Е. А. ГУБАРЕВ

ПРИНЦИПЫ РЕАЛЬНОЙ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ



Фонд перспективных технологий и новаций

Москва 2020

УДК 530.1; 530.12
ББК 22.313
Г930

Губарев Е.А.
Г930 Принципы реальной относительности / Е.А. Губарев. – Москва: Фонд перспективных технологий и новаций, 2020. – 336 с.: с ил.
ISBN 978-5-6040700-9-3

Представлена теория относительности реальных неинерциальных систем отсчета, которая обобщает специальную относительность — относительность инерциальных и в общем случае абстрактных систем отсчета. Элементарной реальной системой отсчета является материальная частица с четверкой ортонормированных векторов — ориентируемая точка в четырехмерном пространстве событий. Важнейшим моментом теории является установление жесткой связи между четырехмерной ориентацией реальной системы отсчета, находящейся во внешнем поле, и координатами событий в этой системе. Представлены основные положения и результаты трех дочерних направлений — геометрической модели сильного взаимодействия, динамики системы ориентируемых точек и электродинамики ориентируемой точки, которые имеют ряд следствий, приводящих к «аномальным» экспериментальным явлениям.



© Губарев Е.А., 2020
Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельца авторских прав.

Оглавление

Принятые обозначения **9**

Предисловие **12**

1. Поле коэффицентов Ламэ **17**

1.1. Сопровождающий локально-лоренцевый репер . . . 17

1.2. Координатный репер. Ортогональные мировые координаты 21

1.3. Анизотропное преобразование к ортонормированному координатному реперу 23

1.4. Физическая трактовка ортогональных мировых координат. Коэффициенты Ламэ 25

1.5. Пример вычисления коэффициентов Ламэ 30

1.6. Историческая справка 31

2. Принцип геометризации полей **35**

2.1. Геометрические теории 35

2.2. На пути к монистической парадигме — геометродинамика Дж. Уилера 37

2.3. Геометризация правой части уравнений Эйнштейна — переход к монистической парадигме (Г.И. Шипов, 1976, 1979) 40

2.4. Принцип геометризации полей 43

3. Координатные системы и системы отсчета **47**
3.1. Геометрические теории 47
3.2. Координатные системы. Еще раз об h-поле 49
3.3. Пассивные преобразования координат 52
3.4. Активные преобразования координат 53
3.5. К истории вопроса: А. Эйнштейн 54
3.6. К истории вопроса: В.А. Фок 57
3.7. К истории вопроса: Л. Бриллюэн 60
3.8. К истории вопроса: А.Л. Зельманов 62
3.9. К истории вопроса: В.И. Родичев 63

4. События **67**
4.1. Преобразование координат событий из удаленной квазиинерциальной системы отсчета в неинерциальную реальную систему отсчета 67
4.2. Преобразование координат событий между реальными системами отсчета. Начальные условия 70
4.3. Матрица четырехмерной ориентации 73
4.4. Пример преобразования координат события между реальными системами отсчета 76
4.5. Замечания к преобразованию координат события между макроскопическими реальными системами отсчета 82
4.6. Координаты событий в реальных системах отсчета, связанных с микроскопическими телами 87
4.7. Реальная относительность vs специальная относительность 91

5. L-тензорный анализ **99**
5.1. L-группа преобразований 99
5.2. L-тензоры, L-скаляры 102
5.3. L-ковариантная производная 106
5.4. L-инвариантность интервала 108

5.5. L-векторы четырехмерной скорости и четырехмерного импульса частицы 109
5.6. О преобразовании тензора Римана между реальными системами отсчета 111

6. Энергия, время **115**
6.1. Координаты и скорость частицы в реальной системе отсчета 115
6.2. Энергия и импульс частицы в реальной системе отсчета 121
6.3. Энергия покоя 125
6.4. Собственное время 128
6.5. О «парадоксе часов» 129
6.6. Об эффекте замедления времени в экспериментах на ускорителях 132
6.7. Рассуждения о возможных классах реальных систем отсчета 135
6.8. О скорости света в неинерциальной реальной системе отсчета 140
6.9. Синхронизация часов: реальная относительность vs специальная относительность 141
6.10. Геометрия вращающегося диска: реальная относительность vs специальная и общая относительность 145
6.11. Эффект Саньяка: реальная относительность vs специальная относительность 147
6.12. Принцип нелокальной связи частиц, собственная система отсчета которых принадлежит к одному классу 150
6.13. Об экспериментах с движущимися часами 151

7. Динамика ориентируемой точки **159**
7.1. О преобразовании величин между реальными системами отсчета 159

7.2. О принципе реальной относительности и принципе соответствия 163
7.3. Уравнение движения свободной ориентируемой частицы 165
7.4. Уравнение движения ориентируемой частицы в мировых координатах 167
7.5. Четырехмерная сила инерции 173
7.6. Лифт Эйнштейна: реальная относительность vs общая относительность 181
7.7. Уравнение ориентации ориентируемой частицы 186
7.8. Обратное уравнение ориентации 192
7.9. Инерциоид: общие сведения 194
7.10. Инерциоид и классическая механика 196
7.11. Инерциоид и динамика ориентируемых точек . . . 203

8. Первое дочернее направление — геометрическая модель сильного взаимодействия 217
8.1. К истории вопроса 217
8.2. Открытие и описание ядерных сил 218
8.3. Требования реальной относительности. Выбор решений с помощью эффективных потенциалов 223
8.4. Общерелятивистская электродинамика (электродинамика больших полей) 224
8.5. Пространство событий геометрической модели сильного взаимодействия 229
8.6. Рассеяние геодезических в пространстве НУТ . . . 231
8.7. *L*-ковариантное уравнение для квантовой бесспиновой частицы 236
8.8. Квантовая теория рассеяния в пространстве НУТ 238
8.9. Результаты расчетов. Перспективы развития модели 245
8.10. Краткие выводы 249

9. Второе дочернее направление — электродинамика ориентируемой точки 251
9.1. К истории вопроса 251
9.2. Классическая электродинамика и специальная относительность 252
9.3. Уравнения электродинамики ориентируемой точки в общем виде 259
9.4. Круговое нерелятивистское движение заряда 265
9.5. Электромагнитное поле в пустоте: плоские монохроматические волны 271
9.6. Электромагнитное поле в пустоте: плоские монохроматические волны (продолжение) 279
9.7. Три способа генерации статического электромагнитного поля при круговом движении зарядов 285
9.7.1. Первый способ: $\rho \neq 0$, $\mathbf{j} \neq 0$, $\mathbf{\Omega} \neq 0$ 286
9.7.2. Второй способ: $\rho = 0$, $\mathbf{j} \neq 0$, $\mathbf{\Omega} \neq 0$ 288
9.7.3. Третий способ: $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$, $\mathbf{\Omega} \neq 0$ 289
9.8. Экспериментальные следствия электродинамики ориентируемой точки: неклассические явления . . . 291
9.8.1. Униполярная индукция М. Фарадея 291
9.8.2. Эффект сверхпроникающего излучения и эффект двойного сигнала Н.А. Козырева . . 295
9.8.3. Экспериментальная генерация квазистатических ($\Omega \gg \omega$) электромагнитных полей. Торсионные генераторы А.Е. Акимова 298
9.8.4. Опыты Ф.Ф. Менде с кольцевыми сверхпроводниками 301
9.8.5. Поле вращающихся нейтральных объектов. Опыты И.А. Мельника 304
9.9. Краткие выводы 306

Общее рассуждение от автора 310

Приложения **314**

Приложение 1. Коэффициенты вращения Риччи и ковариантное дифференцирование в пространстве абсолютного параллелизма 314

Приложение 2. Метрика Шварцшильда в декартовых координатах 318

Приложение 3. О классе систем отсчета, основанных на удаленной движущейся квазиинерциальной системе $\overline{K}$ 319

Литература **323**

Принятые обозначения

Криволинейные голономные координаты базы (трансляционные координаты риманова пространства) $x^i = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ в книге называются *мировыми координатами*. Мировые индексы обозначаются прописными латинскими буквами середины алфавита $i, j, k, l, \ldots$ и пробегают значения 0, 1, 2, 3. Мировым координатам в каждой точке соответствует координатный репер

$$\mathbf{g}_{(k)} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^k}.$$

Четверка ортонормированных векторов

$$\mathbf{e}_{(a)} = \left(\mathbf{e}_{(0)}, \mathbf{e}_{(1)}, \mathbf{e}_{(2)}, \mathbf{e}_{(3)}\right),$$

представляющих ориентируемую точку, образуют координатный репер в соответствующем касательном пространстве, генерируя неголономные координаты x^a в касательном расслоении. Координаты x^a называются *локальными* или *локально-лоренцевыми координатами*. Локальные индексы обозначаются прописными буквами начала латинского алфавита $a, b, c, d, \ldots$ и принимают значения 0, 1, 2, 3.

Четырехмерная величина $\mathbf{Z}$ может иметь как мировые, так и локально-лоренцевы координаты

$$\mathbf{Z} = \mathbf{g}_{(i)} Z^i = \mathbf{e}_{(a)} Z^a,$$

соотношение между которыми определяется коэффициентами Ламэ

$$Z^i = h^i{}_a Z^a, \quad Z^a = h^a{}_i Z^i.$$

Любая величина, выраженная в мировых координатах, может быть приведена к локально-лоренцевым координатам, и наоборот:

$$W^a{}_{bc} = h^a{}_i\, W^i{}_{jk}\, h^j{}_b\, h^k{}_c, \quad W^i{}_{jk} = h^i{}_a\, W^a{}_{bc}\, h^b{}_j\, h^c{}_k.$$

Симметризация и антисимметризация пар индексов:

$$W_{(ij)} = \frac{1}{2}(W_{ij} + W_{ji}), \quad W_{[ij]} = \frac{1}{2}(W_{ij} - W_{ji}).$$

Исключение одного или нескольких индексов из симметризации или антисимметризации:

$$W_{(i|mn|j)} = \frac{1}{2}(W_{i|mn|j} + W_{j|mn|i}), \quad W_{[i|mn|j]} = \frac{1}{2}(W_{i|mn|j} - W_{j|mn|i}).$$

Трехмерные вектора обозначаются жирными буквами: $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$. Трехмерные мировые индексы обозначаются прописными греческими буквами начала алфавита α, β, $\gamma, \ldots$ и принимают значения 1, 2, 3. Скалярное и векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обозначаются как $(\mathbf{ab})$ и $[\mathbf{ab}]$.

Производные

Символы Кристоффеля (коэффициенты связности базы расслоения): $\Gamma^i{}_{jk}$.

Коэффициенты вращения Риччи (коэффициенты связности неголономных координат x^a в касательном расслоении): $T^{a\cdot\cdot}_{\cdot bk}$.

Частная производная по мировым (трансляционным голономным) координатам:

$$s_{,k} = \frac{\partial s}{\partial x^k}.$$

Ковариантная производная в базе (ковариантная производная относительно символов Кристоффеля):

$$\nabla_k A^i = A^i{}_{,k} + \Gamma^i{}_{jk} A^j.$$

Ковариантная производная в касательном расслоении (L-ковариантная производная):

$$\widetilde{\nabla}_k A^a = A^a{}_{,k} - T^{a\cdot\cdot}_{\cdot bk} A^b.$$

Полная ковариантая производная мультивекторного объекта $A^i{}_a$:

$$\overset{*}{\nabla}_k A^i{}_a = A^i{}_{a,k} + \Gamma^i{}_{jk} A^j{}_a + T^{b\cdot\cdot}_{\cdot ak} A^i{}_b.$$

Метрика

Сигнатура метрики: $(+\ -\ -\ -)$.

Метрика слоя касательного расслоения:

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Метрика базы:

$$g_{ij} = h_i{}^a \, \eta_{ab} \, h^b{}_j.$$

Электродинамические величины

Вектора электрического и магнитного полей в пустоте: $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$.

Тензор электромагнитного поля в декартовых мировых координатах:

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

L-тензор электромагнитного поля в локально-лоренцевых координатах:

$$F^{ab} = h^a{}_i \, F^{ik} \, h^b{}_k = \begin{pmatrix} 0 & -e_x & -e_y & -e_z \\ e_x & 0 & -h_z & h_y \\ e_y & h_z & 0 & -h_x \\ e_z & -h_y & h_x & 0 \end{pmatrix},$$

где e_x, e_y, e_z, h_x, h_y, h_z — компоненты полей, выраженные в координатах касательного расслоения.

Предисловие

Настоящая монография по сути является глубоко переработанным и дополненным изданием книги автора «Теория реальной относительности» [1].

Основной материал монографии изложен в главах с первой по шестую.

В первой главе, с опорой на работы А. Эйнштейна 1928 – 1931 гг. по пространству с абсолютным параллелизмом векторов, излагается математический аппарат поля коэффициентов Ламэ, на основе которого находится зависимость координат событий в реальной неинерциальной системе отсчета от координат событий в локально-лоренцевой системе отсчета, касающейся первой.

Во второй главе развивается принцип геометризации полей. Здесь он излагается в том смысле, что любое поле (помимо гравитационного), действующее на пробную частицу, должно быть геометризировано и учтено как внешнее поле в уравнениях движения.

В третьей главе развиваются положения о реальных системах отсчета, то есть системах отсчета, ассоциированных с реальными телами. В качестве элементарной реальной системы отсчета предлагается четырехмерная ориентируемая частица — тело отсчета с четверкой ортонормированных векторов, которое «свободно падает» во внешнем поле. Геометризация всех полей, действующих на тело отсчета, позволяет установить жесткую связь его четырехмерной ориентации, с одной стороны, с координатами событий в реальной системе отсчета, с другой стороны.

В четвертой главе более подробно, чем в первой монографии автора, обосновывается дифференциальный закон преобразова-

ния координат событий между реальными системами отсчета. Исходя из его дифференциального характера обоснована необходимость описания «истории существования» реальной системы отсчета от начального момента времени до момента измерения координат событий. Это описание подразумевает задание четырехмерной ориентации текущего положения реальной системы отсчета относительно ее начального положения.

В пятой главе изложен L-тензорный анализ, с помощью которого описываются ковариантные свойства четырехмерных величин при их преобразовании между реальными системами отсчета. Впервые установлена полная L-ковариантность тензора кривизны базы расслоения — тензора Римана $R^{i}{}_{jkm}$.

Шестая глава в основном посвящена собственному времени, то есть времени, измеряемого по часам реальной неинерциальной системы отсчета, движущейся во внешнем поле. Показано, что если реальная система отсчета имеет своим начальным положением удаленную покоящуюся систему отсчета, то собственное время в ней будет совпадать со временем в последней.

Седьмая глава посвящена новому дочернему направлению реальной относительности — динамике ориентируемой точки. В координатах касательного расслоения сформулировано новое уравнение четырехмерной ориентации ориентируемой частицы во внешнем поле

$$h^{a'}{}_{0',k} - \Lambda^{a'}{}_{a,k}\, u^{a} - \Lambda^{a'}{}_{a}\, T^{a\cdot\cdot}_{\cdot b\, k}\, u^{b} = 0. \qquad (0.1)$$

В случае, если все характеристики внешнего поля, входящие в это уравнение, заданы, а неизвестной величиной, подлежащей определению, является матрица четырехмерной ориентации $\Lambda^{a'}_{a}$ собственной системы отсчета частицы относительно начальной системы K, то уравнение (0.1) принимает смысл прямого уравнения ориентации ориентируемой частицы:

$$\Lambda^{a'}{}_{a}(x^{k}) = \mathbb{F}\left[h^{a}{}_{i}(x^{k})\right].$$

Уравнение (0.1) позволяет рассмотреть обратную задачу: в отсутствии внешнего поля $h^{a}{}_{i} = \delta^{a}{}_{i}$, $T^{a\cdot\cdot}_{\cdot b\, k} = 0$, найти индуциро-

ванное поле $h^a{}_i = \delta^a{}_i + \Delta h^a{}_i$ как функцию измененной по внутренним причинам четырехмерной ориентации ориентируемой частицы $\Lambda^{a'}{}_a = \delta^{a'}{}_a + \Delta\Lambda^{a'}{}_a$. Это можно записать следующим образом:

$$h^a{}_i(x^k) = \mathbb{F}^{-1}\left[\Lambda^{a'}{}_a(x^k)\right].$$

В этом случае уравнение (0.1) принимает смысл обратного уравнения ориентации, что дает принципиальную возможность следующего эффекта. Изменяя за счет моментов сил внутреннего происхождения четырехмерную ориентацию частицы, можно индуцировать силовое поле, локально действующее на частицу. Последнее означает, что наведенное поле способно передвигать рассматриваемую частицу, а вместе с ней систему ориентируемых частиц как целое.

Восьмая глава посвящена первому по времени возникновения дочернему направлению реальной относительности — геометрической модели сильного взаимодействия. Эта глава в более сжатом и несколько переработанном виде повторяет материал 4 – 6 глав «Теории реальной относительности». Новацией является доказательство L-ковариантности уравнения Клейна – Гордона на фоне метрики g_{ik} для квантовой бесспиновой частицы.

И, наконец, девятая глава посвящена второму по времени возникновения дочернему направлению — электродинамике ориентируемой точки. Эта глава представляет собой глубоко переработанный материал второй монографии автора «Электродинамика ориентируемой точки» [2]. Впервые изложены экспериментальные следствия новой электродинамики, приводящих к ряду неклассических явлений (то есть явлений, выходящих за рамки классической электродинамики).

В целом монография венчает пятнадцатилетний период целенаправленной работы автора по поиску и описанию новой геометрической структуры, являющейся дополнительной к четырехмерному пространственно-временному континууму. Речь идет о касательном расслоении, то есть о совокупности плоских псевдоевклидовых пространств, касательных в каждой точке к четырехмерному континууму. Открытие этой структуры вовсе не от-

крыло дверь в гипотетическое пятое или шестое измерение, ибо касательное расслоение не обладает метрическими свойствами, то есть свойствами установленного расстояния между любыми ее точками. Неметричность этой структуры компенсируется ее богатыми «аномальными» свойствами, которые не присущи метрическим пространствам.

Обыденный опыт человечества говорит, что метрических размерностей у окружающего пространства четыре — длина, ширина, высота и время. Именно в четырехмерном пространстве-времени пребывает «грубая» или «проявленная» материя, обладающая массой, энергией, локацией (местоположением) и другими характеристиками. Реальная относительность, введя в пространство событий касательное расслоение, и, таким образом, выйдя за границы четырех измерений, имеет возможность описывать уже «тонкие» свойства материи или «тонкие поля». Под «тонкими полями» здесь подразумеваются поля, которые не фиксируются классической измерительной аппаратурой, но которые проявляются косвенным образом при изменении свойств объекта действия этих полей.

Реальная относительность отдает первенство в описании физических явлений новой надпространственной структуре. Согласно принципу реальной относительности [1, с. 12], «уравнения, выражающие законы природы» изначально должны быть сформулированы в координатах касательного расслоения и решены в этих координатах, а лишь затем сами решения спроецированы на пространство мировых координат, так как именно там происходят измерения физических величин.

Касательное расслоение богаче по своим свойствам, нежели четырехмерное пространство-время. Это частично объясняется тем, что касательное расслоение является шестипараметрическим многообразием (по числу степеней свободы, то есть углов ориентации, ортонормированного репера в четырехмерном пространстве). Поэтому, например, траектория ориентируемой частицы в мировых координатах, как проекция истинной траектории частицы в координатах слоя, в общем не будет содержать

полную информацию о последней. Именно поэтому для классической механики, работающей в голономных мировых координатах, остаются неразгаданными случаи «аномального поведения» некоторых вращающихся объектов [3].

Критерий верности любой теории — практика. Из развитых к настоящему времени трех дочерних направлений два из них напрямую связаны с рядом явлений, считающимися «аномальными» в классической физике, и дают им объяснение. Это — динамика системы ориентируемых точек и электродинамика ориентируемой точки.

Автор надеется, что предлагаемый труд будет полезен исследователям, чей внимательный ум уже оценил границы главенствующей парадигмы — парадигмы материальной точки, — и которые готовы идти за ее пределы, приоткрывая завесы все более притягивающих тайн мироздания.

Автор считает своим приятным долгом выразить сердечную благодарность Вадиму Юрьевичу Татуру (Фонд перспективных технологий и новаций, Москва) за поддержку, в том числе материальную, в издании настоящего труда.

Глава 1.

Поле коэффицентов Ламэ

1.1. Сопровождающий локально-лоренцевый репер

В любом поле взаимодействия, в классической парадигме представленном потенциалом φ на фоне плоского пространства, а в геометрической парадигме описываемом четырехмерным пространством событий с метрикой $g_{ij}(A)$, существует бесконечное количество траекторий свободно двигающихся ориентируемых частиц [1, 4]. Примем, что каждой ориентируемой частице, находящейся в мировой точке A, соответствует четверка ортогональных единичных векторов

$$\mathbf{e}_{(a)}(A), \quad (a) = (0), (1), (2), (3), \tag{1.1}$$

жестко связанной с частицей. Номера векторов, в отличие от координатных индексов, мы будем окружать круглыми скобками.

Примем, что система ортонормированных векторов (1.1) лежит в касательном псевдоевклидовом пространстве, имеющим общую точку A с пространством мировых координат (римановым пространством, снабженным криволинейными голономными координатами) [5]. Снабдим касательное пространство ортогональной системой координат x^a с центром в A таким образом,

чтобы вектора (1.1) были базисными векторами этой системы координат (локально-лоренцевы координаты). Четверку ковариантных ортонормированных векторов (1.1) мы будем называть сопровождающим локально-лоренцевым репером.

Как правило, четырехмерные величины Z_i, Z^i мы будем записывать в виде столбцов. Под обозначением $Z_i^{\mathbb{T}}$, $Z^{\mathbb{T}\,i}$ подразумеваются четырехмерные величины, записанные в виде строк ($\mathbb{T}$ - знак транспонирования). С другой стороны, четверки векторов $\mathbf{e}_{(a)}$, $\mathbf{e}^{(b)}$, мы будем записывать в виде строк, например

$$\mathbf{e}_{(a)} = \left(\mathbf{e}_{(0)}, \mathbf{e}_{(1)}, \mathbf{e}_{(2)}, \mathbf{e}_{(3)}\right), \tag{1.2}$$

тогда, соответственно,

$$\mathbf{e}_{(a)}^{\mathbb{T}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{(0)} \\ \mathbf{e}_{(1)} \\ \mathbf{e}_{(2)} \\ \mathbf{e}_{(3)} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Произвольный вектор $\mathbf{Z}$ в пространстве событий может быть разложен по векторам локально-лоренцева репера (1.1)

$$\mathbf{Z} = \mathbf{e}_{(a)}(A) Z^a(A), \tag{1.4}$$

где $Z^a(A)$ — локально-лоренцевы координаты вектора $\mathbf{Z}$.

Так как касательное пространство — псевдоевклидово, то скалярные произведения базисных векторов $\mathbf{e}_{(a)}(A)$ должны соответствовать метрическому тензору псевдоевклидова пространства [6]

$$\mathbf{e}_{(a)}^{\mathbb{T}}(A)\mathbf{e}_{(b)}(A) = \eta_{ab}, \tag{1.5}$$

где

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Вектора *взаимного* репера [6] $\mathbf{e}^{(a)}(A)$ определяются соотношением

$$\mathbf{e}^{\mathbb{T}(a)}(A)\mathbf{e}_{(b)}(A) = \delta^a{}_b, \tag{1.7}$$

при этом

$$\mathbf{e}^{\mathbb{T}(a)}(A)\mathbf{e}^{(b)}(A) = \eta^{ab}, \quad \eta^{ac}\eta_{cb} = \delta^{a}{}_{b}. \tag{1.8}$$

Из (1.5) следует что вектор $\mathbf{e}_{(0)}$ — времениподобный

$$\mathbf{e}_{(0)}\mathbf{e}_{(0)} = +1, \tag{1.9}$$

а остальные вектора локально-лоренцева репера — пространственноподобные

$$\mathbf{e}_{(\alpha)}\mathbf{e}_{(\alpha)} = -1, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad \text{(нет суммирования)}. \tag{1.10}$$

Сопровождающий локально-лоренцевый репер мы можем выбрать таким образом, чтобы вектора $\mathbf{e}_{(a)}$ были базисными векторами локально-лоренцовой системы отсчета — инерциальной системы отсчета, совпадающей по скорости и по трехмерной ориентации с ориентируемой частицей в текущей мировой точке.

Базисные вектора локально-лоренцевой системы отсчета k' в точке O' могут отличаться только четырехмерным поворотом от базисных векторов локально-лоренцовой системы отсчета в ее начальном положении в точке O [1, 8]

$$\mathbf{e}_{(b')}(O') = \mathbf{e}_{(a)}(O)\Lambda^{a}{}_{b'}, \quad \Lambda^{a}{}_{b'} = \left(\Lambda^{b'}{}_{a}\right)^{-1} \tag{1.11}$$

где $\Lambda^{b'}{}_{a} \in SO(1.3)$ — матрица четырехмерной ориентации текущего положения локально-лоренцевой системы отсчета $k'(O')$ относительно ее начального положения $k(O)$. Очевидно, что матрица текущей четырехмерной ориентации Λ равна произведению матриц чистых преобразований Лоренца L (поворотов в пространственно-временных плоскостях XOT, YOT, ZOT) и матриц трехмерных поворотов R

$$\Lambda = R_n L_m \dots L_1 R_1, \tag{1.12}$$

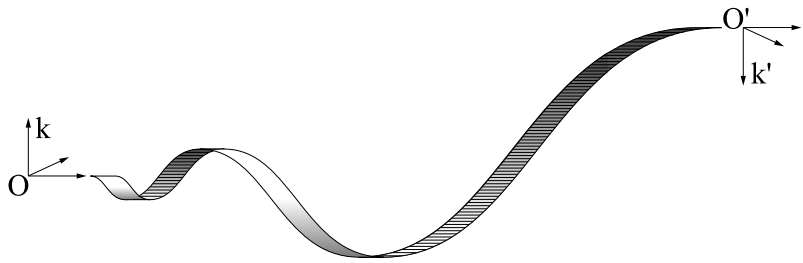

Рис. 1.1: Движение локально-лоренцевой системы отсчета от начального к текущему положениям

взятых в порядке следования поворотов при движении k от начального к текущему положениям (Рис. 1.1). Заметим, что такое описание объекта при его движении от начального к текущему состояниям и связанной с ним системы отсчета составляет основу теории инерциальной навигации [7] и называется метод подвижного репера [5].

Координаты вектора $\mathbf{Z}$ в системах $k'(O')$ и $k(O)$ соотносятся следующим образом

$$Z^{c'} = \Lambda^{c'}{}_{a} Z^{a}. \tag{1.13}$$

Значение и смысл локально-лоренцевых координат события восходит к предположению специальной теории относительности и общей теории относительности о том, что собственное ускорение неинерциальной системы отсчета не влияет на описание событий и на собственное время в этой системе отсчета. Подчеркнем, что в классической теории относительности координаты событий в ускоренной системе отсчета считаются точно такими же, как в локально-лоренцевой системе отсчета, мгновенно совпадающей с ускоренной системой отсчета [8, §8.3].

Напротив, в теории реальной относительности показано [1], что собственное ускорение реальной неинерциальной системы отсчета оказывает такое же сильное влияние на описание событий в ней, как и преобразования Лоренца.

1.2. Координатный репер. Ортогональные мировые координаты

События в реальной системе отсчета описываются в криволинейных голономных координатах x^i (в дальнейшем — мировые координаты x^i), с которыми можно связать четверку ковариантных базисных векторов (координатный репер)

$$\mathbf{g}_{(k)}(A) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^k}\right)_A, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{1.14}$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^i(A))$ — радиус-вектор точки A. Легко видеть, что вектор $\mathbf{g}_{(k)}(A)$ касается координатной линии x^k в точке A. При переходе к новым координатам $x^k \to x^{k'}$ вектора координатного репера (1.14) в точке A меняются на новые координатные вектора

$$\mathbf{g}_{(k)} \to \mathbf{g}_{(k')} = \mathbf{g}_{(k)} \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\right)_A. \tag{1.15}$$

Это означает, что каждой координатной системе соответствует своя система координатных реперов. Любой вектор $\mathbf{Z}$ в пространстве событий может быть разложен в точке A как по векторам координатного репера (1.14), так и по векторам координатного репера (1.15)

$$\mathbf{Z} = \mathbf{g}_{(k)} Z^k = \mathbf{g}_{(k')} Z^{k'}. \tag{1.16}$$

Координаты вектора $\mathbf{Z}$ в координатных системах x^k и $x^{k'}$ соотносятся следующим образом

$$Z^{k'}(A) = \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\right)_A Z^k(A), \tag{1.17}$$

и в общем случае зависят от точки наблюдения A.

Скалярные произведения векторов координатного репера образуют метрический тензор риманова пространства [6]

$$\mathbf{g}^{\mathbb{T}}_{(i)}(A)\mathbf{g}_{(j)}(A) = g_{ij}(A). \tag{1.18}$$

Из скалярных произведений векторов взаимного координатного репера $\mathbf{g}^{(i)}(A)$, определяемого как

$$\mathbf{g}^{\mathbb{T}(i)}(A)\mathbf{g}_{(j)}(A) = \delta^i{}_j, \tag{1.19}$$

мы можем определить соответствующие компоненты контравариантного метрического тензора

$$\mathbf{g}^{\mathbb{T}(i)}(A)\mathbf{g}^{(j)}(A) = g^{ij}(A), \quad g^{ik}g_{kj} = \delta^i{}_j. \tag{1.20}$$

Из (1.18) следует, что в римановом пространстве с кривизной координатный репер (1.14) изменяется от точки к точке (в отличие от координатного репера в плоском псевдоевклидовом пространстве, который имеет глобальный характер). К заданию поля координатного репера $\mathbf{g}_{(k)}(A)$ естественным будет следующее граничное условие

$$\mathbf{g}^{\mathbb{T}}_{(i)}(A)\mathbf{g}_{(j)}(A) \xrightarrow[A\to\infty]{} \eta_{ij}, \tag{1.21}$$

согласно которому пространство событий является псевдоевклидовым на значительном расстоянии от источника поля.

Покажем, что мы можем выбрать (в некоторой окрестности точки A) ортогональные координаты x^i, то есть такие координаты, при которых метрический тензор g_{ij} имеет диагональный вид

$$g_{ij}(x^i) = 0, \quad i \neq j. \tag{1.22}$$

Действительно, в некоторой окрестности точки A метрический тензор мы можем представить следующим образом

$$g_{ij} = g^A_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad |\epsilon_{ij}| \ll 1, \tag{1.23}$$

где g^A_{ij} — главное значение метрического тензора в точке A, представляющее собой симметричную матрицу с постоянными элементами. Всегда существует линейное преобразование к новым координатам x^i, при которых g^A_{ij} будет иметь диагональный вид [6], а главное значение квадрата интервала будет следующим

$$(ds^2)_A = \lambda_i (dx^i)^2. \tag{1.24}$$

В квадратичной форме (1.24) действительные числа λ_k, $k = 0, 1, 2, 3$, являются собственными значениями матрицы g_{ij}^A, определяемыми из уравнений

$$\det\left(g_{ij}^A - \lambda_k \delta_{ij}\right) = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3. \tag{1.25}$$

Ортогональные координаты x^i, в которых метрический тензор имеет диагональный вид, мы будем называть *ортогональными мировыми координатами*, в общем случае помня их действие в ограниченной окрестности точки A.

