С.Л. Василенко

Золотой калейдоскоп. Часть 6. Многоликая единица, золотая теорема, "круговая порука" геометрических фигур

«Время рассеклось на "до и после". Увы, не золотым сечением.
Бифуркация рвет по живому целое, трансформируя его в черно-белый калейдоскоп ужасов и водоворот мук.
Раскалываются кингстоны. Горят предохранители.
Глохнут моторы... И только вороны хаотично тренькают в колокола.
Пространство скукоживается. Абсурдистан возвеличивается.
Единичная истина нивелируется. Нас всех просто тошнит...»
Антиутопия «2202–2022»

Примерно так может начинаться современное изложение апокалипсиса и крушение некогда целого, символизируемого единицей и связанной с нею золотой пропорцией...

Возникновение понятия, которое сегодня именуется золотым сечением (ЗС), а точнее – золотым отношением (*golden ratio*), исторически связано с пропорцией (отношениями) частей объекта, процесса или величины, которые обычно отражаются в категории некоторого целого и представляются единицей. Это придает математической константе ЗС четкую обоснованность, ясное понимание и геометрическое толкование.

Размышляя над воззрениями древнегреческого философа Протагора, можно сказать, что по отношению к общему единичное является мерой всех вещей.

Хотя в оригинале: «Человек есть мера всех вещей: существующих, что они существуют, и не существующих, что они не существуют» (Платон, «Теэтет», 152а).

При всех элементах софизма не следует забывать, что именно Протагор образовал дискуссионное поле и наметил полемические тональности Сократу, Платону, Аристотелю и многим другим великим мыслителям.

Начало физической единичности – материя.

Числовая единица – абстракция в чистом виде.

Не все единичные вещи возникают необходимо, некоторые происходят случайно.

Единичные вещи могут быть ничтожны.

Но все они потенциально бесконечны. Как незримое воплощение Логоса...

Многоликая единица.

1. В одном из диспутов ненавязчиво прозвучала весьма показательная и "дальнобойная" реплика Ю.Н. Забродоцкого: «Что за наука, если Ф·ф = 1 и то же как Ф – ф = 1. Умножение и вычитание дают одинаковый результат. Правильно так: Ф·ф = 1^2… Здесь нет никакой философии. Только констатация ложной аксиоматики даже в математике».

Примечание: Ф = $ф^{-1}$ – константа золотой пропорции.

2. Или другой "единичный" аспект, затронутый им на страницах АТ в статье с любопытным дидактическим названием «Слепым в назидание зрячим» [1]:

«Она <единица> нигде не заканчивается, ибо 1 = 1/1/1/1/... = 1·1·1·1·... Также, когда она минус единица».

Замечательно. – Немного слов, но с глубинным смыслом. Изменяется рефракция, усиливается дальнозоркость: «и слепой увидит <единицу> сквозь мрак и туман» (Ис. 29:18).

В основном, подмечено правильно. Только с минус единицей подобные вещи не столь очевидны и авансом не проходят!

Так, бесконечное произведение ряда чисел определяется как предел частичных произведений, и называется сходящимся, когда предел существует и не равен нулю.

Произведение «минус единиц» поочередно принимает значения ± 1, поэтому ряд не имеет предела в виде конечного значения и, следовательно, расходится.

То есть, в обычном понимании бесконечное произведение не равно ±1:

$$c = (–1)\cdot(–1)\cdot(–1)\cdot(–1)\cdot... \neq \pm 1,$$

в отличие, например, от бесконечно-растущего возведения в степень $(–1)^{(–1)\cdots} = –1$.

Тем не менее, расходящемуся ряду можно и весьма полезно назначить-присвоить (!) некоторое конкретное число [2]. Для этого в математике разработаны специальные методы регуляризации (Р.Абель, С.Рамануджан и др.), которые используются при решении физических задач. Суть регуляризации – "приручить" бесконечность и назначить-соотнести расходящемуся ряду определенное фиксированное значение.

Регуляризация бесконечного произведения «минус единиц» дает ноль!

Нестрогое доказательство

$$c := (–1)\cdot c \to c = – c \to c = 0\ (R).$$

Присвоение нулевого значения математически обоснованно, представляется вполне ожидаемым и разумным, поскольку является средней величиной из двух значений ±1, которые принимает ряд частичных произведений.

То же самое относится и к бесконечному делению «минус единиц».

Как говорил некогда футбольный комментатор, матч закончился со счетом "два – ноль": там ноль, и там ноль.

Или как отмечает сам автор [1]: «По первым слогам РАЗделить-УМмножить, можно образовать понятие РАЗУМ».

С простой арифметической параллелью: если убить убийцу, количество убийц (Y) не изменится (У.Черчиль) или "Y – 1 ≡ Y".

По первой части Забродоцкого, дабы не попадать в изощренный капкан, на который способна великая и многоликая единица, необходимо четко размежевывать сопоставление-уравнивание абстрактно-числовых выражений и величин, имеющих размерность, как в физике и/или геометрии.

Обычно это видно из контекста и специально не оговаривается.

а) Найти два <безразмерных> числа x и y такие, что $x\cdot y = 1$ и $x – y = 1$.

Решая уравнение $x^2 – x – 1 = 0$, получаем два пары чисел (x, y): (Ф, ф) и (–ф, –Ф).

Более того, единицу можно заменить любым положительным числом m:

$x\cdot y = x – y = m$ – (то есть "умножение и вычитание дают одинаковый результат m").

Тогда $x^2 – mx – m = 0$, откуда следует бесчисленное множество других решений, но уже отличающихся от золотой константы. Некоторые склонны считать данную операцию «обобщением золотого сечения (ЗС)». Увы, ошибочно и неразумно. Константа ЗС – единственна и неповторима в безбрежном океане всевозможных пропорций и сечений.

