С.Л. Василенко

Так такового золотого сечения в природе нет

Обычно в подобных случаях мы говорим "нет",
но сейчас в виде исключения скажем "не-е-е-т"

Сразу акцентируем внимание пристрастного читателя, что заголовок – не описка.

Одновременно нисколько не означает принижение математического феномена, который в русскоязычной литературе чаще всего именуется "золотым сечением" (ЗС).

Наши размышления об ином...

Мы провели немало исследований в разных аспектах золотой пропорции, которые приведены, в частности, на страницах https://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm, и восторгаемся этим замечательным объектом алгебры и геометрии.

Но это не мешает критически подойти к общему осмыслению, анализу и оценке информации в этой сфере. Одно дело – изучать абстрактные математические особенности, и совсем другое – находить их практическое применение в разных областях знаний.

Включаем критическое мышление.

Анализ вещей с критической точки зрения позволяет давать аргументированные оценки, формулировать обоснованные выводы и корректно применять получаемые результаты для решения поставленных задач.

И как верно отмечали просвещенные: «Критикуя, критикуй мнение, а не автора».

Распространенные определения и понятийные конструкции так называемого "золотого сечения" (ЗС, деления, разбиения, разрезания, сегментации...) обычно начинаются словами: «это такое отношение двух величин (частей и целого) при котором...».

Так всё-таки, мы сечем-делим некоторое целое или соотносим выбранные величины и ничего при этом не делим?

Деление – это процесс (!) и/или результат появления из родительского (материнского) делимого двух и более дочерних образований.

1. Если делим, то ничего подобного с таким отношением в природе не происходит.

Нет ни одного примера, чтобы ткнуть пальцем и сказать: смотрите, вот, оно самопроизвольно расчленилось-разделилось золотым сечением.

2. Более того, при делении образуются однородные части (элементы), как правило, имеющие физические размерности. Их отношение – безразмерное число, показывающее, во сколько раз эти части разнятся.

К слову, альтернативная нотация τ для константы "ЗС" является сокращением от греческого τέμνω – режу, рублю, рассекаю. Сегодня чаще всего используется греческая буква φ, Ф (фи) в честь древнегреческого скульптора Фидия [1] и ассоциацией с Фибоначчи.

Историко-терминологические metamorphoses.

Несколько слов о *сечении* так таковом, например:

- пересечение множеств в теории множеств – это множество, которому принадлежат только те элементы, которые одновременно принадлежат всем данным множествам;
- сечение в геометрии – пересечение тела или поверхности с плоскостью, как частный случай пересечения множеств в математике;
- коническое сечение – плоская кривая (эллипс, парабола или гипербола), которая может быть получена пересечением плоскости и конуса;
- дедекиндово сечение (узкая щель) – один из способов построения вещественных чисел из рациональных;
- сечение в электротехнике – площадь поперечного сечения проводника и др.

Многие достойные внимания монографии грешат произвольными умозрительными допущениями о происхождении термина "ЗС".

Они имеют отдаленное отношение к истории науки и близки к жанру научно-фантастической журналистики, например, безапелляционные утверждения [2]:

– «Имеется много авторитетных свидетельств о том, что именно Леонардо да Винчи был одним из первых, кто ввел сам термин "золотое сечение" (?)». – А.П. Стахов, Код да Винчи и ряды Фибоначчи, 2006;

– «Термин "золотое сечение" (aurea sectio) идет от Клавдия Птолемея, который дал это название числу 0,618… Закрепился же данный термин и стал популярным благодаря Леонардо да Винчи, который часто его использовал». – Э.М. Сороко, Золотые сечения, процессы самоорганизации и эволюции систем, 2012.

Да Винчи – истинный универсальный человек, полимат и авторитет эпохи Возрождения. "Прислониться" к его имени означает эффектный способ повысить значимость собственных исследований. Только, увы и ах, как говорил А.П. Чехов.

На этот счет нет никаких исторических фактов. Только выдумки, взятые из справочника Стеля (пер. с укр. – с потолка), которые по образному сравнению А.Ю. Чернова больше напоминают "золотой лохотрон", нежели исторические линии.

Подобного рода золотоносные скрепы обычно выдумывают, чтобы преподнести собственные творения под аурой старинной таинственности и/или античной мудрости, вызывающей благоговение. Вроде как авторские работы питаются соками и корнями древности, под соусом которых исподволь "протаскиваются" другие несообразные интерпретации: множество других золотых сечений, квадратных корней и т.п.

В своем вольном изложении "золотоискатели" и в определенной мере φ-натики (самокритично) не одиноки: «Такое деление (точкой *C*) Пифагор называл *золотым делением*, или *золотой пропорцией,* а Леонардо да Винчи – общепринятым сейчас термином *золотое сечение*» [3, с. 12]. – Этот откровенный вымысел писал доктор философии профессор Ю.А. Урманцев, – известный ученый и автор важного направления в общей теории систем. Только вот с отдаленным прошлым нелады.

Всё бы и ничего, но подобным образом формируется-плетется паутина последовательно-перекрестных ссылок, в том числе через Интернет, с массовым тиражированием изначально ложных посылов.

Зрим в корень.

Доподлинно точно известно, что термин "золотое сечение" – сравнительно молодой и вошел в употребление лишь в девятнадцатом веке» (!) [4, гл. 23].

История названия "ЗС" хорошо описана в работе [5] и берет своё начало из окрашенной золотом дефиниции «goldener Schnitt – золотой разрез», которую ввел немецкий математик XIX века Мартин Ом (Die reine Elementar-Mathematik, 1835), – см. приложение.

Первое использование термина *golden section* в английском языке относится к девятому изданию наиболее полной и старейшей энциклопедии "Британника" (Лондон, 1875) в статье по эстетике (J.Sully), поскольку изначально "ЗС" воспринималось зримой пропорцией.

В 1906 году публикуется перевод книги другого немецкого математика А. Шустера [6], где в разделе «Квадратный корень» говорится: «Решенная выше задача называется задачей о «золотом сечении» (sectio aurea)». – С этой и других близких по времени книг термин "золотое сечение" утверждается в русской литературе.

До этого соотношение иногда именовали божественной пропорцией (БП), как её представил в средние века итальянский математик, монах-католик Лука Пачоли в одноименной книге (1509) [7]. По сути, он изощрялся в словесности эпического жанра, излагая практически все теоремы из евклидовых "Начал", написанных до него почти за 2000 лет. Плюс личностное благолепие перед религиозно-тринитарным структурированием.

В действительности модель "ЗС" не вяжется с троично-божественным догматом, даже с большой натяжкой, ибо третий элемент пропорции равен сумме двух, что противоречит общей концепции трех лиц-ипостасей.

То есть, по сути, БП – бинарная форма двухипостасного бога. Модель «трое равны в одном» отсюда никак не получается [8].

В настоящее время термин БП – напыщенность, помноженная на теологию, исторический архаизм и культурный образ, который в научной литературе не применяется.

Более адекватной и предпочтительной аналогией христианско-троичного догмата здесь становится пропорциональное деление на три части или модель тройственной конструкции, как естественное и органичное расширение золотой пропорции с разбиением целого на три аддитивные части $a+b+c$ в виде непрерывной (*continuo* – продолжающейся) пропорции со своей константой $t \approx 1{,}8393$:

$$\frac{\text{сумма трех}}{\text{большее}} = \frac{\text{большее}}{\text{среднее}} = \frac{\text{среднее}}{\text{меньшее}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+b+c}{c} = \frac{c}{b} = \frac{b}{a} = t\,.$$

Постоянная t – действительный корень характеристического уравнения $x^3 = x^2 + x + 1$ для чисел трибоначчи $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ – определяет замечательное архимедово тело – полуправильный многогранник, который соединяет 32 треугольника и 6 квадратов и получил название "курносый куб" – *cubus simus* в трактате И. Кеплера «Harmonices Mundi» (1619).

Русская математическая классика.

Проследим, как золотое деление профессионально описывал советский математик Н.Н. Воробьев [9, с. 94-95], в отличие от существующей на то время русской литературы популярно-развлекательной направленности.

Разделим отрезок *AB* единичной длины на две части так, чтобы бóльшая из его частей являлась *средним пропорциональным* между меньшей его частью и всем отрезком (рис. 1-а).

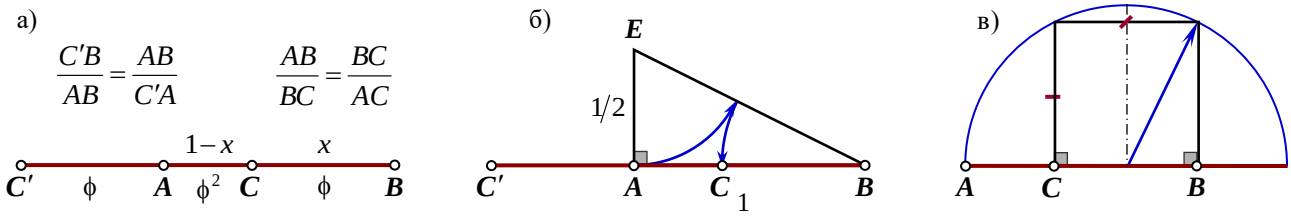


Рис. 1. Золотое деление единичного отрезка AB (по Воробьеву)

Обозначив длину большей части через x и составив пропорцию $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$ или $x^2 = 1 - x$, находим положительный корень $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi$ уравнения и отношение $\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$.

Такое деление точкой C называется делением в среднем и крайнем отношении (Евклид). Его часто называют также золотым делением или золотым сечением.

Отрицательному корню уравнения соответствует делящая точка C' вне отрезка AB, то есть внешнее деление.

Построение точки C выполняется двумя дугами с центрами в точках E и B (рис. 1-б).

Золотое деление довольно часто встречается в геометрии, например, ещё у Евклида для равностороннего пятиугольника, или квадрата, вписанного в полукруг (рис. 1-в).