1.3. Анизотропное преобразование к ортонормированному координатному реперу

Подействуем на все векторы в окрестности точки A линейным оператором анизотропного сжатия $\mathbb{A}$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{g}_{(i)} Z^i = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{Z}_{(i)} \xrightarrow{\mathbb{A}} \widehat{\mathbf{Z}} = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} \mathbf{Z}_{(i)}. \tag{1.26}$$

Заметим, что преобразованный вектор $\widehat{\mathbf{Z}}$ имеет старые координаты в преобразованном координатном базисе

$$\widehat{\mathbf{Z}} = \widehat{\mathbf{g}}_{(i)} Z^i, \tag{1.27}$$

где

$$\widehat{\mathbf{g}}_{(i)} = \frac{\mathbf{g}_{(i)}}{\sqrt{|\lambda_i|}} \quad \text{(нет суммирования)}, \tag{1.28}$$

при этом координаты преобразованного вектора $\widehat{\mathbf{Z}}$ в старом базисе подвергнутся анизотропному сжатию

$$\widehat{\mathbf{Z}} = \mathbf{g}_{(i)} \widehat{Z}^i = \mathbf{g}_{(i)} \frac{Z^i}{\sqrt{|\lambda_i|}}. \tag{1.29}$$

Так как анизотропному сжатию подвергнутся координаты всех векторов, то преобразован будет метрический тензор

$$g_{ij} \xrightarrow{\mathbb{A}} \widehat{g}_{ij}, \tag{1.30}$$

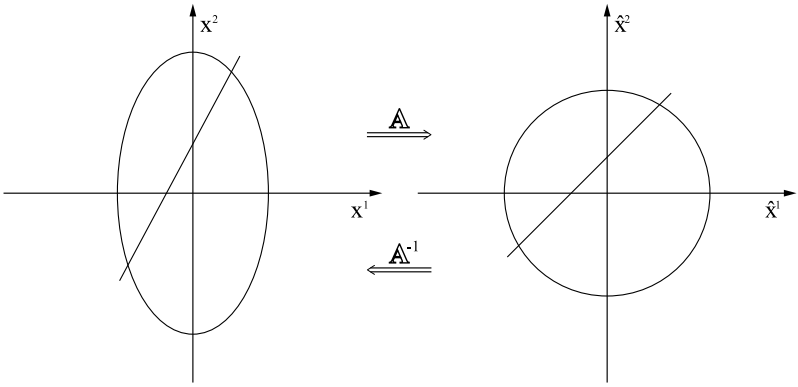

Рис. 1.2: Ортогональные мировые координаты x^i и псевдоевклидовые мировые координаты $\widehat{x}^i$ в окрестности точки A

а квадратичная форма (1.24), соответствующая главному значению метрического тензора в точке A, преобразуется к следующему каноническому виду

$$\lambda_i (dx^i)^2 \xrightarrow{\mathbb{A}} \eta_{ij} d\widehat{x}^i d\widehat{x}^j. \tag{1.31}$$

Это означает, что в окрестности точки A главное значение метрического тензора преобразованного векторного пространства будет представлять собой метрический тензор псевдоевклидова пространства $\widehat{g}^A_{ij} = \eta_{ij}$, координаты $\widehat{x}^i$ будут псевдоевклидовыми, а преобразованный координатный репер $\widehat{\mathbf{g}}_{(i)}$ будет ортонормированным репером.

Преобразование анизотропного растяжения $\mathbb{A}^{-1}$, обратное к (1.26), переводит ортонормированный координатный репер $\widehat{\mathbf{g}}_{(i)}$ в «старый» ортогональный координатный репер $\mathbf{g}_{(i)}$

$$\widehat{\mathbf{g}}_{(i)} \xrightarrow{\mathbb{A}^{-1}} \mathbf{g}_{(i)} = \widehat{\mathbf{g}}_{(i)} \sqrt{|\lambda_i|} \quad \text{(нет суммирования)}, \tag{1.32}$$

а координаты $\widehat{x}^i$, которые в окрестности точки A являются псевдоевклидовыми, переводит (так же в окрестности точки A) в

«старые» ортогональные координаты x^i

$$\widehat{x}^i \xrightarrow{\mathbb{A}^{-1}} x^i = \widehat{x}^i \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} \quad \text{(нет суммирования)}. \tag{1.33}$$

Таким образом, ортогональные мировые координаты x^i в малой окрестности точки A являются координатами анизотропно растянутого псевдоевклидова пространства. Геодезическая псевдоевклидова пространства, являющаяся прямой линией, под действием преобразования анизотропного растяжения $\mathbb{A}^{-1}$ останется так же прямой линией, но в отношении главной части метрики g^A_{ij}, действующей в малой окрестности точки A (рис. 1.2).

1.4. Физическая трактовка ортогональных мировых координат. Коэффициенты Ламэ

В малой окрестности точки наблюдения A мы можем пользоваться ортогональными мировыми координатами вектора события (в дифференциальном виде) $d\mathbf{X}$ в ортогональном координатном репере

$$dX^k = d\mathbf{X}\,\mathbf{g}^{\mathbb{T}(k)}, \quad dX_k = d\mathbf{X}\,\mathbf{g}^{\mathbb{T}}_{(k)}, \quad \mathbf{g}^{\mathbb{T}}_{(k)}\mathbf{g}_{(m)} = 0, \quad (k) \neq (m). \tag{1.34}$$

По сравнению с координатами вектора $d\mathbf{X}$ в ортонормированном координатном репере $\widehat{\mathbf{g}}_{(k)}$

$$dX^{\widehat{k}} = d\mathbf{X}\,\widehat{\mathbf{g}}^{\mathbb{T}(k)}, \quad dX_{\widehat{k}} = d\mathbf{X}\,\widehat{\mathbf{g}}^{\mathbb{T}}_{(k)}, \quad \widehat{\mathbf{g}}^{\mathbb{T}}_{(k)}\widehat{\mathbf{g}}_{(m)} = \eta_{km}, \tag{1.35}$$

«старые» ортогональные координаты вектора будут анизотропно искажены

$$dX_k = dX_{\widehat{k}}\sqrt{|\lambda_k|}, \quad dX^k = dX^{\widehat{k}}\frac{1}{\sqrt{|\lambda_k|}}. \tag{1.36}$$

Если в анизотропно сжатом посредством оператора $\mathbb{A}$ пространстве событий в окрестности точки наблюдения A псевдоевклидовым координатам вектора событий $dX^{\widehat{k}}$ принято придавать смысл

координат события в инерциальной системе отсчета [9], то ортогональным мировым координатам вектора событий dX^k (1.36) мы будем придавать смысл *координат события в реальной неинерциальной системе отсчета.* Таким образом, влияние собственного ускорения неинерциальной системы отсчета заключается в анизотропном искажении посредством оператора $\mathbb{A}^{-1}$ координат события, взятых относительно мгновенно совпадающей с ней инерциальной системы отсчета. Чем большее ускорение испытывает в точке A реальная неинерциальная система отсчета, тем больше отклонение абсолютных величин собственных значений матрицы g^A_{ij} от единицы и, как следствие, тем больше отличие реальных координат события от локально-лоренцевых координат события в точке A (см. также раздел 4.5).

Используя произвол в выборе координатной сетки в окрестности точки A, выберем ее таким образом, чтобы координатный ортогональный репер после действия на него оператора анизотропного сжатия $\mathbb{A}$

$$\mathbf{g}_{(k)}(A) \xrightarrow{\mathbb{A}} \widehat{\mathbf{g}}_{(k)}(A) \tag{1.37}$$

соответствовал локально-лоренцеву реперу, сопровождающему ориентируемую частицу

$$\widehat{\mathbf{g}}_{(k)}(A) = \mathbf{e}_{(a)}(A)\, \delta^{(a)}_{(k)}. \tag{1.38}$$

Здесь и далее координатный ортогональный репер $\mathbf{g}_{(k)}(A)$ мы будем считать *соответствующим* локально-лоренцеву реперу, сопровождающему ориентируемую частицу.

На основании (1.24) главную часть метрического тензора в ортогональных мировых координатах мы можем записать в следующем виде

$$g^A_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \tag{1.39}$$

Используя формулу (1.36) и условие (1.38), запишем формулу преобразования контравариантных координат вектора события

$d\mathbf{X}$ из инерциальной локально-лоренцевой системы отсчета k' в ускоренную реальную систему отсчета K' в дифференциальном виде

$$\begin{pmatrix} cdt' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda_0|^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\lambda_1|^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\lambda_2|^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\lambda_3|^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt'_L \\ dx'_L \\ dy'_L \\ dz'_L \end{pmatrix}, \quad (1.40)$$

где

$$d\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{(0)} & \mathbf{g}_{(1)} & \mathbf{g}_{(2)} & \mathbf{g}_{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{(0)} & \mathbf{e}_{(1)} & \mathbf{e}_{(2)} & \mathbf{e}_{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt'_L \\ dx'_L \\ dy'_L \\ dz'_L \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

Формулы (1.40) и (1.41) подчеркивают, что физический смысл координат вектора относительно ортогонального координатного репера $\mathbf{g}_{(k)}(A)$ такой же, как относительно сопровождающего локально-лоренцевого репера. Действительно, ортогональные мировые координаты вектора позволяют произвести их разделение на временную координату и три пространственных координаты, в соответствии с обыденным смыслом и опытом измерений в инерциальных системах отсчета.

Связь ортогонального координатного репера $\mathbf{g}_{(k)}(A)$ и сопровождающего локально-лоренцева репера $\mathbf{e}_{(a)}(A)$ осуществляется с помощью коэффициентов Ламэ [5]

$$h^i{}_a(A) = \mathbf{g}^{\mathbb{T}(i)}\mathbf{e}_{(a)}, \quad h^a{}_j(A) = \mathbf{e}^{\mathbb{T}(b)}\mathbf{g}_{(j)}, \quad (1.42)$$

где, как и прежде, строчными буквами начала латинского алфавита a, b, c, d, ... мы будем обозначать *локальные индексы*,

то есть индексы, относящиеся к сопровождающему локально-лоренцеву реперу в касательном псевдоевклидовом пространстве, строчными буквами середины латинского алфавита $i, j, k, l, \ldots$ мы будем обозначать индексы, относящиеся к мировым координатам пространства событий.

Как явствует из формулы (1.42), коэффициенты Ламэ представляют собой матрицу 4×4 с одним мировым и одним локальным индексом. Из (1.42) также следует формула

$$h^{i}{}_{a} = (h^{a}{}_{i})^{-1}. \tag{1.43}$$

Из (1.42) можно получить следующие соотношения связи между векторами сопровождающего локально-лоренцева репера и векторами координатного репера

$$\begin{array}{ll} \mathbf{g}^{\mathbb{T}(i)} = h^{i}{}_{a}\,\mathbf{e}^{\mathbb{T}(a)}, & \mathbf{g}_{(j)} = \mathbf{e}_{(a)} h^{a}{}_{j}, \\ \mathbf{e}^{\mathbb{T}(b)} = h^{b}{}_{i}\,\mathbf{g}^{\mathbb{T}(i)}, & \mathbf{e}_{(a)} = \mathbf{g}_{(i)} h^{i}{}_{a}. \end{array} \tag{1.44}$$

Подставляя (1.44) в (1.18) и(1.5), получим соотношения между метриками риманова пространства и касательного псевдоевклидова пространства

$$g_{ij} = h_{i}{}^{a}\,\eta_{ab}\,h^{b}{}_{j}, \quad \eta_{ab} = h_{a}{}^{i}\,g_{ij}\,h^{j}{}_{b}. \tag{1.45}$$

Из первого соотношения формулы (1.45) мы видим, что по данной метрике g_{ij} мы можем найти коэффициенты Ламэ — эта процедура напоминает извлечение своеобразного «квадратного корня» из метрического тензора.

В ближайшей окрестности точки A, в соответствии с выражением для главной части метрического тензора в ортогональных мировых координатах (1.39), матрицу коэффициентов Ламэ с нижним мировым индексом мы можем найти в следующем виде

$$h^{a}{}_{i} = \begin{pmatrix} \sqrt{|g^{A}_{00}|} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{|g^{A}_{11}|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|g^{A}_{22}|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{|g^{A}_{33}|} \end{pmatrix}, \tag{1.46}$$

или

$$h^a{}_i = \begin{pmatrix} \sqrt{|\lambda_0|} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{|\lambda_1|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|\lambda_2|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{|\lambda_3|} \end{pmatrix}. \qquad (1.47)$$

Матрица коэффициентов Ламэ с верхним мировым индексом, как обратная к (1.47), находится в следующем виде

$$h^i{}_a = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{|\lambda_0|} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{|\lambda_1|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{|\lambda_2|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{|\lambda_3|} \end{pmatrix}. \qquad (1.48)$$

Из определения коэффициентов Ламэ (1.42) и формул (1.44) следуют основные формулы связи локально-лоренцевых координат вектора (координат вектора относительно сопровождающего локально-лоренцева репера) и мировых координат вектора (координат вектора относительно координатного репера)

$$dX^i = h^i{}_a dX^a, \quad dX^a = h^a{}_i dX^i, \qquad (1.49)$$

из которых следует, с учетом (1.48), соотношение между координатами вектора в локально-лоренцевой сопровождающей системе отсчета и ортогональными мировыми координатами вектора в ускоренной реальной системе отсчета в дифференциальном виде

$$dX^i = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{|\lambda_0|} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{|\lambda_1|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{|\lambda_2|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{|\lambda_3|} \end{pmatrix} dX^a. \qquad (1.50)$$

Мы видим, что только что полученная формула (1.50) совпадает с формулой (1.40), полученной другим путем. Различия в рассматриваемых формулах состоят в разной записи дифференциалов координат события — в последней формуле (1.50) координаты

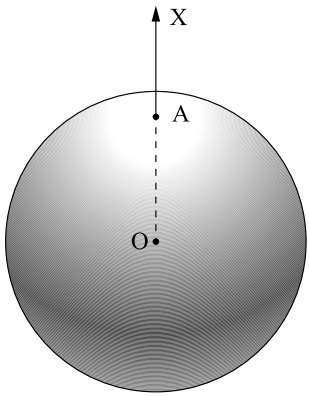

Рис. 1.3: Коэффициенты Ламэ у поверхности Земли

события отнесены к произвольной реальной системе отсчета и сопровождающей ее локально-лоренцевой системе отсчета, в формуле (1.40) координаты события взяты относительно конкретной реальной системы отсчета K' и сопровождающей ее локально-лоренцевой системы k'.

1.5. Пример вычисления коэффициентов Ламэ

Вычислим матрицу коэффициентов Ламэ $h^i{}_a$ в декартовых координатах в геометризованном поле тяготения у поверхности Земли. Примем, что ось OX направлена по радиусу-вектору от центра Земли в точку наблюдения A (рис. 1.3).

Поле тяготения Земли описывается геометрией Шварцшильда [10], причем значение метрического тензора в точке $A=(R_\oplus,\,0,\,0)$ ($R_\oplus = 6,4\cdot 10^6$ м — радиус Земли [11]) в декартовых координатах следующее [1]

$$g_{ij}(A) = \begin{pmatrix} 1-\frac{R_{g\oplus}}{R_\oplus} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/(1-\frac{R_{g\oplus}}{R_\oplus}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (1.51)$$

где $R_{g\oplus} = 9 \cdot 10^{-3}$ м — гравитационный радиус Земли [10].

Пользуясь формулой (1.48), вычислим значение коэффициентов Ламэ с верхним мировым индексом геометризованного поля тяготения у поверхности Земли

$$h^{i}{}_{a\oplus} = \begin{pmatrix} 1 + 7 \cdot 10^{-10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 7 \cdot 10^{-10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.52)$$

Как мы видим из формул (1.50) и (1.52), координаты события, измеренные в падающем с ускорением свободного падения $g_\oplus = 9,8$ м/с^2 лифте и в локально-лоренцевой сопровождающей системе отсчета, будут отличаться очень незначительно.

Вычислим коэффициенты Ламэ для точки наблюдения, находящейся на поверхности Солнца. Радиус Солнца составляет [11] 109 земных радиусов $R_\odot = 1,09 \cdot 10^2 R_\oplus$, гравитационный радиус Солнца составляет [10] 3 км, откуда $R_{g\odot} = 3,33 \cdot 10^5 R_\oplus$. Произведя вычисления, аналогичные (1.51), (1.52), получим

$$h^{i}{}_{a\odot} = \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (1.53)$$

при этом ускорение свободного падения на поверхности Солнца в 28 раз превышает земное $g_\odot \approx 28\, g_\oplus$. Из значений коэффициентов Ламэ (1.53) следует, что для длительного периода наблюдений необходимо учитывать разницу между координатами событий в локально-лоренцевой системе отсчета и координатами событий в системе отсчета свободно падающего лифта.

1.6. Историческая справка

В период 1928 – 1931 гг. А. Эйнштейн создал 12 работ [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23], посвященных пространству со-

бытий со свойством абсолютного параллелизма векторов. В данных работах был задействован математический аппарат четырехмерных реперов — *тетраподов*, где А. Эйнштейн существенное внимание уделил полю коэффициентов Ламэ. Для того, чтобы подчеркнуть значение этого поля, А. Эйнштейн назвал коэффициенты Ламэ фундаментальным тензором.

Не получив удовлетворительного развития в работах А. Эйнштейна, теория риманова пространства с абсолютным параллелизмом на то время так и осталась абстрактной математической теорией. В одной из последних статей упомянутого цикла работ А. Эйнштейн пишет [22]: «Математическая проблема заключается в следующем: каковы самые естественные законы, которым можно подчинить h-поле? Имеют ли эти законы какое-либо отношение к законам физического пространства?» (h-поле — поле коэффициентов Ламэ в обозначениях работы [22]).

В.И. Родичев в монографии [5] подчеркнул, что разные индексы коэффициентов Ламэ являются векторными индексами относительно разных групп преобразований. Так, относительно преобразований мировых координат мировой индекс является векторным, а локальный — скалярным

$$h^{k'}{}_{a} = J^{k'}_{k} h^{k}{}_{a}, \tag{1.54}$$

где $J^{k'}_{k}$ — матрица, имеющая в k'-столбце и в k-строке частную производную $\partial x^{k'}/\partial x^{k}$. Относительно ортогональных преобразований локально-лоренцева репера в касательном псевдоевклидовом пространстве локальный индекс, наоборот, является векторным, а мировой индекс — скалярным

$$h^{k}{}_{a'} = h^{k}{}_{a} \Lambda^{a}{}_{a'}, \quad \Lambda^{a}{}_{a'} \in SO(1.3), \tag{1.55}$$

где $SO(1.3)$ — группа собственных ортогональных преобразований псевдоевклидова пространства. В этом смысле коэффициенты Ламэ $h^{i}{}_{a}$ являются *мультивекторным* объектом.

В трудах других авторов, развивавших математический аппарат ортогональных реперов (тетрадный формализм), в частности, в монографии К. Мёллера [8], матрица коэффициентов Ламэ

называется *тетрадой*. Это название основывается на одном из значении коэффициентов Ламэ в качестве координат векторов координатного репера $\mathbf{g}_{(j)}$ относительно произвольного ортонормированного репера в касательном псевдоевклидовом пространстве

$$\mathbf{g}_{(j)} = \mathbf{e}_{(a)} h^{a}{}_{j}. \tag{1.56}$$

Такое упрощение физического смысла для объекта $h^{a}{}_{j}$, тем не менее, не повлияло на последующее развитие тетрадного формализма в целях нахождения новых решений уравнений Эйнштейна для гравитационного поля [24]. Тетрадный формализм, развитый в *спинорном* базисе *(формализм Ньюмена – Пенроуза)* [25], привел к новым фундаментальным решениям уравнений Эйнштейна, таким, как решение Керра [26], решение Ньюмена – Унти – Тамбурино [27].

Именно на основе поля коэффициентов Ламэ построено пространство событий теории физического вакуума Г.И. Шипова [4], обладающее свойством абсолютного параллелизма. Тетрада $h^{a}_{i}(x^{i})$ (в обозначениях Г.И. Шипова), соединенная с пробной материальной частицей, в теории физического вакуума стала *ориентируемой точкой*. Понятие ориентируемой точки стало новым элементарным понятием (не сводящимся к более частным понятиям) новой физической парадигмы. Вследствие этого пространство событий теории физического вакуума Г.И. Шипова есть пространство событий ориентируемых точек.

В теории физического вакуума использование поля h^{a}_{i} выходит за рамки ограниченного представления о нем, как о «поле тетрад». Именно поле коэффициентов Ламэ используется как связующая структура между мировыми координатами, в которых происходит измерение свойств материальных объектов, и неголономными координатами, связанными с ориентацией этих объектов.

В [1, с. 53] было предложено назвать пространство событий ориентируемых точек *пространством событий Г.И. Шипова*. Новое пространство событий более сложное, чем риманово про-

странство — пространство событий общей теории относительности А. Эйнштейна.

Пространство событий ориентируемых точек (пространство Г.И. Шипова) является *расслоенным пространством* [4, 28], где *базой расслоения* является риманово пространство, а *касательное расслоение* представляет собой совокупность плоских (псевдоевклидовых) пространств, касательных в каждой точке к базе расслоения. Начало ориентируемой точки описывается криволинейными голономными координатами базы (мировыми координатами), а четверка ортонормированных векторов, представляющих ориентируемую точку, образуют координатный репер в соответствующем касательном пространстве, при этом генерируя неголономные координаты в касательном расслоении (локально-лоренцевы координаты по определению разд. 1.1).

Тензор кривизны пространства событий Г.И. Шипова, как «полного комплекта» касательного расслоения и базы расслоения, тождественно равен нулю, вследствие чего пространство событий обладает свойством абсолютного параллелизма векторов.

Теория относительности реальных систем отсчета основана на пространстве событий Г.И. Шипова. Главным элементарным объектом в этой теории также является ориентируемая точка, которая играет роль *реальной системы отсчета*. Реальная система отсчета позволяет описывать события в определенной окрестности точки наблюдения — начале реальной системы отсчета. В теории относительности реальных систем отсчета или *в теории реальной относительности* [1] предлагаются более сложные соотношения между координатами событий в разных системах отсчета, чем в классической теории относительности. Эти соотношения захватывают глубинные динамические симметрии касательного расслоения, которых нет в классической теории относительности.

Глава 2.

Принцип геометризации полей

2.1. Геометрические теории

В *триалистической*, по классификации Ю.С. Владимирова [29], парадигме И. Ньютона задействованы три физических категории: во-первых, категория абсолютного (то есть независимого от полей и частиц) пространства и времени, во-вторых, категория материи, в-третьих, категория полей переносчиков взаимодействий, посредством которых материальные частицы осуществляют взаимодействие на фоне абсолютного пространства и времени. *Специальная теория относительности* А. Эйнштейна [31] явилась развитием триалистической парадигмы: пространство и время в ней были объединены в *абсолютный пространственно-временной континуум*, в котором, однако, отдельно взятые пространственные и временные координаты событий зависели от внешних параметров (относительной скорости). Как отмечал сам А. Эйнштейн в лекциях, прочитанных в 1921 г. в Принстонском университете [32], «точно так же, как с ньютоновской точки зрения оказалось необходимым ввести постулаты *tempus est absolutum, spatium est absolutum*, так с точки зрения специальной те-

ории относительности мы должны объявить *continuum spatii et temporis est absolutum*».

В первой геометрической теории — *в общей теории относительности* А. Эйнштейна [24] — физическая категория полей переносчиков взаимодействий была поглощена категорией пространства-времени. Потенциал гравитационного поля φ_g, действующего на фоне плоского пространства-времени, в теории А. Эйнштейна был представлен эффективным искривлением четырехмерного риманова пространства событий. При этом пространство событий перестало быть абсолютным — его основные свойства определялись свойствами материальных источников гравитационного поля (прежде всего *гравитационной массой*). Общая теория относительности относится к *дуалистической* парадигме [29], так как в ней фигурируют только две физические категории: пространство-время и материя. Категория полей переносчиков взаимодействий с ее основной характеристикой — потенциальной энергией — в общей теории относительности отсутствует.

А. Эйнштейн отмечал временный характер дуалистической геометрической парадигмы на пути построения теории *«единого поля еще неизвестной структуры»* [33]. Под единым полем он подразумевал новую геометрическую структуру (поле), способную эффективно воспроизводить не только свойства полей переносчиков взаимодействий, но и свойства проявленной материи. Относительно собственных уравнений поля тяготения

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik}, \tag{2.1}$$

где $k = 6,67 \cdot 10^{-8}$ см$^3 \cdot$ г$^{-1} \cdot$ с$^{-2}$ — гравитационная постоянная, А. Эйнштейн отмечал, что «правая часть включает в себя все то, что не может быть пока объединено в единой теории поля. Конечно, я ни одной минуты не сомневался, что такая формулировка есть только временный выход из положения, предпринятый с целью дать общему принципу относительности какое-то замкнутое выражение» [33]. В уравнениях А. Эйнштейна (2.1) фундаментальная левая часть, определяющая геометрию пространственно-

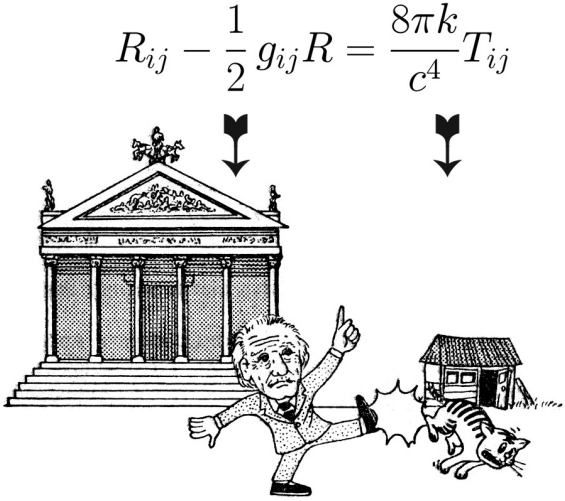

Рис. 2.1: «Эйнштейн недоволен». Рисунок из книги лауреата Нобелевской премии Ё. Намбу «Кварки» [34, с. 199]

временного континуума, приравнивается к *вводимой руками* правой части, описывающей *одностороннее* действие материи на геометрию пространства-времени (рис. 2.1).

2.2. На пути к монистической парадигме — геометродинамика Дж. Уилера

Дж. Уилер был одним из первых, кто попытался геометризовать правую часть уравнений Эйнштейна (2.1). Он сделал это оригинальным способом, приняв за источник гравитационного поля свободное электромагнитное поле без источников [35]. Фактически, геометризация правой части уравнений Эйнштейна по Уилеру свелась к тому, что вместо обычной гравитационной массы был предложен другой материальный источник, не обладающий массой, но обладающий энергией и импульсом. Таким образом, в уравнения Эйнштейна (2.1) был подставлен тензор

энергии-импульса электромагнитного поля [10]

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{ik}F_j{}^k + \frac{1}{4}g_{ij}F_{km}F^{km}\right), \tag{2.2}$$

составленный из тензора электромагнитного поля

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

который в гравитационном поле с метрикой g_{ij} подчиняется четырехмерным уравнениям Максвелла без источников [10]

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}F^{ik}) = 0. \tag{2.5}$$

В вышеприведенных уравнениях E_x, E_y, E_z — компоненты вектора электрического поля в декартовых координатах, H_x, H_y, H_z — компоненты вектора магнитного поля, $g = \det(g_{ij})$, при этом $g < 0$ для сигнатуры метрики $(+\,-\,-\,-)$.

Здесь отметим неравнозначный способ определения ковариантного и контравариантного тензоров электромагнитного поля в общей теории относительности. Действительно, если дважды ковариантный тензор F_{ik} выражается только через компоненты электрического и магнитного полей по формуле (2.3), то в выражение для дважды контравариантного тензора электромагнитного поля, кроме компонентов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, входят также компоненты метрического тензора

$$F^{ml} = g^{mi}F_{ik}\,g^{kl}. \tag{2.6}$$

Заметим, что электродинамике ориентируемой точки [2], инвариантной относительно преобразований реальной относительности (L-ковариантной), такая проблема отсутствует.

Уравнения Эйнштейна (2.1), формула для тензора энергии-импульса электромагнитного поля (2.2) и четырехмерные уравнения Максвелла без источников (2.4) и (2.5) являются достаточными, чтобы описать гипотетическое материальное образование — геон. Гипотеза Дж. Уилера основана на возможности достижения колоссальной плотности энергии электромагнитной составляющей геона для локального искривления пространства-времени в целях удержания собственного электромагнитного поля в стабильном состоянии (например, для того, чтобы обеспечить фотонам движение по круговым орбитам в искривленном пространстве-времени).

На пути создания геометродинамики Дж. Уилер, однако, нашел множество подводных камней и противоречий. До подробной разработки модели дело не дошло. Здесь имеется в виду расчет всех характеристик геона (в том числе нахождение зон устойчивости, расчет паразитных резонансов и т.д.) Остался открытым вопрос соответствия геона каким-либо элементарным частицам, так как частицы с характеристиками геона экспериментально не наблюдались.

Геометродинамика Дж. Уилера так и не явилась последовательно развитой теорией. Корень логических противоречий в геометродинамике лежит, на наш взгляд, в том факте, что свободное электромагнитное поле без источников по влиянию на геометрию в уравнениях Эйнштейна мало чем отличается от обычной гравитационной массы. Действительно, гравитационная масса и свободное электромагнитное поле без источников являются материальными объектами, вброшенными «на арену» пространственно-временного континуума.

Для фундаментального решения проблемы единого поля правая часть уравнений Эйнштейна должна быть найдена в чисто геометрическом виде.

2.3. Геометризация правой части уравнений Эйнштейна — переход к монистической парадигме (Г.И. Шипов, 1976, 1979)

В 1976 году в работе [36] Г.И. Шипов показал, что проблема геометризации правой части уравнений Эйнштейна выходит за рамки пространства событий общей теории относительности — четырехмерного риманова пространства мировых голономных координат x^i, $i = 0, 1, 2, 3$. С помощью коэффициентов Ламэ (в работе используется упрощенное название «тетрада») он вводит неголономные координаты x^a, $a = 0, 1, 2, 3$,

$$\begin{array}{l} dx^i = h^i{}_a dx^a, \quad h^i{}_a \neq \partial x^i/\partial x^a, \\ dx^b = h^b{}_j dx^j, \quad h^b{}_j \neq \partial x^b/\partial x^j, \end{array} \tag{2.7}$$

фактически расширяя пространство событий до расслоенного пространства, состоящего из касательного расслоения и базы расслоения [4, 28]. Под базой расслоения подразумевается пространство мировых координат, под касательным расслоением — совокупность плоских пространств, касательных к базе расслоения в каждой его точке. Касательное в точке A плоское пространство называется *слоем расслоения над точкой* A.

В соответствии с определениями, данными в первой главе, голономные координаты x^i соответствуют координатам, образованными координатным репером в пространстве мировых координат, неголономные координаты $x^a(A)$ соответствуют координатам, образованными сопровождающим локально-лоренцевым репером в слое расслоения над точкой A.