б) Для физических величин (например, в метрах) $x\cdot y \neq x – y$, то есть $м^2 \neq м$.

Чтобы их как-то сравнивать, разность можно возвести в квадрат, и рассматривать равновеликие фигуры: прямоугольник размером $x\times y$ и квадрат со стороной $x–y$.

Итак, найти две <размерные> величины $x > 0$ и $y > 0$ такие, что $x\cdot y = 1$ и $(x – y)^2 = 1$.

Решая уравнение $x^4 – 3x^2 + 1 = 0$, получаем пару величин (Ф, ф) > 0, но уже с принятой физической размерностью.

Как видим, математическая аксиоматика выдерживает испытание.

Легкая разминка.

Для разогрева другого полушария предложим характерные алгебраические выражения с квадратными и кубическими корнями, которые легко упрощаются с использованием золотой константы Ф:

1) $$x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{9}+\sqrt{15}}{\sqrt{1}+\sqrt{5}+\sqrt{12}}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)+\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)};$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\phi,\quad x=\frac{1}{\phi}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\underline{\Phi}.$$

2) $$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=\sqrt[3]{2\Phi+1}-\sqrt[3]{2\phi-1}=\sqrt[3]{\Phi^3}-\sqrt[3]{\phi^3}=\Phi-\phi=1.$$

3) $$x=\underline{\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}},\quad x>0,\quad \widehat{x}=\frac{1}{x}.$$

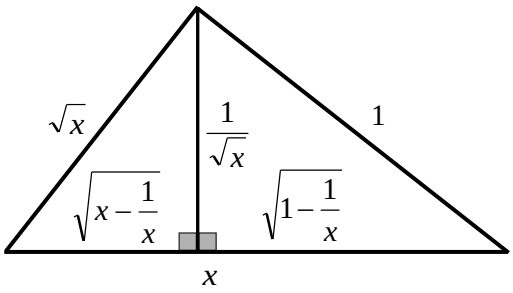
Умножим на разность корней и затем суммируем с исходным равенством:

$$x\left(\sqrt{x-\widehat{x}}-\sqrt{1-\widehat{x}}\right)=x-1;$$

$$\sqrt{x-\widehat{x}}-\sqrt{1-\widehat{x}}=1-\widehat{x}:$$

$$2\sqrt{x-\widehat{x}}=x-\widehat{x}+1;$$

$$\left(\sqrt{x-\widehat{x}}-1\right)^2=0,\quad \sqrt{x-\widehat{x}}=1,\quad x-\widehat{x}=1,\quad x^2-x-1=0,\quad x=\underline{\Phi}>0.$$



Последняя задача эффектно решается геометрически через треугольники. Сначала строим левый, затем к нему пристраиваем правый.

По условию основание равно x.

Поскольку площадь $S=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{x}$, то большой составной треугольник – прямоугольный, то есть $x^2=x+1\ \rightarrow\ x=\Phi$.

По сути, полученные параметры соответствуют золотоносному треугольнику Кеплера!

Перекличка веков и золотая теорема.

В теории чисел хорошо известна квадратичная теорема взаимности, построенная на основе непревзойденной единицы:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}=\begin{cases}1, & \textit{если}\ \ p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 4)\ \ \textit{или}\ \ q\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 4),\\ -1, & \textit{если}\ p\equiv 3\,(\mathrm{mod}\ 4)\quad \textit{и}\quad q\equiv 3\,(\mathrm{mod}\ 4),\end{cases}$$

где p и q – нечетные взаимно простые числа;

$\left(\frac{a}{p}\right)\equiv a^{\frac{p-1}{2}}\ (\mathrm{mod}\ p)$ и $\left(\frac{a}{p}\right)\in\{-1,\ 0,\ 1\}$ – явная форма символа Лежандра.

Теорему сформулировал Эйлер (1772, 1783). Доказал Гаус (1796, 1801), а позже он дал ещё шесть доказательств, основанных на различных идеях.

Напомним, сравнение двух целых чисел по модулю натурального числа m – математическая операция, позволяющая ответить на вопрос, дают ли два выбранных целых числа при делении на m (модуль сравнения) один и тот же остаток. Например, числа 32 и –10 сравнимы по модулю 7, так как оба числа при делении на 7 дают остаток 4.

В теории чисел это любимая теорема Гаусса, которую он назвал *золотой* (aureum theorema) [3]. – В этом он перекликается с замечательным ученым И.Кеплером, который

выделил «два сокровища в геометрии бесконечной полезности», уподобив теорему Пифагора – золоту, а задачу о крайнем и среднем отношении (сегодня – золотую пропорцию) сравнил с драгоценным камнем [4].

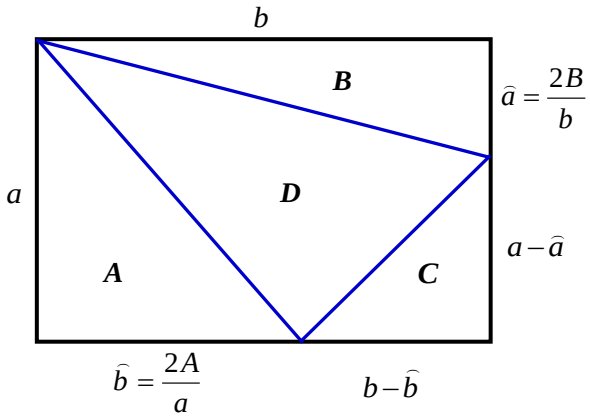
Одно из самых простых доказательств квадратичного закона взаимности дал российский математик Е.И.Золотарев (1872) [5, 6].