Таким образом, сечение – это лишь одно из исторических проявлений «золотой модели» в геометрической задаче деления фиксированного отрезка на две пропорциональные части и построения углов 36 и 72 градусов для правильного 5-угольника.

Научились вычерчивать фигуру и забыли про это на тысячелетия. За ненадобностью.

Без особой субъективной эстетики восприятия, эксклюзивной гармонии или навязчивого "внедрения" в главный фасад Парфенона и седые египетские пирамиды.

Разве что «во сне через лупу» по золотому соннику Г. Миллера.

Задача о пропорциональных числах.

Обратимся к арифметике – исторически первому разделу древнейших математических наук, основанному на изучении чисел и действий над ними.

Число – одно из основных понятий математики, используемое для количественной характеристики и сравнения объектов и его частей. Вполне естественным выглядит переход от деления-членения геометрических отрезков к сопоставлению действительных чисел.

Вариант № 1. Примем за основу отношение двух неравных чисел между собой и их суммой или разностью.

Есть произвольное действительное число a. Оно может характеризовать длину геометрического отрезка, некоторую физическую величину и т.п.

Подберем к нему другое вещественное число b такое, чтобы сумма и/или разность этих чисел так относилась к одному из них, как оно – к другому.

На языке математической пропорции – равенства двух отношений, задача записывается в двух эквивалентных формах согласно известным свойствам пропорции:

$$\frac{b+a}{b}=\frac{b}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b-a}{a}=\frac{a}{b}.$$

Обозначив $x=b/a$ и решив квадратное уравнение $x^2-x-1=0$, находим два полноправных решения $b_1=-a\cdot\phi$ и $b_2=a\cdot\Phi$, где $\Phi=\left(\sqrt{5}+1\right)/2$ и $\phi=\left(\sqrt{5}-1\right)/2=\Phi^{-1}$.

Как видим, в данном изложении нет традиционного целого, ни его деления-сечения, как это обычно принимается при объяснении феномена "золотого сечения".

Но есть <геометрическая> пропорция с равными средними членами и её конкретный частный случай – золотая пропорция.

Вариант № 2. Найти два положительных числа $a,\ b>0$ такие, что их произведение и разность равны единице:

$$\underline{a\cdot b=1,\ b-a=1} \ \Rightarrow\ b-1/b=1,\ \ b^2-b-1=0 \ \rightarrow\ \ b=\Phi,\ \ a=\phi.$$

Здесь мы обходимся не только без деления отрезков и привлечения двучленно-аддитивной рекурсии и/или чисел Фибоначчи, но и составления пропорции.

Уже из полученного результата можно составить пропорцию, а единицу при желании – наделить философским смыслом понятия целого.

Так, по Аристотелю целым называется то, у чего не отсутствует ни одна из тех частей, состоя из которых оно именуется целым от природы.

"Золотое сечение" → золотой рост и golden ratio.

Большинство задач "ЗС" сводятся к построению геометрической пропорции с равенством двух отношений. Не случайно для числа Ф в англоязычной литературе, откуда оно собственно и пришло, подавляющее распространение получил термин *golden ratio* как параметр соотношения. – И никаких сечений-делений и/или расчленений.

Латинское слово *ratio* (рацио) весьма ёмкое. Это не только математическое отношение. Одновременно обозначает: рассуждение и размышление, обдумывание и умозаключение, смысл, направление, порядок и др.

Рацио-*ratio* также объединяет разум, интеллект, рациональность, вместе с древнегреческим логосом-λόγος.

Отношение – это суть любой структуры с её возможным проявлением "золотых" свойств. И это совершенно верно.

"Золотое сечение" – неудачный, и в определенном смысле злополучный термин по этимологии. Можно сказать, терминологический парадокс, пришедший из геометрической задачи Евклида о делении отрезка для построения правильного пятиугольника.

Ключевым словом для формирования соответствующего термина является не само деление, как математическая задача и способ её решения, а числовое отношение или результат решения в виде замечательной числовой константы Ф.

В то же время определенные конструкции, например, треугольник Кеплера или непрерывная дробь, составленная из одних единиц, для "ЗС" значимы и достаточно уникальны.

К самому термину "ЗС" в геометрическом делении отрезка, претензий нет.

Но они начинаются, когда данное словосочетание распространяется на иные объекты.

Попытайтесь показать-продемонстрировать хоть какое-то реальное проявление в природе сечения-деления так такового. – Его нет!

Ничто в природе не делится "золотым сечением"!

"Золотой" рост возможен [10]. Например, в биологии. Золотое расчленение – нет!

Возьмите любой живой объект. Улитка, подсолнечник, филлотаксис, ... – там вообще не видно никакого деления, кроме биологического деления клеток пополам (!). Но зато просматривается рост, приумножение биологической массы, в том числе с возможным (!) проявлением золотой пропорции. То есть "золотой" рост.

И уже полной несуразицей выглядит распространение данной терминологии на конкретное число, когда пишут: «Ф – золотое сечение» (?).

Вес клопа / вес блохи = 5/3 ≈ золотое сечение. – Ни уму, ни сердцу.

Правильные альтернативно-эквивалентные термины: число Ф (фи), золотая константа.

На худой конец, для сохранения преемственности, константа «золотого сечения».

Откройте раздел «математические константы», например, в той же Википедии – энциклопедии народного творчества. Все названия параметров, включая авторско-именные, содержат одно из слов: число, константа, постоянная. И вдруг, откуда ни возьмись, появляется-выскакивает ... *сечение*. – Абсурд-нонсенс.

Не менее значимые в науке математические константы π, *e* никто не украшает блестящими эпитетами. Просто говорят: число "пи", число *e* или основание натурального логарифма. Число π иногда называют архимедовой константой, лудольфовым числом или константой Людольфа, в честь нидерландского математика Людольфа ван Цейлена, который ещё в конце 16 века нашел приближенное значение числа π с 35 верными десятичными знаками. Этого вполне достаточно для выполнения любых (!) астрономических вычислений во Вселенной. В 2022 году команда Google рассчитала 100 триллионов знаков числа π, что имеет приложение при тестировании производительности компьютеров.

Именно поэтому в современной английской литературе превалирует *golden ratio* – золотое отношение, одинаково применимое ко всем объектам, как при их целостном восприятии, так в сравнении друг с другом.

Сопоставим, например, вес щуки и карася из разных водоемов. Никакого вразумительного целого, и тем более сечения. Но отношение весов реально, и экспериментально может совпасть с числом Ф, – разумеется, приближенно.

Золотая <математическая> константа или золотое число есть.

Никаких "золотых сечений" в природе нет. Во всяком случае, не обнаружено.

Такая злая шутка слепого использования русскоязычного термина "золотого сечения" вместо вдумчивого перевода на русский язык и применения словосочетания *golden ratio*.

Ломаем всё, что надо и не надо, что было целое, то делим пополам.

Нравится... Свыклись... Можно и дальше тиражировать безграмотность, типа: «золотое сечение – иррациональное число».

Благо подобных переводов хватает:

искусственный интеллект (?) ← симулятор (имитатор) умственных способностей;

устойчивое развитие (?) ← воспроизводящее развитие; развитие не бывает устойчивым;

глаза (нем. *glas* стекло) – на укр. очі, отсюда очки;

неделя (нет дел, ne dělati) – семь дней безделья, на укр. неділя – один день отдыха (рус. воскресенье) и так далее.

Спираль математическая.

В отличие от "золотого сечения", отсутствующего в природе, развитие процессов по спиралям, в основе формировании которых находится константа Ф, теоретически возможно.

Во всяком случае, похожие проявления можно отметить в ботаническом филлотаксисе, "золотом" росте некоторых живых организмов, астрономических наблюдениях.

Само понятие спирали пришло из жизненного опыта и на языке математики означает:

– кривую на плоскости, которая огибает фиксированную центральную точку на постоянно увеличивающемся от неё расстоянии;

– трехмерную кривую (винтоую линию), которая поворачивается вокруг оси на постоянном или непрерывно изменяющемся расстоянии, двигаясь параллельно оси.

Наиболее известными считаются:

– спираль Архимеда, $\rho = k\varphi$, – звуковая дорожка на грампластинке, механизм для равномерного наматывания нитки на шпульку швейной машины и др.;

– логарифмическая (равноугольная) спираль, которая пересекает под одним и тем же острым углом все прямые, выходящие из полюса; логарифм расстояния движущейся точки от полюса изменяется пропорционально углу поворота, $\rho = c^{\varphi}$, «символ жизни и развития человеческой души» (И.-В.Гете).

Не только золотая константа, но и любое иррациональное число имеет свою собственную логарифмическую спираль.

Модель тройной спирали.

В современных исследованиях по инновационному развитию экономики получила распространение *модель тройной спирали* (triple helix). Как запоминающийся графический и словесно-описательный образ в виде трех связанных кружочков, характеризующих взаимодействие вписанных в них слов: университет (наука), власть и бизнес [11]. По сути, это заимствование-калька названия с 3-цепочной или 3-спиральной макромолекулы ДНК, которая включает 3 спиральных нити: двойную спираль, а затем еще одну дополнительную спираль, которая связывается с двойной спиралью (Ф. Крик, Д. Уотсон, 1953).

Анализ работ по инновационной экономике показывает, что в слово *спираль* вкладывается смысл развития, в том числе отрицательного, и образного представления эмерджентных уровней мышления в этой сфере. Для большего эффекта кружочки тонируются, как в раскрасках для детей. – Действительно, качаться на качелях, под которыми образовалась лужа, – это настоящее "преступление". Она должна быть тщательно обследована, измерена и использована по назначению. Ничто детское взрослому не чуждо.

Отсюда и triple helix.

О двойной спирали филлотаксиса.

Филлотаксис – пожалуй, единственное природно-биологическое явление, в котором золотая пропорция просматривается в спиральном расположении листьев и семян растений, раковин моллюсков и др. с определенным углом расхождения-дивергенции.