С помощью $h^i{}_a$ Г.И. Шипов вводит объект неголономности [36]

$$\Omega^{\cdot\cdot i}_{jk\cdot} = h^i{}_a h^a{}_{[k,j]} = \frac{1}{2} h^i{}_a (h^a{}_{k,j} - h^a{}_{j,k}), \tag{2.8}$$

который связан с коэффициентами вращения Риччи

$$T^{a\cdot\cdot}_{\cdot bk} = \left(\nabla_k h^a{}_j\right) h^j{}_b, \tag{2.9}$$

следующим образом

$$T^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = -\Omega^{\cdot\cdot i}_{jk\cdot} + g^{im}\left(g_{js}\Omega^{\cdot\cdot s}_{mk\cdot} + g_{ks}\Omega^{\cdot\cdot s}_{mj\cdot}\right), \tag{2.10}$$

$$T^{\cdot\cdot\cdot}_{ijk} = \Omega^{\cdot\cdot\cdot}_{kji} + \Omega^{\cdot\cdot\cdot}_{ikj} + \Omega^{\cdot\cdot\cdot}_{ijk}. \tag{2.11}$$

В вышеприведенных формулах ∇_k — ковариантная производная относительности связности $\Gamma^i{}_{jk}$ пространства мировых координат

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2}g^{im}\left(g_{jm,k} + g_{km,j} - g_{jk,m}\right), \tag{2.12}$$

$T^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}$ — коэффициенты вращения Риччи в мировых координатах

$$T^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = h^i{}_a\, T^{a\cdot\cdot}_{\cdot bk}\, h^b{}_j. \tag{2.13}$$

В [36] вводится связность расслоенного пространства

$$\Delta^i{}_{jk} = h^i{}_a h^a{}_{j,k}, \tag{2.14}$$

обладающее кручением, которое с точностью до знака совпадает с объектом неголономности

$$\Delta^i{}_{[jk]} = -\Omega^{\cdot\cdot i}_{jk\cdot}. \tag{2.15}$$

В [36] получено соотношение между связностью расслоенного пространства, символами Кристоффеля $\Gamma^i{}_{jk}$ и коэффициентами вращения Риччи в мировых координатах

$$\Delta^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{jk} + T^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}. \tag{2.16}$$

Тензор кривизны ного пространства $S^i{}_{jkm}$, соответствующий связности $\Delta^i{}_{jk}$, строится аналогично тензору Римана $R^i{}_{jkm}$ относительно связности $\Gamma^i{}_{jk}$ [9]

$$S^i{}_{jkm} = 2\Delta^i{}_{j[m,k]} + 2\Delta^i{}_{s[k}\Delta^s{}_{|j|m]}. \tag{2.17}$$

Используя формулу (2.16), можно показать, что

$$S^i{}_{jkm} = R^i{}_{jkm} + 2\nabla_{[k}T^{i\cdot\cdot}_{\cdot|j|m]} + 2\,T^{i\cdot\cdot}_{\cdot s[k}\,T^{s\cdot\cdot}_{\cdot|j|m]}. \tag{2.18}$$

В [36], [37] доказывается, что

$$S^{i}{}_{jkm} = 0, \tag{2.19}$$

вследствие чего рассматриваемое пространство событий является *пространством абсолютного параллелизма*, а связность (2.14) — связностью абсолютного параллелизма.

В работах [36], [37] Г.И. Шипов показал, что из условия абсолютного параллелизма (2.19) следуют уравнения, подобные уравнениям Эйнштейна (2.1)

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \nu T_{ik}, \tag{2.20}$$

но с геометризованным тензором энергии-импульса материи

$$T_{ik} = \frac{1}{\nu} \left(P_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} P \right), \tag{2.21}$$

где

$$P_{ik} = -2 \left(\nabla_{[m} T^{m \cdot \cdot}_{\cdot |i|k]} + T^{m \cdot \cdot}_{\cdot s[m} T^{s \cdot \cdot}_{\cdot |i|k]} \right), \quad P = g^{sm} P_{sm}. \tag{2.22}$$

Уравнения Шипова – Эйнштейна (2.20), (2.21), и еще в большей степени *уравнения физического вакуума* [4]

$$R^{i}{}_{jkm} = 2 \nabla_{[m} T^{i \cdot \cdot}_{\cdot |j|k]} + 2\, T^{i \cdot \cdot}_{\cdot s[m} T^{s \cdot \cdot}_{\cdot |j|k]}, \tag{2.23}$$

следующие из формулы (2.18) и условия абсолютного параллелизма (2.19), определяют пространственно-временную структуру, которая содержит свойства полей переносчиков взаимодействий и свойства проявленной материи.

Уравнения (2.23) определяют пространственно-временные образования, которые в силу (2.15) обладают *кручением*, а также могут обладать *кривизной*. Источником кривизны $R^{i}{}_{jkm}$ является поле коэффициентов вращения Риччи $T^{i \cdot \cdot}_{\cdot jk}$, которое прямо зависит от объекта неголономности $\Omega^{\cdot \cdot i}_{jk \cdot}$ в соответствии с формулой (2.10). Если кручение пространства событий равно нулю

$$\Omega^{\cdot \cdot i}_{jk \cdot} = 0, \tag{2.24}$$

то обращается в нуль поле коэффициентов вращения Риччи, а это приводит в соответствии с уравнениями физического вакуума (2.23) к исчезновению кривизны. Пространство событий вырождается в плоское пространство, в котором нет ни проявленной материи, ни полей переносчиков взаимодействий.

Материя есть проявление структурированного вакуума. Мерой проявленной материи является плотность материи, которая пропорциональна следу тензора энергии-импульса материи [10, §32]

$$\rho_0 = \frac{1}{c^2} g^{ik} T_{ik}. \tag{2.25}$$

Используя формулы (2.21), (2.22), после некоторых преобразований получим

$$\rho_0 = -\frac{1}{\nu c^2} P = \frac{2}{\nu c^2} \left(\nabla_{[m} T^{mk\cdot}_{\cdot\cdot k]} + T^{m\cdot\cdot}_{\cdot s[m} T^{sk\cdot}_{\cdot\cdot k]} \right). \tag{2.26}$$

Полная масса пространственно-временного образования *(вакуумного возбуждения)* выражается следующим образом

$$m_0(x^0) = \int_\infty \rho_0 \sqrt{\det(\gamma_{\alpha\beta})}\, dx^1 dx^2 dx^3, \tag{2.27}$$

где $\gamma_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ — метрический тензор трехмерного пространства (гиперплоскости $x^0 = const$) с пространственным элементом

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \tag{2.28}$$

Таким образом, пространственно-временные образования или *сгустки физического вакуума* [4], удовлетворяющие уравнениям физического вакуума (2.23), и есть единое поле в духе Эйнштейна [33], то есть такое поле, которое несет в себе не только свойства полей переносчиков взаимодействий, но и свойства проявленной материи.

2.4. Принцип геометризации полей

Знаменитый принцип эквивалентности впервые сформулирован А. Эйнштейном уже в 1907 г. [38] как эквивалентность системы

отсчета, покоящейся в гравитационном поле, и неинерциальной системы отсчета, двигающейся с ускорением в пустом пространстве, с точки зрения описания движения тел, свободно падающих в гравитационном поле (в первом случае) или двигающихся с постоянной скоростью в пустом пространстве (во втором случае).

В теории относительности реальных систем отсчета [1] представить себе реальную систему отсчета, движущуюся с постоянным ускорением в области, свободной от тяготеющих тел и полей, невозможно. В принципе эквивалентности А. Эйнштейна фигурируют *абстрактные* ускоренные системы отсчета, не связанные с какими-то материальными телами.

Принцип эквивалентности А. Эйнштейна может быть изложен в настоящей работе в новой редакции, уводящей его от абстрактных конструкций. *Принцип эквивалентности реальных полей* сводится к эквивалентности гравитационного поля и любого реального поля с точки зрения их действия на пробное тело определенной массы. Действительно, одно и тоже тело будет подвержено одинаковому ускорению при действии на него силы гравитационного притяжения или равной ей силы другого происхождения. В этом заключается факт равенства гравитационной массы и инерционной массы тела.

В принципе эквивалентности реальных полей содержится *принцип геометризации любых полей*. Действительно, если поле любой природы φ_{ext} локально ничем не отличается от гравитационного поля φ_g, то оно будет эквивалентно гравитационному полю и по возможности геометризации. Таким образом, в рамках принципа геометризации любых полей соответствующее искривление пространства событий может эффективно воссоздавать любое реальное поле.

В приближении слабого поля такой подбор осуществляется следующим образом. Если гравитационному потенциалу φ_g соответствует пространство событий с интервалом [10, §106]

$$ds^2 = (1 + \frac{2\varphi_g}{c^2})c^2dt^2 - (1 - \frac{2\varphi_g}{c^2})(dx^2 + dy^2 + dz^2), \qquad (2.29)$$

то другому потенциальному полю φ_{ext} будет соответствовать про-

странство событий с интервалом

$$ds^2 = (1 + \frac{2\varphi_{ext}}{c^2})c^2dt^2 - (1 - \frac{2\varphi_{ext}}{c^2})(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.30)$$

Здесь мы рассмотрели простейшее поле с центральным действием. Более сложной структуре потенциала φ_{ext}, конечно, будет соответствовать более сложная геометрия пространства событий. Благодаря принципу суперпозиции линейных полей суммарному потенциалу $\varphi_\Sigma = \varphi_g + \varphi_{ext}$ в приближении слабых полей будет соответствовать пространство событий

$$ds^2 = (1 + \frac{2\varphi_\Sigma}{c^2})c^2dt^2 - (1 - \frac{2\varphi_\Sigma}{c^2})(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.31)$$

О том, что любое взаимодействие искривляет пространство событий, писал Г.И. Шипов [37].

Что касается макроскопических полей (например, электростатического поля), то эффекты изменения геометрии пространства в локальных областях находятся за пределами точности наблюдений. Это происходит из-за малости коэффициента действия на геометрию пространства событий $2\varphi_{ext}/c^2$. Напомним, что знаменитый эффект общей теории относительности — дополнительное искривление луча света в поле тяготения Солнца — был зафиксирован в области космического масштаба. Может показаться, что геометризация макроскопических полей — это формальная процедура для приведения взаимодействия к абстрактному искривленному пространству, не наблюдаемому в ограниченных областях.

Переместимся мысленно в микроскопическую область наблюдения. По мере уменьшения линейных размеров области наблюдения мы найдем, что на расстояниях порядка классического радиуса электрона

$$r \approx r_e = \frac{e^2}{mc^2} = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см} \quad (2.32)$$

электростатическое поле точечного заряда e составит величину

$$E_S = \frac{e}{r_e^2} = \frac{m^2c^4}{e^3} \approx 10^{16} \text{ ед. СГСЭ}. \quad (2.33)$$

Такое сильное по величине электростатическое поле E_S превосходит на двенадцать порядков максимальное электростатическое поле, созданное в лабораторных условиях. Заметим, что поля напряженности $E \approx E_S$ сами по себе являются границей применимости классической электродинамики при логическом взгляде изнутри платформы «специальный принцип относительности + классическая электродинамика» [10, §37].

Нахождение частицы с зарядом и массой электрона в электростатическом поле напряженности (2.33) вызовет ее ускорение колоссальной величины

$$a_S \approx 10^{33}\,\frac{\text{см}}{\text{сек}^2}, \tag{2.34}$$

что на тридцать порядков превышает значение ускорения свободного падения у поверхности Земли. Для таких значений ускорения коэффициент $2\varphi_{ext}/c^2$ перестает быть малой величиной. Значение этого коэффициента (в данном случае порядка единицы) позволяет сделать вывод: геометрия пространства событий, воссоздающая взаимодействие заряженных частиц на расстояниях $r \approx r_e$ от точечного заряда, уже не будет псевдоевклидовой

$$ds^2 = ds_0^2 + O\left(\frac{2\varphi_{ext}}{c^2}\right) f(cdt,\, dx,\, dy,\, dz), \tag{2.35}$$

где $ds_0^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ — псевдоевклидов интервал.

Отсутствие в микроскопической области $r \approx r_e$ квазиинерциальных реальных систем отсчета, связанных с заряженными частицами, говорит о принципиальной невозможности применять между такими системами отсчета преобразования специальной относительности. Как показано в теории реальной относительности [1, п. 2.8], чем больше движение реальных систем отсчета отличается от инерциального движения, тем с меньшей точностью формулы специальной относительности применимы к преобразованиям пространственных и временных координат события между этими системами отсчета.

Глава 3.

Координатные системы и системы отсчета

3.1. Геометрические теории

В реальной практике система отсчета — это измерительный комплекс, в который входят как минимум два прибора: измеритель времени (часы) и измеритель пространственных расстояний (линейка). Эти приборы должны пройти поверку, то есть сравнение с соответствующими эталонами, и должны иметь общую платформу, то есть быть жестко связанными между собой.

Это описание фактически совпадает с описанием «физической системы отсчета» французского исследователя Л. Бриллюэна: «Физические системы отсчета имеют реальный смысл фактически существующих физических лабораторий, т. е. представляют собой жесткие и массивные установки, оборудованные различной измерительной аппаратурой» [41, гл. 5].

Один из классиков теоретической физики XX века, В.А. Фок, подчеркивает, что «...система отсчета связана с некоторым базисом, снабженным масштабами и часами; этот базис можно грубо представить себе в виде некоторой радиолокационной станции» [42, §5].

Таким образом, реальные системы отсчета связаны с реаль-

ными телами, поведение которых во внешнем (геометризованном) поле детерминировано, то есть определено начальными (граничными) условиями и свойствами внешнего поля. Поэтому существует жесткая связь положения и ориентации тела системы отсчета во внешнем поле, с одной стороны, и координат события в реальной системе отсчета, с другой стороны [1]. Как будет показано в следующих разделах, именно это обстоятельство позволило ввести формализм L-тензорного исчисления для наблюдаемых величин, в рамках которого, например, дифференциалы события в реальных системах отсчета описываются в качестве L-векторов.

Свободно парящий в космосе измерительный комплекс может быть представлен в астрономическом масштабе телом пренебрежимо малых размеров, для свойств которого важны не только положение в пространстве, но и собственная ориентация (точнее, четырехмерная ориентация, в которой учитывается скорость комплекса относительно других тел). Данная реальная система отсчета может быть описана ориентируемой точкой в четырехмерном пространстве.

Исходя из принципа геометризации полей, реальная система отсчета может быть представлена как ориентируемая точка, двигающаяся в геометризированном поле (или в суммарном геометризированном поле для случая нескольких полей, включая, например, поле собственной реактивной тяги). При этом измерения координат событий будут наиболее точны в некоторой четырехмерной окрестности начала системы отсчета [1, п. 2.10]. Возьмем диск, вращающийся в горизонтальной плоскости. Для реальной системы отсчета, находящейся в центре диска и вращающейся вместе с диском, измерения с наименьшей погрешностью будут осуществимы в некоторой окрестности начала системы отсчета, причем, чем больше угловая скорость диска, тем меньше эта окрестность. Для того, чтобы описать события на периферии диска при достаточно высоких угловых скоростях, следует перейти в реальную систему отсчета с центром в выбранной периферийной точке диска.

Положение в пространстве и ориентация ориентированной точки во внешнем поле описываются дифференциальными уравнениями ее четырехмерной ориентации и движения [1], решения которых, выраженные в мировых координатах ее траектории и угловых координатах ее ориентации, полностью определяются начальными (граничными) условиями.

Мы приходим к понятию реальной системы отсчета. *В рамках геометрической парадигмы реальная система отсчета — это двигающаяся во внешнем геометризированном поле ориентируемая точка с функциями измерения в некоторой ее окрестности координат событий.*

Подчеркнем, что условие о нахождении ориентируемой точки во внешнем геометризованном поле является обязательным. Это означает, что все поля, действующие на частицу, должны быть сведены в суммарное геометризованное поле по примеру раздела 2.4. Такой учет внешних полей является принципиальным в рамках реальной относительности, ибо только так можно достичь соответствия между текущими координатами событий в реальной системе отсчета, с одной стороны, и ее текущим положением и собственной ориентацией, с другой стороны. Здесь добавим, что игнорирование этого правила (то есть геометризация не всех полей, действующих на ориентируемую точку) противоречит геометрической парадигме, согласно которой категория классических полей, действующих на фоне плоского пространства-времени, отсутствует.

3.2. Координатные системы. Еще раз об h-поле

Для измерений координат событий, а также длин и промежутков времени, наблюдатель в измерительном комплексе должен пользоваться какой-либо координатной системой (координатной сеткой [5]). Измерения, как правило, выражаются в ортогональных координатах. К системам ортогональных координат относятся, прежде всего, декартовы координаты, которые удобны для описания динамических величин (таких как сила, скорость, ускорение

и т. п.), сферические координаты, которые удобны для описания угловых координат удаленных объектов, цилиндрические координаты, которые удобны для описания объектов и процессов с осевой симметрией, а также ряд других специальных систем координат. В большинстве случаев центр выбранной координатной системы совпадает с положением самого наблюдателя.

В разделе 1.2 показано, что в некоторой окрестности точки наблюдения O' можно пользоваться системой ортогональных мировых координат, которая задается ортогональным координатным репером

$$\mathbf{g}_{(k)}(O'),\ (k)=(0),(1),(2),(3),\ \mathbf{g}^{\mathbb{T}}_{(k)}(O')\mathbf{g}_{(m)}(O')=0,\ (k)\neq(m). \tag{3.1}$$

Напомним, что по условию раздела 1.4 ортогональный координатный репер $\mathbf{g}_{(k)}(O')$ должен быть выбран *соответствующим* локально-лоренцеву реперу $\mathbf{e}_{(a)}(O')$, сопровождающему ориентируемую частицу. Это означает, что, согласно формулам (1.28) и (1.38), вектора ортогонального координатного репера должны быть параллельными соответствующим векторам локально-лоренцева репера и что коэффициенты Ламэ в точке наблюдения $h^i{}_a(O')$, $h^a{}_i(O')$, посредством которых осуществляется связь между этими реперами в соответствии с формулой (1.42), должны быть выражены диагональной матрицей.

Поле коэффициентов Ламэ (h-поле) является фундаментальным полем, так как оно полностью определяет свойства полного, то есть расслоенного, пространства событий. Действительно, производимая с помощью коэффициентов Ламэ проекция на базу метрического тензора касательного плоского пространства η_{ab} дает метрических тензор пространства мировых координат

$$g_{ij}=h_i{}^a\,\eta_{ab}\,h^b{}_j, \tag{3.2}$$

с помощью которого вычисляются символы Кристоффеля

$$\Gamma^i{}_{jk}=\frac{1}{2}g^{im}\left(g_{jm,k}+g_{km,j}-g_{jk,m}\right), \tag{3.3}$$

которые, в свою очередь, входят в выражение для стандартной ковариантной производной ∇_k для величин, заданных мировыми координатами (Приложение 1)

$$\begin{aligned} \nabla_k Z^i &= Z^i{}_{,k} + \Gamma^i{}_{jk} Z^j, \\ \nabla_k Z_i &= Z_{i,k} - \Gamma^j{}_{ik} Z_j. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Далее, с помощью h-поля определяются коэффициенты вращения Риччи [36]

$$T^{a\cdot\cdot}_{\cdot b\,k} = \left(\nabla_k h^a{}_j\right) h^j{}_b, \tag{3.5}$$

которые входят в выражение для ковариантной производной в касательном расслоении $\widetilde{\nabla}_k$ для величин, заданных локально-лоренцевыми координатами (Приложение 1)

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_k A^a &= A^a{}_{,k} - T^{a\cdot\cdot}_{\cdot bk} A^b, \\ \widetilde{\nabla}_k A_a &= A_{a,k} + T^{b\cdot\cdot}_{\cdot ak} A_b. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Стоит подчеркнуть, что формулы (3.4) и (3.6) для ковариантных производных в базе и касательном расслоении позволяют построить [1] уравнение движения ориентируемой частицы и уравнение ее ориентации, которые, с точностью до произвола в выборе начальных (граничных) условий, определяют четырехмерную траекторию ориентируемой частицы и углы ее ориентации.

При заданном внешнем поле g_{ij} коэффициенты Ламэ определяются из (3.2) с точностью до четырехмерных поворотов $\Lambda^{a'}{}_a$ [1, 5], то есть до шести калибровочных функций. Это свойство позволяет произвести диагонализацию матрицы $h^i{}_a$ в любой точке траектории частицы, что, в соответствии с формулой

$$\mathbf{g}^{\mathbb{T}(i)}(O') = h^i{}_a(O')\mathbf{e}^{\mathbb{T}(a)}(O'), \quad \mathbf{g}_{(j)}(O') = \mathbf{e}_{(a)}(O')h^a{}_j(O'), \tag{3.7}$$

дает возможность выбрать вектора координатного репера параллельными векторам сопровождающего локально-лоренцева репера.

Длина и ориентация каждого из четырех векторов (3.1) ортогонального координатного репера реальной системы отсчета зависит от положения наблюдателя вдоль траектории реальной системы отсчета во внешнем геометризированном поле, поэтому, в

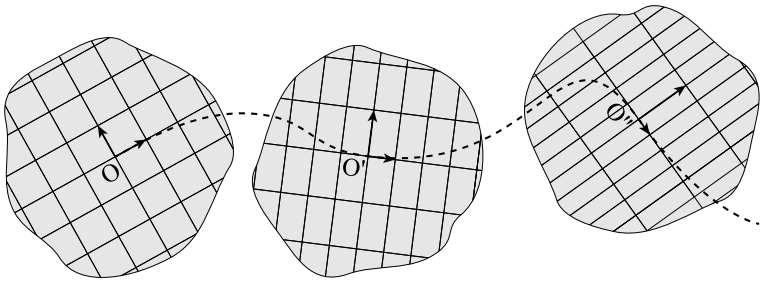

Рис. 3.1: Реальные системы отсчета с соответствующими им ортогональными мировыми координатами

общем случае, для разных точек наблюдения O' и O''

$$\mathbf{g}_{(k)}(O') \neq \mathbf{g}_{(k)}(O''), \quad (k) = (0),\,(1),\,(2),\,(3). \tag{3.8}$$

Следовательно, в общем случае различным точкам наблюдения O' и O'' будут соответствовать различные координаты одного и того же вектора событий $d\mathbf{X}$

$$\begin{aligned} dX_k(O') &= d\mathbf{X}\,\mathbf{g}^{\mathbb{T}}_{(k)}(O'), \\ dX_k(O'') &= d\mathbf{X}\,\mathbf{g}^{\mathbb{T}}_{(k)}(O''), \\ dX_k(O') &\neq dX_k(O''). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Из сказанного выше следует: *каждой реальной системе отсчета соответствует своя система (сетка) ортогональных мировых координат, необходимых для локального измерения координат событий* (рис. 3.1).

3.3. Пассивные преобразования координат

Под пассивными преобразованиями координат подразумевается преобразования мировых координат величин при переходе от одного типа к другому типу координатной сетки внутри отдельной реальной системы отсчета [1]. Пассивное преобразование координат широко известно в математической литературе [6, п.14.1-3].

Оно связано с новым описанием каждой точки пространства посредством новой координатной сетки.

Напомним, что стандартным вектором (например, контравариантным) является четырехмерная величина Z^i, координаты которой в реальной системе отсчета при переходе от одной координатной сетки к другой координатной сетке $x^i \to x^{\tilde{i}}$ преобразуются следующим образом [6]:

$$Z^{\tilde{i}} = \frac{\partial x^{\tilde{i}}}{\partial x^i} Z^i. \tag{3.10}$$

Тензором (например, дважды ковариантным) является величина Z_{ij}, координаты которой в реальной системе отсчета при пассивном преобразовании $x^i \to x^{\tilde{i}}$ преобразуются следующим образом (в тензорной форме)

$$Z_{\tilde{i}\tilde{j}} = J_{\tilde{i}}{}^{i} W_{ij} J^{j}_{\tilde{j}}, \tag{3.11}$$

где

$$J^{j}_{\tilde{j}} = \left\| \frac{\partial x^j}{\partial x^{\tilde{j}}} \right\| \tag{3.12}$$

— матрица, элементом которой в j-й строке в $\tilde{j}$-м столбце является частная производная $\partial x^j / \partial x^{\tilde{j}}$.

Отметим, что коэффициенты вращения Риччи в мировых координатах $T^{i}_{\cdot\, jk}$ является полным тензором относительно пассивных преобразований в отдельной реальной системе отсчета [1].

3.4. Активные преобразования координат

Под активными преобразованиями координат в теории реальной относительности подразумеваются преобразования мировых координат величин при переходе из одной реальной системы отчета в другую реальную систему отсчета [1].

Для правильного сравнения координат событий, а также длин и промежутков времени, измеренных в разных реальных системах отсчета, в этих системах отсчета должен быть выбран один и

тот же тип ортогональных координат (по умолчанию выбираются декартовы координаты).

3.5. К истории вопроса: А. Эйнштейн

Тема «Системы координат в теории относительности А. Эйнштейна» настолько обширна, что полное исследование по ней составило бы объемную монографию. Поэтому в настоящем разделе мы коснемся двух основополагающих работ А. Эйнштейна: «К электродинамике движущихся тел» [31] и «Основы общей теории относительности» [24].

Проанализируем цитату из статьи 1905 г. по специальной теории относительности [31, с. 13]:

«Пусть в «покоящемся» пространстве даны две координатные системы, каждая с тремя взаимно-перпендикулярными осями, выходящими из одной точки. Пусть оси X обеих систем совпадают, а оси Y и Z — соответственно параллельны. Пусть каждая система снабжена масштабом и некоторым числом часов, и пусть оба масштаба и все часы в обеих системах в точности одинаковы.

Пусть теперь началу координат одной из этих систем (k) сообщается (постоянная) скорость v в направлении возрастающих значений x другой, покоящейся системы (K); эта скорость передается также координатным осям, а также соответствующим масштабам и часам».

Мы видим, что до определенного момента времени координатные системы K и k совпадали. А. Эйнштейн считал это условие необходимым для сравнения масштабов длин и синхронизации часов. В следующий момент времени координатная система k приобретает постоянную скорость v, которая, как видно из следующих положений теории, ограничена только скоростью света в пустоте.

Приведенная цитата показывает, что теорию интересует только начальное и конечное состояния координатной системы k относительно покоящейся системы K. Промежуток времени, в те-

чение которого система k ускорялась до скорости v, то есть была *временно неинерциальной*, теория отбрасывает, как бы «вырезая неинтересные кадры» из репортажа наблюдателя. Из декларированного в системе k реквизита («некоторого числа часов») следует, что время достижения этой системой скорости v не является бесконечно малым.

Это есть ярчайший пример использования специальной теорией относительности абстрактных инерциальных систем отсчета, в общем случае не связанных с реальными телами. Мы говорим «в общем случае», так как в некоторых случаях, например, в случае удаления реальной системы отсчета от тяготеющих сил и полей, такую систему отсчета можно считать *квазиинерциальной* с точностью, удовлетворяющей поставленной задаче.

Заметим, что теория реальной относительности обосновывает влияние собственного ускорения системы отсчета на преобразования координат событий. Формулы преобразования координат событий из покоящейся системы отсчета K в реальную систему отсчета k, ускоренной до относительной скорости v, неявно учитывают величину и время действия этого ускорения.

При ограниченных временах наблюдения эффект *продольного* ускорения, максимально достижимого в макроскопических областях (например, в экспериментальных установках), в формулах реальной относительности будет очень малым [1]. Именно этим объясняется триумфальная точность формул специальной относительности для расчетов конструкций ускорителей заряженных частиц, где заряженные частицы разгоняются до ультрарелятивистских скоростей за короткий промежуток времени.

С другой стороны, влияние *центробежного* ускорения заряженных частиц на динамические процессы в макроскопических областях, например, на излучение электромагнитных волн, уже не всегда будет малым. Это влияние растет пропорционально величине центробежного ускорения и может достичь доминирующей роли даже при нерелятивистских скоростях заряженных частиц. Такие выводы дает электродинамика ориентируемой точки, которая основана на уравнениях, инвариантных относительно

преобразований реальной относительности [2].

В начале статьи 1916 г. по общей теории относительности А. Эйнштейн формулирует программную цель теории [24, §2]: «*Законы физики должны быть составлены так, чтобы они были справедливы для произвольно движущихся координатных систем*».

Проанализируем пример, следующий далее: «Пусть K — галилеева координатная система, т.е. такая, относительно которой (по крайней мере, в рассматриваемой четырехмерной области) некоторая масса, достаточно удаленная от других, движется прямолинейно и равномерно. Пусть K' — вторая координатная система, которая относительно K движется *равномерно ускоренно*. Тогда достаточно изолированная от других масса совершает относительно K' ускоренное движение, причем ни ускорение, ни направление этого ускорения не зависят от химического состава и физического состояния этой массы».

Переход от галилеевой системы отсчета K к равномерно ускоренной координатной системе K' осуществляется с помощью следующих координатных преобразований (в нерелятивистском случае):

$$x' = x + \frac{at^2}{2},\ y' = y,\ z' = z,\ t' = t. \tag{3.13}$$

Легко видеть, что все тела, двигающиеся относительно K прямолинейно и равномерно, будут двигаться относительно координатной системы K' с ускорением $-a$ по оси $O'X'$. Движение этих тел относительно K' будет точно таким же и в случае, если координатная система K' остановится, но в ней возникнет однородное гравитационное поле, параллельное оси $O'X'$ и направленное против этой оси, с ускорением силы тяжести, равным ускорению системы.

Интервал ds' движущейся координатной системы K' формально может быть вычислен с помощью (3.13):

$$\begin{aligned}(ds')^2 &= c^2(dt')^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2 = \\ &= (1 - a^2\,t^2/c^2)\,c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - 2at\,dx\,dt.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Тем не менее, пространство событий в координатной системе K' будет являться плоским (псевдоевклидовым). Действительно, в галилеевой системе отсчета K пространство событий псевдоевклидово, что означает равенство нулю всех компонент тензора Римана:

$$R^{i}{}_{jkm} \equiv 0. \tag{3.15}$$

Вычисление компонент тензора Римана в ускоренной координатной системе K' с помощью координатных преобразований (3.13) приводит к такому же результату:

$$R^{i'}{}_{j'k'm'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{m}}{\partial x^{m'}} R^{i}{}_{jkm} = 0. \tag{3.16}$$

Следовательно, не может быть принято, что поле инерции в ускоренной координатной системе K' эквивалентно гравитационному полю в K' (даже локально), так как псевдоевклидово пространство и риманово пространство с ненулевой кривизной не тождественны между собой (введение гравитационного поля в K' требует искривления пространства событий).

Во-вторых, ускоренная координатная система K' не может быть ассоциирована с каким-либо телом. Противоположное предположение потребовало бы введения реального гравитационного поля в системе K для ускорения K', что невозможно, так как система K галилеева и пространство в ней псевдоевклидово.

А. Эйнштейн, таким образом, вводит в общую теорию относительности произвольные *абстрактные координатные системы*, априори не связанные с какими-либо телами и движение которых ничем не ограничено: «...не остается ничего другого, как признать все мыслимые координатные системы принципиально равноправными для описания природы» [24, §3].

3.6. К истории вопроса: В.А. Фок

Уже в начале своего классического труда «Теория пространства, времени и тяготения» [42], первое издание которого вышло в

1955 г., В.А. Фок принципиально разделяет понятия «система координат» и «система отсчета», связывая последнюю с реальными телами, находящимися в пространстве.

«В общем случае координаты суть вспомогательные величины, характеризующие расположение тел по отношению к базису...». К системе отсчета или к «базису» В.А. Фок относит систему выбранных материальных тел, по отношению к которой можно описать любую точку пространства, поместив туда материальное тело малых размеров. В.А. Фок подчеркивает, что «...величины, характеризующие взаимное расположение тел, получают определенный смысл в предположении определенного базиса» [42, §1].

При рассмотрении принципа эквивалентности А. Эйнштейна, В.А. Фок предлагает «оставить в стороне вопрос о реализации ускоренно движущейся системы отсчета», справедливо подразумевая под этим, что в отсутствии внешних полей ускоренная система отсчета быть реализована не может. Для выхода из тупиковой ситуации В.А. Фок предлагает «толковать термин «система отсчета» более формально, в смысле «координатная система»...», фактически имея в виду абстрактную систему отсчета, не связанную с каким-либо телом [42, §61].

В.А. Фок отмечает неудачное название геометрической теории тяготения А. Эйнштейна: «Так, поскольку в теории тяготения пространство предполагается неоднородным, а относительность связана с однородностью, то выходит, что в общей теории относительности нет, вообще говоря, никакой относительности» [42, Введение].

В римановом пространстве теории тяготения В.А. Фок предлагает ввести криволинейные гармонические координаты, в которых оператор Даламбера скалярной функции имеет такой же вид, как в декартовых координатах псевдоевклидова пространства

$$\Box\psi = g^{mn}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^m \partial x^n}. \tag{3.17}$$

В.А. Фок доказывает, что в случае изолированной системы тяготеющих масс *гармоническая координатная система* является

привилегированной и может быть найдена однозначно, с точностью до преобразования Лоренца [42, §93].