Без преувеличения можно обозначить монархические характеристики:

математика – царица наук;
арифметика – королева математики;
единица – королевская принцесса арифметики;
Гаусс – король математиков.

Треугольник в прямоугольнике (ЗС – частный случай).

В прямоугольник вписан треугольник с одной общей вершиной. Найдем его площадь *D*, если заданы площади окаймляющих треугольников *A*, *B*, *C* (рис. 1).



$$S=(A+B+C)+D=S_{ABC}+D$$

$$D=\sqrt{S_{ABC}^2-4AB}$$

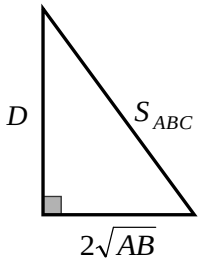
a – фиксируем, и находим отрезки :

$$b=\frac{S}{a},\quad \hat{b}=\frac{2A}{a},\quad b-\hat{b},\quad \hat{a}=\frac{2B}{b},\quad a-\hat{a}$$

Рис. 1. Треугольник в прямоугольнике

Обозначив стороны прямоугольника *a*, *b*, запишем равенство для площади треугольника *C*: $\left(a-\frac{2B}{b}\right)\left(b-\frac{2A}{a}\right)=2C$, которое приводится относительно площади прямоугольника $S=ab=(A+B+C)+D=S_{ABC}+D$ к квадратному уравнению $(S-2A)(S-2B)=2C\cdot S$ или $S^2-2S_{ABC}S+4AB=0$, откуда находим:

$$S=S_{ABC}+\underbrace{\sqrt{S_{ABC}^2-4AB}}_{=D}\quad\text{и}\quad D=\sqrt{S_{ABC}^2-4AB},$$



где $S_{ABC}=A+B+C$.

Таким образом, численные значения площадей соотносятся с длинами сторон прямоугольного треугольника.

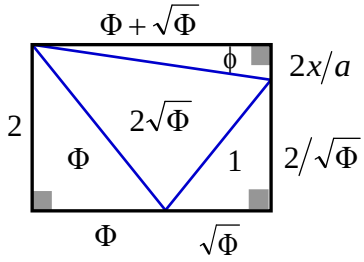
В частном случае площади могут составлять непрерывную пропорцию

$$\frac{D}{C}=\frac{C}{B}=\frac{B}{A}.$$

Приняв для определенности (без потери общности) A = 1, получаем геометрическую прогрессию со знаменателем q: $(A, B, C, D)=\left(1,\ q,\ q^2, q^3\right)$.

Тогда $q^3=\sqrt{\left(1+q+q^2\right)^2-4q^3}$, откуда численными методами находим $q\approx 1{,}4212111...$

Примеры:



1) $(A, B, C) = (\Phi, \phi, 1)$; $D = \sqrt{(\Phi + \phi + 1)^2 - 4\Phi\phi} = \sqrt{(2\Phi)^2 - 4} = 2\sqrt{\Phi}$;

$S = bc = (A + B + C) + D = 2\left(\Phi + \sqrt{\Phi}\right)$,

в частности, $b = 2$, $c = \Phi + \sqrt{\Phi}$.

Корень $\sqrt{\Phi}$:

– целое алгебраическое число степени 4 с минимальным полиномом $x^4 - x^2 - 1$;

– длина основания равнобедренного треугольника с наименьшим периметром, который описывает полуокружность единичного диаметра;

– гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ и $xy = 1$ пересекаются в точках $(c, 1/c)$ и $(-c, -1/c)$, $c = \sqrt{\Phi}$.

Константа $\Phi + \sqrt{\Phi}$ и ее обратная величина являются вещественными решениями уравнений $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$ и $x^2 - 2\Phi x + 1 = 0$.

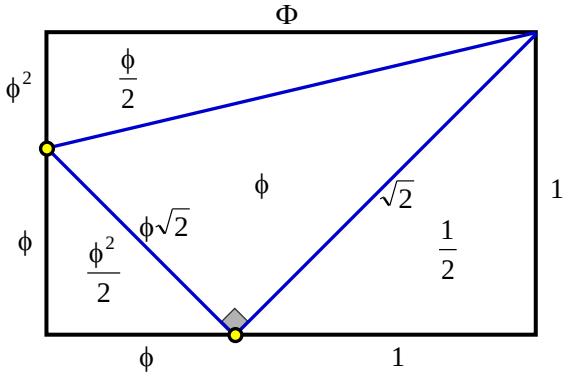
2) $A = B = C = \Phi$; $D = \sqrt{(3\Phi)^2 - 4\Phi^2} = \Phi\sqrt{5} = 1 + \Phi^2 = 2 + \Phi$;

$S = bc = 3\Phi + \Phi\sqrt{5} = \Phi\left(3 + \sqrt{5}\right)$, в частности, $b = 2$, $c = \left(3 + \sqrt{5}\right)/2$.

В правильном пятиугольнике, вписанном в единичную окружность, величина $\Phi\sqrt{5} = 2 + \Phi$ равна удвоенному наибольшему расстоянию между вершиной и серединой стороны.

Принятие условий $D^2 = S_{ABC}^2 - 4BC$, $\dfrac{C}{B} = \dfrac{B}{C} = \Phi$, $S_{ABC} = 1$ выводит нас на золотой прямоугольник размером $1 \times \Phi$, в котором его стороны делятся в золотом отношении вершинами вписанного треугольника (рис. 2).