В свое время Б.Н. Розин – исследователь "ЗС" и выпускник Винницкого политеха проанализировал [12] модель филлотаксиса с постоянным углом дивергенции на архимедовой спирали. Он убедительно показал, что наблюдение "видимых парастих" или боковых спиральных линий в соцветии подсолнечника является визуальным эффектом человеческого восприятия, способного к выделению и объединению элементов соцветий в группы. Всё аргументировано, доходчиво и наглядно! Но непознанной «остается главная "тайна" филлотаксиса – как, почему и каким образом примордии укладываются в структуру с углом дивергенции $2\pi\phi^2$» [12]. – Заметим, что присутствие в филлотаксисе именно золотого угла $2\pi\phi^2 \approx 137{,}51^{o}$ – это не факт, а только предположение, основанное на моделировании.

Гипотеза близка к реальности.

Однако получается, что неким непостижимым образом растение "хранит в памяти" золотой угол. А потом именно под этим углом равномерно по кругу выбрасывает побеги.

Естественно возникают вопросы и сомнения в окончательности суждения.

«Что-то здесь не так, не так...» (А. Розенбаум, 1994).

Недавно вышла книга Розина «Двойная спираль филлотаксиса» [13].

Двойная, конечно, выглядит лучше, нежели утверждение о том, что расположение семян подсолнуха структурно «упаковано золотыми спиралями, завивающимися навстречу друг другу», как клубок вьющихся змей. Или другое распространенное мнение в научных публикациях, что семена подсолнуха располагаются по спиралям, а их количество по двум направлениям обычно составляет $34\backslash55$ или $89\backslash144$ (числа Фибоначчи).

Почему же теперь спираль двойная? – Тем более, понятие "двойной спирали" в науке зафиксировано и имеет отношение к молекуле ДНК, которую можно образно представить как двойную спираль на цилиндре, подобно перекрученной веревочной лестнице.

На наш взгляд, "двойная спираль" филлотаксиса намеренно наводит на ассоциацию-соотносительность с ДНК и претензией на открытие своего генетического кода в ботанике.

Видимо, сработало пусковое реле, отвечающее за рекламу и *public relation*. – Если <по>разить, то сразу наповал...

Розин хорошо знает из собственного опыта, что спираль развития в филлотаксисе всего лишь одна! – «Основная генетическая спираль» [14, 15], которая соединяет листья, семена или чешуйки в порядке их возникновения (генезиса) и последующего расположения с определенным углом расхождения – азимутальным углом между двумя последовательными элементами генетической спирали. Спиральки контактных парастих, вторичны, как следствие. В основе логарифмической спирали просматривается золотой угол $2\pi\phi^2$, и она свободно воспроизводится несложным моделированием, адекватным наблюдаемому процессу. Остальное – издержки зрительного восприятия и способности человеческого глаза улавливать отдельные линии. Видимо, поэтому китайцы говорят про нас: как вы только друг друга различаете, вы же все одинаковые.

Рассматривая морфогенез спирального филлотаксиса, Розин позже отмечает [16] и красочно демонстрирует на видеоролике (https://www.youtube.com/@doublehelixofphyllotaxis2237) раскручивание одной спирали на примере семян подсолнечника, хотя человеческий мозг бессознательно объединяет дискретные элементы в псевдообъекты, которые воспринимаются как множество спиралей. Де-факто наличествует только одна "генетическая" спираль, которая проходит через все зачатки растения [14, 15]. Но даже эта спираль является механическим продуктом структуризации.

Собственно, сама «двойная спираль» в молекуле ДНК не имеет никакого отношения к плоскостным спиралям и напоминает накрученную на палочку двойную ленту-конфетти.

Альтернативная, не "золотая" гипотеза.

Фогель Х. предложил [17] модель для описания распределения цветков и семян в подсолнухе на основе золотого угла и двух предположений: 1) семена имеют одинаковую площадь; 2) любые два последовательных семени стягивают в начале координат один и тот же угол $2\pi\phi^2$. То есть первичная спираль роста является уникальной 1-парастихией.

В работе [18] показано, что такой угол расхождения дает эффективный способ упаковки семян на плоскости. Одновременно отмечается отсутствие биологического механизма, посредством которого такое расхождение регулируется в природе.

Для удовлетворительного объяснения филлотаксиса недостаточно найти свойство ϕ^2, делающее $2\pi\phi^2$ оптимальным углом расхождения. Важнее отыскать правдоподобный биологический критерий, расставляющий цветки (семена) по золотому углу.

Можно, конечно, предположить, что растение содержит генетическую информацию, определяющую угол расхождения.

Хотя совершенно невозможно, чтобы это само по себе фиксировало углы расхождения с невероятной точностью, наблюдаемой в природе, поскольку естественная вариация в биотических явлениях обычно довольно широка. И загадка филлотаксиса, таким образом, полностью не решается.

А что если дело вовсе не в числе ϕ? – Растению не ведом иррациональный золотой угол в чистом виде, и вряд ли он "прошит" в генах. Растение просто выбрасывает побеги из центра, без особой угловой систематики, сообразно с погодой. Именно такое, близкое к хаотическому расположению, мы наблюдаем в центральной части корзинки.

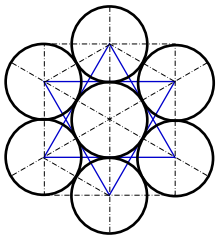
Побеги толпятся и растут, растут и расширяются в пространстве, расширяются и занимают наиболее предпочтительные свободные места с адекватной наиболее плотной гексагональной (!) упаковкой кругов.

При такой плотной упаковке на евклидовой плоскости и одновременном выталкивании каждого семени наружу от центра, углы в 30 градусов ($\pi/6$) контактного давления постепенно распределяются-рассредоточивается на пять ближайших взаимодействующих пар с наименьшими расстояниями между ними. Именно они по мере роста выдавливают наружу остальные семена, равномерно по всем радиальным направлениям (рис. 2).

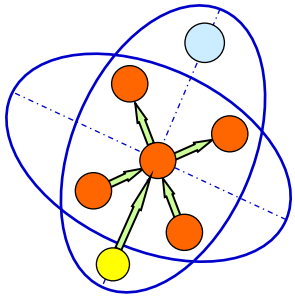
Отсюда по мере роста формируется главный угол $\theta = \frac{\pi}{6} \cdot 5 = 2{,}61799\ldots \approx \Phi^2$, который положен нами в основу эмпирического моделирования спирали с растущими и увеличивающимися в размерах семенами (рис. 2). Многие считают его "золотым" (вероятно, ошибочно), ввиду практической близости $\theta \approx \Phi^2$.

К слову, отношение стороны квадрата к диаметру круга на рисунке "витрувианского человека" Леонардо да Винчи с достаточной геометрической точностью равно 5/6.

$$\theta = \frac{\pi}{6} \cdot 5 = 2{,}61799\ldots \approx \Phi^2$$



трисекция прямых
углов на части **π/6**



пять ближайших
взаимодействующих пар

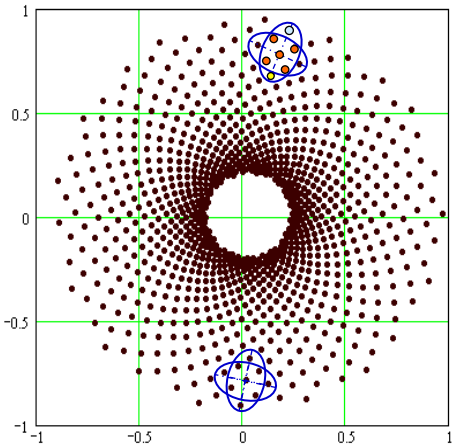
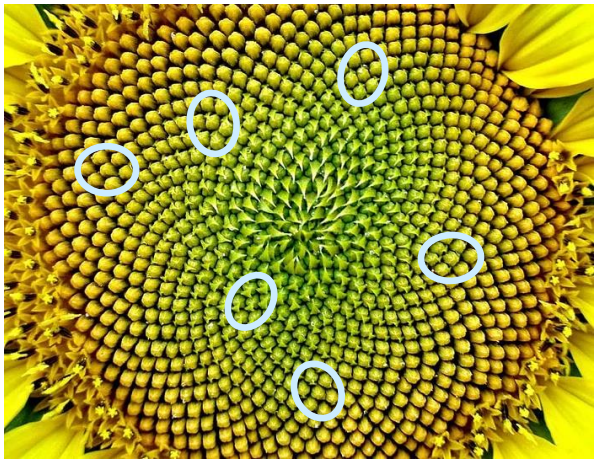


Рис. 2. Распределение центров семян в корзинке цветка подсолнечника,
как гексагональная радиально-растущая структура наиболее плотной упаковки



Так шестой порядок, свойственный плотной упаковке неживого, в результате роста "атомов" в решетке преобразуется в наблюдаемый нами пятый порядок центральной симметрии (с одним единственным центром), характерный для живых объектов.

Не сечение! А один центр и рост. Подобно мозаике Пенроуза.

Не деление, присущее анализу. Но приумножение, определяющее синтез.

Корзинка подсолнуха – всё та же гексагональная упаковка (плотная и энергетически экономная), только радиально-реструктуризированная за счет физического роста.

Если бы пчелиные соты равномерно росли по мере удаления от центра, они тоже приняли бы вид корзинки подсолнечника.

Если бы снежно-ледяные кристаллы были "живыми", а их молекулы росли, то снежинки не разрывались по краям и заполняли свободное пространство подобным образом.

Появление левых и правых "завитушек" (на рис. 2 их 34\55) – оптическое преломление сложившейся стройной картины расположения растительных элементов.

Как отражение непрерывного в дискретном.

Подобно крутящимся в обратную сторону колесам автомобиля в кинофильме.

Преобразования Шевелёва.

Для последующего изложения центральной темы сначала обратимся к творчеству Шевелёва И.Ш. – известного исследователя геометрических и архитектурных пропорций и гармонии, формообразования в природе и искусстве [19, с. 6–129].