Постановку задачи об отыскании привилегированной координатной системы В.А. Фок считает противоположной постановке А. Эйнштейна: «По Эйнштейну, никаких привилегированных систем координат не существует, и система координат остается неопределенной до конца. Сторонники этой точки зрения возводят эту неопределенность в достоинство и усматривают в ней глубокий смысл...». При этом В.А. Фок подчеркивает: «Присущая постановке Эйнштейна неопределенность не является принципиальной и не имеет какого-либо глубокого смысла» [42, §93].

Далее В.А. Фок комментирует равноправие произвольных координатных систем в общей теории относительности: «Он [Эйнштейн] так и не осознал различия между физическим равноправием (или физической относительностью) в смысле существования соответственных процессов в разных системах отсчета и тем формальным равноправием, которое состоит в возможности пользоваться любыми координатными системами независимо от того, существуют или нет в этих системах соответственные физические процессы» [42, §96].

В.А. Фок приводит строгое статическое решение уравнений гравитационного поля А. Эйнштейна для точечной массы, найденное им в гармонических координатах [42, §93]

$$ds^2 = \frac{r - r_g/2}{r + r_g/2} c^2 dt^2 - \frac{r + r_g/2}{r - r_g/2} dr^2 - (r + r_g/2)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{3.18}$$

Здесь $r_g = 2kM/c^2$ — гравитационный радиус, M — масса источника гравитационного поля, $k = 6.67 \cdot 10^{-8}$ см$^3 \cdot$ г$^{-1} \cdot$ с$^{-2}$ — гравитационная постоянная.

Решение В.А. Фока имеет сингулярность при $r = r_g/2$, в отличие от известного решения Шварцшильда, полученного в негармонических координатах [10, §100], и имеющего сингулярность при $r = r_g$:

$$ds^2 = (1 - r_g/r) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r_g/r} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{3.19}$$

3.7. К истории вопроса: Л. Бриллюэн

Книга «Relativity Reexamined» (в буквальном переводе: «Пересмотренная относительность» явилась одной из последних работ одного из классиков физики XX века Леона Бриллюэна и увидела свет только после смерти автора, в 1970 году [40]. В русском издании 1972 г. книга имела менее претензионное название «Новый взгляд на теорию относительности» [41]. Книга посвящена критическому обзору проблем специальной и общей относительности А. Эйнштейна.

Одним из главных вопросов, который поставил автор, явился вопрос «о крайне необходимом различении систем координат и систем отсчета» [41, Гл. 4]. По мнению Л. Бриллюэна «...между этими определениями следует делать принципиальное отличие. Система координат — чисто геометрическое понятие; она не имеет массы по той простой причине, что в геометрии понятие массы не рассматривается. Система отсчета же должна обладать массой, причем необходимо предполагать, что эта масса много больше массы любого движущегося относительно нее тела» [41, Введение].

Л. Бриллюэн коснулся принципиальных трудностей, которые возникают в общей теории относительности при работе с ничем не ограниченным классом координатных систем. Для этого он ссылается на книгу В. Паули «Теория относительности» [43], где приведено строгое решение для гравитационного поля материальной точки.

Как показал В. Паули [43, §58], условия сферической симметрии и статичности не являются достаточными для определения координат, в которых производится интегрирование уравнений А. Эйнштейна (2.1) для этого случая. Для полного определения координатной системы применяются специальные нормировки. В. Паули приводит выражение для квадрата интервала в координатах, нормированных способом, указанным в [43, с. 231], где x^1, x^2, x^3 — координатные функции, описывающие пространственные измерения, $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$, x^4 — функция

временной координаты, сигнатура метрики $(+, +, +, -)$:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + \frac{r_g}{r^2(r-r_g)}(x^1dx^1 + \\ + x^2dx^2 + x^3dx^3)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)(dx^4)^2. \quad (3.20)$$

Выраженное в данных координатах решение имеет сингулярность при $r = r_g$.

В. Паули переходит к другим сферически-симметричным координатам при помощи преобразования

$$r' = \sqrt{(x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2}, \\ r = \left(1 + \frac{r_g}{4r'}\right)^2 r', \quad x'^i = \frac{r'}{r}x^i, \ i = 1, 2, 3. \quad (3.21)$$

В этих координатах

$$ds^2 = \left(1 + \frac{r_g}{4r'}\right)^4 \left[(dx'^1)^2 + (dx'^2)^2 + (dx'^3)^2\right] - \frac{1 - r_g/4r'}{1 + r_g/4r'}(dx'^4)^2. \quad (3.22)$$

Метрика (3.22) имеет физический смысл до значения $r' = r_g/4$. Асимптотически обе метрики являются псевдоевклидовыми.

Л. Бриллюэн отмечает, что решение В.А. Фока (3.18), а также решения В. Паули (3.20) и (3.22) отличаются друг от друга, прежде всего, особенностями метрики, что приводит к различиям в их физической интерпретации. Возникает вопрос, какие из координатных систем — гармонические координаты В.А. Фока, координаты (x^1, x^2, x^3, x^4) или координаты (x'^1, x'^2, x'^3, x'^4), — отвечают физической реальности? Л. Бриллюэн утверждает: «Вопрос остается открытым. ... Методы Эйнштейна являются слишком общими и не дают какого-либо определенного ответа» [41, с. 80].

Отмечая глубину критических рассуждений Л. Бриллюэна, следует все же отметить их неконструктивный характер, так как они ничего не говорят о том, как в теорию относительности можно ввести «физические системы отсчета».

С позиций уже известных положений реальной относительности [1] отметим, что для решения этой проблемы пространство событий специальной относительности (псевдоевклидово пространство) или пространство событий общей относительности (риманово пространство) должно быть расширено: в пространстве событий должна присутствовать дополнительная структура, отвечающая за описание ориентации «физической системы отсчета» в каждой точке пространства мировых координат.

Такая структура есть в расслоенном пространстве Г.И. Шипова — пространстве событий ориентируемых точек. Это структура по отношению к базе расслоения (пространству мировых координат) является дополнительной, она называется касательным расслоением и представляет собой совокупность плоских пространств, касательных к базе в каждой его точке. Каждое касательное пространство описывается локально-лоренцевыми координатами $x^a(A)$, связанными с ориентацией ориентируемой точки в точке касания A.

Однако относительность, основанная на новом пространстве событий — пространстве событий Г.И. Шипова, — и оперирующая новым элементарным объектом — ориентируемой точкой в четырехмерном пространстве, — уже не будет ни специальной, ни общей относительностью. Она называется *реальной относительностью*.

3.8. К истории вопроса: А.Л. Зельманов

Книга А.Л. Зельманова и В.Г.Агакова «Элементы общей теории относительности» «...возникла на основе лекций, которые на протяжении многих лет читал один из авторов (А.Л. Зельманов) для студентов и аспирантов астрономического отделения Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова» [44, Введение] и вышла в 1989 году вскоре после его кончины. Одна из начальных глав книги имеет название «система отчета и система координат», где А.Л. Зельманов вводит понятие системы отсчета с «привязанными к одному и тому же телу отсчета»

системами координат [44, гл. 4].

Основываясь на преобразовании координат событий от одной координатной системы к другой координатной системе *внутри* одной и той же системы отсчета, А.Л. Зельманов развивает новые математические методы теории относительности, а именно: аппарат хронометрических и кинеметрических инвариантов и ортометрическую форму монадного формализма.

Монадный формализм представляет собой «общековариантное обобщение аппарата хронометрически инвариантых и кинеметрически инвариантных величин» [44, с. 156], относящихся к выбранной системе отсчета, определение которой дал А.Л. Зельманов: «Система отсчета есть воображаемое, лишенное массы, вообще говоря, произвольным образом деформирующееся тело отсчета, на котором проведена трехмерная координатная сетка, и в каждой точке тела отсчета есть прибор - часы, позволяющие фиксировать моменты времени» [44, с. 36].

Перечисленное свойство воображаемости и отсутствия массы у тела отсчета позволяет классифицировать систему отсчета А.Л. Зельманова как *абстрактную систему отсчета*, не связанную с каким-либо реальным телом. Отсюда следует прямой вывод о том, что монадный формализм развит для абстрактных систем отсчета, которые в общем случае не могут быть реализованы. Что же касается различия систем отсчета и координатных систем, то А.Л. Зельманов был, пожалуй, одним из первых исследователей, поставивших этот вопрос.

3.9. К истории вопроса: В.И. Родичев

Блестящая монография В.И. Родичева «Теория тяготения в ортогональном репере» [5] вышла в свет в 1998 г., через 13 лет после кончины автора, благодаря стараниям издательского отдела Новокузнецкого физико-математического института. Книга оформлена как перевод издания на английском языке с приоритетом авторских прав от 1974 года.

В начале главы IV, посвященной геометрическому отображению систем отсчета, В.И. Родичев пишет: «Системы отсчета являются необходимым составным элементом любого как экспериментального, так и теоретического исследования явлений природы. Не существует такого явления и нет такого наблюдателя, которых нельзя было бы отнести к какой-либо системе отсчета. ...

Однако, как ни парадоксально, в настоящее время нет общепринятого аналитического определения как самих систем отсчета, так и правил перехода от одних к другим».

В.И. Родичев описывает две группы преобразований, на которых основан формализм ортогональных реперов [5, раздел 7]:

(A) — группа произвольных координатных преобразований (преобразований координатной сетки)*всего пространства*

$$x^{i'} = f^{i'}(x^i), \tag{3.23}$$

(B) — группа ортогональных вращений ортонормированных тетрад в касательных псевдоевклидовых пространствах

$$\begin{gathered} h^i{}_{a'} = \Lambda^a{}_{a'} h^i{}_a, \quad h^{a'}_i = \Lambda^{a'}{}_a h^a{}_i \\ \eta_{a'b'} = \Lambda_{a'}{}^a \, \eta_{ab} \, \Lambda^b{}_{b'}, \quad \Lambda^{a'}{}_a \Lambda^a{}_{b'} = \delta^{a'}{}_{b'}. \end{gathered} \tag{3.24}$$

В.И. Родичев считает неудовлетворительным действием основывать переход между двумя неинерциальными системами отсчета только на группе (A) — глобальной группе преобразований координат, как это делает общая теория относительности, и, в частности, развитый позже формализм хронометрических инвариантов [5, раздел 25]:

«Начиная с Эйнштейна, долгое время считалось, что переход от одной НСО к другой должен описываться произвольными преобразованиями координат (группа A), ибо, как полагал Эйнштейн, среди всевозможных преобразований координат всегда найдутся те, которые описывают относительное движение трехмерных координатных систем [45, § 6].

Мы видим, что здесь еще нет различия между понятиями системы отсчета и системы координат.

Значительно позже, реализуя в некотором смысле предположение Эйнштейна, группу (A) разделили на две подгруппы:

$$(A_1) \sim \left\{ \begin{array}{l} x^{k'} = f^{k'}(x^k) \\ x^{0'} = f^{0'}(x^k,\, x^0) \end{array} \right\}, \quad (A_2) \sim \left\{ \begin{array}{l} x^{k'} = \varphi^{k'}(x^k,\, x^0) \\ x^{0'} = x^0 \end{array} \right\},$$
$$k,\ k' = 1,\, 2,\, 3. \tag{3.25}$$

...

На основе такого разделения был развит формализм хронометрических инвариантов [44].

Здесь сразу же возникают две трудности. Во-первых, в случае произвольных координат в ОТО координата x^0 не является тем временем, отрезки которого dx^0 можно измерять каким-либо прибором. *Произвольные координаты в ОТО не имеют сами по себе ни метрического, ни физического смысла.* Поэтому, вообще говоря, координаты $x^{k'}$ в подгруппе (A_1) могут оказаться зависящими от физического времени и, наоборот, эти же координаты в подгруппе (A_2) могут не зависеть от него.

Во-вторых, если учесть, что как в СТО, так и в ОТО могут вводится нестационарные (т.е. зависящие от времени) координатные сетки, отображающие изменяющийся со временем порядок перечисления мировых точек, то, оставаясь в рамках преобразований (A_1), (A_2), оказывается совершенно невозможным отличить переход к новой системе отсчета от перехода к новой нестационарной сетке в одной и той же системе отсчета».

(Выделение текста наше, ссылки и номер формулы в цитате приведены в порядке следования ссылок и номеров формул настоящей работы, НСО — неинерциальная система отсчета, ОТО — общая теория относительности, СТО — специальная теория относительности).

В.И. Родичев сформулировал программную цель теории — ввести действительные системы отсчета, с помощью которых можно описывать события во всем пространстве: «...система отсчета должна иметь физический базис — набор определенным образом движущихся тел, стандартных приспособлений, масштабов и часов. ... Утрируя, можно сказать, что базис системы отсчета в

пределе представляет собой бесконечное количество движущихся стандартных тел — физических реперов, с каждым из которых связан периодический процесс — часы» [5, раздел 25].

Далее В.И. Родичев провозглашает «минимальное необходимое требование» к теории, описывающей переход от одной произвольной системы отсчета к другой [5, раздел 28]:

«1. Законы природы аналитически должны выражаться в форме, общековариантной относительно обеих групп преобразований (A) и (B).

2. Все физические величины должны геометрически отображаться общековариантными относительно групп (A) и (B) тензорами».

Подчеркнем, что общековариантность законов природы и физических величин относительно группы (A) подразумевает их общековариантность относительно преобразований координатной сетки $x^{i'} = f^{i'}(x^i)$ *всего пространства*.

Эта программа так и не была осуществлена своим автором, так как, по признанию В.И.Родичева: «рассмотренная тетрадная формулировка ОТО, хотя и позволила более корректно поставить и решить ряд задач, снова оказалась не свободной от трудностей, связанных с нековариантностью» [5, Заключение].

Как будет показано ниже, теории реальной относительности удалось построить непротиворечивый аппарат преобразований координат событий из одной реальной системы отсчета в другую:

во-первых, за счет замены системы отсчета В.И. Родичева, представляющей собой бесконечную совокупность «физических реперов» для описания событий во всем пространстве, на один «физический репер», описывающий события локально, в некоторой окрестности своего начала;

во-вторых, за счет сужения глобальной группы координатных преобразований (A) до группы координатных преобразований, действующей в окрестности начала «физического репера», то есть внутри реальной системы отсчета.

Глава 4.

События

4.1. Преобразование координат событий из удаленной квазиинерциальной системы отсчета в неинерциальную реальную систему отсчета

Примем, что реальная система отсчета K в начальном положении O была удалена на достаточное расстояние от источника поля, где пространство событий является псевдоевклидовым в соответствии с условием (1.21). Будем считать реальную систему отсчета в ее начальном положении $K(O)$ покоящейся. Легко видеть, что реальная система отсчета $K(O)$ и соответствующая ей в мировой точке O локально-лоренцева система отсчета $k(O)$ совпадают. В соответствии с правилами вычисления коэффициентов Ламэ (раздел 1.4) найдем

$$h^i{}_a(O) = \delta^i{}_a, \quad h^a{}_i(O) = \delta^a{}_i, \tag{4.1}$$

откуда следует вывод о том, что мировые и локально-лоренцевы координаты событий в удаленной точке O совпадают

$$dX^a(O) = \delta^a{}_i dX^i(O). \tag{4.2}$$

В точке наблюдения O' мы имеем, во-первых, исследуемую систему отсчета, которая по детерминированной траектории перешла из начальной точки O в точку наблюдения O' и стала в общем случае неинерциальной реальной системой отсчета $K'(O')$, и, во-вторых, локально-лоренцеву систему отсчета $k'(O')$, мгновенно совпадающей по ориентации базисных векторов в мировой точке O' с реальной системой отсчета $K'(O')$.

Согласно формуле (1.13) координаты событий в локально-лоренцевых системах отсчета $k'(O')$ и $k(O)$ соотносятся следующим образом

$$dX^{a'}(O') = \Lambda^{a'}{}_{a} dX^{a}(O), \tag{4.3}$$

где $\Lambda^{a'}{}_{a}$ — матрица четырехмерной ориентации $k'(O')$ относительно $k(O)$ (1.12).

В соответствии с формулой (1.49) координаты событий в реальной системе отсчета $K'(O')$ и локально-лоренцевой системе отсчета $k'(O')$ соотносятся следующим образом

$$dX^{i'}(O') = h^{i'}{}_{a'}(O')\, dX^{a'}(O'), \tag{4.4}$$

где $h^{i'}{}_{a'}(O')$ — значение поля коэффициентов Ламэ в начале K' [1, раздел 2.9]

$$h^{i'}{}_{a'}(O') = \delta^{i'}{}_{i}\, h^{i}{}_{a}(O')\, \delta^{a}{}_{a'}. \tag{4.5}$$

Соединяя формулы (4.1 – 4.5), получим окончательную формулу преобразования дифференциалов мировых координат события из системы $K(O)$ в систему $K'(O')$

$$dX^{i'}(O') = h^{i'}{}_{a'}(O')\Lambda^{a'}{}_{a}\, \delta^{a}{}_{i}\, dX^{i}(O). \tag{4.6}$$

Рассмотрим другую удаленную квазиинерциальную систему отсчета $\overline{K}(\overline{O})$, двигающуюся относительно удаленной покоящейся системы отсчета $K(O)$ равномерно и прямолинейно с постоянной скоростью $\mathbf{V}_{\overline{O}}$. Мировые координаты события в системах $\overline{K}$ и K согласно формулам специальной относительности соотносятся следующим образом

$$dX^{\bar{i}} = L^{\bar{i}}{}_{i} dX^{i}, \tag{4.7}$$

где $L^{\bar{i}}{}_{i}$ — матрица чистого преобразования Лоренца из покоящейся системы K в движущуюся относительно нее с постоянной скоростью систему $\overline{K}$ (см. Раздел 4.3.)

Найдя dX^i из (4.7) и подставив результат в (4.6), получим формулу преобразования координат события из удаленной квазиинерциальной системы отсчета $\overline{K}$ в реальную систему отсчета K'

$$dX^{i'}(O') = h^{i'}{}_{a'}(O')\Lambda^{a'}{}_{a}\, L^{a}{}_{\bar{i}}\, dX^{\bar{i}}(\overline{O}), \tag{4.8}$$

где $L^{a}{}_{\bar{i}} = \delta^{a}{}_{i}\, L^{i}{}_{\bar{i}}$, $L^{i}{}_{\bar{i}} = \left(L^{\bar{i}}{}_{i}\right)^{-1}$ — матрица чистого преобразования Лоренца из системы $\overline{K}$ в неподвижную систему K.

По умолчанию мы будем считать удаленную квазинерциальную систему отсчета покоящейся. Это связано с тем, что другое ее состояние — состояние движения — должно быть обусловлено либо работой геометризированного поля (чего не может быть из-за его отсутствия на большом расстоянии от источника), либо внешними причинами, не связанными с рассматриваемым полем. Внешней причиной может быть, например, предварительное ускорение частиц в эксперименте по их рассеянию ядерным или электромагнитным полем. В данном случае мы имеем по отношению к исследуемому полю внешнее поле или систему внешних полей, по которым историю изменения четырехмерной ориентации частицы определить затруднительно.

В контексте настоящего раздела понятие «внешнее поле» мы будем понимать в смысле его нахождения за пространственной и временной границами исследуемого поля, то есть за его четырехмерной границей. Поэтому появление движущейся квазиинерциальной реальной системы отсчета на границе исследуемого поля можно образно назвать «явлением из другой вселенной», справедливо подразумевая под «этой вселенной» область действия рассматриваемого поля.

Дадим следующее определение. Удаленная покоящаяся система отсчета — это реальная система отсчета, удаленная на границу действия поля и покоящаяся относительно его источника. Как следует из определения, выбор такой системы зависит от по-

ля, движение в котором мы рассматриваем, а также от точности, удовлетворяющей поставленной задаче.

4.2. Преобразование координат событий между реальными системами отсчета. Начальные условия

Запишем формулу, аналогичную (4.6), преобразования дифференциалов координат события из удаленной покоящейся системы отсчета $K(O)$ во вторую реальную систему отсчета K'' с началом в точке O''

$$dX^{i''}(O'') = h^{i''}{}_{a''}(O'')\Lambda^{a''}_{a}\,\delta^{a}{}_{i}\,dX^{i}(O). \tag{4.9}$$

Из формул (4.6) и (4.9) получим формулу преобразования дифференциалов координат события из реальной системы отсчета $K'(O')$ в реальную систему отсчета $K''(O'')$

$$dX^{i''}(O'') = h^{i''}{}_{a''}(O'')\Lambda^{a''}_{a'}h^{a'}_{i'}(O')dX^{i'}(O'), \tag{A}$$

где $\Lambda^{a''}_{a'}$ — матрица четырехмерной ориентации $K''(O'')$ относительно $K'(O')$.

В приведенном примере взаимная четырехмерная ориентация K'' и K' зависит от соответствующих ориентаций этих систем отсчета относительно удаленной системы $K(O)$ и может быть определена с помощью анализа поворотов реальных систем отсчета K' и K'', начавших свое движение от точки O. Четырехмерная ориентация $K''(O'')$ относительно $K'(O')$ есть сумма элементарных поворотов сопровождающего локально-лоренцева репера, взятых в обратном порядке при следовании от мировой точки O в точку O' (что выражается матрицей $\Lambda^{a}{}_{a'}$), и взятых далее в прямом порядке при следовании от точки O в точку O'' (что выражается матрицей $\Lambda^{a''}_{a}$) (рис. 4.1)

$$\Lambda^{a''}_{a'} = \Lambda^{a''}_{a}\Lambda^{a}{}_{a'}. \tag{4.10}$$

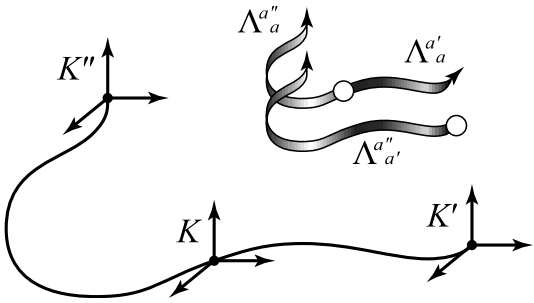

Рис. 4.1: $\Lambda^{a''}_{a}$ — четырехмерная ориентация K'' относительно K; $\Lambda^{a'}_{a}$ — четырехмерная ориентация K' относительно K; $\Lambda^{a''}_{a'} = \Lambda^{a''}_{a}\,\Lambda^{a}_{a'} = \Lambda^{a''}_{a}\,(\Lambda^{a'}_{a})^{-1}$ — четырехмерная ориентация K'' относительно K'

Так как пространство событий реальной относительности — пространство событий Г.И. Шипова — обладает свойством абсолютного параллелизма, то с геометрической точки зрения относительная четырехмерная ориентация двух разнесенных между собой реальных систем отсчета зависит только от взаимной ориентации соответствующих реперов и не зависит от пути перемещения наблюдателя между ними. В вышеприведенном примере путь перемещения наблюдателя из реальной системы отсчета $K'(O')$ в реальную систему отсчета $K''(O'')$ лежал через удаленную точку O. Свойство абсолютного параллелизма векторов допускает бесконечное множество путей параллельного перемещения наблюдателя из мировой точки O' в мировую точку O'', где ориентация наблюдателя может быть сравнима с ориентацией конечной реальной системы отсчета $K''(O'')$. Вследствие этого мы считаем формулу (A) основной, то есть описывающей во всех случаях преобразование дифференциалов координат события из начальной реальной системы отсчета $K'(O')$ в конечную реальную систему отсчета $K''(O'')$.

Из-за естественного требования о сравнении масштабов длин и синхронизации часов в обеих реальных системах отсчета K' и K'' (или, что то же самое, из-за необходимости поверки изме-

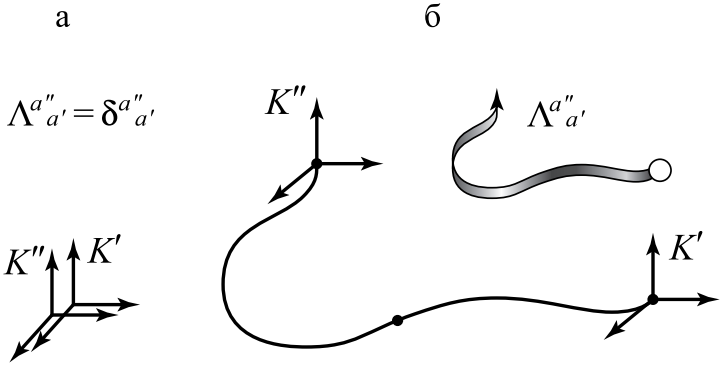

Рис. 4.2: Системы отсчета K'', K' при а: $t'' = t' = 0$; б: $t'' > 0$, $t' > 0$

рительных приборов K' и K'' *в одинаковых условиях*), логично установить начальное условие к преобразованию (A) о параллельности соответствующих реперных векторов обеих реальных систем отсчета и о совпадении их центров в начальный момент времени (рис. 4.2)

$$\Lambda^{a''}{}_{a'} = \delta^{a''}{}_{a'}, \quad O'' = O', \quad t'' = t' = 0. \tag{4.11}$$

Как будет показано ниже, параллельность соответствующих реперных векторов двух реальных систем отсчета, находящихся в одном внешнем поле и в одной мировой точке, означает их равенство (в случае принадлежности рассматриваемых систем к одному классу реальных систем отсчета). При этом только равенство соответствующих реперных реперов систем отсчета K'' и K', а не их параллельность, означает совпадение K'' и K'. Пример параллельности реперных векторов, но не их совпадения, дают нам реальная система отсчета $K'(O')$, находящаяся во внешнем поле, и мгновенно совпадающая с ней абстрактная локально-лоренцева система $k'(O')$.

Начальное условие (4.11) мы будем подразумевать по умолчанию для реальных систем отсчета, связанных с *макроскопическими* телами (то есть для таких реальных систем отсчета, где

возможно прямое измерение времени и расстояний).

Для реальных систем отсчета, связанных с *микроскопическими* телами (например, для собственных систем отсчета движущихся элементарных частиц), начальное условие к закону (A) будет оговариваться особо, исходя из условий эксперимента. В большинстве случаев прямое аппаратное измерение времени и расстояний в таких системах отсчета невозможно из-за отсутствия измерительных приборов соответствующих размеров, поэтому оценка собственного времени в микрообластях, как правило, производится по косвенным показателям.

Запишем формулы последовательных преобразований пространственно-временных координат события: сначала из начальной реальной системы отсчета $K'(O')$ в промежуточную реальную систему отсчета $\widetilde{K}(\widetilde{O})$, затем из системы $\widetilde{K}(\widetilde{O})$ в конечную реальную систему отсчета $K''(O'')$

$$\begin{aligned} dX^{\widetilde{i}} &= h^{\widetilde{i}}{}_{\widetilde{a}}(\widetilde{O})\,\Lambda^{\widetilde{a}}{}_{a'}\,h^{a'}{}_{i'}(O')\,dX^{i'}, \\ dX^{i''} &= h^{i''}{}_{a''}(O'')\,\Lambda^{a''}{}_{\widetilde{b}}\,h^{\widetilde{b}}{}_{\widetilde{j}}(\widetilde{O})\,dX^{\widetilde{j}}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Подставив первое выражение (4.12) во второе, получим

$$dX^{i''} = h^{i''}{}_{a''}(O'')\,\Lambda^{a''}{}_{\widetilde{b}}\,\Lambda^{\widetilde{b}}{}_{a'}\,h^{a'}{}_{i'}(O')\,dX^{i'}. \tag{4.13}$$

Формула (4.13) говорит, что «степень неинерциальности» промежуточной реальной системы отсчета (то есть $h^{\widetilde{i}}{}_{\widetilde{a}}(\widetilde{O}) = \delta^{\widetilde{i}}{}_{i}\,h^{i}{}_{a}(\widetilde{O})\,\delta^{a}{}_{\widetilde{a}}$) не влияет на итоговый результат преобразования дифференциалов координат события из начальной системы в конечную реальную систему отсчета.

4.3. Матрица четырехмерной ориентации

Ввиду требования о соответствии координатного репера реальной системы отсчета ортонормированному реперу сопровождающей локально-лоренцевой системы отсчета (раздел 1.4), матрица

четырехмерной ориентации реальной системы отсчета $K''(O'')$ относительно $K'(O')$ совпадает с матрицей относительной четырехмерной ориентации локально-лоренцевых систем отсчета $k''(O'')$ и $k'(O')$. Она равна произведению матриц элементарных поворотов, которые должен испытывать наблюдатель при перемещении от начального положения O' к конечному положению O''

$$\Lambda^{a''}_{a'} = R_n L_m ... L_1 R_1 \in SO(1.3), \tag{4.14}$$

где итоговая ориентация $\Lambda^{a''}_{a'}$ безусловно зависит от последовательности выполнения отдельных поворотов $R_1, ..., R_n$ и $L_1, ..., L_m$. Здесь $SO(1.3)$ — группа вращений псевдоевклидова пространства с сигнатурой $(+---)$, сохраняющая ориентацию пространства (координатных осей) (так называемая *собственная группа вращений*) [46, с. 102], R — матрица трехмерного вращения в псевдоевклидовом пространстве, L — матрица поворота в псевдоевклидовых плоскостях, не связанного с трехмерным пространственным поворотом.

Приведем пример наиболее общей матрицы трехмерного вращения в псевдоевклидовом пространстве:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{xx} & \cos\theta_{xy} & \cos\theta_{xz} \\ 0 & \cos\theta_{yx} & \cos\theta_{yy} & \cos\theta_{yz} \\ 0 & \cos\theta_{zx} & \cos\theta_{zy} & \cos\theta_{zz} \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

где $\cos\theta_{\alpha\beta}$ — направляющие косинусы углов [47].

Наиболее общая матрица чистого преобразования Лоренца (буста), не связанного с пространственным поворотом, выглядит следующим образом [47]:

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_x\gamma & -\beta_y\gamma & -\beta_z\gamma \\ -\beta_x\gamma & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_x^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_y\gamma & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_y^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_z\gamma & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_z^2}{\beta^2} \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

где $\beta_\alpha = V_\alpha/c$, $\beta^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2$, V_α — компоненты скорости центра конечной системы отсчета по отношению к начальной, γ — релятивистский фактор:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{4.17}$$

Заметим, что любой четырехмерный поворот может быть разложен на чистое преобразование Лоренца (буст) с некоторым пространственным параметром $\mathbf{V}$ и трехмерный поворот вокруг некоторой оси $\mathbf{n}$ [48]:

$$\Lambda = R(\mathbf{n})L(\mathbf{V}). \tag{4.18}$$

Приведем формулу для матрицы чистого преобразования Лоренца для произвольного направления скорости $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ системы K' относительно K, выразив ее через псевдоевклидов угол поворота репера K' относительно K в направлении движения системы K'

$$\operatorname{th}\Theta = \frac{|\mathbf{V}|}{c} \tag{4.19}$$

и направляющие косинусы направления движения K'

$$\begin{aligned} \cos\alpha_x &= V_x/V, \\ \cos\alpha_y &= V_y/V, \\ \cos\alpha_z &= V_z/V, \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$L^{a'}_{\ a} = \\ = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\Theta & -\operatorname{sh}\Theta\cos\alpha_x & -\operatorname{sh}\Theta\cos\alpha_y & -\operatorname{sh}\Theta\cos\alpha_z \\ -\operatorname{sh}\Theta\cos\alpha_x & 1+\Delta\cos^2\alpha_x & \Delta\cos\alpha_x\cos\alpha_y & \Delta\cos\alpha_x\cos\alpha_z \\ -\operatorname{sh}\Theta\cos\alpha_y & \Delta\cos\alpha_x\cos\alpha_y & 1+\Delta\cos^2\alpha_y & \Delta\cos\alpha_y\cos\alpha_z \\ -\operatorname{sh}\Theta\cos\alpha_z & \Delta\cos\alpha_x\cos\alpha_z & \Delta\cos\alpha_y\cos\alpha_z & 1+\Delta\cos^2\alpha_z \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

где обозначено $\Delta = 2\operatorname{sh}^2(\Theta/2)$ [1].