Вписанный треугольник становится золотым прямоугольным.



$$D^2 = S_{ABC}^2 - 4BC$$

$$\frac{C}{B} = \frac{B}{C} = \Phi$$

$$S_{ABC} = 1$$

Рис. 2. Золотой прямоугольник с вписанным золотым прямоугольным треугольником

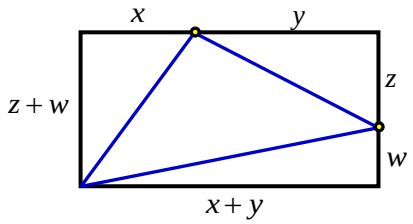
А теперь маленькая жемчужина геометрии с константой Φ в разбиении прямоугольника на треугольники [7].

В прямоугольник вписать треугольник такой, что после его удаления останется три треугольника одинаковой площади:

$$x(z + w) = w(x + y) = yz.$$

Из первого равенства следует $xz = wy$ или $z/w = y/x$, то есть стороны прямоугольника разделены в одинаковой пропорции.

Далее находим:



$$x=\frac{yz}{z+w},\qquad \frac{yz}{z+w}z=yw,\qquad z^2=w^2+zw;$$

$$\left(\frac{z}{w}\right)^2-\frac{z}{w}-1=0,\qquad \frac{z}{w}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi=\frac{y}{x}.$$

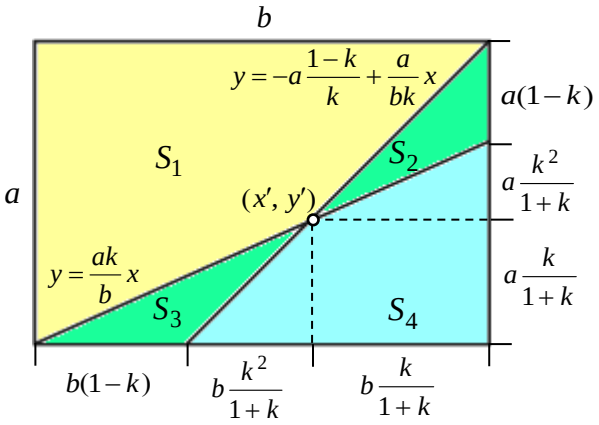
Золотая константа Ф воскресает, словно птица Феникс с золотисто-красным оперением!

Вроде и не было в задаче изначальной единицы и/или её характерного деления пополам, приводящего к величине $\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Тем не менее, число Ф – налицо.

Две секущие в прямоугольнике (ЗС – частный случай).

Из двух противоположных вершин прямоугольника $a\times b$ проведем две линии, которые отсекают на сторонах отрезки ak, bk с некоторым коэффициентом деления $k<1$.

Квадрат разбивается на 4 фигуры: 2 треугольника и 2 четырехугольника.



Найдем взаимосвязи размеров и площадей $S_1 \div S_4$,

В прямоугольной системе координат запишем уравнения секущих и найдем точку их пересечения (x', y'):

$$\frac{ak}{b}x=-a\frac{1-k}{k}+\frac{a}{bk}x\quad\Rightarrow\quad x'=\frac{1}{1+k}b,\qquad y'=\frac{k}{1+k}a.$$

Вычислим площади интересуемых треугольников:

$$S_2=\frac{a(1-k)\cdot(b-x')}{2}=\frac{ab}{2}\cdot k\frac{1-k}{1+k},\qquad S_3=\frac{b(1-k)\cdot y'}{2}=\frac{ab}{2}\cdot k\frac{1-k}{1+k},\qquad \underline{S_2=S_3}.$$

Площадь S_1 равна площади прямоугольной трапеции за вычетом S_3, площадь S_4 равна площади треугольника за вычетом S_3:

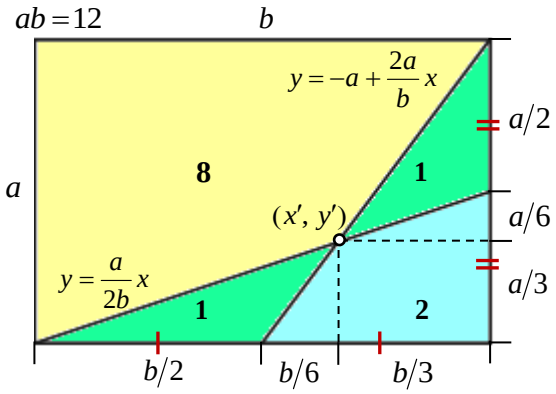
$$S_1=\frac{b(1-k)+b}{2}\cdot a-S_3=ab\cdot\frac{1}{1+k};$$

$$S_4=\frac{b\cdot ak}{2}-S_3=ab\cdot\frac{k^2}{1+k};\qquad \underline{S_4=k^2\cdot S_1}.$$

1) *Секущие делят стороны пополам,* $\underline{k = 0{,}5}$.

$$\frac{a}{2b}x = -a + \frac{2a}{b}x \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{2}{3}b, \quad y' = \frac{1}{3}a$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/12 \\ 1/12 \\ 1/6 \end{pmatrix} \cdot S \qquad ab = S = 12 \qquad \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

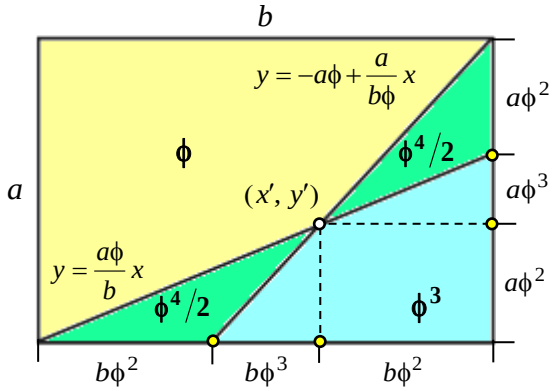


2) *Секущие делят стороны золотым сечением,* $\underline{k = \phi}$.