1. В одной из последних работ [20] он с присущим творческим методом архитектора выполняет очевидные тождественно-алгебраические преобразования на основе фиксированной гипотенузы c:

$$A^2+B^2=c^2=a^2+b^2 \;\rightarrow\; A^2-a^2=b^2-B^2 \;\rightarrow\; (A-a)(A+a)=(b-B)(b+B),$$

$$\frac{A+a}{b+B}=\frac{b-B}{A-a}=\lambda.$$

Далее автор рассматривает частный случай для целых (α,β)

$$\lambda_\Phi=\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{A+\alpha\sqrt{5}}{\beta\sqrt{5}+B}=\frac{\beta\sqrt{5}-B}{A-\alpha\sqrt{5}}$$

и полагает, что произведенная «перестановка $a^2\leftrightarrow B^2$ в корне изменила смысл уравнения Пифагора и преобразовала удвоенную (вторую) теорему Пифагора в четырехбуквенный код или "уравнение симметрии пар"».

При этом приводятся разные целочисленные вариации

$$\begin{pmatrix}\alpha & A\\ \beta & B\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}8 & 10\\ 1 & 15\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}6 & 8\\ 1 & 11\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}13 & 21\\ 4 & 22\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}7 & 13\\ 3 & 1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}7 & 5\\ -1 & 15\end{pmatrix}\ \dots$$

и "калейдоскоп" графических образов, включая некие мнимые сферы при $\beta<0$.

2. Что можно сказать по существу? – Действительно, для фиксированной гипотенузы c найдется "безліч" различных прямоугольных треугольников, например, вписанных в окружность диаметром c.

При этом теорема Пифагора сохраняет свою первозданную идентичность и никак не удваивается или утраивается.

Длины катетов изменяются путем перемещения вершины прямого угла по окружности.

Корень из пяти, присущий золотой константе Φ, в данном аспекте также не является чем-то особенным, несмотря на его замечательные свойства.

Для этого достаточно перейти от частного к общему.

3. Рассмотрим квадратное уравнение $x^2 - px - q = 0$ с двумя вещественными корнями:

$$\lambda = \frac{p+\sqrt{D}}{2}, \quad \lambda' = \frac{p-\sqrt{D}}{2}, \quad D = p^2 + 4q, \quad \lambda + \lambda' = p, \quad \lambda \cdot \lambda' = -q.$$

Представим первый корень в виде:

$$\lambda \;=\; \lambda \cdot \frac{\alpha - \beta\lambda'}{\alpha - \beta\lambda'} \;=\; \frac{\alpha\lambda + \beta q}{\alpha - \beta\lambda'} \;=\; \frac{\alpha p + 2\beta q + \alpha\sqrt{D}}{2\alpha - \beta p + \beta\sqrt{D}} \;=\; \frac{A+a}{B+b}$$

с элементами квадратной матрицы второго порядка

$$\begin{pmatrix} A & a \\ B & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha p + 2\beta q & \alpha\sqrt{D} \\ 2\alpha - \beta p & \beta\sqrt{D} \end{pmatrix}.$$

То есть, имеем отношение, составленное из целых чисел (α, β, A, B, D):

$$\lambda = \frac{A + \alpha\sqrt{D}}{B + \beta\sqrt{D}} = -q\frac{B - \beta\sqrt{D}}{A - \alpha\sqrt{D}} \qquad \text{или} \qquad \lambda = \frac{A+a}{B+b} = -q\frac{B-b}{A-a}.$$

Такое преобразование имеет место быть, но не дает особых преференций. – Обычная перестановка и перегруппировка слагаемых относительно квадратного корня.

Здесь $A^2 - a^2 = q\left(b^2 - B^2\right)$ или $a^2 + \left(\sqrt{q}b\right)^2 = A^2 + \left(\sqrt{q}B\right)^2$.

Последнее равенство при желании можно интерпретировать и связывать с теоремой Пифагора. – Как говорится, на здоровье.

Отдельно можно выделить четность коэффициента $p = 2k$, $D' = k^2 + q$, тогда:

$$\begin{pmatrix} A & a \\ B & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha k + \beta q & \alpha\sqrt{D'} \\ \alpha - \beta k & \beta\sqrt{D'} \end{pmatrix}.$$

При $q = 1$ в квадратном уравнении $x^2 - px - 1 = 0$ величины $D\,(D')$ зависят только от параметра $p = 1, 2, 3, \ldots$ и составляют последовательность:

$$d_p = \frac{p^2+4}{4^{(p+1)\bmod 2}} = 5,\ 2,\ 13,\ 5,\ 29,\ 10,\ 53,\ 17,\ 85,\ 26,\ 125,\ 37,\ \ldots$$

Например, начальные уравнения:

$$\begin{aligned}
&x^2 - x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \left(1+\sqrt{5}\right)\!/2 = \Phi; \\
&x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 1 + \sqrt{2}; \\
&x^2 - 3x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \left(3+\sqrt{13}\right)\!/2; \\
&x^2 - 4x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 2 + \sqrt{5} = \Phi^3 = 4 + \phi^3 = \sum_{n\,\geq\,1} n\,\phi^n.
\end{aligned}$$

Наконец, если положить $p = q = 1$, то $\lambda = \Phi$ – константа золотой пропорции, и соответствующие параметры равны:

$$\begin{pmatrix} A & a \\ B & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta + \alpha & \alpha\sqrt{5} \\ 2\alpha - \beta & \beta\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

в частности,

$$\Phi \;=\; \frac{A+a}{B+b} \;=\; \frac{L_{n+1} + F_{n+1}\sqrt{5}}{L_n + F_n\sqrt{5}} \;=\; -\frac{L_n - F_n\sqrt{5}}{L_{n+1} - F_{n+1}\sqrt{5}} \quad \rightarrow \quad \Phi^n = \frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}.$$

Без теоремы Пифагора, окружностей и сфер. Простая параметрическая и числовая манипуляция, которая позволяет записывать корень квадратного уравнения, включая константу Ф, бесконечными способами путем задания произвольных целых чисел α, β.

Конечно, можно фантазировать. Например, утверждать, что любая пара чисел, в том числе целых, порождает золотую константу. Только вот, за счет чего? – Исключительно из-за наличия в преобразовании другой иррациональной константы – квадратного корня из пяти $\sqrt{5}$ – целого алгебраического числа. Именно данный корень $\sqrt{5}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{3^2-2^2}$ является ключевым и определяющим для золотой пропорции в алгебраическом и геометрическом (со времен Евклида) представлении-толковании.

Наоборот, отсутствие корня $\sqrt{5}$, в частности, порождает надуманность и псевдонаучную подоплеку «обобщенных золотых сечений» (ОЗС), в основе которых лежат другие корни и соответствующие константы характеристических уравнений, никак не связанные с числом Ф. Поэтому сам термин "ОЗС" имеет природу нонсенса, как отсутствия обусловленного смысла, и на самом деле означает "отобщение" или отлучение от ЗС.

К слову, в подкольце целых алгебраических чисел вида $x+i\cdot y\sqrt{5}$ имеют место два разложения, например $6=2\cdot 3=\left(1+i\sqrt{5}\right)\left(1-i\sqrt{5}\right)$, причем в обоих случаях все множители – простые, то есть неразложимы в этом подкольце (Э.Э. Куммер), $i^2=-1$.

В целом идея простого преобразования Шевелёва оказывается полезной, и как показано выше, довольно легко расширяется на многообразие форм, описываемых квадратным уравнением общего вида. – В отличие, например, от гиперболических функций Фибоначчи–Люка (ГФЛ) [21], которые введены формально по формуле Бине путем буквенного манипуляционного изменения обозначений и не привносят дополнительной информации.

В результате эти функции не выходят за рамки неполного квадратного уравнения $x^2=px+1$, без какого-либо расширения, хотя бы для базовой модели $x^2=px+q$, как самого простого случая повышения уровня сложности, со снятием ограничения $q=1$.

В то же время всё прекрасно работает при $q>1$, если убрать лишние наслоения в виде ГФЛ, а применять известные в математике огибающие линии к кривым семейства функций непрерывных функций Фибоначчи или Люка, о чём подробно изложено в работах [22-24].

4. Шевелёв также рассматривает числа Фибоначчи и числа Люка как один раздвоенный ряд, пары-строки которого закручены в «двойную золотую спираль... с близостью к структуре молекулы ДНК» [20], и придает этому некий сакральный смысл.

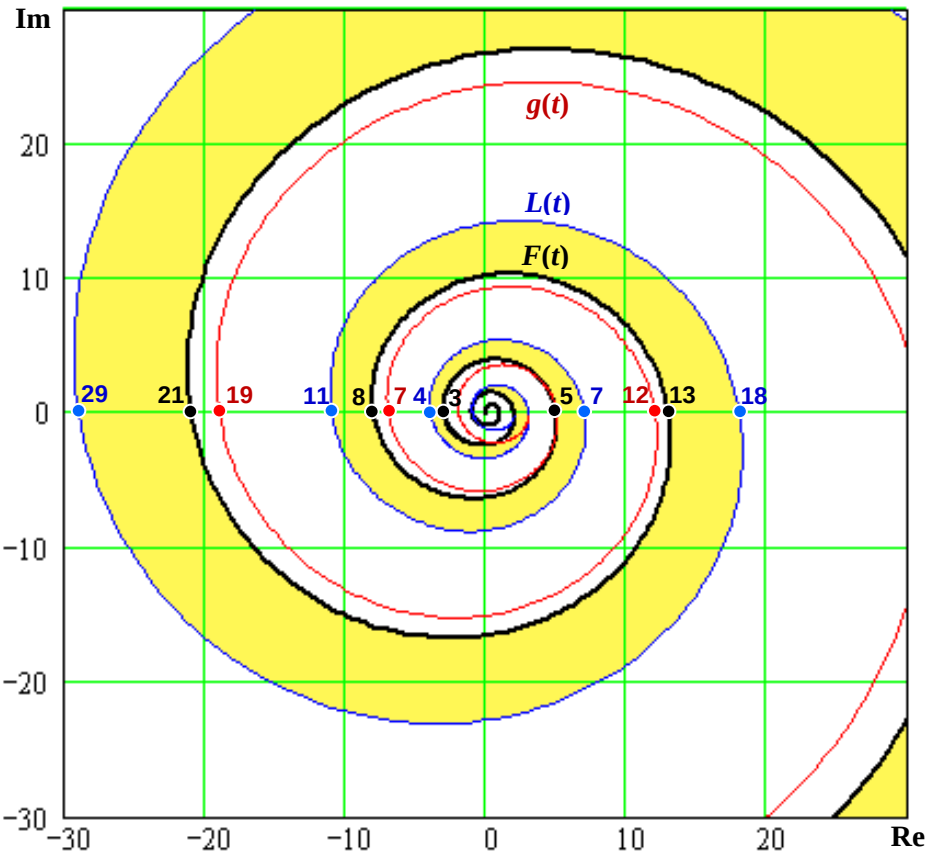
Напомним, что любая двучленно-аддитивная последовательность Фибоначчи $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ с начальными условиями – "семенами" f_0, f_1 сводима к числам Фибоначчи $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, $F_0=0$, $F_1=1$ по формуле $f_n=f_1F_n+f_0F_{n-1}$, то есть функционально связана с ним. При желании взаимозависимые ряды условно совмещаются-объединяются в двойную, тройную и любую иную *k*-мерную числовую связку-спираль. Вполне заурядно.