Следует отметить, что $\Lambda^{a''}_{a'}$ — матрица, элементами которой являются функции шести углов, задающих относительную ориентацию двух четырехмерных объектов. Эти углы можно определить, например, с помощью следующей процедуры. Координатный репер $\mathbf{g}_{(k)}(O'')$ системы $K''(O'')$ и координатный репер $\mathbf{g}_{(k)}(O')$ системы $K'(O')$ переносятся параллельным образом в мировую точку P (которая может совпадать с точками O' или O''), где и происходит прямое измерение углов относительной ориентации. Из-за свойств абсолютного параллелизма пространства событий выбор точки P и путей параллельного переноса реперов никак не будет влиять на результаты измерения.

На практике во многих случаях измерения четырехмерной ориентации макроскопических объектов производятся дистанционно, а измерения ориентации космических объектов — с помощью астрономических методов. Эти измерения чаще всего относят к квазиинерциальной (в рамках поставленной задачи) системе отсчета — наземной лаборатории.

4.4. Пример преобразования координат события между реальными системами отсчета

Приведем пример преобразования дифференциалов координат события, связанного с частицей (например, достижение частицей какой-либо точки в пространстве), из удаленной покоящейся системы отсчета K в реальную систему отсчета K', связанную с макроскопическим телом и движущуюся в поле Шварцшильда. Примем, что в момент времени $t = t' = 0$ системы отсчета K и K' совпадали, и в этот момент система K' начала двигаться к источнику поля Шварцшильда, расположенного на расстоянии x_g $(x_g \gg r_g)$ в положительном направлении оси OX системы K. В момент времени t по часам системы K четырехмерные координаты центра O' системы K' относительно системы K $x^i(O') = (ct, x_{O'}, 0, 0)$, а координаты источника поля

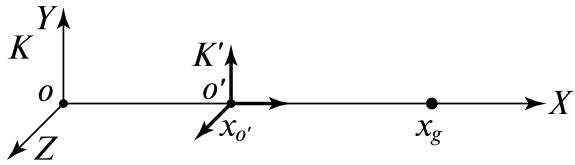

Рис. 4.3: Реальная система K' в поле Шварцшильда (радиальное движение)

$x^i(x_g) = (ct, x_g, 0, 0)$ (рис. 4.3). Пусть r есть расстояние между источником поля и центром O': $r = x_g - x_{O'} > 0$.

Ограничимся случаем, когда пробная частица, движущаяся в некоторой окрестности системы K', так же, как и сама реальная система K', совершает чисто радиальное движение в поле Шварцшильда, поэтому дифференциалы ее пространственно-временных координат в системе K и в системе K' будут соответственно следующими

$$dX^i = \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad dX^{i'} = \begin{pmatrix} cdt' \\ dx' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Формулу преобразования дифференциалов координат частицы из покоящейся системы отсчета K в реальную систему отсчета K', движущуюся в поле Шварцшильда, в соответствии с (A), представим в виде:

$$dX^{i'} = h^{i'}{}_{a'}(O')\,\Lambda^{a'}{}_{a}\,\delta^{a}{}_{i}\,dX^i, \tag{4.23}$$

где $\Lambda^{a'}{}_{a}$ — матрица четырехмерной ориентации K' относительно K, а $h^{i'}{}_{a'}(O')$ — матрица контравариантных коэффициентов Ламэ в точке O' относительно начальной системы отсчета K:

$$h^{i'}{}_{a'}(O') = \delta^{i'}{}_{i} h^{i}{}_{a}(O') \delta^{a}{}_{a'}. \tag{4.24}$$

Очевидно, что при радиальном движении системы K' в поле Шварцшильда ее трехмерная ориентация относительно неподвижной системы K осталась прежней. Это означает, что оси

$O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ системы K' остались параллельными соответственно осям OX, OY, OZ системы K. Поэтому четырехмерная ориентация системы K' относительно системы K будет полностью определяться ее поворотом в плоскости XOT на псевдоевклидов угол

$$\theta_x(t) = \operatorname{arth}\frac{V_{O'}(t)}{c}. \tag{4.25}$$

Тогда матрица $\Lambda^{a'}_{\ a}$ будет равна матрице чистого преобразования Лоренца

$$\Lambda^{a'}_{\ a} = L^{a'}_{\ a} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_x\gamma & 0 & 0 \\ -\beta_x\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.26}$$

со следующими параметрами:

$$\beta_x(t) = \frac{V_{O'}(t)}{c}, \ \ \beta^2(t) = \beta_x^2(t), \ \ \gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2(t)}}. \tag{4.27}$$

С помощью соотношения

$$h^i_{\ a}\,\eta^{ab}\,h_b^{\ j} = g^{ij} \tag{4.28}$$

и выражения $(A23)$ (Приложение 2) для контравариантного метрического тензора поля Шварцшильда в декартовых координатах можно вычислить матрицу контравариантных коэффициентов Ламэ в декартовых координатах для точки O', находящейся на расстоянии r от источника поля Шварцшильда и осуществляющей радиальное движение $y = z = 0$:

$$h^{i'}_{\ a'}(O') = \begin{pmatrix} \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

где $r(t) = x_g - x_{O'}(t)$.

Перемножив матрицы (4.26) и (4.29), получим матричную формулу преобразования дифференциалов координат частицы из удаленной покоящейся реальной системы отсчета K в реальную систему отсчета K' в поле Шварцшильда в частном случае, когда реальная система отсчета K' и частица осуществляют строго радиальное движение по направлению к источнику поля:

$$\begin{pmatrix} cdt' \\ dx' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\sqrt{1-r_g/r}} & \frac{-\beta_x\gamma}{\sqrt{1-r_g/r}} & 0 & 0 \\ -\beta_x\gamma\sqrt{1-\frac{r_g}{r}} & \gamma\sqrt{1-\frac{r_g}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.30}$$

или, в явном виде:

$$\begin{aligned} dx' &= \gamma\left(dx - \beta_x(t)cdt\right)\sqrt{1-\tfrac{r_g}{r(t)}}, \\ dy' &= 0, \\ dz' &= 0, \\ dt' &= \gamma\left(dt - \beta_x(t)\,dx/c\right)/\sqrt{1-\tfrac{r_g}{r(t)}}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Из (4.23) можно получить формулу обратного преобразования дифференциалов координат из реальной системы отсчета K' в покоящуюся систему K, где поле коэффициентов Ламэ выражено относительно системы отсчета K:

$$dX^i = \delta^i{}_a\,\Lambda^a{}_{a'}\,\delta^{a'}_b\,h^b{}_j(O')\,\delta^j{}_{i'}\,dX^{i'}. \tag{4.32}$$

В этой формуле $\Lambda^a{}_{a'} = \left(\Lambda^{a'}_a\right)^{-1}$, а матрица коэффициентов Ламэ $h^b{}_j(O')$ вычисляется из выражения для g_{ij} при $y = z = 0$ (формула $(A22)$, Приложение 2):

$$h^b{}_j(O') = \begin{pmatrix} \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.33}$$

В итоге обратное преобразование дифференциалов координат события будет выглядеть следующим образом (в матричном виде):

$$\begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\sqrt{1-\frac{r_g}{r}} & \frac{\beta_x\gamma}{\sqrt{1-r_g/r}} & 0 & 0 \\ \beta_x\gamma\sqrt{1-\frac{r_g}{r}} & \frac{\gamma}{\sqrt{1-r_g/r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt' \\ dx' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.34}$$

или, в явном виде:

$$\begin{aligned} dx &= \gamma\left(\beta_x c\,dt'\sqrt{1-\tfrac{r_g}{r}} + dx'/\sqrt{1-\tfrac{r_g}{r}}\right), \\ dy &= 0, \\ dz &= 0, \\ dt &= \gamma\left(dt'\sqrt{1-\tfrac{r_g}{r}} + \beta_x\,dx'/c\sqrt{1-\tfrac{r_g}{r}}\right). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Вычислим трехмерную скорость частицы в системе K' $v'_x = dx'/dt'$. Из (4.31) прямо получим формулу

$$v'_x = \left(1-\frac{r_g}{r}\right)\frac{v_x - V_{O'}}{1 - v_x\,V_{O'}/c^2}, \tag{4.36}$$

которая при удалении реальной системы отсчета $K'(O')$ от источника поля переходит в известную формулу сложения скоростей специальной теории относительности [31]:

$$v'_x = \frac{v_x - V_{O'}}{1 - v_x\,V_{O'}/c^2}, \qquad r \gg r_g. \tag{4.37}$$

Приведем здесь точное выражение для промежутка собственного времени в реальной системе отсчета $K'(O')$, осуществляющей радиальное движение из положения покоя к источнику поля Шварцшильда:

$$dt' = dt\sqrt{\frac{1 - V^2_{O'}(t)/c^2}{g_{00}}}, \qquad g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r}. \tag{4.38}$$

Из результатов настоящего раздела следует, что преобразование координат событий между реальными системами отсчета K и K' может быть представлено лоренцевым преобразованием лишь при $r \gg r_g$ (уточнение см. разд. 4.5), то есть в приближении слабого поля и нерелятивистских скоростей $V_{O'}$. При $r \sim r_g$ реальная система отсчета K' становится существенно неинерциальной и влияние собственного ускорения K' на преобразование координат событий будет преобладающим. Следовательно, точность физических законов, основанных на ковариантности уравнений относительно преобразований Лоренца, будет нарушаться тем более, чем ближе реальная система отсчета подойдет к источнику в область сильного по величине поля. Отметим, что ковариантность уравнений Максвелла при преобразованиях Лоренца была доказана А. Эйнштейном в основополагающей работе «К электродинамике движущихся тел» для «слабо ускоренного электрона» [31], то есть для малых по величине электромагнитных полей.

В целях геометризации электродинамики Г.И. Шипов [49] ввел параметрическое пространство событий типа пространства Шварцшильда, где вместо гравитационного радиуса r_g выступает электромагнитный радиус R_e, зависящий от заряда источника поля и от удельного заряда пробной частицы. Так, при взаимодействии электрона с ядром атома водорода (протоном) электромагнитный радиус равен удвоенному классическому радиусу электрона:

$$R_e = 2\,r_e = 2\frac{e^2}{m_e c^2} = 5,6 \cdot 10^{-13}\,\text{см}, \tag{4.39}$$

где e/m_e — удельный заряд электрона.

Естественно, в таком пространстве событий при нахождении на расстояниях $r \sim R_e$ от источника поля собственная система отсчета K' заряженной частицы будет существенно неинерциальной и влияние большого по величине собственного ускорения K' на преобразование координат событий $K \to K'$ будет преобладающим.

При таком преобразовании ковариантность уравнений Максвелла будет нарушена. В *электродинамике ориентируемой точки* [2] показано, что система уравнений, управляющая сильными по величине электромагнитными полями, отличается от системы уравнений Максвелла. Величина сильного электрического поля для пробной частицы электрона может быть оценена из (4.39):

$$E_S \sim \frac{e}{R_e^2} \sim 10^{15} \text{ ед. СГСЭ } \sim 10^{19}\,\text{В/м}, \qquad (4.40)$$

что на двенадцать порядков больше величины электрического ускоряющего поля, достигнутого в настоящее время в ускорителях заряженных частиц.

Добавим, как было отмечено в [10, § 75], что «...расстояния порядка e^2/mc^2 опять оказываются той границей, за которой электродинамика приходит в противоречие сама с собой». (Здесь m — масса пробного заряда e).

4.5. Замечания к преобразованию координат события между макроскопическими реальными системами отсчета

Четырехмерное ускорение выражается L-вектором $-\Gamma^i{}_{jk}u^j u^k$, где u^k есть L-вектор четырехмерной скорости тела [1]. В соответствии с формулой (2.12) символы Кристоффеля (краткое обозначение в этом разделе: Γ) пропорциональны градиенту метрического тензора (краткое обозначение: g)

$$\Gamma \propto \frac{\partial g}{\partial x}, \qquad (4.41)$$

где x — обобщенная координата. Если пользоваться аналогией с классическими полями, действующими на фоне плоского пространства-времени, то метрический тензор играет роль потенциала поля. Из (4.41) следует вывод: чем больше градиент g,

тем больше ускорение a свободного тела

$$a \propto \frac{\partial g}{\partial x}. \tag{4.42}$$

В макроскопическом масштабе взаимодействие пробного тела и гравитирующего источника описывается центрально-симметричной геометрией Шварцшильда или геометрией Керра с осевой симметрией для случая вращающегося источника [26], которые являются точными решениями уравнений Эйнштейна (2.1).

Основой перечисленных геометрий, описывающих взаимодействие пробного тела и гравитирующего источника, является геометрия Шварцшильда. Это означает, что малое вращение источника не вносит радикальных изменений в геометрию Шварцшильда, в том смысле, что характер радиальной зависимости компонентов g_{ik} остается неизменным [10, §104]. Малое вращение гравитирующего источника мы будем понимать как малость параметра метрики Керра, имеющего размерность длины,

$$r_s = \frac{\mathcal{M}}{Mc}, \tag{4.43}$$

где $\mathcal{M}$ — момент импульса гравитирующего источника, M — его масса. Для всех гравитирующих объектов Солнечной системы [11] параметр Керра является очень малой величиной $r_s \ll 1$.

Покажем следующее: чем ближе наблюдатель находится к источнику поля Шварцшильда, тем сильнее метрический тензор g_{ik} отличается от метрического тензора плоского пространства η_{ik}, и тем большую абсолютную величину составляет градиент компонентов g_{ik}. Действительно, имеем для поля Шварцшильда в сферических координатах

$$g_{00} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \qquad \frac{\partial g_{00}}{\partial r} = \frac{r_g}{r^2}, \tag{4.44}$$

$$g_{11} = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}, \qquad \frac{\partial g_{11}}{\partial r} = \frac{r_g}{r^2} \Big/ \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2, \tag{4.45}$$

откуда видно, что при уменьшении r кривая зависимости $\partial g/\partial r(r)$ ведет себя круче, чем кривая зависимости самих элементов g_{ik}

от r. Наблюдатель, приближаясь к источнику, обнаружит возрастание собственного ускорения. При этом чем ближе к горизонту событий находится наблюдатель, тем значительнее матрица коэффициентов Ламэ отличается от единичной матрицы (пример — элемент $h^{0'}{}_{0'} = 1/\sqrt{1 - r_g/r}$ матрицы контравариантых коэффициентов Ламэ $h^{i'}{}_{a'}$ из формулы (4.29)), и тем сильнее координаты событий в реальной системе отсчета отличаются от координат событий в локально-лоренцевой системе отсчета в соответствии с законом (A). Следовательно, достичь инерциального ($V_{O'} = const$) и релятивистского ($V_{O'} \sim c$) движения в поле Шварцшильда наблюдателю в макроскопической реальной системе отсчета никогда не удастся.

Отметим, что метод геометризации классических полей, описанный в разделе 2.4, был основан для монотонно растущего с ростом r гравитационного потенциала [10, § 106]

$$\varphi_g = -\frac{kM}{r}, \tag{4.46}$$

где $k = 6,67 \cdot 10^{-8}$ см$^3 \cdot$ г$^{-1} \cdot$ с$^{-2}$ — гравитационная постоянная, M — масса гравитирующего тела. Ньютонову потенциалу (4.46) соответствует пространство событий с метрикой

$$ds^2 = (1 + \frac{2\varphi_g}{c^2})c^2dt^2 - (1 - \frac{2\varphi_g}{c^2})(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{4.47}$$

Покажем, что метрика (4.47) является слабополевым приближением метрики Шварцшильда. Для этого перейдем в формуле $(A22)$ (Приложение 2) к $r \gg r_g$ и учтем $r_g = 2kM/c^2$, откуда получим

$$1 \mp \frac{r_g}{r} = 1 \pm \frac{2\varphi_g}{c^2}. \tag{4.48}$$

Для других макроскопических потенциалов $\varphi_{ext}(r)$ метрика эффективного пространства событий, представленная по методу раздела 2.4,

$$ds^2 = (1 + \frac{2\varphi_{ext}}{c^2})c^2dt^2 - (1 - \frac{2\varphi_{ext}}{c^2})(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{4.49}$$

в общем случае не будет являться слабополевым приближением соответствующей фундаментальной метрики (то есть метрики, следующей из уравнений Эйнштейна), и потому может нести в себе черты ограниченности, характерные для конструктивных моделей. Представим, что потенциал (4.46), начиная с некоторого r^*, становится постоянным

$$\begin{array}{l} \varphi_{ext}(r) = -kM/r, \quad r < r^*, \\ \varphi_{ext}(r) = -kM/r^* = \varphi^*, \quad r \geq r^*. \end{array} \tag{4.50}$$

Пробная частица, находясь на плато потенциала φ^*, не будет испытывать ускорения. При этом градиент компонентов метрического тензора метрики (4.49) при $r \geq r^*$ равен нулю, поэтому соотношение $a \sim \partial g/\partial x$ будет выполнено.

Тем не менее, при $r \geq r^*$ проекция величин, выраженных локально-лоренцевыми координатами, на пространство мировых координат не будет тождественной, так как матрица коэффициентов Ламэ не будет единичной матрицей (но будет слабо от нее отличаться)

$$h^{i'}{}_{a'}(O') = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varphi^*}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\varphi^*}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{\varphi^*}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{\varphi^*}{c^2} \end{pmatrix}. \tag{4.51}$$

Именно в наличии нулевого ускорения в районе потенциального плато и в одновременном несовпадении локально-лоренцевых и мировых координат величин и проявляются ограничения, присущие обсуждаемому пространству событий. Отметим, что в фундаментальной геометрии Шварцшильда, которая обобщает ньютонов потенциал, нет несоответствия между величиной ускорения наблюдателя и величиной искажения локально-лоренцевых координат при проекции на базу расслоения с помощью коэффициентов Ламэ.

Отличие локально-лоренцевых и мировых координат величин в точке наблюдения на плато потенциала — обстоятельство, возникающее из-за ограничения геометрического метода описания

бессилового участка взаимодействия. Для успешной геометризации потенциала (4.50) он должен быть представлен асимптотически плоским участком без разрыва его градиента на поверхности шара $r = r^*$. Такой разрыв приводит к разрыву частных производных метрического тензора, что нарушает требования, предъявляемые к последнему [6, 16.7-1].

Такое положение в конструировании эффективных геометрий мы будем считать естественным, учитывая, что любое макроскопическое поле взаимодействий, создаваемые в лабораторных условиях, в геометрическом виде представимо как слабое возмущение псевдоевклидовой метрики.

Представим формулы преобразования координат события предыдущего раздела в слабополевом нерелятивистском приближении. Для этого перейдем к $r \gg r_g$. Для тела системы отсчета, движущемся в гравитационном потенциале φ_g, должна сохраняться сумма его потенциальной и кинетической энергии. С учетом калибровки гравитационного потенциала на бесконечном удалении от источника $\varphi_g(\infty) = 0$ и с учетом состояния покоя реальной системы отсчета K' в начальный момент времени имеем следующий баланс энергии на единицу массы тела отсчета

$$\varphi_g + \frac{V^2_{O'}(t)}{2} = 0. \tag{4.52}$$

Подставив φ_g из последней формулы в (4.48), получим

$$1 - \frac{r_g}{r(t)} = 1 - \frac{V^2_{O'}(t)}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2(t)}, \tag{4.53}$$

при этом формула (4.29) приобретет следующий вид

$$h^{i'}{}_{a'}(O') = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.54}$$

Из формул (4.54), (4.26), (4.22), (4.23) получим следующие соотношения дифференциалов координат события в нерелятивист-

ском приближении

$$\begin{aligned} cdt' &= cdt - \beta_x dx + \beta_x^2 cdt, \\ dx' &= -\beta_x cdt + dx, \\ dy' &= 0, \\ dz' &= 0, \end{aligned} \tag{4.55}$$

которые в своей главной части есть ни что иное, как преобразования Галилея [10, §4]

$$\begin{aligned} dt' &= dt, \\ dx' &= dx - V_{O'}(t)dt, \\ dy' &= 0, \\ dz' &= 0. \end{aligned} \tag{4.56}$$

4.6. Координаты событий в реальных системах отсчета, связанных с микроскопическими телами

При работе с реальными системами отсчета, связанных с микроскопическими телами (элементарными частицами, атомами, молекулами и тому подобное), начальное условие к закону (A) должно задаваться особо, исходя из условий эксперимента, в котором происходит измерение (оценка) собственного времени и координат событий. Чаще всего такие эксперименты происходят в специальных устройствах, созданных для получения микрочастиц, движущихся с релятивистской скоростью, — в ускорителях заряженных частиц.

Наблюдатель, находящийся в неподвижной лабораторной системе отсчета $K(O)$ (рис. 4.4), в определенный момент времени фиксирует в регистрирующем устройстве (например, в пузырьковой камере или в искровой камере) появление ускоренной частицы, движущейся со скоростью $V_{O'}$, которая может принимать релятивистские значения $V_{O'} \sim c$.

По идеологии реальной относительности собственная система отсчета ускоренной частицы и лабораторная система K должны

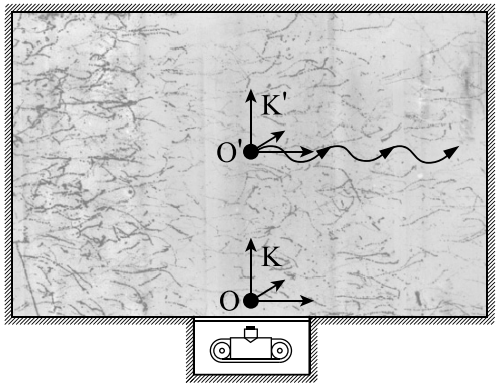

Рис. 4.4: Реальная система отсчета, связанная с элементарной частицей, в трековой камере

«иметь один корень», то есть единое начальное состояние для сравнения масштабов длин и синхронизации часов. Заведомо не зная историю изменения ориентации собственной системы отсчета частицы K' относительно лабораторной системы K, мы вынуждены объявить начальным моментом времени ($t = t' = 0$) момент влета частицы в регистрирующее устройство и зафиксировать четырехмерную ориентацию системы K' относительно K, которая соответствует скорости частицы $V_{O'}$ на входе регистрирующего устройства

$$\Lambda^{a'}_{\ a} = L^{a'}_{\ a} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_x\gamma & 0 & 0 \\ -\beta_x\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (4.57)$$

где

$$\beta_x = \frac{V_{O'}}{c}, \ \ \beta^2 = \beta_x^2, \ \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (4.58)$$

С учетом того, что в отсутствии внешних полей матрица коэффициентов Ламэ превращается в единичную матрицу $h^{i'}_{\ a'}(O') = \delta^{i'}_{\ a'}$, формула (4.23) преобразования координат события из покоящейся системы отсчета $K(O)$ в движущуюся с постоянной

скоростью реальную систему отсчета $K'(O')$ приведется к следующему виду

$$dX^{i'} = \delta^{i'}{}_{a'}\, L^{a'}{}_{a}\, \delta^{a}{}_{i}\, dX^{i} = L^{i'}{}_{i}\, dX^{i}, \tag{4.59}$$

где $L^{i'}{}_{i} = \delta^{i'}{}_{a'}\, L^{a'}{}_{a}\, \delta^{a}{}_{i}$ — матрица преобразования Лоренца в мировых координатах или матрица глобального координатного преобразования Лоренца специальной теории относительности [10, 31]. Формулы преобразования (4.59) можно записать в явном виде

$$\begin{aligned} dx' &= (dx - \beta_x c dt)/\sqrt{1-\beta^2}, \\ dy' &= 0, \\ dz' &= 0, \\ dt' &= (dt - \beta_x\, dx/c)/\sqrt{1-\beta^2}. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Обратные преобразования Лоренца, или преобразования координат событий из системы $K'(O')$ в покоящуюся систему $K(O)$ принимают следующий вид

$$\begin{aligned} dx &= (dx' + \beta_x c dt')/\sqrt{1-\beta^2}, \\ dy &= 0, \\ dz &= 0, \\ dt &= (dt' + \beta_x\, dx'/c)/\sqrt{1-\beta^2}. \end{aligned} \tag{4.61}$$

Положив в последней формуле $dx' = 0$, получим соотношение между промежутками собственного времени в системе K' и в покоящейся системе K

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{V_{O'}^2}{c^2}}. \tag{4.62}$$

По формуле (4.62) промежуток собственного времени в движущейся системе K' всегда будет меньше соответствующего промежутка времени по часам системы K. Этот вывод делается при заведомом отсутствии синхронизации часов и сравнения масштабов длин в системах K' и K и фактически сводится к дополнительному утверждению (постулату), что в одинаковых условиях

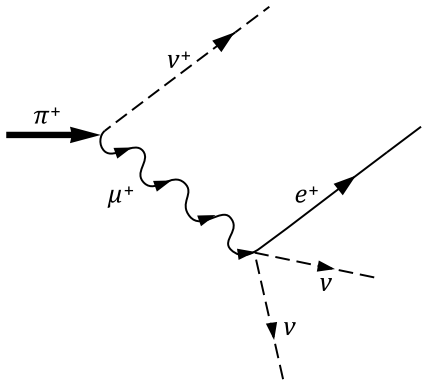

Рис. 4.5: Схема рождения и распада μ^+-мезона [50]

ход часов и масштабы длин в этих системах будут совпадать. В этом заключается *эффект замедления времени* в движущейся системе отсчета по отношению к покоящейся [10].

Эффект замедления времени в системах отсчета, связанных с релятивистскими частицами, был неоднократно подтвержден с помощью косвенных измерений. Одно из первых подтверждений этого эффекта специальной относительности было сделано с помощью экспериментов по рождению и распаду μ^+-мезонов (рис. 4.5), время жизни которых в собственной системе отсчета равно $\Delta t'_{\mu^+} \approx 2{\cdot}10^{-6}$ с. В соответствии с формулой (4.62) этот же промежуток времени, то есть время жизни μ^+-мезона, по часам лабораторной системы отсчета составит

$$\Delta t_{\mu^+} = \frac{\Delta t'_{\mu^+}}{\sqrt{1 - \frac{V_{O'}^2}{c^2}}}. \tag{4.63}$$

Зная скорость μ^+-мезона $V_{O'}$, можно измерить длину его пути в лабораторной системе отсчета, то есть расстояние между точкой рождения и точкой распада

$$\Delta L_{\mu^+} = \frac{\Delta t'_{\mu^+} V_{O'}}{\sqrt{1 - \frac{V_{O'}^2}{c^2}}}. \tag{4.64}$$

Именно эта формула была подтверждена экспериментально для разных скоростей и энергий μ^+-мезонов [50, §17], что говорит об эффекте замедления времени для реальных систем отсчета, не имеющих в своей истории единого (общего для всех) начального состояния.

4.7. Реальная относительность vs специальная относительность

В настоящей главе сформулирован закон преобразования координат событий между реальными системами отсчета $K'(O')$ и $K''(O'')$

$$dX^{i''}(O'') = h^{i''}{}_{a''}(O'')\Lambda^{a''}{}_{a'}h^{a'}{}_{i'}(O')dX^{i'}(O'). \qquad (A)$$

Основную роль в нем играет относительная четырехмерная ориентация систем отсчета, принадлежащая собственной группе вращений псевдоевклидова пространства

$$\Lambda^{a''}{}_{a'} \in SO(1.3). \qquad (4.65)$$

Чистые преобразования Лоренца (псевдоевклидовы повороты, бусты) $L^{i'}{}_{i} = \delta^{i'}{}_{a'}\, L^{a'}{}_{a}\, \delta^{a}{}_{i}$ (4.17), являющиеся глобальными координатными преобразованиями специальной относительности, составляют подмножество преобразований группы $SO(1.3)$. Отметим, что чистые преобразования Лоренца не составляют подгруппу группы $SO(1.3)$, ибо результат двух последовательных чистых преобразований Лоренца в общем случае не будет чистым преобразованием Лоренца [48].

На удалении от тяготеющих сил и полей системы отсчета $K'(O')$ и $K''(O'')$ становятся *квазиинерциальными* реальными системами отсчета, а коэффициенты Ламэ в точках начала этих систем отсчета превращаются в единичную матрицу

$$h^{i''}{}_{a''}(O'') = \delta^{i''}{}_{a''}, \quad h^{a'}{}_{i'}(O') = \delta^{a'}{}_{i'}, \qquad (4.66)$$

поэтому закон преобразований (A) формально переходит в формулу преобразования координат событий специальной относительности

$$dX^{i''} = L^{i''}_{\ i'}\, dX^{i'}. \tag{4.67}$$

Однако закон (A) реальной относительности и преобразование Лоренца (4.67) специальной относительности отличаются заданием начальных условий: они задаются только в законе (A). Начальные условия в преобразованиях (4.67) принципиально отсутствуют, ибо по идеологии специальной относительности системы K'' и K' — инерциальные системы отсчета с сохраняющейся (статичной) взаимной четырехмерной ориентацией $L^{i''}_{\ i'} = const$.

Движение идеальных инерциальных систем отсчета K', K'' должно происходить с постоянной скоростью и неизменным ее направлением относительно покоящейся системы отсчета либо другой инерциальной системы отсчета K, то есть с сохранением соответствующих четырехмерных ориентаций относительно K: $\Lambda^{i'}_{\ i} = const$, $\Lambda^{i''}_{\ i} = const$. Отсюда следует, что взаимная ориентация систем K' и K'' также всегда будет постоянной: $\Lambda^{i''}_{\ i'} = const$.

Заметим, что сохраняющаяся четырехмерная ориентация между системами отсчета K, K' и K'' может быть достигнута и в том случае, когда эти системы подвергнуты одинаковому поступательному ускорению $\mathbf{w}$ относительно некоей «истинно инерциальной» системы отсчета. Об этом писал И. Ньютон в основополагающем труде «Математические начала натуральной философии» [30, с. 49]:

«Следствие VI

Если несколько тел, движущихся как бы то ни было друг относительно друга, будут подвержены действию равных ускоряющих сил, направленных по параллельным между собою прямым, то эти тела будут продолжать двигаться друг относительно друга так же, как если бы сказанные силы на них не действовали.

Так как эти силы, действуя на все тела одинаково (соответственно массам движущихся тел) и по направлениям параллельным, будут сообщать всем телам одинаковые скорости (по закону II), то они ни в чем не изменят ни положений, ни движений тел друг относительно друга».

Для устранения указанной неопределенности инерциальную систему отсчета K необходимо доопределить. В механике Ньютона это можно было сделать единственным непротиворечивым способом, связав ее с «истинно инерциальной» системой отсчета, двигающейся равномерно и прямолинейно относительно *абсолютного пространства И. Ньютона* [30, с. 30]:

«*Абсолютное пространство* по самой своей сущности, безотносительно к чему то либо внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным».