Точка пересечения $\left(x' = b\phi, \quad y' = a\phi^2\right)$ – также золотое сечение.

$$k = \phi \qquad \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi^4/2 \\ \phi^4/2 \\ \phi^3 \end{pmatrix} \cdot S, \qquad \frac{S_1}{S_4} = \Phi^2, \qquad \frac{S_4}{S_2 + S_3} = \Phi.$$

$$\phi + 2 \cdot \left(\phi^4/2\right) + \phi^3 = \phi + \phi^2 = 1$$



Далее перейдем к некоторым задачам, содержащим окружности, – под общим названием: «круговая порука» геометрических фигур.

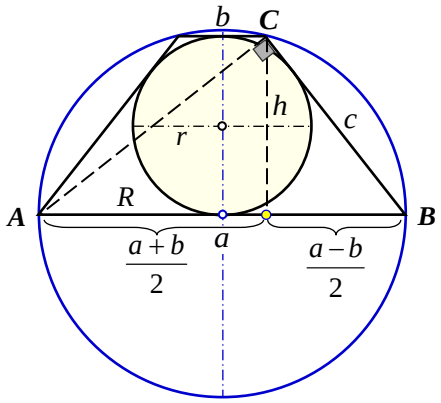
Разумеется, термин условный, больше для шутливо-иносказательного "разжижения" сухого изложения геометрических взаимосвязей-закономерностей.

Трапеция в круге и с вписанным кругом.

Четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда сумма двух его противоположных углов равна 180^o. – Значит, вписать в окружность можно только равнобедренную (равнобокую) трапецию.

Четырехугольник можно описать вокруг окружности тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны. – В этом случае для равнобокой трапеции боковая сторона c равна длине средней линии, то есть полусумме оснований $c=(a+b)/2$.

Пусть в окружность диаметром $D=2R$ вписана равнобочная трапеция с основаниями $a=D$ (на диаметре) и b, в которую вписана окружность диаметром $d=2r$.



Определим отношение этих диаметров.

Высота трапеции $h=\sqrt{ab}=d$.

Вычисляем отношение $\dfrac{D^2}{d^2}=\dfrac{a^2}{ab}=\dfrac{a}{b}$.

Из двух эквивалентных равенств (для квадрата высоты трапеции) находим:

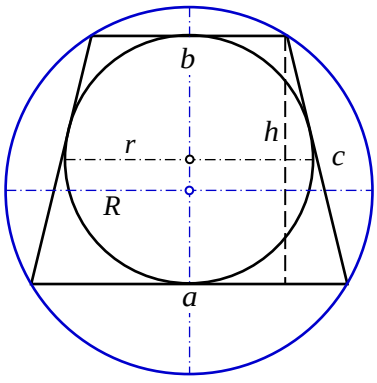
$$h^2=ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad\rightarrow\quad a^2-4ab-b^2=0;$$

$$a=2b+b\sqrt{5}=b\left(2+\sqrt{5}\right)=b\Phi^3, \qquad \underline{\left(\frac{D}{d}\right)^2=\Phi^3}.$$

Не ограничивая общности, примем единичный диаметр $d=a=1$.

Тогда $b=\Phi^{-3}=\phi^3$, $h=\sqrt{\phi^3}$, $c=\dfrac{a+b}{2}=\phi$, $\dfrac{a-b}{2}=\phi^2$, диагональ трапеции $AC=\sqrt{\phi}$, боковая сторона $c=BC=\phi$, $\Delta\, ABC$ – прямоугольный треугольник Кеплера.

Отношение оснований трапеции и площадей кругов $\dfrac{a}{b}=\dfrac{S_R}{s_r}=\Phi^3\approx 4{,}2361$.



Конечно это не единственная конфигурация, хотя и весьма примечательная. Например, положим $\dfrac{a}{b}=\Phi$.

Тогда с учетом общеизвестной формулы для диаметра описанной окружности $D=2c\sqrt{\dfrac{ab+c^2}{4c^2-(a-b)^2}}=1$ и принятого в данном частном случае равенства $c=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{a+a\phi}{2}=a\dfrac{\Phi}{2}$ определяем остальные параметры трапеции:

$$a=\frac{4}{\sqrt{7+9\Phi}}\approx 0{,}8614; \quad b=a\phi\approx 0{,}5324; \quad c=a\frac{\Phi}{2}\approx 0{,}6969; \quad h=d=a\sqrt{\phi}\approx 0{,}6772.$$

Соотношения имеют право жить.

Однако первый вариант с треугольником Кеплера, безусловно, более эффектный, и раскрывает-представляет "незатейливую" константу золотого сечения Ф во всей её замечательной математической красе.