n	F_n	L_n	h_n	g_n	s_n
0	**0**	**2**	**3**	**3**	**4**
1	**1**	**1**	**1**	**2**	**1**
2	1	3	4	5	5
3	2	4	5	7	6
4	3	7	9	12	11
5	5	11	14	19	17
6	8	18	23	31	28
7	13	29	37	50	45
8	21	47	60	81	73
9	34	76	97	131	118
10	55	123	157	212	191
11	89	199	254	343	309
12	144	322	411	555	500

$$L_n=1\cdot F_n+2\cdot F_{n-1}=F_{n+1}+F_{n-1},$$
$$h_n=1\cdot F_n+3\cdot F_{n-1}=F_{n-1}+L_n,$$
$$g_n=2\cdot F_n+3\cdot F_{n-1}=F_{n+1}+L_n,$$
$$s_n=1\cdot F_n+4\cdot F_{n-1}=g_{n-1}+h_{n-2}=F_{n+2}+L_{n-2}.$$

Для лучшей наглядности и образного восприятия, спирали можно расположить на комплексной плоскости с использованием непрерывного параметра $t\le 0$ (рис. 3).

Объединение чисел Люка ($f_0 = 2,\ f_1 = 1$) и Фибоначчи выглядит по-своему эффектно, в силу простоты и близости начальных значений.



$$F(t) = \frac{\Phi^t - (-\phi)^t}{\sqrt{5}}$$

$$L(t) = \Phi^t + (-\phi)^t$$

$$g(t) = F(t-1) + L(t)$$

$$t \le 0$$

n	F_n	L_n	g_n
0	0	2	3
1	1	1	2
2	1	3	5
3	2	4	7
4	3	7	12
5	5	11	19
6	8	18	31
7	13	29	50
8	21	47	81

Рис. 3. Спиральное разворачивание чисел двучленно-аддитивной рекурсии
на комплексной плоскости: $F(t)$ – функция чисел Фибоначчи – основная (корневая)

В целом же, двойная, тройная и любая такая «*k*-мерная золотая спираль» – это красивый литературно-художественный образ, и не более того. Поскольку все последовательности, включая числа Люка, выступают на вторых ролях и функционально зависимы $f_n = f_1 F_n + f_0 F_{n-1}$ от базовых чисел Фибоначчи F_n.

Отметим также ряд $g_n = F_{n+1} + L_n$. Его начало 3, 2, 5, 7, 12, ... содержит единственный кортеж из четырех различных простых чисел среди последовательностей типа Фибоначчи. Кроме того, ряд ассоциируется с музыкальным хроматическим звукорядом, который включает 7 основных нот-ступеней октавы и 5 диезов-альтераций: 5 + 7 = 12.

Красиво "вжити" не запретишь.

Украинское слово *вжити* (воплотить в жизнь) имеет корневую основу со словом *жить* и означает использовать, употреблять, применять.

Во многих работах неутомимого исследователя золотоносной темы А.С. Харитонова умело *вжито* и красной линией проходят два положения.

1) Первая теза, как «новая модель равновесия», касается формальной перестановки местами величин на основе свойств логарифма $\lg K + \lg f_i = \lg Kf$ и не менее формального названия слагаемых:

$$\underbrace{\lg K}_{\boldsymbol{S}\text{ - энтропия}} = \lg K \sum_{=1} f_i = \sum f_i \lg K \pm \sum f_i \lg f_i = \underbrace{-\sum f_i \lg f_i}_{\boldsymbol{H}\ -\ \text{мера хаоса}} + \underbrace{\sum f_i \lg Kf_i}_{\boldsymbol{G}\ -\ \text{мера порядка}}, \quad i = \overline{1, K},$$

где $\sum f_i = 1$ – сумма полного набора вероятностей некоторого события;

K – число возможных состояний, $i = \overline{1, K}$.

Основание логарифма может быть любое, в частности, $\lg_K K = 1$. Число возможных состояний K – тоже любое, $\lg K$ – субъективно "плавающая" константа.

По мнению автора:

– мера хаоса или неопределенности поведения системы H описывает разрешенные (реализованные) состояния системы – бытие;

– мера порядка или определенности поведения системы G описывает запрещенные состояния системы – небытие, как новая функция для описания природы (процесса, системы, изменчивой структуры).

В неизменном виде равенство плавно переходит из статьи к статье уже не одно десятилетие, а его интерпретация основана на интуитивном понимании, без предоставления минимальных сведений, необходимых для обоснованности.

Разве что принимается постулат о равенстве мер хаоса и порядка в трех пространствах событий (классах переменных) $H(p,q,l) = G(p,q,l)$.

2) Вторая теза относится к процессу развития чего-либо, включая приращение структуры (l) на основе исходного допущения, что развитие описывается аддитивно-рекуррентной последовательностью $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, приводящей к "росту памяти" и отношению золотой пропорции.

Складываются события, структуры, числа, отрезки, элементы, силы и т.п.

То есть каждая структура – есть сумма двух предыдущих структур. Как это происходит в контексте структурного роста, не объясняется. Но автор считает, что подобное построение открыло закономерности возникновения и развития новой структуры.

На наш взгляд, здесь сокрыта логическая ошибка с подменой причины и следствия.

Двучленно-аддитивная рекурсия положена в основу как нечто данное, принятое априори. То есть изначально принимается жесткий макет-трафарет развития с условной интерпретацией: завтра = сегодня + вчера.

Какие могут быть ещё «закономерности возникновения и развития новой структуры»? – Они уже есть, перед нами и заложены в основу.

Следствием и новизной может быть что-то другое, но не само исходное положение.

Тем не менее, такая модель получает собственное имя и становится *тройной золотой спиралью*. По двум из них что-то сжимается с шагом ряда Фибоначчи, например, вероятностные распределения по координатам и импульсам. Третья спираль характеризует распределение по структурным параметрам и разворачивается с шагом ряда Люка, без каких-либо ограничителей. Собственно и всё авторское пояснение. Со ссылкой на 4-буквенное преобразование Шевелева, рассмотренное выше.

В целом модель просто декларируется, а кружочки triple helix заполнены двучленно-аддитивной рекурсией. Зато в итоге – тройная золотая спираль.

Не важно, что гасло, как говорили на Руси, зато звучит!

Красивый миф и золотоносная эйфория.

Золотого сечения в природе нет. Золотой рост на основе золотой константы теоретически возможен, хотя мы не встречали.

Между тем, прославление золотой спирали превратилось в обывательский миф, разносимый и распространяемый многими мечтателями и φ-натиками. Они уверяют, что спираль у моллюсков как раз и является золотой спиралью, что попросту неверно.

То же относится и к спиральным галактикам, ураганам и множествам других спиралей, обнаруживаемых в природе.

На самом деле подавляющая часть подобных спиралей являются аппроксимациями логарифмических спиралей, которых бесконечно много, но они даже близко не относятся к золотой.

Большинство изображений, якобы показывающих золотую "природу" естественно образующихся спиралей, получено путем приложения золотой спирали к отредактированным картинкам. Зачастую путем обычной подгонки.

Иногда спиральные закономерности действительно имеют отношение к "ЗС", например, в цветочных головках растений. Однако даже эти спирали не являются золотыми, а их вероятная связь с "ЗС" устанавливается иными способами, без участия спиралей.

Существует также мнение, что универсальность золотого отношения – красивый миф.

Как следствие нашего глубинного стремления к простой картине. Из той же категории, что и философский камень или Грааль [25]. А "учение" о тотальности золотоносной «математики гармонии» – прекрасная подоснова, чтобы открыть собственные интернетовские сайты-страницы, сплошь увешанные шишками, раковинами, спиральными галактиками, картинами Леонардо да Винчи, пирамидами и проч.

Также как и безмерно преувеличена божественность золотого отношения с налетом таинственности.

Как правило, вещи наделяют золотой пропорцией с большими допущениями.

Ни о какой точности говорить не приходится. При желании «божественные пропорции» можно обнаружить где угодно.

Например, в природе встречаются разнообразные спирали, близкие к архимедовым или логарифмическим. Но золотой мы не находим. Она отличается крутым, почти семикратным восхождением кривой за один оборот ($Ф^4 \approx 6{,}85$), притом как в раковинах морских моллюсков прирост радиуса составляет не более 5.

Раковины немного похожи на золотую спираль. Но всё-таки они другие: и по количеству витков, и меньшему расстоянию между ними. Невооруженным глазом видно, что ни у одного моллюска коэффициент скручивания раковины и близко не равен 1,62.