На практике этот выбор достигается, например, следующим образом: система K должна сохранять идеально ровную и горизонтальную поверхность воды в ведре Ньютона (в случае опытов на поверхности в присутствии земного тяготения) [30, с. 34]. Действительно, ровная горизонтальная поверхность воды будет показывать отсутствие как продольных ускорений, связанных с вращением векторов тетрады в псевдоевклидовой плоскости XOT

$$\frac{d\theta_x(t)}{dt} = \gamma^2 \frac{dV_x(t)}{c\,dt} = 0,$$

так и отсутствие центробежных ускорений, связанных с обычным трехмерным вращением ведра

$$\frac{d\phi_1(t)}{dt} = 0.$$

Именно в этом случае четырехмерная ориентация системы отсчета, связанной с ведром Ньютона, относительно «истинно инерциальной» системы отсчета будет постоянна:

$$\frac{d\Lambda^{i}{}_{i^0}}{dt} = 0. \tag{4.68}$$

Заметим однако, что положение об абсолютном пространстве или о неподвижном эфире противоречит духу и букве специальной относительности. Действительно, основные выводы этой теории, касающиеся различного течения времени и различных масштабов длин в различных инерциальных системах отсчета, не оставляют камня на камне от понятий абсолютного времени и абсолютного пространства И. Ньютона. Как отметил А. Эйнштейн в преамбуле основной статьи по специальной относительности: «...не только в механике, но и в электродинамике никакие свойства явлений не соответствуют понятию абсолютного покоя...» [31]. Следовательно, проблема неопределенности начальной «истинно инерциальной» системы отсчета не может быть решена в рамках специальной относительности. Здесь специально не упоминается отвлеченный от реальный практики (то есть абстрактный) принцип Маха, согласно которому «истинная инерциальная» система отсчета может быть ассоциирована с центром инерции всех тел, находящихся во Вселенной [51].

Если исключить параллельные (в четырехмерном смысле) системы отсчета, то специальная теория относительности имеет дело с классом инерциальных систем отсчета, не имеющих в своей истории единых состояний (то есть не имеющих совпадающих четырехмерных ориентаций относительно выделенной инерциальной системы отсчета)

$$\Lambda^{i'}{}_{i} \neq \Lambda^{i''}{}_{i} \neq \cdots \neq \Lambda^{i^N}{}_{i}, \tag{4.69}$$

и потому вынужденной постулировать, что в этих системах в одинаковых условиях собственный ход часов и собственные масштабы длин будут совпадать (рис. 4.6).

Напротив, реальная относительность имеет дело с классом реальных систем отсчета, соединенными с реальными телами и потому неинерциальными. Лишь на удалении от тяготеющих тел и полей реальные системы отсчета можно считать *квазиинерциальными* (с точностью, удовлетворяющей поставленной задаче). Четырехмерная ориентация реальных систем отсчета N' и N'' относительно выделенной квазиинерциальной системы отсчета N в

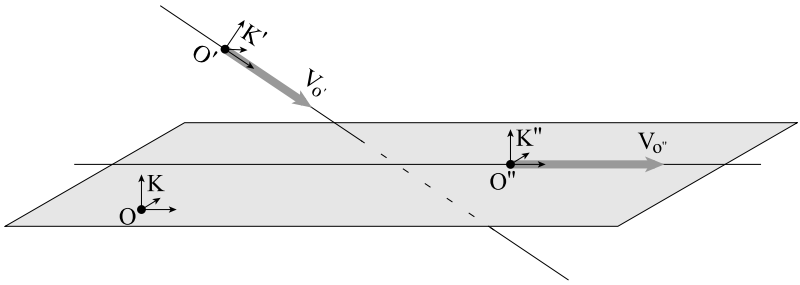

Рис. 4.6: Идеальные инерциальные системы отсчета K, K', K''

общем случае непостоянна

$$\Lambda^{n'}_{\ n}(t') \neq const, \quad \Lambda^{n''}_{\ n}(t'') \neq const. \tag{4.70}$$

Для целей реального измерения координат событий в системах N' и N'' измерительные приборы в них должны пройти сравнение с соответствующими эталонами в стандартных условиях, то есть на Земле. Поэтому системы N' и N'' должны в своей истории иметь общие начальные состояния с лабораторной системой N

$$\Lambda^{n'}_{\ n}(t'=0) = \delta^{n'}_{\ n}, \quad \Lambda^{n''}_{\ n}(t''=0) = \delta^{n''}_{\ n}, \tag{4.71}$$

что также необходимо для непосредственного сравнения координат событий между N' и N'' в соответствии с законом (A).

Перейдем к отношению реальной относительности и специальной относительности к описанию динамических процессов. Специальная относительность — статическая теория, тем не менее она описывает динамические процессы квазистатическим образом, заменяя собственную систему отсчета ускоряемой частицы локально-лоренцевой системой. Именно так поступил А. Эйнштейн, описывая «динамику (слабо ускоренного) электрона» в основополагающей работе [31].

Отметим, что только некоторые авторы, в частности, А.Н. Матвеев, признали, что распространение формул специальной относительности «на ускоренные движения требует дополнительного

обоснования. Теоретическое обоснование этого представляется затруднительным, поскольку специальная теория относительности не описывает ускоренные движения» [50, с. 122]. В.А. Фок высказался об этом более конкретно: «Что касается обычной теории относительности, то она позволяет делать в общем виде (т.е. не вникая в сущность происходящих процессов) только те заключения, которые относятся к *неускоренному* движению» [42, §14].

Условие «слабого ускорения» электрона эквивалентно требованию представления собственной системы отсчета электрона локально-лоренцевой системой отсчета на интервале времени измерения параметров электрона. Оно заключается в малом изменении псевдоевклидова угла ориентации собственной системы отсчета электрона

$$\theta_x(t) = \operatorname{arth}\frac{v_x(t)}{c} \tag{4.72}$$

за время измерения параметров электрона. Отсюда следует условие для скорости изменения псевдоевклидова угла $\theta_x(t)$, записанное в безразмерном виде

$$r_e\frac{d\theta_x}{c\,dt} = r_e\gamma^2\frac{dv_x(t)}{c^2\,dt} \ll 1. \tag{4.73}$$

Здесь введена геометрическая характеристика электрона, имеющая размерность длины — классической радиус электрона r_e

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} = 2,8\cdot 10^{-13}\text{ см}. \tag{4.74}$$

Найдя в нерелятивистском случае dv_x/dt из уравнений движения

$$\frac{d}{dt}(\gamma m v_x) = eE_x, \tag{4.75}$$

вычислим значение сильного (большого по величине) электрического поля, при котором электрон испытывает ускорение, приводящие к нарушению условия (4.73)

$$E_S = \frac{m^2c^4}{e^3} = \frac{e}{r_e^2} \approx 10^{16}\text{ ед. СГСЭ } = 3\cdot 10^{20}\,\text{В/м}. \tag{4.76}$$

Из структуры формулы (4.76) видно, что электрические поля напряженностью E_S появляются на расстояниях порядка r_e от заряда e. Как было отмечено в разделе 4.4, на таких расстояниях от заряда собственная система отсчета пробной частицы будет существенно неинерциальной и влияние собственного ускорения частицы на координаты событий в ней будет преобладающим.

Максимальные величины электрических полей, генерируемые в лабораторных условиях, отличаются от E_S в меньшую сторону на двенадцать порядков. Этим объясняется феноменальная точность формул специальной относительности, применяемых при расчетах ускорителей заряженных частиц, так как величина продольного ускорения частиц, достигаемого в ускорителях, не вносит в расчеты существенной поправки за время разгона частиц.

В отличие от специальной относительности, реальная относительность — динамическая теория, так как при описании динамики частицы она использует зависящую от времени четырехмерную ориентацию собственной системы отсчета частицы относительно выделенной квазиинерциальной системы отсчета

$$\frac{d\Lambda^{n'}_{n}}{dt} \neq 0. \tag{4.77}$$

Матрица $\Lambda^{n'}_{n}$ зависит как от псевдоевклидовых углов $\theta_x(t)$, $\theta_y(t)$, $\theta_z(t)$, описывающих повороты тела системы отсчета в плоскостях XOT, YOT, ZOT, так и от обычных углов ориентации в трехмерном пространстве $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, $\phi_3(t)$.

Оценка величин электрических полей и соответствующих ускорений заряженных частиц, составляющих границу классической электродинамики и статических формул специальной относительности, была получена при взгляде изнутри платформы «классическая электродинамика + специальная относительность». Как будет показано ниже, новые эффекты реальной относительности и электродинамики ориентируемой точки происходят при гораздо меньших значениях полей и ускорениях частиц. Объяснить это можно следующим.

Во-первых, за счет использования трехмерных вращений. Че-

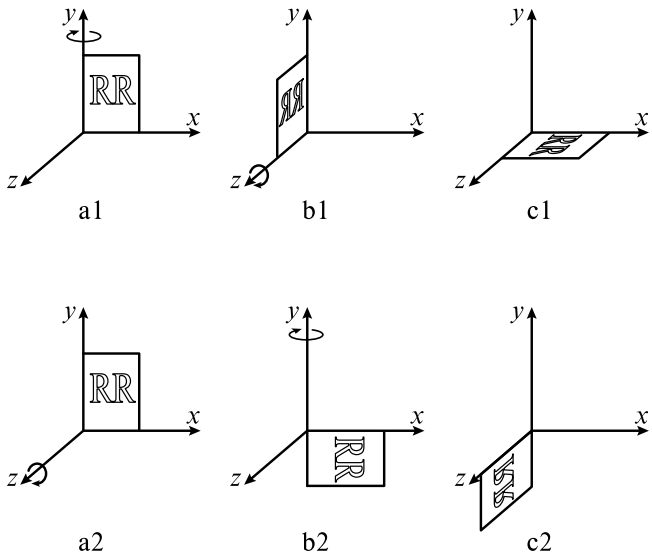

Рис. 4.7: Пример некоммутативности конечных поворотов. В верхнем ряду — поворот фигуры на 90° по оси y, затем поворот на 90° по оси z. В нижнем ряду — поворот фигуры на 90° по оси z, затем поворот на 90° по оси y

тырехмерную ориентацию собственной системы отсчета частицы легче изменить путем трехмерных вращений $d\phi_1/dt$, а не путем псевдоевклидовых вращений $d\theta_x/dt = \gamma^2(d\beta_x/dt)$, ибо последние происходят за счет больших продольных ускорений частицы и, соответственно, за счет больших ускоряющих полей. Как показано в электродинамике ориентируемой точки, случай кругового движения заряда является самым интересным с точки зрения новых эффектов, которые проявляются даже при нерелятивистском движении заряда [2].

Во-вторых, за счет комбинаций поворотов тела системы отсчета. Известно, что сумма поворотов тела в разных плоскостях зависит от их последовательности, и в этом заключается свойство некоммутативности ортогональных преобразований группы $SO(1.3)$ (рис. 4.7).

Глава 5.

L-тензорный анализ

5.1. *L*-группа преобразований

В предыдущих разделах показано, что локальные координаты Z^a четырехмерной величины Z относятся к локально-лоренцевой системе отсчета, мгновенно совпадающей с реальной системой отсчета, в которой, в свою очередь, величина Z определяется своими мировыми координатами Z^i. Так как все измерения координат происходят в реальных системах отсчета, а не в воображаемых локально-лоренцевых системах отсчета, то соотношения величин определяются из соотношений их мировых координат в реальных системах отсчета. Специально отметим, что локально-лоренцева система отсчета в силовом поле может быть только воображаемой или абстрактной, то есть не связанной с реальным телом. В противном случае она должна испытывать ускорение, что противоречит ее статусу инерциальной системы отсчета.

Приведем закон преобразования дифференциалов координат из начальной реальной системы отсчета $K'(O')$ в конечную реальную систему отсчета $K''(O'')$

$$dX^{i''}(O'') = h^{i''}{}_{a''}(O'')\Lambda^{a''}{}_{a'}h^{a'}{}_{i'}(O')dX^{i'}(O'), \qquad (A)$$

где $\Lambda^{a''}{}_{a'}$ — матрица четырехмерной ориентации $K''(O'')$ относительно $K'(O')$. В определении L-векторов будут участвовать

реальные системы отсчета, имеющие в своей истории единое начальное состояние

$$\Lambda^{a''}_{a'} = \delta^{a''}_{a'}, \qquad O'' = O', \quad t'' = t' = 0, \tag{5.1}$$

которое мы будем подразумевать в дальнейшем.

Приведем диаграмму, раскрывающую последовательность преобразований дифференциалов координат событий при переходе от реальной системы отсчета K' с началом O' к реальной системе отсчета K'' с началом O'':

$$\begin{array}{ccc} \Delta X^{a'} & \xrightarrow[\Lambda]{\qquad\qquad} & \Delta X^{a''} \\ \Uparrow h & & \Downarrow h \\ \Delta X^{i'} & & \Delta X^{i''} \\ O' & & O'' \end{array} . \tag{5.2}$$

Диаграмма показывает, что преобразование дифференциалов координат событий в соответствии с законом (A) состоит из следующих последовательных действий:

1) приведение дифференциалов координат события к локально-лоренцевым координатам в точке нахождения исходного наблюдателя в системе K', то есть осуществление проекции на слой расслоения в точке O':

$$dX^{a'} = h^{a'}_{i'}(O')\, dX^{i'};$$

2) четырехмерный поворот полученной проекции

$$dX^{a''} = \Lambda^{a''}_{a'}\, dX^{a'};$$

3) приведение величины $dX^{a''}$ к мировым координатам в точке нахождения конечного наблюдателя, то есть осуществление проекции на базу расслоения в точке O''

$$dX^{i''} = h^{i''}_{a''}(O'')\, dX^{a''}.$$

Отметим важные особенности закона преобразования (A):

1) четырехмерные повороты $\Lambda^{a''}_{a'}$ совершаются в касательном расслоении, являющимся совокупностью касательных пространств, имеющих псевдоевклидову метрику [28]:

$$dX_a = \eta_{ab}\, dX^b, \quad \eta_{ab} = diag(1, -1, -1, -1); \tag{5.3}$$

2) проекция на слой расслоения величины $dX^{i'}$ и проекция на базу расслоения величины $dX^{a''}$ берутся в точках нахождения наблюдателей, то есть в началах O' и O'' реальных систем отсчета K' и K'', а не в мировой точке события (например, в точке нахождения пробной частицы). Это требование возникает из-за того, что свойства локально-лоренцевых координат в системе k' и свойства мировых координат в системе K' определяются в начале O';

3) в законе (A) отсутствует прямое преобразование мировых координат события между системами отсчета, находящимися друг от друга на определенном расстоянии.

Таким образом, реальная относительность при активных преобразованиях координат использует только четырехмерные вращения в касательном расслоении и фундаментальное поле коэффициентов Ламэ, но не использует глобальные координатные преобразования базы расслоения (так называемые трансляции, составляющие группу T_4). Отметим, что по неосуществленному проекту обобщенной теории относительности А. Эйнштейна [45] переход от одной неинерциальной системы к другой должен был бы полностью описываться с помощью трансляций T_4.

В соответствии с определением реальной системы отсчета (разд. 3.1) преобразования (A) являются локальными, в том смысле, что они описывают преобразования координат событий, происходящих в определенных окрестностях начал реальных систем отсчета $K'(O')$ и $K''(O'')$.

Преобразования мировых координат в соответствии с законом (A) и начальными условиями (5.1) составляют группу [46, с. 162], так как:

1) множество преобразований $K' \xrightarrow{\Lambda} K''$ содержит тождественный элемент $K' \xrightarrow{I} K'$ (I — единичная матрица);

2) каждое преобразование $K' \xrightarrow{\Lambda} K''$ имеет обратное преобразование $K'' \xleftarrow{\Lambda^{-1}} K'$;

3) сумма двух последовательных преобразований $K' \to K''$ и $K'' \to K'''$ есть преобразование $K' \to K'''$.

Группу преобразований в соответствии с законом (A) и начальными условиями (5.1) мы будем называть L-группой преобразований координат реальной относительности (сокращенно — L-группа преобразований).

5.2. *L*-тензоры, *L*-скаляры

Мы будем называть контравариантным L-вектором четырехмерную величину Z^i, координаты которой между двумя реальными системами отсчета $K'(O')$ и $K''(O'')$ преобразуются как

$$Z^{i''} = \Lambda^{i''}_{\ i'}\, Z^{i'}, \tag{5.4}$$

с определенной матрицей преобразования

$$\Lambda^{i''}_{\ i'} = h^{i''}_{\ a''}(O'')\, \Lambda^{a''}_{\ a'}\, h^{a'}_{\ i'}(O'), \tag{5.5}$$

вообще говоря, переменной, и зависящей от значения поля коэффициентов Ламэ в точках O' и O'' и от текущей четырехмерной ориентации $\Lambda^{a''}_{\ a'}$ реальной системы отсчета K'' относительно реальной системы отсчета K'. Преобразование (5.4) подразумевает одинаковый тип координатной сетки (по умолчанию декартовой) в начальной $K'(O')$ и конечной $K''(O'')$ реальных системах отсчета.

Ковариантным L-вектором $Z_{i'}$ по отношению к реальной системе отсчета K' с центром O' мы будем называть величину

$$Z_{i'} = g_{i'j'}(O')Z^{j'}. \tag{5.6}$$

Таким образом, поднятие и опускание мировых L-векторных индексов по отношению к какой-либо реальной системе отсчета мы будем производить с помощью дважды ковариантного g_{ij} или

дважды контравариантного g^{ij} метрического тензора, взятого в точке наблюдения — в начале этой системы отсчета.

Подставив в правую часть (5.4)

$$Z^{i'} = g^{i'j'}(O')Z_{j'} = h^{i'}{}_{a'}(O')\,\eta^{a'b'}\,h_{b'}{}^{j'}(O')\,Z_{j'}, \tag{5.7}$$

в левую часть (5.4) аналогичное соотношение для $Z^{i''}$, мы получим, после математических преобразований, следующую формулу преобразования ковариантных координат L-вектора Z_i между реальными системами отсчета $K'(O')$ и $K''(O'')$:

$$Z^{\mathbb{T}}{}_{j''} = Z^{\mathbb{T}}{}_{j'}\,h^{j'}{}_{b'}(O')\,\Lambda^{b'}{}_{b''}\,h^{b''}{}_{j''}(O''). \tag{5.8}$$

Матрица преобразования строки $Z^{\mathbb{T}}_i$:

$$\Lambda^{i'}{}_{i''} = h^{i'}{}_{a'}(O')\,\Lambda^{a'}{}_{a''}\,h^{a''}{}_{i''}(O'') \tag{5.9}$$

и матрица (5.5) преобразования столбца Z^i взаимно обратны [1, с. 60]

$$\Lambda^{i'}{}_{i''} = \left(\Lambda^{i''}{}_{i'}\right)^{-1}. \tag{5.10}$$

Из (5.4), (5.8) и (5.10) непосредственно следует, что величина $Z_i\,Z^i$ (в тензорной записи) является L-скаляром

$$Z_{i''}Z^{i''} = Z_{i'}Z^{i'}, \tag{5.11}$$

что означает сохранение квадрата длины L-вектора при преобразовании из одной реальной системы отсчета $K'(O')$ в другую реальную систему отсчета $K''(O'')$.

L-векторным величинам можно дать другое определение, которое мы будем считать основным. Так, контравариантным L-вектором Z^i мы будем называть четырехмерную величину, проекция на слой расслоения которой в произвольной реальной системе отсчета $K'(O')$

$$Z^{a'} = h^{a'}_{i'}(O')\,Z^{i'} \tag{5.12}$$

и проекция на слой расслоения которой в произвольной реальной системе отсчета $K''(O'')$

$$Z^{a''} = h^{a''}_{i''}(O'')\,Z^{i''} \tag{5.13}$$

соотносятся следующим образом:

$$Z^{a''} = \Lambda^{a''}_{\ a'} Z^{a'}, \tag{5.14}$$

где $\Lambda^{a''}_{\ a'}$ — матрица четырехмерной ориентации K'' относительно K'.

Ковариантным L-вектором мы будем называть четырехмерную величину Z_i, проекции которой на касательное расслоение в произвольных реальных системах отсчета K' и K'' (в тензорной записи)

$$Z_{a'} = Z_{i'} e^{i'}_{\ a'}(O'), \quad Z_{a''} = Z_{i''} e^{i''}_{\ a''}(O'') \tag{5.15}$$

соотносятся следующим образом:

$$Z_{a''} = Z_{a'} \Lambda^{a'}_{\ a''}, \tag{5.16}$$

где $\Lambda^{a'}_{\ a''} = (\Lambda^{a''}_{\ a'})^{-1}$.

Заметим, что величины, относящиеся к наблюдаемым величинам и являющиеся обычными векторами в реальной системе отсчета $K(O)$, не всегда преобразуются как L-векторы при преобразовании к другой реальной системе отсчета $K'(O')$. Такой величиной, например, является интегральный вектор события. Действительно, его координаты X^i в реальной системе отсчета $K(O)$ являются координатами классического контравариантного вектора. Однако в общем случае при преобразовании к другой реальной системе отсчета координаты X^i преобразуются иным образом, чем координаты L-вектора. Это следует из закона (A), в котором установлены L-векторные свойства только для дифференциалов координат события dX^i.

Дважды ковариантным L-тензором мы будем называть величину Z_{ij}, координаты которой между двумя реальными системами отсчета $K(O)$ и $K'(O')$ преобразуются следующим образом:

$$Z_{i'j'} = \Lambda_{i'}^{\ i} \, Z_{ij} \, \Lambda^{j}_{\ j'}, \tag{5.17}$$

где

$$\Lambda^{i}_{\ i'} = h^{i}_{\ a}(O) \, \Lambda^{a}_{\ a'} \, h^{a'}_{i'}(O'). \tag{5.18}$$

В общем случае p-контравариантным q-ковариантным L-тензором или L-тензором типа (p, q) мы будем называть величину $Z^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q}$, координаты которой преобразуются между двумя реальными системами отсчета $K(O)$ и $K'(O')$ следующим образом (в тензорной форме):

$$Z^{k'_1 \ldots k'_p}_{l'_1 \ldots l'_q} = \Lambda^{k'_1}_{k_1} \cdots \Lambda^{k'_p}_{k_p} \, \Lambda^{l_1}_{l'_1} \cdots \Lambda^{l_q}_{l'_q} \, Z^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q}, \tag{5.19}$$

где

$$\Lambda^{k'}_{k} = h^{k'}{}_{a'}(O') \, \Lambda^{a'}{}_{a} \, h^{a}{}_{k}(O), \tag{5.20}$$

$$\Lambda^{l}_{l'} = h^{l}{}_{a}(O) \, \Lambda^{a}{}_{a'} \, h^{a'}{}_{l'}(O') = \left(\Lambda^{l'}_{l} \right)^{-1}. \tag{5.21}$$

В [1] показано, что метрический тензор g_{ij}, определяемый через поле коэффициентов Ламэ следующим образом (разд. 1.4)

$$g_{ij}(O) = h_{i}{}^{a}(O) \, \eta_{ab} \, h^{b}{}_{j}(O), \tag{5.22}$$

является L-тензором относительно активных преобразований (A), связанных с переходом наблюдателя из реальной системы отсчета $K(O)$ в реальную систему отсчета $K'(O')$:

$$g_{i'j'}(O') = \Lambda_{i'}{}^{i} \, g_{ij}(O) \, \Lambda^{j}{}_{j'}. \tag{5.23}$$

Докажем, что для реальных систем отсчета $K(P)$ и $K'(P)$, находящихся в мировой точке P, метрический тензор принимает одно и то же значение. Действительно, для реальной системы отсчета K' с началом в точке P имеем

$$g_{i'j'}(P) = h_{i'}{}^{a'}(P) \eta_{a'b'} \, h^{b'}{}_{j'}(P). \tag{5.24}$$

Преобразование метрического L-тензора между начальной K и конечной K' системами отсчета, также как и закон (A), подразумевают, что значения поля коэффициентов Ламэ в операторе $\Lambda^{j}{}_{j'}$ берутся относительно одной, как правило, начальной системы отсчета [1], поэтому

$$h^{b'}{}_{j'}(P) = \delta_{b'}{}^{b} \, h^{b}{}_{j}(P) \delta^{j}{}_{j'}. \tag{5.25}$$

Выражая коэффициенты Ламэ в формуле (5.24) относительно системы K, получим

$$g_{i'j'} = \delta_{i'}{}^{i}\, h_i{}^{a} \delta_a{}^{a'} \eta_{a'b'}\, \delta^{b'}_{\ b}\, h^{b}{}_{j} \delta^{j}_{\ j'}. \tag{5.26}$$

Так как все величины берутся в одной мировой точке P, то окончательно получим

$$g_{i'j'}(P) = \delta_{i'}{}^{i}\, g_{ij}(P)\, \delta^{j}_{\ j'}. \tag{5.27}$$

Полученное соотношение (5.27) означает, что значение метрического L-тензора в заданной точке пространства зависит только от абсолютного местоположения этой точки в пространстве.

Приведем пример величины, являющейся классическим тензором при пассивных преобразованиях внутри одной реальной системы отсчета, однако не являющейся L-тензором при активных преобразованиях между реальными системами отсчета. Такой величиной являются коэффициенты вращения Риччи в мировых координатах $T^{i\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,j\,k}$, которые при пассивном преобразовании, то есть при замене координатной сетки внутри реальной системы отсчета преобразуются как классический тензор типа (1, 2) (см. Приложение 1, формула $(A15)$), а при активном преобразовании между реальными системами отсчета проявляют L-тензорные свойства только в отношении второго нижнего индекса [1, с. 106]

$$T^{i\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,j\,k'} = T^{i\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,j\,k}\, \Lambda^{k}_{\ k'}. \tag{5.28}$$

Примером величины, являющейся полным L-тензором при активном преобразовании между реальными системами отсчета, но не являющейся классическим тензором, будут символы Кристоффеля $\Gamma^{i}_{\ jk}$ [1]

$$\Gamma^{i'}_{\ j'k'} = \Lambda^{i'}_{\ i}\, \Gamma^{i}_{\ jk}\, \Lambda^{j}_{\ j'}\, \Lambda^{k}_{\ k'}. \tag{5.29}$$

5.3. *L*-ковариантная производная

Ввиду того, что основное определение L-тензорных величин дано в отношении их локально-лоренцевых координат, то L-ковари-

антную производную мы также определим в локально-лоренцевых координатах.

Основное свойство L-ковариантной производной заключается в том, что она сохраняет L-тензорные свойства величин. Докажем, что *ковариантная производная в касательном расслоении* $\widetilde{\nabla}_c = h_c{}^k \widetilde{\nabla}_k$ (см. Приложение 1) обладает таким свойством. Имеем для L-векторов Z^a и Z_b:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_c Z^{a'} &= Z^{a'}_{\ ,c} - T^{a'\cdot\cdot}_{\cdot\, b'c} Z^{b'} = \\
&= (\Lambda^{a'}_{\ a} Z^a)_{,c} - \Lambda^{a'}_{\ a} T^{a\cdot\cdot}_{\cdot\, bc} \Lambda^b_{\ b'} Z^{b'} - \Lambda^{a'}_{\ a,\, c} \Lambda^a_{\ b'} Z^{b'} = \\
&= \Lambda^{a'}_{\ a,\, c} Z^a + \Lambda^{a'}_{\ a} Z^a_{\ ,c} - \Lambda^{a'}_{\ a} T^{a\cdot\cdot}_{\cdot\, bc} Z^b - \Lambda^{a'}_{\ a,\, c} Z^a = \\
&= \Lambda^{a'}_{\ a} \left(Z^a_{\ ,c} - T^{a\cdot\cdot}_{\cdot\, bc} Z^b \right) = \\
&= \Lambda^{a'}_{\ a} \left(\widetilde{\nabla}_c Z^a \right),
\end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_c Z_{b'} &= Z_{b',\, c} + T^{a'\cdot\cdot}_{\cdot\, b'c} Z_{a'} = \\
&= (Z_b \Lambda^b_{\ b'})_{,c} + Z_c \Lambda^c_{\ a'} \left(\Lambda^{a'}_{\ a,c} \Lambda^a_{\ b'} + \Lambda^{a'}_{\ a} T^{a\cdot\cdot}_{\cdot\, bc} \Lambda^b_{\ b'} \right) = \\
&= Z_{b,\, c} \Lambda^b_{\ b'} + Z_b \Lambda^b_{\ b',\, c} - \\
&\qquad - Z_c \Lambda^c_{\ a'} \Lambda^{a'}_{\ a} \Lambda^a_{\ b',\, c} + Z_c \Lambda^c_{\ a'} \Lambda^{a'}_{\ a} T^{a\cdot\cdot}_{\cdot\, bc} \Lambda^b_{\ b'} = \\
&= Z_{b,\, c} \Lambda^b_{\ b'} + Z_b \Lambda^b_{\ b',\, c} - Z_a \Lambda^a_{\ b',\, c} + Z_a T^{a\cdot\cdot}_{\cdot\, bc} \Lambda^b_{\ b'} = \\
&= (Z_{b,\, c} + T^{a\cdot\cdot}_{\cdot\, bc} Z_a)\ \Lambda^b_{\ b'} = \\
&= \left(\widetilde{\nabla}_c Z_b \right) \Lambda^b_{\ b'}.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Кроме того, локальный индекс при L-производной сам является L-тензорным (L-ковариантным):

$$\widetilde{\nabla}_{c'} = h_{c'}{}^k \widetilde{\nabla}_k = \Lambda_{c'}{}^c h_c{}^k \widetilde{\nabla}_k = \Lambda_{c'}{}^c \widetilde{\nabla}_c. \tag{5.32}$$

Здесь использовано векторное свойство локального индекса коэффициентов Ламэ относительно ортогональных преобразований в касательном пространстве [5]

$$h^k_{\ c'} = h^k_{\ c} \Lambda^c_{\ c'}. \tag{5.33}$$

Приведем полезные формулы для L-ковариантной производной от контравариантного и ковариантного L-тензора ранга 2

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_c Z^{ab} &= Z^{ab}{}_{,\,c} - T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,dc} Z^{db} - T^{b\,\cdot\cdot}_{\cdot\,dc} Z^{ad},\\ \widetilde{\nabla}_c Z_{ab} &= Z_{ab,\,c} + T^{d\,\cdot\cdot}_{\cdot\,ac} Z_{db} + T^{d\,\cdot\cdot}_{\cdot\,bc} Z_{ad}.\end{aligned} \tag{5.34}$$

5.4. *L*-инвариантность интервала

Докажем, что квадрат интервала между двумя близкими событиями $(ds)^2 = dX_i dX^i$, принимающий следующий вид относительно удаленной реальной квазиинерциальной системы отсчета K:

$$(ds)^2 = dX^i\,\eta_{ij}\,dX^j = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2, \tag{5.35}$$

где $c\,dt$, dx, dy, dz — расстояния между событиями по временной и пространственным осям в системе K, $\eta_{ij} = diag(1, -1, -1, -1)$, является инвариантом относительно преобразований (A) между реальными системами отсчета, то есть L-скаляром.

Действительно, в силу закона (A) и определений (5.4), (5.5), разница пространственно-временных координат между двумя бесконечно близкими событиями dX^i является L-вектором. В силу доказанного соотношения (5.11) об L-инвариантности квадрата длины L-вектора мы имеем в произвольных реальных систем отсчета $K'(O')$ и $K''(O'')$

$$\begin{aligned}dX_{i''}dX^{i''} &= dX^{i''}g_{i''j''}(O'')dX^{j''} =\\ &= dX^{i'}g_{i'j'}(O')dX^{j'} = dX_{i'}\,dX^{i'},\end{aligned} \tag{5.36}$$

то есть

$$ds^2 = const. \tag{5.37}$$

Полученная формула устанавливает еще одно поразительное сходство пространства событий реальной относительности (пространства событий Г.И. Шипова) и пространства событий специальной относительности (пространства Г. Минковского).

Во-первых, в обоих пространствах тензор полной кривизны равен нулю. Во-вторых, в обоих пространствах интервал ds между двумя бесконечно близкими событиями есть величина постоянная по отношению к выбору:

— инерциальной системы отсчета (в пространстве Г. Минковского);

— реальной неинерциальной системы отсчета (в пространстве событий Г.И. Шипова).