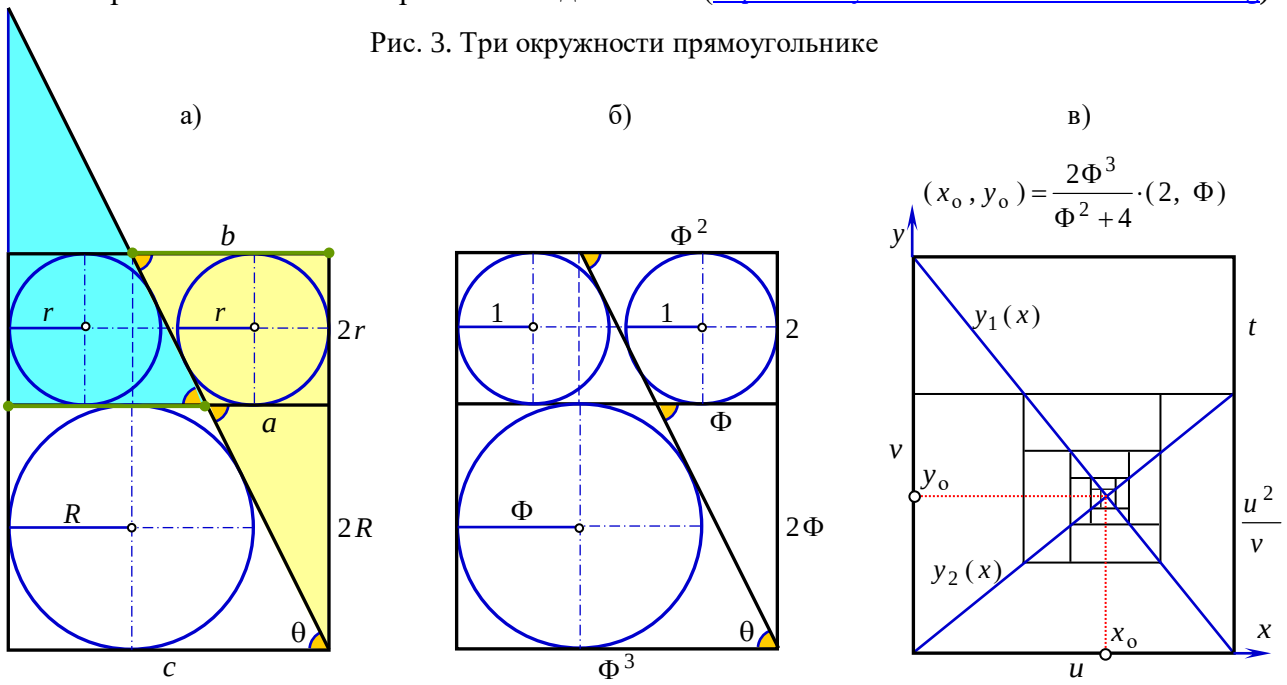
Три окружности в прямоугольнике.

Три окружности, две из которых одинаковые, вписаны в прямоугольник так, что касаются одной секущей (рис. 3-а).

Найти отношение радиусов R/r.

Перекликается с геометрической задачей 107 (https://www.youtube.com/watch?v=7EF1BTXsIdg).

Рис. 3. Три окружности прямоугольнике



Обозначим длину основания через c.

Продлим секущую до пересечения с продолжением боковой стороны прямоугольника.

Прямоугольные треугольники, выделенные цветом, имеют одинаковые углы и вписанные окружности, значит, они равны между собой и подобны треугольнику с основанием c, то есть их стороны и радиусы вписанных окружностей пропорциональны:

$$\frac{c}{R} = \frac{b}{r} \quad \rightarrow \quad c = bR/r\,.$$

В желтом треугольнике своя пропорция

$$\frac{2R}{a} = \frac{2R+2r}{b} \quad \rightarrow \quad a = \frac{bR}{R+r}\,.$$

Без потери общности положим $r = 1$. Из соотношения отрезков следует

$$a = c - b \quad \rightarrow \quad \frac{bR}{R+1} = \frac{bR}{1} - b \quad \rightarrow \quad \frac{R}{R+1} = R - 1 \quad \rightarrow \quad R^2 - R - 1 = 0\,.$$

Радиус равен константе золотого сечения.

Находим остальные параметры (рис. 3-б) и основную золотую пропорцию

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a} = \Phi\,.$$

Отношение сторон исходного прямоугольника составляет

$$\frac{2+2R}{c} = \frac{2(1+\Phi)}{\Phi^3} = 2\phi = \sqrt{5} - 1 \approx 1{,}236\,.$$

Пропорциональное урезание**.**

От большей стороны отрезать часть $t \times u$ так (рис. 3-в), чтобы оставшийся прямоугольник сохранил пропорциональность сторон:

$$\frac{v}{u} = \frac{u}{v-t} \quad \rightarrow \quad t = \frac{v^2 - u^2}{v}, \quad v - t = \frac{u^2}{v}.$$

Бесконечное продолжение данной операции против часовой стрелки с последовательным урезанием прямоугольников (сверху – слева – снизу – справа) стягивается в точку (x_o, y_o), лежащую на пересечении двух прямых:

$$y_1 = v - \frac{v}{u}\cdot x, \quad y_2 = \frac{u}{v}\cdot x, \quad y_1 = y_2 \quad \rightarrow \quad x_o = \frac{uv^2}{u^2+v^2}, \quad y_o = \frac{u^2 v}{u^2+v^2}.$$

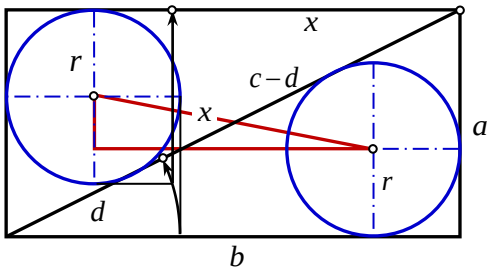
Таким образом, точка пропорционального схождения (полюс) имеет координаты

$$(x_o, y_o) = \frac{u\cdot v}{u^2+v^2}\cdot(v,\ u).$$

В нашем случае $(x_o, y_o) = \dfrac{\Phi^3 \cdot 2\Phi^2}{\Phi^6 + 4\Phi^4}\cdot\left(2\Phi^2,\ \Phi^3\right) = \dfrac{2\Phi^3}{\Phi^2+4}\cdot(2,\ \Phi) \approx (2.56,\ 2.07)$.