А в человеческом теле столько разных точек, между которыми допустимо выполнять измерение, причем с немалым разбросом и погрешностью, что "ЗС" рисуется свободно.

Все эти "приблизмы" – околонаучная мифология. Из серии «вокруг да около». Приобщение к старине, по замыслу авторов, должно символизировать величие и основательность материала, навевая одновременно марево колдовской таинственности.

В западной литературе золотоносный бум пошел на спад ещё в 90-х годах прошлого века. Появились обстоятельные работы, такие как: заблуждения о золотом отношении [26], нахождение «золотого числа», не прилагая особых усилий [27], противоположная точка зрения на золотое отношение [28] и др.

В них отмечается, что математические свойства "ЗС", как правило, излагаются в целом правильно, но многое из того, что представлено об этом в искусстве, архитектуре, литературе и эстетике является ложным и всерьез вводит в заблуждение [26].

Красивая легенда, проецирующая элегантное отношение математики на природные структуры и объекты.

Вещи причисляют "ЗС" обычно с большими допущениями, когда не приходится говорить ни о какой точности и/или математической универсальности.

При желании "ЗС" можно идентифицировать где угодно и в чём угодно.

К сожалению, эти утверждения о "ЗС" достигли статуса якобы общеизвестных истин и широко повторяются. Даже школьные учебники геометрии дают много неверных утверждений о золотом соотношение. Потребовалась бы большая книга, чтобы документировать всю дезинформацию о "ЗС".

В то же время русскоговорящая исследовательская аудитория только начала входить во вкус. Наряду с умеренно-центристским изложением отдельных авторов, появился шквал работ с настоящей погоней за "ЗС".

Особенно выделяется самый большой и раздутый миф "ЗС" в дизайне.

Хотя эти незапамятные попытки нормирования давно отвергнуты из-за обилия форматов и множества других факторов эстетического восприятия.

Взять, например, статью с колоритным названием «Золотое сечение – *морфологический закон* живой природы» [29], в которой высказано 12 однотипных предположений (!). Зато броским названием они авансом возведены в ранг закона, как религиозный "символ веры".

Можно вспомнить немецкого поэта и философа А. Цейзинга (1855): «ЗС господствует в архитектуре и природе». – Деление отрезка в крайнем и среднем отношении, которое якобы удовлетворяет глазу человека и присуще пропорциям человеческого тела, он распространил на античную и ренессансную архитектуру. Естественно, как чистое предположение.

И посыпались, как из рога изобилия, многочисленные причудливые, но по большей части фальшивые утверждения, как "ЗС" и числа Фибоначчи связаны с эстетикой человека.

Одиночные высказывания об искусственном навязывании "ЗС" в архитектуре и искусстве [30] утонули в общем хоре восторженных голосов «аллилуя ЗС».

Что и заслуживает престижного имени в живой природе, так это деление пополам. Отсюда и особое царство приставок би-, ди-: дихотомия, бифуркация, двоичный код, ...

Научное сообщество Fibonacci Association (США), существующее с 1963 года, признает золотое отношение как особую математическую константу, но без напыщенного прикладного значения, включая проявление в природе. Отсюда, мягко говоря, прохладное отношение к виртуально-сетевому Институту ЗС и отсутствие попыток вступать в какие-либо дискуссии с "золотоискателями" или адептами "ЗС", из-за их болезненного восприятия и нетерпимости к критическим замечаниям.

Подобно бессмертным кроликам Фибоначчи, можно рассматривать процесс деления клеток с торможением одной из двух сестринских. Причем подобных моделей может быть много. Как принцип начала некоторого процесса репликации, "кроличья" модель небезынтересна и может описывать реальные процессы на начальной стадии.

Но разве всё это препятствие для золотого локомотива?

Сначала появилось *сечение*. Потом для его объяснения стали применять понятие *целого*. Но и этого показалось мало. Поскольку геометрические сечения могут быть разными, начали придумывать разные обобщения с сохранением терминологического золотого окраса.

В результате появились числовые монстры: «*обобщенные золотые сечения целого*». – Такая себе божественно-восхитительная и многоликая сивка-бурка, – в бескрайнем множестве чисел, и сплошь золотых.

В общем, хорошие жизненные истории, жаль только неправдивые…

К слову, математик Фибоначчи не проявлял малейшего интереса к числам, названных теперь в его честь, а просто включил древнюю задачу о вымышленной популяции кроликов среди сотен арифметических задач в свою главную книгу *Liber abbaci* (1202) с продвижением в Европу арабских цифр и десятичной системы счисления.

Формирование модели золотого роста.

Построение метрических отрезков, длины которых равны золотым константам $\Phi = \left(\sqrt{5}+1\right)/2$ и $\phi = \Phi^{-1} = \left(\sqrt{5}-1\right)/2$, Весьма простое. Причем $\phi^3 + 2 = \sqrt{5} = \phi + \Phi = 1 + 2\phi$.

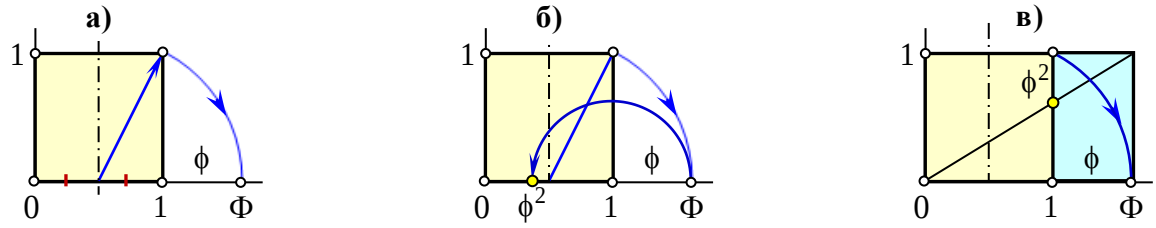
Один (!) поворот циркуля из середины стороны квадрата, и на одном рисунке сразу получаем две константы ϕ, Φ (рис. 4-а).

Диагональ половины квадрата 1×1 равна $\sqrt{5}/2$. Число $\Phi = 1/2 + \sqrt{5}/2$ – по построению, как сумма двух отрезков. Приращение к стороне квадрата составляет $\Delta = \Phi - 1 = -1/2 + \sqrt{5}/2 = \phi$. И число ϕ как разность двух отрезков $\sqrt{5}/2$ и $1/2$. Более того, все три числа $1, \phi, \Phi$ последовательно выстраиваются на одной вещественной оси (рис. 4).

Модель золотого роста $\dfrac{1+\Delta}{1} = \dfrac{1}{\Delta}$ (не деления!) – наипростейшая в своем геометрическом построении-представлении.

Модель отвечает принципу минимальной сложности и одновременно представляет три константы 1, ϕ, Ф . Поэтому является достоверно правильной.

Никакого пресловутого сечения, хотя и с золотым окрасом. Но есть золотая пропорция. Как равенство двух отношений. Безотносительно к геометрическим построениям, и тем более к делению. При делении единичного отрезка мы не видим Ф , только наблюдаем ϕ .



формирование золотых констант ϕ, Ф

золотое деление единичного отрезка

золотой прямоугольник

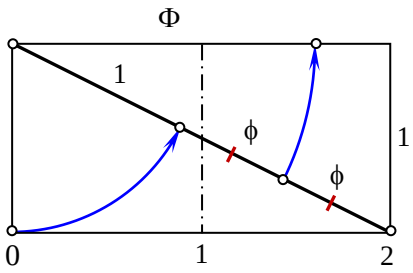
Рис. 4. Золотой рост: числа 1, ϕ, Ф на одной вещественной оси

Если сильно хочется разделить геометрический объект, наделенный свойством целого и условно принятый в виде единицы, то достаточно выполнить дополнительный поворот циркуля (рис. 4-б). То есть "ЗС" является вторичным сопутствующим результатом модели золотого роста.

Сам термин "ЗС" в обиходе желательно максимально ограничить и переходить на более правильное понимание-представление золотой пропорции и/или золотого отношения.

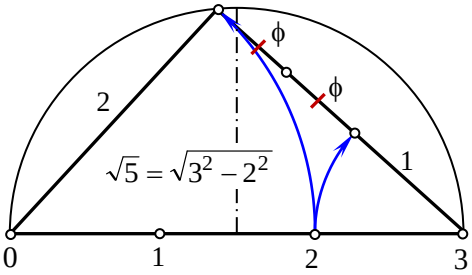
Получаем также золотой прямоугольник (рис. 4-в), который при последовательном выделении в нем квадратов воссоздает центр золотой спирали. Здесь же золотая линия – диагональ прямоугольника $1\times\Phi$, которая делит вертикальную сторону квадрата в золотой пропорции.

На рисунке 5 приведены дополнительные построения золотых констант ϕ, Ф .

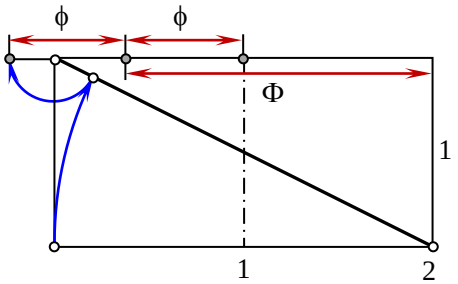


Число ϕ как половина отрезка $\sqrt{5}-1$,

при этом $\Phi=1+\phi$, $\sqrt{5}=\sqrt{1^2+2^2}$



Числа ϕ и $\Phi=1+\phi$ на основе прямоугольного треугольника с равенством $\sqrt{5}=\sqrt{3^2-2^2}$



Перевод отрезка длиной 2 на диагональ отсекает отрезок $\phi^3=\sqrt{5}-2$, тогда $\phi^3+2=\sqrt{5}=\phi+\Phi=\phi+(1+\phi)$

Рис. 5. Дополнительные геометрические построения золотых констант ϕ, Ф

В задаче деления-расщепления целого получается два решения ϕ или Ф в зависимости от того, в качестве какого отношения принимается независимая переменная *x*.