5.5. *L*-векторы четырехмерной скорости и четырехмерного импульса частицы

Как было показано выше, разница координат между двумя бесконечно близкими событиями dX^i является L-вектором, а интервал ds, соответствующий событиям, является L-скаляром. Связывая эти события с движением пробной частицы, введем четырехмерную скорость частицы

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}, \tag{5.38}$$

которая является L-вектором, преобразующимся соответствующим образом между реальными системами отсчета K' и K'':

$$u^{i''} = h^{i''}_{\ a''}(O'')\,\Lambda^{a''}_{\ a'}\,h^{a'}_{\ i'}(O')\,u^{i'}. \tag{5.39}$$

Раскрывая (5.38) для удаленной квазиинерциальной системы отсчета K, получим

$$u^i = \frac{dx^i}{\sqrt{c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2}}. \tag{5.40}$$

Вводя трехмерную скорость пробной частицы в системе K

$$\mathbf{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \tag{5.41}$$

мы получим покомпонентное выражение для четырехмерной скорости частицы в системе K:

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right), \tag{5.42}$$

которое совпадает с классической формулой специальной относительности для инерциальных систем отсчета [10].

Квадрат четырехмерной скорости частицы является L-скаляром. Его значение легко вычисляется

$$u_i u^i = \frac{dx_i\, dx^i}{(ds)^2} = 1. \tag{5.43}$$

Введем L-вектор четырехмерного импульса частицы относительно произвольной реальной системы отсчета K

$$p^i = mcu^i, \tag{5.44}$$

где m — масса пробной частицы. При удалении K от тяготеющих сил и полей эта система отсчета становится квазиинерциальной, и предыдущая формула приобретает конкретный вид

$$p^i = \left(\frac{E}{c},\ \mathbf{p} \right), \tag{5.45}$$

где

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{5.46}$$

По принципу соответствия величины E и $\mathbf{p}$ приобретают смысл *полной энергии и трехмерного импульса частицы* относительно удаленной квазиинерциальной системы отсчета [10].

Формула преобразования 4-импульса p^i между произвольными реальными системами отсчета $K'(O')$ и $K''(O'')$ следующая:

$$p^{i''} = h^{i''}_{\ a''}(O'')\, \Lambda^{a''}_{\ a'}\, h^{a'}_{\ i'}(O')\, p^{i'}. \tag{5.47}$$

Из определения L-вектора p^i (5.44) следует, что квадрат четырехмерного импульса пробной частицы является L-скаляром, причем

$$p_i\, p^i = m^2 c^2. \tag{5.48}$$

Это означает, что в любой реальной системе отсчета квадрат L-вектора 4-импульса пробной частицы есть величина постоянная и равная m^2c^2.

В этом заключается третье общее свойство двух пространств событий: пространства Г. Минковского по отношению к инерциальным системам отсчета и пространства событий Г.И. Шипова по отношению к реальным неинерциальным системам отсчета.

5.6. О преобразовании тензора Римана между реальными системами отсчета

В пространстве событий Г.И. Шипова — пространстве абсолютного параллелизма — тензор кривизны $S^i{}_{jkm}$, определяемый через связность абсолютного параллелизма $\Delta^i{}_{jk}$ обычным образом

$$S^i{}_{jkm} = 2\,\Delta^i{}_{j[m,\,k]} + 2\,\Delta^i{}_{s[k}\,\Delta^s{}_{|j|m]}, \tag{5.49}$$

тождественно равен нулю [4]

$$S^i{}_{jkm} = 0. \tag{5.50}$$

С другой стороны, из соотношения

$$\Delta^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{jk} + T^{i\,\cdot\cdot}_{\cdot\,jk} \tag{5.51}$$

следует

$$S^i{}_{jkm} = R^i{}_{jkm} + 2\nabla_{[k}T^{i\,\cdot\cdot}_{\cdot\,|j|m]} + 2\,T^{i\,\cdot\cdot}_{\cdot\,s[k}\,T^{s\,\cdot\cdot}_{\cdot\,|j|m]}, \tag{5.52}$$

где $R^i{}_{jkm}$ — тензор Римана базы расслоения (тензор кривизны риманова пространства), определяемый через связность риманова пространства $\Gamma^i{}_{jk}$ по обычному правилу:

$$R^i{}_{jkm} = 2\,\Gamma^i{}_{j[m,\,k]} + 2\,\Gamma^i{}_{s[k}\,\Gamma^s{}_{|j|m]}. \tag{5.53}$$

Из формулы (5.52) и тождества (5.50) следует соотношение

$$R^{i}{}_{jkm} = -2\nabla_{[k}T^{i\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,|j|m]} - 2\,T^{i\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,s[k}\,T^{s\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,|j|m]}, \tag{5.54}$$

устанавливающее зависимость между кручением ($T^{\cdot\,\cdot\,\cdot}_{i\,j\,k} \neq T^{\cdot\,\cdot\,\cdot}_{j\,i\,k}$) и кривизной пространства событий Г.И. Шипова, фактически являясь структурным уравнением этого пространства в мировых координатах.

В соответствии с формулой (5.28) $T^{a\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,bk}$ при активных преобразованиях между реальными системами отсчета K и K' является ковариантным L-вектором

$$T^{a\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,bk'} = T^{a\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,bk}\,\Lambda^{k}{}_{k'}. \tag{5.55}$$

Далее, ковариантная производная L-векторной величины (например, $T^{a\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,bk}$) является L-ковариантной

$$\nabla_{k'}\left(T^{a\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,bm}\right) = \nabla_{k}\left(T^{a\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,bm}\right)\Lambda^{k}{}_{k'}. \tag{5.56}$$

Это следует из L-тензорных свойств символов Кристоффеля (5.29) и L-векторных свойств частной производной по мировой координате [1, разд. 3.2]

$$(\ \ )_{,\,k'} = (\ \ )_{,\,k}\,\Lambda^{k}{}_{k'}. \tag{5.57}$$

Вследствие этого второй и третий нижние мировые индексы тензора Риччи являются L-тензорными при активных преобразованиях между K и K'

$$R^{i}{}_{jk'm'} = R^{i}{}_{jkm}\,\Lambda^{k}{}_{k'}\,\Lambda^{m}{}_{m'}. \tag{5.58}$$

По первым верхнему и нижнему мировым индексам величина $R^{i}{}_{jkm}$ преобразуется по обычной схеме (см. далее разд. 7.1):

$$\begin{array}{ccc} R^{a}{}_{bkm} & \xrightarrow[\Lambda]{} & R^{a'}{}_{b'km} \\ \Uparrow{\scriptstyle h} & & \Downarrow{\scriptstyle h} \\ R^{i}{}_{jkm} & & R^{i'}{}_{j'km} \\ \\ K(O) & & K(O') \end{array}, \tag{5.59}$$

которая в первом шаге предполагает получение проекции $R^{i}{}_{jkm}$ на слой расслоения по верхнему и первому нижнему индексам в точке нахождения начального наблюдателя:

$$R^{a}{}_{bkm} = h^{a}{}_{i}(O)\, R^{i}{}_{jkm}\, h^{j}{}_{b}(O). \tag{5.60}$$

Предложение 5.6.1. Проекция по верхнему и первому нижнему индексу тензора Риччи на слой расслоения имеет вид

$$R^{a}{}_{bkm} = -2\,\nabla_{[k}T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,|b|m]} + 2\,T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,c[k}T^{c\,\cdot\cdot}_{\cdot\,|b|m]}. \tag{5.61}$$

Доказательство. Запишем (5.54) в виде

$$\begin{aligned} R^{i}{}_{jkm} = (\nabla_m h^{i}{}_{a})T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,bk}\, h^{b}{}_{j} + h^{i}{}_{a}(\nabla_m T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,bk})h^{b}{}_{j} + h^{i}{}_{a}T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,bk}(\nabla_m h^{b}{}_{j}) - \\ -(\nabla_k h^{i}{}_{a})T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,bm}\, h^{b}{}_{j} - h^{i}{}_{a}(\nabla_k T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,bm})h^{b}{}_{j} - h^{i}{}_{a}T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,bm}(\nabla_k h^{b}{}_{j}) + \\ +h^{i}{}_{a}(T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,cm}\,T^{c\,\cdot\cdot}_{\cdot\,bk} - T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,ck}\,T^{c\,\cdot\cdot}_{\cdot\,bm})h^{b}{}_{j}. \end{aligned} \tag{5.62}$$

В соответствии с определением $T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,cm} = (\nabla_m h^{a}{}_{s})\, h^{s}{}_{c}$ преобразуем первое слагаемое:

$$(\nabla_m h^{i}{}_{a})T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,bk}\, h^{b}{}_{j} = (\nabla_m h^{i}{}_{a})\, h^{a}{}_{s}h^{s}{}_{c}\, T^{c\,\cdot\cdot}_{\cdot\,bk}\, h^{b}{}_{j} = -h^{i}{}_{a}T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,cm}T^{c\,\cdot\cdot}_{\cdot\,bk}\, h^{b}{}_{j}. \tag{5.63}$$

Аналогично преобразуем третье слагаемое

$$\begin{aligned} h^{i}{}_{a}T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,bk}(\nabla_m h^{b}{}_{j}) = h^{i}{}_{a}T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,ck}\, h^{c}{}_{s}h^{s}{}_{b}\,(\nabla_m h^{b}{}_{j}) = \\ = -h^{i}{}_{a}T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,ck}\, h^{c}{}_{s}(\nabla_m h^{s}{}_{b})\, h^{b}{}_{j} = h^{i}{}_{a}T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,ck}\, T^{c\,\cdot\cdot}_{\cdot\,bm}\, h^{b}{}_{j}. \end{aligned} \tag{5.64}$$

Учитывая полученные соотношения в (5.62), получим

$$R^{i}{}_{jkm} = h^{i}{}_{a}(\nabla_m T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,bk} - \nabla_k T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,bm} + T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,ck}\, T^{c\,\cdot\cdot}_{\cdot\,bm} - T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,cm}\, T^{c\,\cdot\cdot}_{\cdot\,bk})h^{b}{}_{j}, \tag{5.65}$$

что доказывает Предложение 5.6.1, так как $R^{i}{}_{jkm} = h^{i}{}_{a}\, R^{a}{}_{bkm}\, h^{b}{}_{j}$.

В качестве второго шага выполним преобразование $R^{a}{}_{bkm} \xrightarrow[\Lambda]{} R^{a'}{}_{b'km}$ при четырехмерном повороте репера $\Lambda^{a'}_{a}$ между

начальной K и конечной K' реальными системами отсчета. Учитывая определение (5.61) и свойства преобразования $T^{a\cdots}_{\cdot bk} \underset{\Lambda}{\longrightarrow} T^{a'\cdots}_{\cdot b'k}$ (формула $(A13)$, Приложение 1)

$$T^{a'\cdots}_{\cdot b'k} = \Lambda^{a'}{}_{a,k}\,\Lambda^{a}{}_{b'} + \Lambda^{a'}{}_{a}\,T^{a\cdots}_{\cdot bk}\,\Lambda^{b}{}_{b'}, \tag{5.66}$$

после прямых вычислений имеем

$$R^{a'}{}_{b'km} = \Lambda^{a'}{}_{a}\,(\nabla_m T^{a\cdots}_{\cdot bk} - \nabla_k T^{a\cdots}_{\cdot bm} - T^{a\cdots}_{\cdot cm} T^{c\cdots}_{\cdot bk} + T^{a\cdots}_{\cdot ck} T^{c\cdots}_{\cdot bm})\,\Lambda^{b}{}_{b'}, \tag{5.67}$$

то есть

$$R^{a'}{}_{b'km} = \Lambda^{a'}{}_{a}\,R^{a}{}_{bkm}\,\Lambda^{b}{}_{b'}, \tag{5.68}$$

что означает, что верхний и первый нижний индекс тензора Римана являются L-тензорными индексами (см. далее разд. 7.1).

Таким образом, тензор кривизны базы расслоения $R^{i}{}_{jkm}$ является полным L-тензором при активном преобразовании из одной реальной системы отсчета $K(O)$ в другую реальную систему отсчета $K'(O')$:

$$R^{i'}{}_{j'k'm'} = \Lambda^{i'}{}_{i}\,R^{i}{}_{jkm}\,\Lambda^{j}{}_{j'}\,\Lambda^{k}{}_{k'}\,\Lambda^{m}{}_{m'}. \tag{5.69}$$

Проявленная (или грубая) материя характеризуется положением в пространстве (локацией), длиной, весом, энергией, массой и т.д., то есть величинами, которые можно измерить в пространстве мировых координат. В геометрических теориях материальные образования характеризуется кривизной пространства мировых координат (базы расслоения) [4].

Относительность проявленной материи относительно преобразований между реальными системами отсчета заключается в том, что если в какой-либо реальной системе отсчета наблюдается материя (то есть существует ненулевая кривизна), то с помощью активных преобразований можно перейти в другую реальную систему отсчета, где кривизна мирового пространства равна нулю и, следовательно, проявленная материя не наблюдается.

Факт того, что тензор Римана $R^{i}{}_{jkm}$ является полным L-тензором, соответствует абсолютным свойствам проявленной материи относительно преобразований между реальными системами отсчета.

Глава 6.

Энергия, время

6.1. Координаты и скорость частицы в реальной системе отсчета

Напомним, что мы рассматриваем реальные системы отсчета, имеющие «единый корень», то есть единое начальное состояние, характеризующееся совпадением соответствующих векторов тетрад каждой системы отсчета.

Рассмотрим реальную систему отсчета $K'(O')$, двигающуюся относительно удаленной покоящейся системы отсчета $K(O)$ со скоростью $\mathbf{V}_{O'}$. Покоящаяся система $K(O)$ может рассматриваться как начальное состояние движущейся реальной системы отсчета $K'(O')$. Ограничимся случаем, когда движение системы K' происходит по оси координат OX, то есть $\mathbf{V}_{O'} = (V_{O'}, 0, 0)$. Рассмотрим частицу массы m, двигающейся со скоростью $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ относительно удаленного неподвижного наблюдателя, ее скорость в реальной системе отсчета $K'(O')$ обозначим $\mathbf{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)$.

Рассмотрим также локально-лоренцеву систему $k'(O')$, мгновенно совпадающую с реальной системой отсчета $K'(O')$ в мировой точке O', а также локально-лоренцеву систему $k(O)$, тождественную удаленной покоящейся системе отсчета $K(O)$. Ко-

ординаты событий, связанных с движением частицы, в локально-лоренцевых системах $k'(O')$ и $k(O)$ соотносятся через чистое преобразование Лоренца

$$\begin{pmatrix} cdt'_L \\ dx'_L \\ dy'_L \\ dz'_L \end{pmatrix} = L^{a'}{}_{a} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \qquad L^{a'}{}_{a} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_x\gamma & 0 & 0 \\ -\beta_x\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

или, в явном виде

$$\begin{aligned} dt'_L &= \gamma\,(dt - \beta_x\, dx/c), \\ dx'_L &= \gamma\,(dx - \beta_x c dt), \\ dy'_L &= dy, \\ dz'_L &= dz, \end{aligned} \tag{6.2}$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2_{O'}/c^2}}, \quad \beta_x = \frac{V_{O'}}{c}. \tag{6.3}$$

Из (6.2) можно вычислить скорость частицы в локально-лоренцевой системе $k'(O')$

$$v'_{xL} = \frac{dx'_L}{dt'_L} = \frac{v_x - V_{O'}}{1 - V_{O'}v_x/c^2}, \tag{6.4}$$

$$v'_{yL} = \frac{v_y}{\gamma(1 - V_{O'}v_x/c^2)}, \quad v'_{zL} = \frac{v_z}{\gamma(1 - V_{O'}v_x/c^2)}, \tag{6.5}$$

что совпадает с формулой А. Эйнштейна [31] для сложения скоростей.

В соответствии с законом (A) и выражениями (1.47), (1.48) для коэффициентов Ламэ в ортогональных мировых координатах в окрестности начала O' дифференциалы координат событий в реальной системе отсчета $K'(O')$ и в мгновенно совпадающей с ней локально-лоренцевой системе $k'(O')$ соотносятся

следующим образом

$$\begin{pmatrix} cdt' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |g_{00}^{O'}|^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |g_{11}^{O'}|^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |g_{22}^{O'}|^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |g_{33}^{O'}|^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt'_L \\ dx'_L \\ dy'_L \\ dz'_L \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Верхний индекс у диагональных компонент метрического тензора показывает, что они взяты в точке начала системы K'.

Последнее соотношение дает возможность вычислить скорость частицы в реальной системе отсчета $K'(O')$

$$v'_x = \sqrt{\frac{|g_{00}^{O'}|}{|g_{11}^{O'}|}}\, v'_{xL}, \quad v'_y = \sqrt{\frac{|g_{00}^{O'}|}{|g_{22}^{O'}|}}\, v'_{yL}, \quad v'_z = \sqrt{\frac{|g_{00}^{O'}|}{|g_{33}^{O'}|}}\, v'_{zL}. \tag{6.7}$$

Заметим, что скорости частицы в неинерциальной реальной системе отсчета $K'(O')$ и локально-лоренцевой системе $k'(O')$ отличаются друг от друга. Действительно, абстрактная локально-лоренцева система $k'(O')$ мгновенно совпадает с реальной системой $K'(O')$, что означает только параллельность соответствующих векторов тетрад, представляющих эти две системы, но не их полное совпадение (см. раздел 3.2).

Естественным образом мы можем ввести реальную систему отсчета, в которой тело m покоится — собственную систему отсчета этого тела $K''(O'')$, а также мгновенно совпадающую с ней в мировой точке O'' локально-лоренцеву систему $k''(O'')$.

Координаты событий, связанные с движением частицы m, в локально-лоренцевой системе $k''(O'')$ и в локально-лоренцевой системе $k'(O')$ соотносятся следующим образом

$$\begin{pmatrix} cdt''_L \\ dx''_L \\ dy''_L \\ dz''_L \end{pmatrix} = L'^{a''}_{\ a'} \begin{pmatrix} cdt'_L \\ dx'_L \\ dy'_L \\ dz'_L \end{pmatrix}, \tag{6.8}$$

где $L'^{a''}_{\ a'}$ — матрица чистого преобразования Лоренца в общем

виде [1, 47], соответствующего произвольному направлению скорости системы $k''(O'')$ относительно системы $k'(O')$ (6.4), (6.5)

$$L'^{a''}_{\ a'} = \begin{pmatrix} \Gamma'_L & -B'_{xL}\Gamma'_L & -B'_{yL}\Gamma'_L & -B'_{zL}\Gamma'_L \\ -B'_{xL}\Gamma'_L & 1+\epsilon' B'^2_{xL} & \epsilon' B'_{xL}B'_{yL} & \epsilon' B'_{xL}B'_{zL} \\ -B'_{yL}\Gamma'_L & \epsilon' B'_{xL}B'_{yL} & 1+\epsilon' B'^2_{yL} & \epsilon' B'_{yL}B'_{zL} \\ -B'_{zL}\Gamma'_L & \epsilon' B'_{xL}B'_{zL} & \epsilon' B'_{yL}B'_{zL} & 1+\epsilon' B'^2_{zL} \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

$$B'_{xL} = \frac{v'_{xL}}{c}, \ B'_{yL} = \frac{v'_{yL}}{c}, \ B'_{zL} = \frac{v'_{zL}}{c},$$

$$B'^2 = B'^2_{xL} + B'^2_{yL} + B'^2_{zL}, \ \Gamma'_L = \frac{1}{\sqrt{1-B'^2}}, \ \epsilon' = \frac{\Gamma'_L - 1}{B'^2}. \quad (6.10)$$

Соединяя (6.1) и (6.8), получим соотношение в матричном виде между координатами частицы в локально-лоренцевой системе $k''(O'')$ и в удаленной покоящейся системе отсчета $K(O)$

$$\begin{pmatrix} cdt''_L \\ dx''_L \\ dy''_L \\ dz''_L \end{pmatrix} = L'^{a''}_{\ a'} L^{a'}_{\ a} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

Зная скорость частицы m относительно удаленной покоящейся системы отсчета $K(O)$, можно получить прямое соотношение между координатами частицы в локально-лоренцевой системе $k''(O'')$ и в удаленной системе $K(O)$

$$\begin{pmatrix} cdt''_L \\ dx''_L \\ dy''_L \\ dz''_L \end{pmatrix} = L^{a''}_{\ a} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \quad (6.12)$$

где $L^{a''}_{\ a}$ — матрица чистого преобразования Лоренца в общем виде из удаленной покоящейся системы $K(O)$ в локально-лоренцеву систему $k''(O'')$

$$L^{a''}_{\ a} = \begin{pmatrix} \Gamma & -B_x\Gamma & -B_y\Gamma & -B_z\Gamma \\ -B_x\Gamma & 1+\epsilon B_x^2 & \epsilon B_x B_y & \epsilon B_x B_z \\ -B_y\Gamma & \epsilon B_x B_y & 1+\epsilon B_y^2 & \epsilon B_y B_z \\ -B_z\Gamma & \epsilon B_x B_z & \epsilon B_y B_z & 1+\epsilon B_z^2 \end{pmatrix}, \quad (6.13)$$

$$B_x = \frac{v_x}{c},\ \ B_y = \frac{v_y}{c},\ \ B_z = \frac{v_z}{c},$$

$$B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2,\ \ \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-B^2}},\ \ \epsilon = \frac{\Gamma - 1}{B^2}. \tag{6.14}$$

Вычисления, проведенные по формуле (6.11) и по формуле (6.12), приводят к единому результату

$$\begin{pmatrix} cdt''_L \\ dx''_L \\ dy''_L \\ dz''_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cdt/\Gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.15}$$

Здесь использовано

$$\Gamma'_L = \Gamma\gamma\left(1 - \frac{V_{O'}v_x}{c^2}\right). \tag{6.16}$$

Координаты событий, связанных с движением частицы m, в собственной реальной системе отсчета $K''(O'')$ и в локально-лоренцевой системе $k''(O'')$, мгновенно совпадающей с K'' в точке нахождения частицы O'', соотносятся следующим образом

$$dX^{i''} = h^{i''}_{\ a''}(O'')dX^{a''}, \tag{6.17}$$

или, в ортогональных мировых координатах окрестности точки O''

$$\begin{pmatrix} cdt'' \\ dx'' \\ dy'' \\ dz'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cdt''_L/\sqrt{|g_{00}^{O''}|} \\ dx''_L/\sqrt{|g_{11}^{O''}|} \\ dy''_L/\sqrt{|g_{22}^{O''}|} \\ dz''_L/\sqrt{|g_{33}^{O''}|} \end{pmatrix}, \tag{6.18}$$

что дает в явном виде

$$dt'' = dt\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{\sqrt{|g_{00}^{O''}|}},\quad dx'' = dy'' = dz'' = 0, \tag{6.19}$$

где $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ — квадрат скорости частицы относительно удаленной системы $K(O)$.

В приближении слабого поля, что означает также нерелятивистское приближение по скоростям

$$g_{00}^{O''} = 1 + \frac{2\varphi(O'')}{c^2}, \quad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2},$$

где $\varphi(O'')$ — эффективный потенциал поля, заменяющий в классической картине геометризованное поле g_{ij} (см. разд. 2.4), получим следующее соотношение между собственным временем в реальной системе отсчета $K''(O'')$ и собственным временем в удаленной покоящейся системе отсчета $K(O)$

$$dt''_{pr} = dt_{pr}\left\{1 - \frac{1}{mc^2}\left[\frac{mv^2(O'')}{2} + m\varphi(O'')\right]\right\}. \tag{6.20}$$

Выражение в квадратных скобках является сохраняющейся суммой кинетической и потенциальной энергии при движении частицы m в потенциальном поле φ. С учетом общего начала у реальной системы отсчета K'' и удаленной покоящейся системы отсчета K, что подразумевает $v|_\infty = 0$, а также градуировки потенциала на значительном удалении от центра поля $\varphi|_\infty = 0$, имеем

$$\frac{mv^2(O'')}{2} + m\varphi(O'') = \frac{mv^2}{2}|_\infty + m\varphi|_\infty = 0. \tag{6.21}$$

Это означает, что собственное время в реальной системе отсчета K'' и удаленной покоящейся системе отсчета K совпадают

$$dt''_{pr} = dt_{pr}. \tag{6.22}$$

Этот вывод пока сделан в слабополевом приближении. Об одинаковом течении времени в движущихся реальных системах отсчета, имеющих единое начальное состояние на удалении от центра поля, впервые было сказано автором в 2009 году [1, разд. 2.5].

6.2. Энергия и импульс частицы в реальной системе отсчета

Примем во внимание принцип соответствия [2, гл. 2], согласно которому в случае удаления реальной системы отсчета от источника поля и превращения ее в квазиинерциальную систему отсчета L-вектор энергии-импульса частицы должен переходить в четырехмерный вектор энергии-импульса, преобразующийся по правилам специальной относительности, с соответствующим разделением временной и пространственных компонент. То же самое касается и проекции L-вектора энергии-импульса на слой расслоения, то есть проекции из реальной системы отсчета в мгновенно совпадающую с ней локально-лоренцеву систему. Проекции L-вектора энергии-импульса на слой расслоения в точке O'' $p^{a''} = h^{a''}_{\ i''}(O'')\, p^{i''}(O'')$ и в точке O' $p^{a'} = h^{a'}_{\ i'}(O')\, p^{i'}(O')$ являются четырехмерными векторами специальной относительности в локально-лоренцевых системах $k''(O'')$ и $k'(O')$ и соотносятся между собой в общем виде следующим образом

$$p^{a''} = \Lambda^{a''}_{\ a'}\, p^{a'}, \tag{6.23}$$

где $\Lambda^{a''}_{\ a'} \in SO(1.3)$ — матрица собственного ортогонального преобразования четырехмерного псевдоевклидова пространства, соответствующая четырехмерной ориентации системы $k''(O'')$ относительно системы $k'(O')$. L-векторы p^i и коэффициенты Ламэ $h^a_{\ i}$ здесь подразумеваются взятыми в соответствующих ортогональных мировых координатах базы расслоения (см. раздел 1.4). Имеем поэтому следующее.

Для покоящейся системы $K(O)$ и совпадающей с ней локально-лоренцевой системы $k(O)$

$$p^a = \delta^a_{\ i}\, p^i = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = mc\Gamma \begin{pmatrix} 1 \\ v_x/c \\ v_y/c \\ v_z/c \end{pmatrix}, \tag{6.24}$$

E — полная энергия частицы, $\mathbf{p} = (p_x,\, p_y,\, p_z)$ — импульс частицы, $\Gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, $\quad v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ — квадрат скорости частицы в системе отсчета K. Конкретные выражения для энергии и импульса частицы в системе K [10]

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{6.25}$$

Запишем аналогичное выражение для 4-вектора энергии-импульса частицы в локально-лоренцевой системе $k'(O')$

$$p^{a'} = \begin{pmatrix} E'_L/c \\ p'_{xL} \\ p'_{yL} \\ p'_{zL} \end{pmatrix} = mc\,\Gamma'_L \begin{pmatrix} 1 \\ v'_{xL}/c \\ v'_{yL}/c \\ v'_{zL}/c \end{pmatrix}, \tag{6.26}$$

где E'_L, $\mathbf{p}'_L = (p'_{xL},\, p'_{yL},\, p'_{zL})$ — полная энергия и импульс частицы в системе $k'(O')$, Γ'_L — соответствующий релятивистский фактор (6.10).

Координаты 4-векторов энергии-импульса частицы в локально-лоренцевых системах $k'(O')$ и $k(O)$ соотносятся следующим образом

$$p^{a'} = L^{a'}_{\ a}\, p^a = L^{a'}_{\ a}\, \delta^a_{\ i}\, p^i, \tag{6.27}$$

где матрица чистого преобразования Лоренца $L^{a'}_{\ a}$ представлена формулой (6.1).

По закону преобразования (A) L-вектор энергии-импульса в реальной системе отсчета $K'(O')$ является проекцией на базу расслоения 4-вектора энергии-импульса в локально-лоренцевой системе $k'(O')$

$$p^{i'} = h^{i'}_{\ a'}(O')\, p^{a'}, \tag{6.28}$$

или, в ортогональных мировых координатах окрестности O'

$$p^{i'} = \begin{pmatrix} p'_0 \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'_L/(c\sqrt{|g^{O'}_{00}|}) \\ p'_{xL}/\sqrt{|g^{O'}_{11}|} \\ p'_{yL}/\sqrt{|g^{O'}_{22}|} \\ p'_{zL}/\sqrt{|g^{O'}_{33}|} \end{pmatrix}. \tag{6.29}$$

Временная и пространственные компоненты L-вектора энергии-импульса частицы в ортогональных мировых координатах реальной системы отсчета $K'(O')$ несут такой же смысл, как подобные компоненты четырехмерного вектора энергии-импульса в ортонормированных координатах локально-лоренцевой системы $k'(O')$. Поэтому, а также в соответствии с обыденным смыслом и опытом измерений человечества в ортогональных системах координат, временную компоненту L-вектора $cp^{i'}$ мы отождествим с полной энергией частицы в реальной системе отсчета $K'(O')$

$$E' = c\,p'_0, \tag{6.30}$$

а пространственные компоненты L-вектора $p^{i'}$ — с трехмерным импульсом частицы в системе $K'(O')$

$$\mathbf{p}' = (p'_x,\, p'_y,\, p'_y). \tag{6.31}$$

Проведем прямые вычисления L-вектора энергии-импульса частицы в ортогональных мировых координатах окрестности начала реальной системы отсчета $K'(O')$

$$\begin{aligned} p^{i'} &= mc\frac{dx^{i'}}{ds} = \\ &= mc\frac{dx^{i'}}{\sqrt{|g_{00}^{O'}|c^2dt'^2 - |g_{11}^{O'}|dx'^2 - |g_{22}^{O'}|dy'^2 - |g_{33}^{O'}|dz'^2}} = \\ &= mc\,\Gamma'\frac{dx^{i'}}{cdt'}, \end{aligned} \tag{6.32}$$

где Γ' — релятивистский фактор частицы в системе $K'(O')$

$$\Gamma' = \frac{1}{\sqrt{|g_{00}^{O'}|}}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|g_{11}^{O'}|}{|g_{00}^{O'}|}\frac{v_x'^2}{c^2} - \frac{|g_{22}^{O'}|}{|g_{00}^{O'}|}\frac{v_y'^2}{c^2} - \frac{|g_{33}^{O'}|}{|g_{00}^{O'}|}\frac{v_z'^2}{c^2}}}. \tag{6.33}$$

Воспользовавшись соотношением (6.7) между компонентами скорости частицы в реальной системе отсчета $K'(O')$ и в мгновенно

совпадающей с ней локально-лоренцевой системе $k'(O')$, получим соотношение между соответствующими релятивистскими факторами Γ' и Γ'_L

$$\Gamma' = \frac{1}{\sqrt{|g_{00}^{O'}|}}\Gamma'_L, \tag{6.34}$$

используя которое, получим далее

$$p^{i'} = m\,\Gamma' \begin{pmatrix} c \\ v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = m\Gamma'_L \begin{pmatrix} c/\sqrt{|g_{00}^{O'}|)} \\ v'_{xL}/\sqrt{|g_{11}^{O'}|} \\ v'_{yL}/\sqrt{|g_{22}^{O'}|} \\ v'_{zL}/\sqrt{|g_{33}^{O'}|} \end{pmatrix}, \tag{6.35}$$

что фактически совпадает с формулой (6.29), полученной другим путем. Из (6.29) и (6.35) получим соотношение между значениями полной энергии частицы в реальной системе отсчета $K'(O')$ и локально-лоренцевой системе $k'(O')$

$$E' = \frac{E'_L}{\sqrt{|g_{00}^{O'}|}}. \tag{6.36}$$

Выполним преобразование L-вектора энергии-импульса частицы, подобное проведенному в предыдущем разделе преобразованию L-вектора dx^i, из удаленной покоящейся системы отсчета $K(O)$ в собственную систему отсчета частицы $K''(O'')$

$$\begin{pmatrix} p''_0 \\ p''_x \\ p''_y \\ p''_z \end{pmatrix} = h^{i''}{}_{a''}(O'')L^{a''}{}_{a} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}, \tag{6.37}$$

где коэффициенты Ламэ выражены в ортогональных мировых

координатах окрестности начала $K''(O'')$

$$h^{i''}_{a''}(O'') = \begin{pmatrix} |g^{O''}_{00}|^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |g^{O''}_{11}|^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |g^{O''}_{22}|^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |g^{O''}_{33}|^{-1/2} \end{pmatrix}, \tag{6.38}$$

а матрица $L^{a''}_{a}$ соответствует чистому преобразованию Лоренца из удаленной покоящейся системы отсчета $K(O)$ в локально-лоренцеву систему $k''(O'')$ (6.13). Преобразование приводит к следующим соотношениям

$$p''_0 = \frac{p_0}{\Gamma\sqrt{|g^{O''}_{00}|}}, \quad p''_x = p''_y = p''_z = 0. \tag{6.39}$$

6.3. Энергия покоя

Из предыдущей формулы следует соотношение между полной энергией частицы в собственной системе отсчета (энергией покоя) E''_{rest} и полной энергией частицы в удаленной покоящейся системе отсчета

$$E''_{rest} = E\,\frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{\sqrt{|g^{O''}_{00}|}}. \tag{6.40}$$

Подставляя сюда $E = mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, получим точное выражение для энергии покоя частицы

$$E''_{rest} = \frac{mc^2}{\sqrt{|g^{O''}_{00}|}}, \tag{6.41}$$

где O'' есть место нахождения частицы. Полученная формула относится к движущейся с ускорением реальной системе отсчета $K''(O'')$, тогда как знаменитая формула А. Эйнштейна $E = mc^2$, впервые выведенная в 1907 году [52], относится к квазиинерциальной удаленной системе отсчета $K(O)$ и к локально-лоренцевым системам $k'(O')$ и $k''(O'')$, что видно из формулы (6.36).

