_n содержит n^n.

Но результат-"котлетка" того стоит...

Наличие факториала и/или функции n^n дают подсказку использовать признак сходимости числовых рядов Даламбера для положительных членов ряда $a_n > 0$:

- если $A = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд сходится;
- если $A > 1$, то ряд расходится;
- при $A = 1$, сходимость неизвестна.

Запишем известные свойства чисел:

$$H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} \;\rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{H_{n+1}}{H_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{H_n\,(n+1)}\right) = 1; \;\; \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi\,.$$

Вычислим предел отношения соседних членов ряда:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{H_{n+1}(n+1)^{\pi}\pi^{n+1}(n+1)!}{F_{n+1}(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{F_n n^n}{H_n n^{\pi}\pi^n n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{H_{n+1}}{H_n}\dfrac{F_n}{F_{n+1}}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\pi}\dfrac{\pi^{n+1}}{\pi^n}\dfrac{(n+1)!}{n!}\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}{\underset{1}{}\;\underset{1/\Phi}{}\;\underset{1}{}\;\underset{\pi}{}\;\underset{n+1}{}} = \frac{\pi}{\Phi}\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{\pi}{\Phi}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)^n} = \frac{\pi}{e\,\Phi} \approx 0{,}714.$$

Таким образом, сумма ряда сходится $A_{\infty} \approx 39420$, а члены a_n при $n \to \infty$ стремятся к 0.

Место встречи обусловлено тремя замечательными константами (π, e, Φ) и "обустроено" пределом ... в бесконечности (рис. 5). – С оценочно-эмоциональной коннотацией на эру милосердия и ноосферу [11], как гипотетическую точку омега наивысшего сознания при эволюции биосферы.

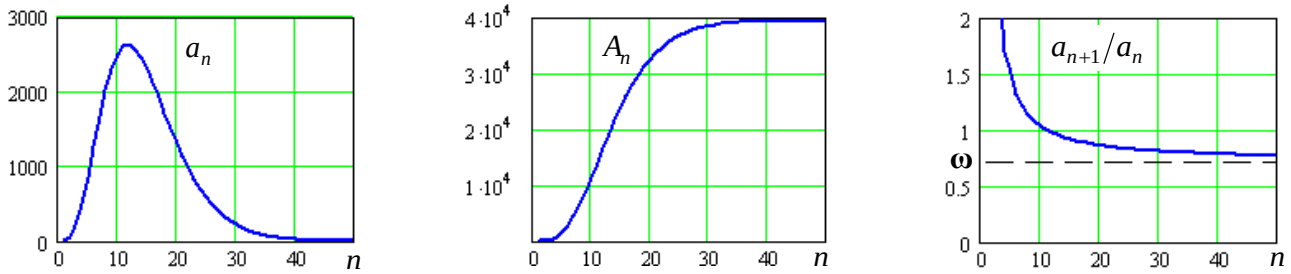


Рис. 5. Параметры "фаршированного" ряда a_n с предельным отношением

$\omega = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\pi}{e\,\Phi}$ на основе триады базовых математических констант ПЕФ = (π, *e*, Φ)

6. Предел с константой золотого отношения Ф.

В работе [12] изложен подход к вычислению предела числовой последовательности в виде корня *n*-й степени чисел Фибоначчи $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{F_n}$ с использованием теорем о пределе среднеарифметических и среднегеометрических значений последовательности действительных чисел, а также теоремы Шольца – дискретного аналога правила Лопиталя (см. приложение 1).

Наиболее эффективный способ, на наш взгляд, состоит в вычислении предела с применением известной формулы Бине, которая выражает в явном виде числа Фибоначчи F_n и Люка L_n как функцию от номера n:

$$F_n = \frac{\Phi^n - (-\phi)^n}{\sqrt{5}}, \qquad L_n = \Phi^n + (-\phi)^n;$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{F_n} = \lim_{n\to\infty} F_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\Phi^n - (-\phi)^n}{\sqrt{5}}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\Phi^n}{\sqrt{5}}\right)^{1/n} = \frac{\Phi^1}{\sqrt{5}^{1/n}} = \Phi;$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{L_n} = \lim_{n\to\infty} L_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\Phi^n + (-\phi)^n\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\Phi^n\right)^{1/n} = \Phi.$$

7. Знаковые суммы с числами Фибоначчи и Люка.