Общая задача. Исходную величину (отрезок, число, ...) изменить так, чтобы выполнялась пропорция

$$\frac{\text{Новое}}{\text{Исходное}} = \frac{\text{Исходное}}{\text{Приращение}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1+\Delta}{1} = \frac{1}{\Delta}.$$

Имеем два решения: $\Delta_{1,2} = \phi, -\Phi$. Просматривается "движение" единицы по адекватным тождествам относительно золотой константы $\Phi = \phi^{-1}$:

$$\begin{array}{lll} \phi^2 = \phi + 1; & \qquad & \Phi^2 = \Phi + 1; \\ \phi + 1 = \Phi; & & \Phi = 1 + \phi; \\ 1 + \Phi = \Phi^2. & & 1 = \phi + \phi^2. \end{array}$$

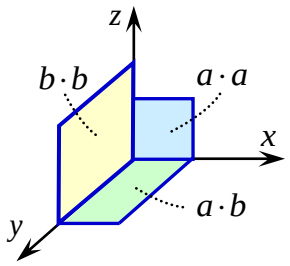
Видна также геометрическая прогрессия: $1,\ \Phi,\ \Phi^2,\ \ldots$

Просматривается аддитивное свойство $\Phi^2 = \phi + 1$ и/или в виде двучленно-аддитивной рекурсии с единичными коэффициентами $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ – прообраза чисел Фибоначчи.

Исходя из общих свойств, золотая пропорция имеет расширение:

$$\frac{b+a}{b} = \frac{b}{a} = \frac{a}{b-a} = \frac{b-a}{2a-b} = \frac{2a-b}{2b-3a} = \frac{2b-3a}{5a-3b} = \ldots$$

В частности, следует $(b+a)(b-a) = ab$, а для единичной суммы $b+a=1$ имеем $b-a=ba$, то есть разность величин численно равна их произведению. Или геометрически через равенство площадей двух прямоугольников: $1\cdot(b-a) = b\cdot a$, как в античные времена.



Разность двух квадратов $b\times b$ и $a\times a$, расположенных в двух ортогональных плоскостях, уравновешивается прямоугольником $b\times a$ в третьей ортогональной плоскости.

Наличествует такая цепочка преобразований:

$$b^2 - a^2 = ab \quad \rightarrow \quad \frac{b}{a} - \frac{a}{b} = 1 \quad \rightarrow \quad z^2 - z - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad z = \frac{b}{a} = \Phi.$$

Аналитические формы $z^2 - 1^2 = z\cdot 1$ или $\Phi^2 - 1^2 = \Phi\cdot 1$ аналогично отражают геометрическую равновеликость разности двух квадратов и прямоугольника, построенного на их сторонах.

Золотое отношение как закон созидания.

"ЗС" – закон созидания. Только так нужно читать аббревиатуру "золотого сечения". Ибо сечение-деление – чисто математическая абстрактная задача.

Наиболее значимые соотношения $\Phi\cdot\phi = \Phi - \phi = 1$ следует непосредственно из теоремы Виета для квадратного уравнения $x^2 - x - 1 = 0$.

Перевод на практику дает приумножение по формуле $\Phi = 1 + \phi$.

Так мы переходим от абстрактной математики (задачи деления) к реальности природного синтеза, включая возможное применение в филлотаксисе.

Решение заключается в построении пропорциональных отрезков или частей целого.

Но это не обязательно сечение целого. Даже в геометрии могут рассматриваться совершенно отдельные три "прямые". Следует помнить, что древние не столько секли и пилили, а сколько строили геометрию пропорциональных отрезков. Как частный случай-вариант – деление прямой в отношении "ЗС".

Кроме того, допускается вариант «внешнего деления».

Да, и кто сказал, что пропорция должна быть исключительная нисходящая?

Формулировки Евклида позволяют строить геометрию «восходящих прямых (отрезков)». Так мы приходим к современной форме-интерпретации $1 + \phi = \Phi$ [10].

Геометрический язык остается евклидовым, числовые вариации – разные.

Вместо заключения.

Наукообразная терминологическая каша обычно "замешана" на щедром сочинительстве и профессиональной небрежности. Неизменно порождая искаженное и, увы, малограмотное восприятие предметной области. Не случайно, подобные действия иногда квалифицируют научно-терминологическим "экстремизмом" [31].

Подмена точных терминов-образов расплывчатыми словесами в лучшем случае остается незамеченной. В худшем варианте, провоцирует неразбериху.

Остается напомнить принцип достаточного основания Аристотеля. Можно в интерпретации Г. Лейбница: «ничего не бывает без основания».

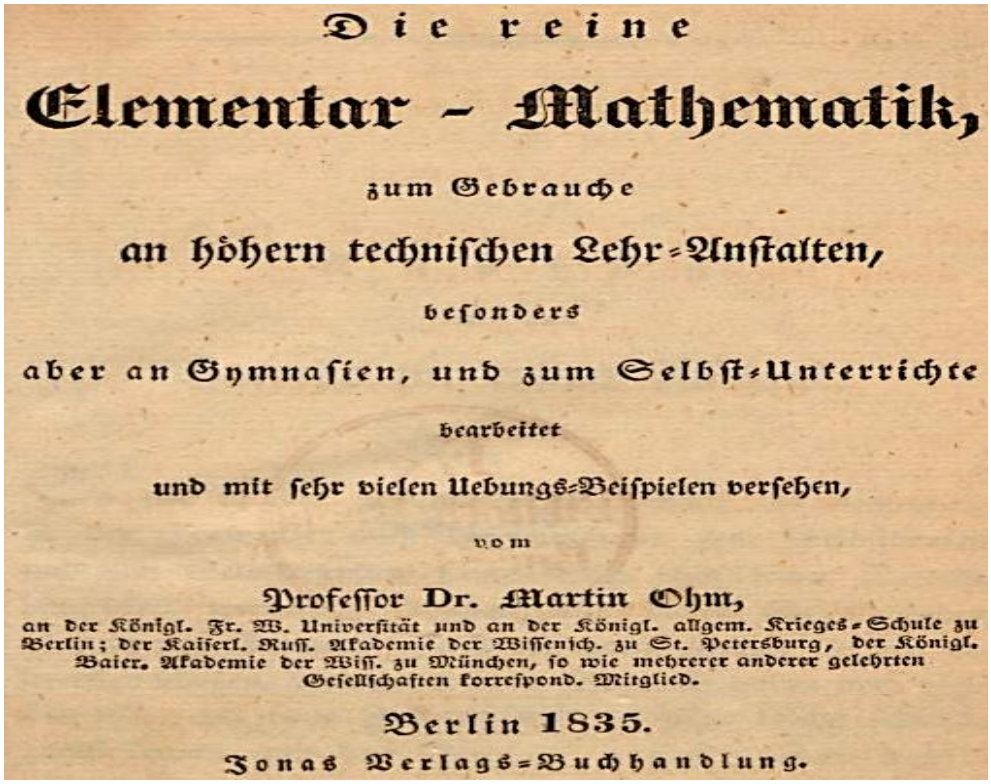
Ex nihilo nihil...

Приложение

К истории термина «золотое сечение»

Немецкий математик Мартин Ом в учебнике «Чистая элементарная математика» (1835, § 96, с. 194) приводит пропорцию $r:e=e:(r-e)$, которую можно перезаписать как

$$\frac{r}{e}=\frac{e}{r-e} \quad \Rightarrow \quad \frac{r+e}{r}=\frac{r}{e}.$$



Die reine

Elementar - Mathematik,

zum Gebrauche

an höhern technischen Lehr-Anstalten,

besonders

aber an Gymnasien, und zum Selbst-Unterrichte

bearbeitet

und mit sehr vielen Uebungs-Beispielen versehen,

vom

Professor Dr. Martin Ohm,

an der Königl. Fr. W. Universität und an der Königl. allgem. Krieges-Schule zu Berlin; der Kaiserl. Russ. Akademie der Wissensch. zu St. Petersburg, der Königl. Baier. Akademie der Wiss. zu München, so wie mehrerer anderer gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied.

Berlin 1835.

Jonas Verlags-Buchhandlung.

194 Fünftes Kapitel. §. 96.

des regulären Sechsecks und des regulären Zehnecks gleich; d. h. $c^2=d^2+e^2$.

4) Im regulären Sechseck ist die Seite d desselben allemal dem Radius r gleich; d. h. $d=r$.

5) Theilt man den Radius r dergestalt in zwei Theile e und $r-e$, daß das Stück e die mittlere Proportionale wird, zwischen dem ganzen Radius r und dem andern kleinern Stück $r-e$ desselben, also daß

$$r:e=e:(r-e)$$

ist *), so ist e die Seite des regulären Zehnecks.

*) Diese Zertheilung einer beliebigen Linie r in 2 solche Theile, nennt man wohl auch den goldenen Schnitt; auch sagt man in diesem Falle zuweilen: die Linie r werde in stetige Proportion getheilt.

В сноске он пишет: «Подобное разделение произвольного отрезка *r* на две части принято также называть золотым разрезом».

Такая формулировка создает впечатление, что он не сам придумал этот термин, а скорее привел уже принятое название, хотя в первом издании книги (1826) это название отсутствует.

То есть выражение *goldene schnitt* стало завоевывать популярность лишь к 1835 году, а до этого появилось в математических кругах, как разговорное выражение.