Две окружности в прямоугольнике.

Задача навеяна видео с частным примером (https://www.youtube.com/watch?v=YBLPzBuEaPc).
Прямоугольник разделим диагональю на два равных треугольника.
В каждый из них впишем окружность.



Диаметр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой $c = \sqrt{a^2+b^2}$ равен

$$d = a + b - c.$$

Расстояние между центрами окружностей

$$x = \sqrt{(a-d)^2 + (b-d)^2} = \sqrt{3c^2 - 2(a+b)c} = \sqrt{c^2 - 4rc} = \sqrt{(c-d)^2 - d^2}.$$

Из последнего равенства следует, что параметр x является также катетом прямоугольного треугольника $(d, x, c-d)$, который можно построить на стороне прямоугольника.

Например, для египетского треугольника

$$(a, b, c) = (3, 4, 5) \quad \Rightarrow \quad d = 2, \ x = \sqrt{5} = \phi + \Phi.$$

Полукруг в прямоугольнике.

В элементарной геометрии известна задача о прямоугольнике (наибольшей площади или наибольшего периметра), вписанного в полукруг.

Двойственная задача о полукруге, вписанном в прямоугольник, практически не востребована, что на наш взгляд, объясняется непростым построением.

Кроме того, полукруг вписывается не в любой прямоугольник, а только в такой, у которого большая сторона удовлетворяет неравенству $b \le a \le 2b$, то есть от квадрата – до прямоугольника с отношением сторон 1:2 (рис. 4).

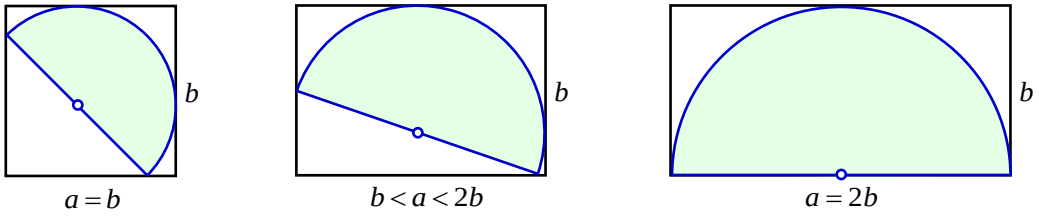


Рис. 4. Варианты расположения полукруга, вписанного в прямоугольник

Наш интерес связан, прежде всего, с золотой пропорцией, и попутно с геометрическим вписыванием полукруга, которое, как оказалось, не является тривиальным.

Но, как говорится, всё по порядку...

Рассмотрим прямоугольник и вписанный в него полукруг (рис. 5-а).

Соединим центр O с точками касания радиусами, к которым проведем перпендикуляры из концов диаметра. Выделенные цветом прямоугольные треугольники конгруэнтны (по углам и гипотенузе). По теореме Пифагора:

$$r^2 = (r-p)^2 + (r-q)^2 \quad \rightarrow \quad r = (p+q) + \sqrt{2pq}\,.$$

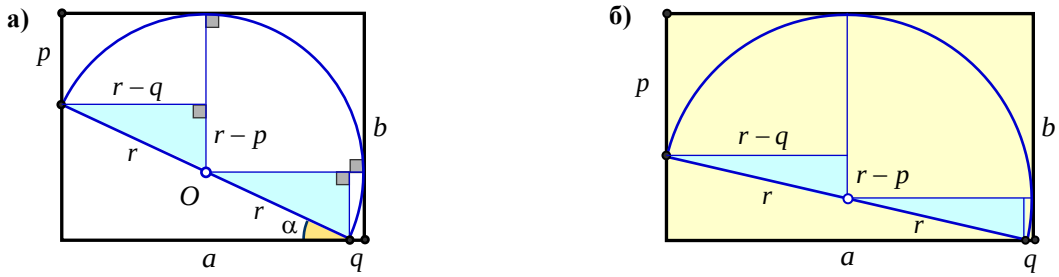


Рис. 5. Взаимосвязь параметров прямоугольника и вписанного в него полукруга:
а) общий случай; б) золотой прямоугольник

Длины сторон a, b связаны с отрезками p, q и радиусом r ($D = 2r$) равенствами:

$$a = 2(r-q) + q = 2r - q;$$

$$b = 2(r-p) + p = 2r - p;$$

$$a - b = p - q;$$

$$D = a + q = b + p.$$

Из прямоугольника полукруг высекает внизу прямоугольный треугольник, поэтому диаметр также равен $D = \sqrt{(b-p)^2 + (a-q)^2}$.

Приравнивая формулы для диаметра, определяем отрезки p, q и угол наклона α:

$$\sqrt{(b-p)^2+(a-q)^2}=a+q;$$
$$p^2-2(2a+b)p+(2a-b)^2=0;$$
$$p=2a+b-\sqrt{(2a+b)^2-(2a-b)^2}=b+2a-\sqrt{8ab};$$
$$q=p-(a-b)=a+2b-\sqrt{8ab};$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{b-p}{a-q}=\frac{\sqrt{ab}-a}{\sqrt{ab}-b}.$$

Алгебраически задача решена. – Зная стороны прямоугольника, находятся отрезки a, b, которые фиксируют концы диаметра, и радиусом r проводится полуокружность.

Попробуем установить некоторые пропорции.