7.1. С помощью формулы Бине можно определить некоторые знаковые суммы, например, для действительного параметра $t > \Phi$:

$$S_F(t) = \sum_{n\ge 0} \frac{F_n}{t^n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n\ge 0} \frac{\Phi^n - (-\phi)^n}{t^n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n\ge 0} \left(\frac{\Phi}{t}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n\ge 0} \left(\frac{-\phi}{t}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\Phi/t} - \frac{1}{1+\phi/t}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{t}{t-\Phi} - \frac{t}{t+\phi}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{t^2 + \phi t - t^2 + \Phi t}{t^2 + t\phi - t\Phi - \phi\Phi}\right) = \left\| \begin{matrix} \phi + \Phi = \sqrt{5} \\ \phi - \Phi = -1 \end{matrix} \right\| = \frac{t}{t^2 - t - 1}.$$

$$S_L(t) = \sum_{n\ge 0} \frac{L_n}{t^n} = \sum_{n\ge 0} \frac{\Phi^n + (-\phi)^n}{t^n} = \sum_{n\ge 0} \left(\frac{\Phi}{t}\right)^n + \sum_{n\ge 0} \left(\frac{-\phi}{t}\right)^n = \frac{1}{1-\Phi/t} + \frac{1}{1+\phi/t} = \frac{2t^2 - t}{t^2 - t - 1}.$$

В частности, $S_F(2) = 2,\ S_L(2) = 6$.

Значения сумм особенно интересны для параметров $t = 10^s$: $10, 100, 1000, \ldots$

Их записи в десятичной форме содержат последовательные числа Фибоначчи и Люка, пока те не станут больше величины *t* (далее порядок цифр нарушается):

$$S_F(100) = \frac{100}{9899} = \underset{F_0}{0,}\underset{F_2}{01}\underset{F_3}{02}\underset{F_4}{03}\underset{F_5}{05}\underset{F_6}{08}\underset{F_7}{13}\underset{F_8}{21}\underset{F_9}{34}\underset{F_{10}}{55}\underset{F_{11}+1}{90}\ldots$$

$$S_L(100) = \frac{19900}{9899} = \underset{L_0}{2,}\underset{L_1}{01}\underset{L_2}{03}\underset{L_3}{04}\underset{L_4}{07}\underset{L_5}{11}\underset{L_6}{18}\underset{L_7}{29}\underset{L_8}{47}\underset{L_9+1}{76}\ldots$$

$$S_F(1000) = \frac{1000}{998999} = \underset{F_0}{0,}\underset{F_1}{001}\underset{F_2}{001}\underset{F_3}{002}\underset{F_4}{003}\underset{F_5}{005}\underset{F_6}{008}\underset{F_7}{013}\underset{F_8}{021}\underset{F_9}{034}\underset{F_{10}}{055}\underset{F_{11}}{089}\underset{F_{12}}{144}\underset{F_{13}}{233}\underset{F_{14}}{377}\underset{F_{15}}{610}\underset{F_{16}+1}{988}\ldots$$

$$S_L(1000) = \frac{1999000}{998999} = \underset{L_0}{2,}\underset{L_1}{001}\underset{L_2}{003}\underset{L_3}{004}\underset{L_4}{007}\underset{L_5}{011}\underset{L_6}{018}\underset{L_7}{029}\underset{L_8}{047}\underset{L_9}{076}\underset{L_{10}}{123}\underset{L_{11}}{199}\underset{L_{12}}{322}\underset{L_{13}}{521}\underset{L_{14}+1}{844}\ldots$$

7.2. В ряде публикаций [13, 14] вычислены суммы вида $\sum \frac{1}{F_{an+b} + c}$, $\sum \frac{1}{L_{an+b} + c}$ для определенных значений параметров *a*, *b*, *c*.

Среди них можно выделить следующие формы:

$$\sum_{n\ge 0} \frac{1}{F_{2an+b} - L_a/\sqrt{5}} = \frac{1}{F_a\left(a^{b-a} - 1\right)},\ a \text{ – четное, } b \text{ – нечетное;}$$

$$\sum_{n\ge 0} \frac{1}{L_{2an+b} - \sqrt{5}F_a} = \frac{1}{L_a\left(a^{b-a} - 1\right)},\ a \text{ – нечетное, } b \text{ – четное;}$$

и в частности, такие знаковые суммы:

$$\sum_{n\ge 0}\frac{1}{F_{2n+1}\pm 3/\sqrt{5}} = \pm 1;$$

$$\sum_{n\ge 0}\frac{1}{L_{2n}+\sqrt{5}} = \phi = \Phi^{-1};$$

$$\sum_{n\ge 0}\frac{1}{L_{2n}-\sqrt{5}} = \sum_{n\ge 0}\frac{1}{F_{4n+1}-3/\sqrt{5}} = -\Phi^{2};$$

$$\sum_{n\ge 1}\frac{1}{L_{2n}-\sqrt{5}} = \Phi, \quad \sum_{n\ge 1}\frac{1}{L_{2n}+\sqrt{5}} = \phi^{2}.$$

Приложение 1

Нахождение предела числовой последовательности в виде корня *n*-й степени чисел Фибоначчи (по работе [12])

Найдем предел числовой последовательности в виде корня *n*-й степени чисел Фибоначчи

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{F_n} = \lim_{n\to\infty} F_n^{1/n};\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ F_0 = 0,\ F_1 = 1.$$