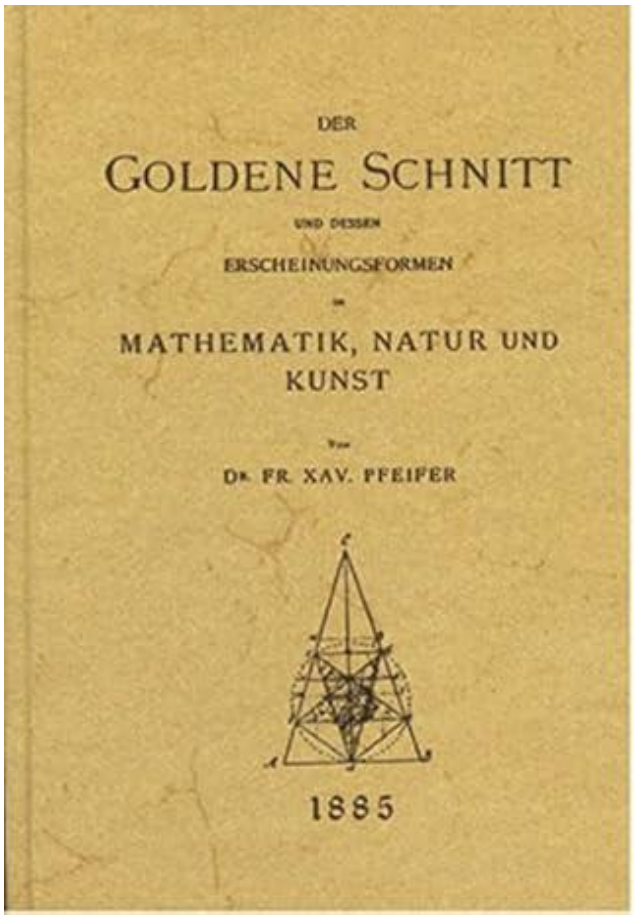
Видимо, под впечатлением мыслей выдающегося ученого Иоганна Кеплера: «Существует два сокровища в геометрии: одно есть отношение диагонали прямоугольника к сторонам, другое – деление линии в крайнем и среднем отношении… Обе теоремы – бесконечной полезности и потому в высшей степени драгоценны... первую теорему, говорю я, вы справедливо уподобите куску золота, вторую, о пропорциональном сечении, назовете драгоценным камнем. Ведь она, хотя и прекрасна сама по себе, однако без первой ничего не стоит». – J. Kepler, Mysterium Cosmographicum, 1596.

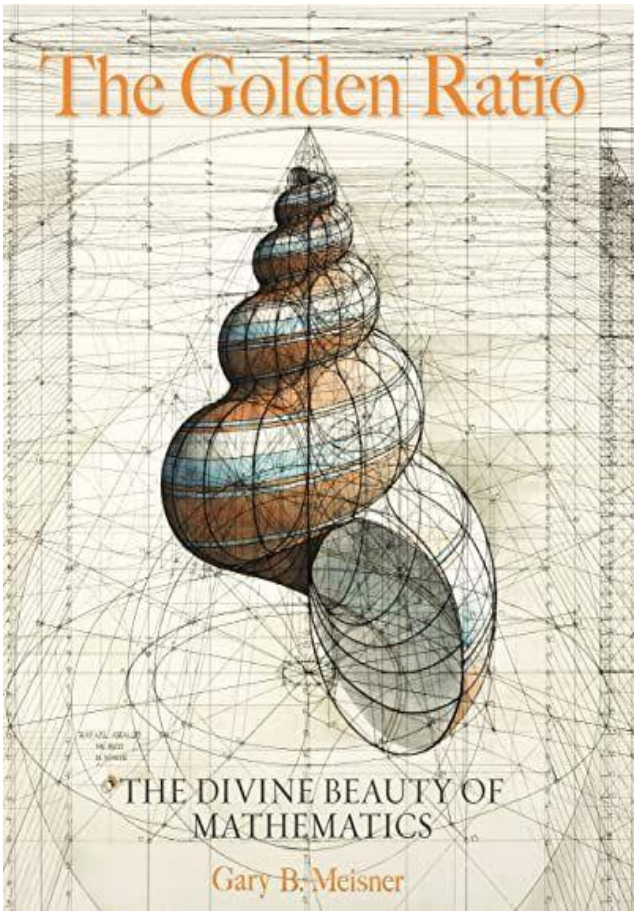
Хотя золото "прилипло" с точностью до наоборот: от теоремы Пифагора перелетело к евклидовому делению отрезка. Впрочем, это уже не столь важно.

Только после книги Ома термин «*goldene schnitt*» стал часто повторяться в немецкой литературе по математике, искусствоведению и прочно вошел в научный оборот.

Со временем он претерпевал некоторые изменения и получал похожие наименования-модификации (разрез, сечение, отношение, среднее и др), с неизменным сохранением слова *golden*.

"Золотое сечение" по-английски *golden section* впервые прозвучало в одноименной статье Эммы Аккерман [32] с целью популяризации в общеобразовательной англоязычной среде монографии немецкого профессора математики F.X. Pfeifer «Золотое сечение и его проявления в математике, природе и искусстве» [33].





Литература:

1. Савин А.П. Число Фидия – золотое сечение // Квант, 1997, № 6. – https://kvant.mccme.ru/pdf/1997/06/kv0697kaleid.pdf.

2. Василенко С.Л. Дуализм «двух сокровищ геометрии»: теоремы Пифагора и золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.23021, 03.02.2017. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163206.htm.

3. Урманцев Ю.А. Симметрия природы и природа симметрии (Философские и естественнонаучные аспекты) – М.: Мысль, 1974. – 132 с. – http://www.sci.aha.ru/ots/OTS_Simmetry.pdf.

4. Мартин Гарднер. Математические головоломки и развлечения. – 2-е изд., испр. и доп. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1999. – 447 с.

5. Fowler D.H. A generalization of the golden section // Fibonacci Quarterly, 20.2 (1982), 146–158. – https://www.fq.math.ca/20-2.html.

6. Шустер А. Популярные лекции низшей и высшей математики. – С.-Петербург: "Вестник Знания" (В.В. Битнера), 1906. – 130 с.

7. Щетников А.И. Лука Пачоли и его трактат «О божественной пропорции» / Математическое образование, 2007, 1 (41), 33–44.

8. Василенко С.Л. Золотое сечение как проявление бесконечного в конечном. Часть 1. Теологический и математический подходы // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28973, 14.05.2024. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165595.htm.

9. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи (1951). – 5-е изд., доп. – М.: Наука, 1984. – 144 с.

10. Василенко С.Л., Никитин А.В. От золотого отношения к равновесию, синтезу и созиданию / Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 17.01.2013. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=93&sm=2, http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162094.htm.

11. Ицкович Г. Модель тройной спирали. 2011. – https://cyberleninka.ru/article/n/model-troynoy-spirali.

12. Розин Б.Н. Анализ модели филлотаксиса // АТ. – М.: Эл. № 77- 6567, публ. 17144, 25.12.2011. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322101.htm.

13. Rozin B. Double helix of phyllotaxis: analysis of the geometric model of plant morphogenesis. – BrownWalker Press, 2020. – https://bookpump.com/bwp/pdf-b/7347488b.pdf.

14. Щетников А.И. Проблема филлотаксиса // Математическое образование, 2003. – Вып. 1(24). – С. 19-37. – https://nsu.ru/classics/pythagoras/Phyllotaxis.pdf.

15. Adler I, Barabe D, Jean R.V. A history of the study of phyllotaxis // Annals of Botany, 1997, 80(3), 231-244.

16. Rozin B. Biomechanical model of morphogenesis of spiral phyllotaxis patterns and its computer's visualization // American J. of Biomedical Science and Research, 2024, 22(1), 577-579. – https://biomedgrid.com/pdf/AJBSR.MS.ID.002914.pdf.

17. Vogel H. A better way to construct the sunflower head // Math. Biosciences, 1979, **44** (3-4), 179-189.

18. Ridley J.N. Packing efficiency in sunflower heads // Math. Biosciences, 1982, **58** (1), 129-139. – https://www.researchgate.net/publication/242991835.

19. Шевелёв И.Ш., Марутаев М.А., Шмелёв И.П. Золотое сечение: три взгляда на природу гармонии. – М.: Стройиздат, 1990. – 344 с.

20. Шевелёв И.Ш. Единицы естественной геометрии (1-е сообщение) // Эко-потенциал, 2016, № 3 (15), 155-185 / АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 25484, 06.06.2019. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001g/00164052.htm.

21. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи // Доклады Академии наук УССР, 1993, т. 208, № 7, 9-14.

22. Василенко С.Л. Гиперболические метаморфозы аддитивно-рекуррентных последовательностей // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16255, 27.12.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161750.htm.

23. Василенко С.Л. Гиперболические лабиринты на пути к гармонии // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15513, 06.09.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161539.htm.

24. Василенко С.Л. О бедном квадрате замолвите слово... // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 15675, 28.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161586.htm.

25. Розин В.Г. "Золотое сечение", 2019. – https://www.youtube.com/watch?v=y0dXFh5yTtU.

26. Markowsky G. Misconceptions about the Golden Ratio // MAA's College Math. J., 1992 23 (1), 2-19. – https://assets.speakcdn.com/assets/2433/wijetunge-resource_4.pdf.

27. Fischler R. How to find the golden number without really trying // Fibonacci Quarterly, 19.5 (1981), 406-410. – https://www.fq.math.ca/19-5.html.

28. Clement Falbo. The Golden Ratio: A Contrary Viewpoint // The College Math. J., 36 (2005), 123-134. – http://www.jstor.org/stable/30044835.

29. Розин Б.Н. Золотое сечение – морфологический закон живой природы // Проблеми гармонії, симетрії і золотого перетину в природі, науці та мистецтві: зб. наук. пр. – Вінниця, 2003, вип.15, 178-189.

30. Радзюкевич А.В. Красивая сказка о "золотом сечении" // АТ – М.: Эл. № 77-6567, публ. 12981, 17.02.2006. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320016.htm.

31. Василенко С.Л. "Золотая модель" как синтез прогрессий // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.23168, 20.03.2017. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163242.htm.

32. Ackermann E.C. The golden section // The American Math. Monthly, 1895, vol. 2, no. 9/10, 260-264. – https://www.jstor.org/stable/pdf/2969272.pdf.

33. Pfeifer F.X. Der goldene Schnitt und dessen Erscheinungsformen in Mathematik, Natur und Kunst. – Augsburg: Huttler, 1885.

© ВаСиЛенко, 2025
Украина, Харьков