1) Найдем условия, при которых выполняется равенство отношений $\frac{a}{b}=\frac{b}{p}$:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{b+2a-\sqrt{8ab}};$$
$$x=\frac{a}{b}=\frac{1}{1+2x-\sqrt{8x}} \quad\rightarrow\quad \left(2x^2+x-1\right)^2=8x^3;$$
$$4x^4-4x^3-3x^2-2x+1=0.$$

Уравнение разбивается на два квадратных уравнения с иррациональными коэффициентами:

$$2x^2-\left(1\pm\sqrt{8}\right)x+1=0;$$

$$x_{1,2}\approx\frac{1+2\sqrt{2}\pm\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{4},\ x_{3,4}\approx\frac{1-2\sqrt{2}\pm\sqrt{1-4\sqrt{2}}}{4} \quad\rightarrow\quad x=\frac{1+2\sqrt{2}+\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{4}\approx 1{,}60213.$$

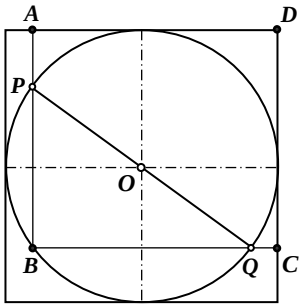
Как видим, пришлось решать непростое алгебраическое уравнение четвертой степени, а искомое отношение немного не дотягивает до константы золотого сечения.

2) Изменим условия, уменьшив знаменатель в пропорции за счет полученного выше равенства $p-q=a-b$, то есть, выполнив равенство отношений $\frac{a}{b}=\frac{b}{p-q}$:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{a-b},\quad x=\frac{a}{b}=\frac{1}{x-1},\quad x^2-x-1=0,\quad \underline{x=\Phi}.$$

На удивление, получилось достаточно просто.

Таким образом, пропорция $\frac{a}{b}=\frac{b}{p-q}=\Phi$ выполняется, если отношение сторон прямоугольника равно константе ЗС, то есть исходный прямоугольник – золотой (рис. 5-б).



Построение:

Задан круг, вписанный в квадрат.

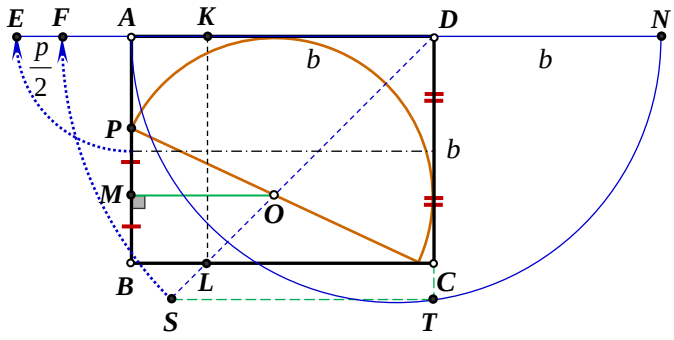
Из некоторой точки A квадрата восстанавливаем перпендикуляр $AB\perp AD$.

Из точки B проводим перпендикуляр $CB\perp CD$.

$ABCD$ – прямоугольник, в который вписан полукруг на диаметре PQ.

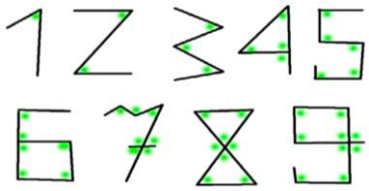
Аналогичных прямоугольников можно воспроизвести сколь угодно много.
Отсюда и простота построения.

Если заданы стороны прямоугольник, то вписывание в него полукруга уже не столь очевидно. Возможно, не самый оптимальный алгоритм-вариант предлагается ниже.



$DK = DN = DC = b$, $AE = b/2$;
диагональ квадрата DL;
полуокружность на $AN = a + b$;
$DT = \sqrt{ab}$ – среднегеометрическое;
диагональ квадрата $DS = \sqrt{2ab}$;
$DF = DS = \sqrt{2ab}$, тогда
$EF = ED - FD = a + b/2 - \sqrt{2ab} = p/2$;
$AP = 2 \cdot EF = p$; $MP = MB$, $MO \perp AB$;
O – центр полуокружности.

Вместо заключения.



Родиной первых <арабских> цифр является Индия, а до нас дошли сильно эволюционировавшие числовые знаки.

Существует красивая и правдоподобная легенда, согласно которой изображение цифр, близкое к современному написанию, формализовал великий среднеазиатский ученый IX века Аль-Хорезми посредством связи числового значения цифры с количеством углов в её начертании (оригинальный текст не сохранился).

Так что прообразом в начертании единицы служит не только одинокая палочка, но и "сиротливый" острый угол.

Палочки-считалочки углы сопрягли...

Литература:

1. Забродоцкий Ю.Н. Слепым в назидание зрячим // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 23213, 31.03.2017. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163258.htm.

2. Василенко С.Л. Свойства 12 (числа) в основаниях мироустройства. Ч. 11. Бесконечные ряды: от Фибоначчи до наших дней // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 29367, 24.02.2025. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001k/00165788.htm.

3. Weisstein E.W. Quadratic Reciprocity Theorem / From MathWorld – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/QuadraticReciprocityTheorem.html.

4. Василенко С.Л. Дуализм «двух сокровищ геометрии»: теоремы Пифагора и золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.23021, 03.02.2017. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163206.htm.

5. Zolotareff G. Nouvelle demonstration de la reciprocite de Legendre // Nouv. Ann. Math. (2), 1872, vol. 11, 109-111.

6. Горин Е.А. Перестановки и квадратичный закон взаимности по Золотареву-Фробениусу-Руссо // Чебышевский сборник. – 2013, т. 14, вып. 4. – С. 80-94.

7. Hunter J.A.H. Triangle Inscribed in Rectangle // Fibonacci Quarterly. – **3.1** (1963), p. 66. – https://www.fq.math.ca/Scanned/1-3/hunter.pdf.

© ВаСиЛенко, 2025
Украина, Харьков