1) Пусть некоторая последовательность действительных чисел x_n имеет предел L, тогда среднеарифметическое значение этих чисел также сходится к этому пределу:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \ \to\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = L.$$

Действительно, по теореме Штольца

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1} - S_n}{(n+1)-n} = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = L.$$

2) Пусть некоторая последовательность положительных действительных чисел $y_n > 0$ имеет предел L, тогда среднегеометрическое значение этих чисел также сходится к этому пределу:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = L \ \to\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_1\cdot\ldots\cdot x_n} = L$$

Составим последовательность $x_n = \ln y_n$ (логарифм – функция непрерывная). Тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\ln y_n = \ln\lim_{n\to\infty} y_n = \ln L \ \to$$

$$\ln L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln y_1 + \ln y_2 + \ldots + \ln y_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(y_1\cdot y_2\cdot\ldots\cdot y_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{y_1\cdot y_2\cdot\ldots\cdot y_n} = \ln\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{y_1\cdot y_2\cdot\ldots\cdot y_n} \ \to\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{y_1\cdot y_2\cdot\ldots\cdot y_n} = L.$$

3) Для некоторой последовательности положительных действительных чисел $z_n > 0$, следующие пределы, если они существуют, равны между собой:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{z_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{z_{n-1}}.$$

Составим последовательность $y_1 = z_1,\ y_2 = z_2 / z_1,\ \ldots,\ y_n = z_n / z_{n-1}$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{z_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{y_1\cdot y_2\cdot\ldots\cdot y_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{z_1\cdot\frac{z_2}{z_1}\cdot\ldots\cdot\frac{z_n}{z_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{z_n}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{F_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi \approx 1,6180$.

To be continued...

Литература:

1. Инженерная психология. Сборник статей. Пер. с англ. – Москва: Прогресс, 1964. – 694 с. – https://www.ebbinghaus.ru/wp-content/uploads/2010/02/Miller_564-580.pdf / Miller G.A. The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information / *Psychological Review*, 1956, *63*(2), 81-97. – https://psychclassics.yorku.ca/Miller/.

2. Березина Е.М. Милосердие и справедливость: сопряженность смыслов / / Вестник Челябинского гос. ун-та. – 2012. – №. 18 (272). – С. 108-113.

3. Альтшулер Л. Графики в текстовых задачах // Квант. – 2011. – №. 1. – С. 48-51. – https://kvant.mccme.ru/pdf/2011/01/altshuler.pdf.

4. Василенко С.Л. Золотая пропорция в гиперболической интерпретации Ткаченко // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 26912, 14.01.2021. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00164602.htm.

5. Henry Cohn, Anqi Li. Improved kissing numbers in seventeen through twenty-one dimensions / Cornell University, 07.11.2024. – https://arxiv.org/abs/2411.04916.

6. On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS). – https://oeis.org/A196625.

7. Василенко С.Л. Деление пополам и золотая пропорция:

часть 17, физические задачи: механика // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28531, 03.07.2023. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165358.htm;

часть 18, физические задачи: механика, маятники и гармонические колебания // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28550, 20.07.2023. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165372.htm;

часть 19, физические задачи: механика (продолжение) // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28571, 02.08.2023. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165380.htm;

часть 20, физические задачи: теория относительности // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28633, 15.09.2023. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165415.htm;

часть 21, физические задачи: электромагнетизм // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28646, 25.09.2023. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165421.htm.

8. Площадь зебры между кривыми Ламе / Hmath, 15.02.2025. – https://www.youtube.com/watch?v=K8774nozTXI.

9. Василенко С.Л. Трио базовых математических констант ПЕФ = (π, e, Ф): кривые второго порядка и интегральный подход // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 29019, 18.06.2024. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165622.htm.

10. Сходимость ряда: вездесущий признак Даламбера / Hmath, 02.04.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=aqH3DyLGBrs.

11. Пьер Тейяр де Шарден. Феномен человека: Пер. с фр. – М: Прогресс, 1965. – 296 с. – https://psylib.org.ua/books/shard01/index.htm.

12. Три теоремы о пределах + предел с корнями чисел Фибоначи / Hmath, 10.01.2021. – https://www.youtube.com/watch?v=BTz_imkh41Q.

13. Feng-Zhen Zhao. Notes on Reciprocal Series Related to Fibonacci and Lucas Numbers / The Fibonacci Quarterly, **37.3** (1999), 254-257. – https://www.fq.math.ca/Scanned/37-3/zhao.pdf.

14. Backstrom R. On Reciprocal Series Related to Fibonacci Numbers with Subscripts in Arithmetic Progression / The Fibonacci Quarterly, **19.1** (1981), 4-21. – https://www.fq.math.ca/Scanned/19-1/backstrom.pdf.

© ВаСиЛенко, 2025
Украина, Харьков