В приближении слабого поля $v \ll c$, $g_{00}^{O''} = 1 + 2\varphi(O'')/c^2$, где φ — эффективный потенциал, воссоздающий действие исследуемого поля на фоне плоского пространства в классической картине, имеем

$$E''_{rest} = mc^2 - m\varphi(O''), \quad E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2(O''). \tag{6.42}$$

Из классического закона сохранения кинетической и потенциальной энергии

$$m\varphi(O'') + \frac{1}{2}mv^2(O'') = m\varphi|_\infty + \frac{1}{2}mv^2|_\infty = 0, \tag{6.43}$$

откуда следует $\frac{1}{2}mv^2(O'') = -m\varphi(O'')$ и

$$E''_{rest} = E, \tag{6.44}$$

что означает совпадение значений полной энергии частицы относительно удаленного покоящегося наблюдателя и относительно наблюдателя, двигающегося вместе с частицей.

Полная энергия частицы (6.41) для наблюдателя, двигающегося вместе с частицей, составлена из начальной энергии покоя mc^2 и следующей работы поля

$$E''_P = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{|g_{00}^{O''}|}} - 1 \right), \tag{6.45}$$

совершенной над частицей при ее движении из начального удаленного положения в точку O''. Проиллюстрируем это в слабополевом приближении. Так как сила поля, действующая на частицу, есть $f = -m\,\partial\varphi/\partial r$, то работа поля равна

$$\int_\infty^{O''} (-m\frac{\partial\varphi}{\partial r})dr = -m\varphi(O'') + m\varphi|_\infty = -m\varphi(O''), \tag{6.46}$$

что, в соответствии с формулой (6.42), совпадает с выражением (6.45) для E''_P.

Для удаленного покоящегося наблюдателя полная энергия частицы состоит из энергии покоя $E = mc^2$ и кинетической энергии, которая в релятивистском случае выражается следующим образом [52]

$$E_K = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right). \tag{6.47}$$

Исходя из закона сохранения энергии, сумма энергии частицы и энергии поля есть величина постоянная. Поэтому кинетическая энергия частицы в точке O'' равна работе поля, совершенной над частицей, при ее движении из удаленного покоящегося состояния в эту точку

$$E_K = E''_P. \tag{6.48}$$

Формулы (6.42 – 6.44) иллюстрируют это в слабополевом приближении.

Объясним, почему в настоящем разделе не используется понятие потенциальной энергии. Дело в том, что в геометрических теориях взаимодействий, начиная с теории гравитационного поля А. Эйштейна, физическая категория полей переносчиков взаимодействий поглощается категорией пространства-времени. Поэтому понятие потенциала взаимодействия, вводимое в классических теориях на фоне плоского пространства событий, в геометрических теориях отсутствует. Градиент потенциала с обратным знаком здесь заменяется на четырехмерное ускорение, составленное из символов Кристоффеля — геометрических характеристик пространственно-временного континуума. Как отмечал Л. Бриллюэн: «В классической механике определение понятия *потенциальной энергии* играет очень важную роль, и когда мы переходим к теории относительности, эта величина оказывается одной из первых, подлежащих пересмотру» [41, гл. 2].

Принципиальное отсутствие понятия потенциальной энергии частицы в теории реальной относительности [1] привело к новому выражению (6.41) для энергии покоя частицы, испытывающей ускорение со стороны геометрического поля, где вместо потенциальной энергии учитывается работа поля над частицей.

В поле притяжения ($\varphi < 0$) энергия покоя частицы в собственной неинерциальной реальной системе отсчета возрастает по мере приближения частицы к притягивающему центру:

$$E_{rest\ O''} > E_{rest\ \infty} = mc^2. \tag{6.49}$$

6.4. Собственное время

Исходя из равенства полной энергии частицы в собственной системе отсчета и в удаленной покоящейся системе $E''_{rest} = E$ и в соответствии с формулой (6.40) имеем

$$g_{00}^{O''} = 1 - \frac{v^2}{c^2}, \tag{6.50}$$

где $g_{00}^{O''}$ — значение 00-компоненты метрического тензора в точке нахождения частицы, v^2 — квадрат скорости частицы относительно удаленной системы отсчета $K(O)$. Подставив полученный результат в (6.19), получим *точное соотношение* между собственным временем в реальной системе отсчета $K''(O'')$ и собственным временем в удаленной покоящейся системой $K(O)$

$$dt''_{pr} = dt_{pr}. \tag{6.51}$$

Так как реальная система отсчета $K''(O'')$ выбрана произвольно, то отсюда следует, что *во всех реальных системах отсчета, имеющих общее начало с удаленной покоящейся системой отсчета, время течет одинаковым образом*.

Здесь мы вводили единственное ограничение на исследуемое поле $g_{ij}(x^k)$ — оно должно иметь плоскую асимптотику на границе, что необходимо для существования удаленной покоящейся системы отсчета. Во всех других отношениях исследуемое поле может быть произвольным. Необходимо отметить, что под исследуемым полем мы подразумеваем сумму всех полей, действующих на пробную частицу, при этом суммарное поле может быть зависимым как от временной, так и от пространственных мировых координат.

Поэтому случай двух систем отсчета, описанных в «парадоксе часов» специальной относительности, подпадает под действие настоящего раздела.

6.5. О «парадоксе часов»

Основатель теории относительности А. Эйнштейн коснулся проблемы сравнения показаний неподвижных часов и часов, совершивших полный оборот по замкнутой траектории, уже в основополагающей работе [31]. На основании предположения, что формула

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{V_{O'}^2}{c^2}} \tag{6.52}$$

преобразования промежутков времени между покоящейся системой отсчета и системой отсчета, движущейся прямолинейно и равномерно, верна «...и тогда, когда часы движутся из A в B по любой ломаной линии, а также тогда, когда точки A и B совпадают» [31, с. 19], А. Эйнштейн сделал вывод о том, что часы, совершившие оборот по замкнутой траектории, всегда будут отставать по сравнению с часами, остававшимися неподвижными. Вследствие последнего обстоятельства эффект получил название «парадокс часов». Позже А. Эйнштейн касался рассмотренной проблемы только в специальной работе [53]. Заметим, что в основных монографиях по теории относительности «парадокс часов» освещен достаточно подробно (см., например, [8]).

Для вычисления обсуждаемого эффекта в [31, 53], а также в последующих работах (например, [8]) фактически сделано предположение о том, что приращение собственного времени в движущейся системе отсчета в момент ускорения точно такое же, как в соответствующей локально-лоренцевой системе отсчета. Это эквивалентно предположению, что ускорение движущейся системы отсчета не оказывает влияния на показания часов в этой системе.

Естественно, при учете только локально-лоренцева вклада в приращение собственного времени движущейся системы отсчета, вычисление показаний $\Delta T'$ часов, совершивших оборот по замкнутой траектории, всегда будет приводить к величине, меньшей показаний ΔT неподвижных часов:

$$\Delta T' = \int_0^{\Delta T} \sqrt{1 - \frac{V_{O'}^2(t)}{c^2}}\, dt, \quad \Delta T' < \Delta T. \tag{6.53}$$

Приведем простое рассуждение [54], подсказывающее, каково должно быть результирующее показание часов, совершивших полный оборот по замкнутой траектории и вернувшихся в исходную точку, при правильном учете влияния ускорения неинерциальной системы отсчета.

Положим, что в исходной точке A — точке размещения неподвижных часов — расположен маяк, который каждую секунду сигналит вспышками света. В момент N_1 секунд от точки A начинает свое движение тело со связанной с ним системой отсчета K'. Тело разгоняется до релятивистской скорости (то есть до скорости, сравнимой со скоростью света, но никогда ее не превосходящей), затем, ускоряясь в направлении к точке A, постепенно меняет направление движения на обратное и, в момент N_2 секунд, возвращается в исходную точку A (рис. 6.1). С точки зрения неподвижного наблюдателя на маяке время в пути составило $\Delta N = N_2 - N_1$ секунд, за это время маяк просигналил ΔN раз (вспышку света в момент N_1 в расчет не берем).

Второй наблюдатель в системе K' за время, проведенное в пути, зафиксирует также ΔN вспышек света от маяка. Действительно, все сферические волны света, излученные маяком за период с N_1 секунд по N_2 секунд, наверняка настигнут тело K', имеющее меньшую скорость $V < c$. Этот результат не будет зависеть от выбора замкнутой траектории и графика движения тела. Таким образом, по прибытии в точку A второй наблюдатель также подтвердит, что им за время движения было зафиксировано ΔN вспышек света от маяка. Это означает, что и по часам системы отсчета K' время в пути составило ΔN секунд.

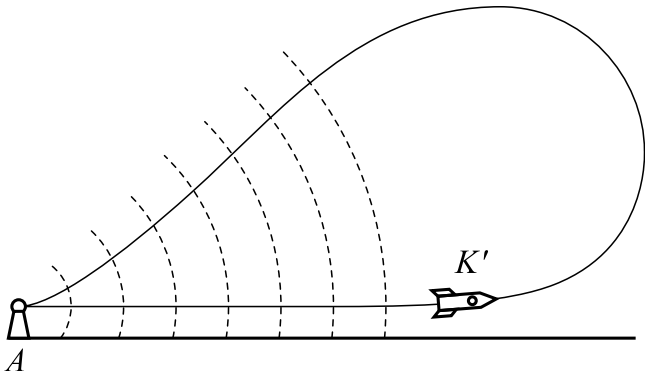

Рис. 6.1: Движение системы K' по замкнутой траектории относительно маяка A

Таким образом, правильный учет влияния ускорения системы отсчета на собственное время должен привести к следующему результату:

$$\Delta T' = \Delta T. \tag{6.54}$$

Реальная относительность для учета влияния ускорения движущейся системы отсчета на приращение собственного времени вводит в формулу (6.52) коэффициент, неявно описывающий это влияние:

$$dt'_{pr} = dt_{pr}\sqrt{1 - \frac{V^2_{O'}(t)}{c^2}}\,\frac{1}{\sqrt{g^{O'}_{00}}}. \tag{6.55}$$

В случае синхронизации хода часов K' и K в удаленном покоящемся состоянии и учета скорости $V_{O'}$ относительно удаленного покоящегося наблюдателя локально-лоренцевый коэффициент и новый коэффициент реальной относительности взаимно компенсируют свое влияние

$$\sqrt{1 - \frac{V^2_{O'}(t)}{c^2}}\,\frac{1}{\sqrt{g^{O'}_{00}}} = 1, \tag{6.56}$$

поэтому часы в движущейся системе отсчета всегда будут показывать точно такое же время, что и неподвижные часы в удаленной системе отсчета

$$dt'_{pr} = dt_{pr}, \tag{6.57}$$

откуда следует, что «парадокс часов» в этом случае отсутствует

$$\Delta T' = \Delta T. \tag{6.58}$$

Возникновение «парадокса часов» заключается в распространении формул специальной относительности на ускоренные движения. Строго говоря, формулы специальной относительности верны только для инерциального движения, для реального движения их можно применять в нулевом приближении по скорости изменения четырехмерной ориентации реальной системы отсчета, а при более высоких порядках приближения возникают поправки реальной относительности, интегрирование которых по замкнутой траектории приводит к нулевому расхождению в показаниях часов.

6.6. Об эффекте замедления времени в экспериментах на ускорителях

На первый взгляд может показаться, что эксперимент с рождением и распадом релятивистского μ^+-мезона (см. разд. 4.6), обнаруживающий эффект замедления времени, противоречит доказанному выше положению об одинаковом течении времени в реальных системах отсчета, имеющих общее начало с удаленным покоящимся наблюдателем.

На самом деле мы имеем дело с частицей, предварительно ускоренной *внешним полем*, которое находится за пространственной и временной границами исследуемого поля, и которое не позволяет определить историю изменения четырехмерной ориентации частицы от «истинно начального» значения до ее значения при влете частицы в измерительный комплекс (пузырьковую камеру).

В указанном эксперименте в измерительном комплексе поле, с которым взаимодействует частица, носит фоновый характер, практически не влияя на динамику влетающих частиц, и служит для фиксации следов (треков) частиц. На границе камеры в начальный момент влета частицы ($t' = t = 0$) $g_{00}^{O'} = 1$, $V_{O'} \neq 0$, и далее внутри камеры $g_{00}^{O'} = 1$, $V_{O'}(t) = V_\mu = const$, поэтому формула (6.55) реальной относительности, устанавливающая соотношение собственного времени в движущейся системе отсчета частицы K' и в неподвижной лабораторной системе K, принимает следующий вид

$$dt'_{pr} = dt_{pr}\sqrt{1 - \frac{V_\mu^2}{c^2}}. \tag{6.59}$$

Как уже упоминалось в разд. 4.6, расстояние ΔL_{μ^+} между точкой рождения и точкой распада μ^+-мезона в неподвижной лабораторной системе отсчета зависит от его времени жизни в собственной системе отсчета $\Delta t'_{\mu^+} \approx 2 \cdot 10^{-6}$ с и его скорости V_μ и вычисляется в соответствии с предыдущей формулой следующим образом

$$\Delta L_{\mu^+} = \frac{\Delta t'_{\mu^+} V_\mu}{\sqrt{1 - \frac{V_\mu^2}{c^2}}}. \tag{6.60}$$

Выведенная формула была подтверждена на ускорителях в экспериментах с рождением и распадом μ^+-мезона [50, §17]. Этот факт говорит о том, что преобразования координат событий между квазиинерциальными реальными системами отсчета, *не имеющих в своей истории единого состояния* (то есть не имеющих совпадающих четырехмерных ориентаций относительно выделенной инерциальной системы отсчета)

$$\Lambda^{i'}{}_i \neq \Lambda^{i''}{}_i \neq \cdots \neq \Lambda^{i^N}{}_i, \tag{6.61}$$

составляют специальный класс, подпадающий под действие формул специальной относительности [31].

Представим себе другой эксперимент, посвященный прямому измерению времени в системе K', летящей с постоянной скоростью $V_{O'} = V_\mu$ относительно лабораторной неподвижной системы K. Условия эксперимента следующие.

Во-первых, до момента $t' = t = 0$ в совпадающих между собой системах K' и K происходит обязательная синхронизация часов. Далее, в момент времени $t' = t = 0$ в системе K' «включаются ракетные двигатели» и эта система с часами на борту через время ΔT достигает скорости V_μ, сравнимой со скоростью света. В соответствии с принципом геометризации полей силовое поле ракетной тяги, которая зависит от времени и локального положения ракеты в пространстве, может и должно быть геометризовано по процедуре разд. 2.4. В соответствиями с положениями и выводами предыдущего пункта

$$dt'_{pr} = dt_{pr}, \tag{6.62}$$

откуда следует, что показания движущихся часов в ракете будут совпадать с показаниями неподвижных часов

$$\Delta T' = \Delta T. \tag{6.63}$$

Это означает, что прямое измерение времени синхронизированными часами не обнаружит никакого его замедления в движущейся системе K' по сравнению с неподвижными часами.

Данный «парадокс измерений» реальной относительности имеет глубокие основания. Он объясняется неэквивалентностью двух измерительных процедур. Первая процедура — это *косвенное несинхронизированное* измерение времени, принятое в экспериментальных разделах физики частиц и подпадающее под действие формул специальной относительности. Вторая — это *прямое синхронизированное* измерение времени в пока еще неосуществленных экспериментах по разгону реальных часов до релятивистских скоростей.

С позиции реальной относительности здесь уместен вывод о том, что часы в двух несовпадающих с друг другом идеальных инерциальных системах отсчета принципиально не могут быть синхронизированы.

6.7. Рассуждения о возможных классах реальных систем отсчета

Анализ, проведенный в предыдущих разделах настоящей главы, касался определенного класса реальных систем отсчета, имеющих единое начальное состояние с удаленной покоящейся системой отсчета $K(O)$. Еще раз заметим, что единое начальное состояние, которое заключается в совпадении соответствующих векторов тетрад систем отсчета, необходимо для синхронизации часов и сравнения масштабов длин этих систем отсчета.

Рассмотрим другой класс реальных систем отсчета, имеющих единое начальное состояние с удаленной квазиинерциальной системой $\overline{K}(\overline{O})$, двигающейся с постоянной скоростью $\mathbf{V}_{\overline{O}}$ относительно неподвижной системы $K(O)$. Как уже упоминалось в разд. 4.1, движение системы $\overline{K}$ за пределами четырехмерной границы исследуемого поля обусловлено внешними причинами, не связанными с исследуемым полем.

Координаты событий между системами $K(O)$ и $\overline{K}(\overline{O})$ при косвенных несинхронизированных процедурах измерений преобразуются следующим образом

$$dX^{\bar{i}} = L^{\bar{i}}{}_{i}\, dX^{i}, \tag{6.64}$$

где $L^{\bar{i}}{}_{i}$ — матрица чистого преобразования Лоренца для произвольного значения параметра $\mathbf{V}_{\overline{O}}$ (4.16).

При такой процедуре измерений часы в системе $\overline{K}(\overline{O})$ будут отставать по сравнению с неподвижными часами в системе $K(O)$

$$d\bar{t} = dt\sqrt{1 - V_{\overline{O}}^2/c^2}, \tag{6.65}$$

а с точки зрения движущегося наблюдателя неподвижные часы будут отставать по сравнению с движущимися часами

$$dt = d\bar{t}\sqrt{1 - V_{\underline{O}}^2/c^2}. \tag{6.66}$$

Темп отставания в обоих случаях будет одинаков, так как скорость $\mathbf{V}_{\overline{O}}$ движущейся системы $\overline{K}$ относительно неподвижной

системы K равна скорости $\mathbf{V}_{\underline{O}}$ неподвижной системы K относительно движущейся системы $\overline{\overline{K}}$

$$\mathbf{V}_{\overline{O}} = \mathbf{V}_{\underline{O}}. \tag{6.67}$$

Заметим, что этот внешне очевидный факт касается только удаленных квазиинерциальных систем отсчета.

Построение нового класса систем отсчета (класса $\overline{K}$) начнем с формулы преобразования координат события из системы $\overline{K}(\overline{O})$ в систему $K'(O')$, подобной формуле преобразования из системы $K(O)$ в ту же систему $K'(O')$ (4.6)

$$d\overline{X}^{i'}(O') = \overline{h}^{i'}{}_{a'}(O')\Lambda^{a'}_{\overline{a}}\,\delta^{\overline{a}}_{\overline{i}}\,dx^{\overline{i}}(\overline{O}). \tag{6.68}$$

В этой формуле $d\overline{X}^{i'}(O')$ — координаты события в системе $K'(O')$, учтенные в классе $\overline{K}$, в общем случае они не совпадают с координатами события в той же системе отсчета $K'(O')$, учтенными в классе K:

$$dX^{i'}(O') = h^{i'}{}_{a'}(O')\Lambda^{a'}_{a}\,\delta^{a}_{i}\,dx^{i}(O). \tag{6.69}$$

Далее, поле коэффициентов Ламэ в преобразовании (6.68) выражено по отношению к начальной системе отсчета $\overline{K}$, что отмечено чертой над литерой h:

$$\overline{h}^{i'}{}_{a'}(O') = \delta^{i'}_{\overline{i}}\,\overline{h}^{\overline{i}}{}_{\overline{a}}(O')\,\delta^{\overline{a}}{}_{a'}, \tag{6.70}$$

где единичные матрицы $\delta^{i'}_{\overline{i}}$ и $\delta^{\overline{a}}{}_{a'}$ служат для замены верхних и нижних индексов и по договору не применяются для суммирования вне формулы (6.69). Поле коэффициентов Ламэ, учтенное в классе $\overline{K}$, отличается от поля коэффициентов Ламэ в классе K псевдоевклидовым поворотом L:

$$\overline{h}^{\overline{i}}{}_{\overline{a}}(O') = \delta^{\overline{i}}{}_{i}\,h^{i}{}_{a}(O')\,L^{a}{}_{\overline{a}}, \tag{6.71}$$

точно так же, как репер движущейся удаленной системы $\overline{K}$ отличается от репера удаленной покоящейся системы K

$$\Lambda^{\overline{a}}{}_{a} = L^{\overline{a}}{}_{a}. \tag{6.72}$$

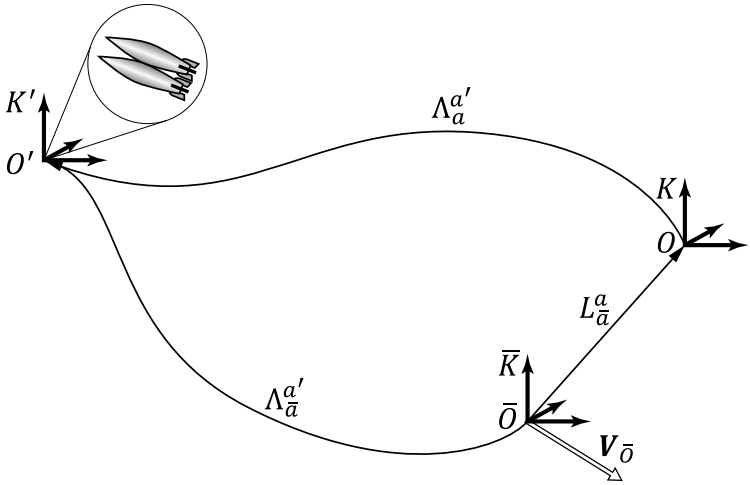

Рис. 6.2: Четырехмерный поворот $\overline{K}(\overline{O}) \to K'(O')$ равен последовательности буста $\overline{K}(\overline{O}) \to K(O)$ и четырехмерного поворота $K(O) \to K'(O')$

В формуле (6.68) $\Lambda^{a'}_{\bar{a}}$ — матрица четырехмерной ориентации системы $K'(O')$ относительно $\overline{K}(\overline{O})$. Легко видеть, что

$$\Lambda^{a'}_{\bar{a}} = \Lambda^{a'}_{\ a}\, L^{a}_{\ \bar{a}}, \tag{6.73}$$

так как в пространстве абсолютного параллелизма углы взаимной ориентации разнесенных друг от друга тетрад не зависят от путей их параллельного переноса в одну точку для их сравнения (рис. 6.2).

Единичная матрица $\delta^{\bar{a}}_{\bar{i}}$ в формуле (6.68) стоит на основании того, что начальным состоянием реальной системы отсчета $K'(O')$ в классе $\overline{K}$ является движущаяся удаленная система $\overline{K}(\overline{O})$.

Формула (6.68), определяющая класс $\overline{K}$ систем отсчета, по форме и содержанию совершенно аналогична формуле преобразования координат событий из K в K' (6.69), определяющая класс K систем отсчета. Следовательно, свойства систем отсчета, входящих в класс $\overline{K}$, будут аналогичны соответствующим свойствам

систем отсчета класса K (см. Приложение 3). Речь идет, прежде всего, о едином течении времени во всех реальных системах отсчета класса $\overline{K}$. Так как мы имеем соотношение (6.65) между собственным временем $\overline{K}$ и собственным временем K (с позиции наблюдателя в K), то такое же соотношение будет между собственным временем любой системы класса $\overline{K}$ и собственным временем любой системы класса K (при условии нахождения наблюдателя в последней).

Заметим, что две системы отсчета K' и $\overline{K'}$, принадлежащие различным классам $K(O)$ и $\overline{K}(\overline{O})$, могут находиться в одной мировой точке, фактически совпадая друг с другом. Практическое осуществление этого состоит в наличии двух реальных систем отсчета, совпадающих друг с другом в мировой точке O', с начальными состояниями $K(O)$ и $\overline{K}(\overline{O})$ соответственно. Условия исследования должны быть таковы, чтобы мы могли пренебречь размерами двух систем отсчета, состыкованными с друг другом. Тогда полученный комплекс будет восприниматься как единая реальная система отсчета $K'(O')$ с двумя наборами измерительных приборов, не синхронизированными между собой.

Подставляя (6.71) в (6.70), а затем полученную формулу в (6.68), получим, учтя соотношения (6.73) и (6.64), формулу для координат события в системе $K'(O')$ в классе $\overline{K}$

$$d\overline{X}^{i'}(O') = \delta^{i'}_{\ i}\, h^{i}_{\ a}(O')\, L^{a}_{\overline{a}}\, \delta^{\overline{a}}_{\ a'} dX^{a'}, \tag{6.74}$$

где

$$dX^{a'} = \Lambda^{a'}_{\ a}\, \delta^{a}_{\ i}\, dX^{i}(O) \tag{6.75}$$

— координаты события в локально-лоренцевой системе $k'(O')$ в классе K. При этом координаты события в той же системе отсчета $K'(O')$, но в классе K, выражаются следующей формулой

$$dX^{i'}(O') = \delta^{i'}_{\ i}\, h^{i}_{\ a}(O')\, \delta^{a}_{\ a'}\, dX^{a'}. \tag{6.76}$$

Из формул (6.74) и (6.76) следует вывод о том, что параллельные проекции на слой расслоения координат события в одной и той же реальной системе отсчета $K'(O')$, но учтенных в разных

классах систем отсчета — $\overline{K}$ и K, отличаются друг от друга псевдоевклидовым поворотом (6.72)

$$h^{a}{}_{i}(O')\,\delta^{i}{}_{i'}d\overline{X}^{i'}(O') = L^{a}{}_{\overline{a}}\,\delta^{\overline{a}}{}_{a'}dX^{a'}, \tag{6.77}$$

$$h^{a}{}_{i}(O')\,\delta^{i}{}_{i'}dX^{i'}(O') = \delta^{a}{}_{a'}\,dX^{a'}. \tag{6.78}$$

Именно этот вывод составляет «парадокс измерений» реальной относительности. Точно так будут различаться координаты событий, связанные с рождением и распадом μ^{+}-мезона, в формально совпадающих реальных системах отсчета K' и $\overline{K'}$, учтенных в разных классах систем отсчета. Это, во-первых, координаты событий, относящиеся к классу собственной системы отсчета μ^{+}-мезона, полученные при помощи косвенного несинхронизированного измерения, и, это, во-вторых, координаты тех же событий, но относящиеся к классу неподвижной лабораторной системы отсчета, при их прямом синхронизированном измерении в планируемом эксперименте по разгону часов до скорости μ^{+}-мезона.

Заметим, что класс $\overline{K}$ систем отсчета (основанный на движущейся удаленной системе отсчета) часто реализуется в физике микромира, где в экспериментах участвуют предварительно ускоренные внешним полем частицы, а исследуемым полем является ядерное и/или электромагнитное поле частиц мишени.

Наоборот, при исследованиях в макромире (например, в гравитационных экспериментах) вероятность реализации класса $\overline{K}$ систем отсчета минимальна. Действительно, исходная система отсчета $\overline{K}(\overline{O})$ должна быть основана на макроскопическом теле, ускоренном до скорости $\mathbf{V}_{\overline{O}}$ внешним полем на удалении от гравитационного источника. При исследовании эффектов гравитационного поля Земли, следовательно, искомое макроскопическое тело с комплексом приборов должно быть ускорено в другой планетной или звездной системе (то есть иметь внеземное происхождение). В настоящее время это трудно представимо.

6.8. О скорости света в неинерциальной реальной системе отсчета

Ответ на вопрос, какова должна быть скорость света в любой локально-лоренцевой системе отсчета, предопределен структурой пространства событий реальной относительности. Локально-лоренцева система отсчета связана с сопровождающим ортонормированным репером, лежащим в слое касательного расслоения. В других терминах — она принадлежит плоскому (псевдоевклидову) пространству, касательному к базе расслоения в точке нахождения частицы. Отсюда следует, что скорость света в любой локально-лоренцевой системе одинакова и равна постоянной c.

Тот же самый результат формально следует из формулы сложения скоростей (6.4) в локально-лоренцевой системе $k'(O')$. Полагая в этой формуле $v_x = c,\ v_y = v_z = 0$, получим в системе $k'(O')$

$$v'_{xL} = c,\ v'_{yL} = v'_{zL} = 0. \tag{6.79}$$

Пользуясь формулой (6.6), которая соотносит координаты бесконечно близких событий, связанных в нашем случае с прохождением луча света, в локально-лоренцевой системе $k'(O')$ и в реальной системе $K'(O')$, а также пользуясь формулой (6.7), получим, что скорость света c' в реальной системе отсчета $K'(O')$, двигающейся с продольным ускорением относительно удаленной системы $K(O)$, будет отлична от c:

$$c' = \sqrt{\frac{|g_{00}^{O'}|}{|g_{11}^{O'}|}}\, c. \tag{6.80}$$

Этот результат понятен из положений п. 1.4: ортонормированные мировые координаты, представляющие неинерциальную систему отсчета K' вблизи начала O', являются координатами анизотропно растянутого псевдоевклидова пространства. Поэтому для координат бесконечно близких событий, связанных с прохождением света, в локально-лоренцевой системе $k'(O')$ и в реальной

системе $K'(O')$ имеем

$$dx' = \frac{dx'_L}{\sqrt{|g_{11}^{O'}|}}, \quad dt' = \frac{dt'_L}{\sqrt{|g_{00}^{O'}|}}, \tag{6.81}$$

что, с учетом $dx'_L/dt'_L = c$, $dx'/dt' = c'$, дает тот же самый результат (6.80).

В слабополевом приближении, при нерелятивистских скоростях начала O' реальной системы K', а также в соответствии с формулой (2.30) имеем

$$|g_{00}^{O'}| = \frac{1}{|g_{11}^{O'}|} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}. \tag{6.82}$$

Подставив полученный результат в (6.80) и, используя одно из следствий факта принадлежности реальной системы отсчета $K'(O')$ к классу K

$$\sqrt{1 - \frac{V_{O'}^2}{c^2}} = \sqrt{g_{00}^{O'}}, \tag{6.83}$$

получим, что скорость света в ускоренной системе отсчета $K'(O')$ отличается от постоянной c во втором порядке малости по $V_{O'}/c$:

$$c' = \left(1 - \frac{V_{O'}^2}{c^2}\right) c. \tag{6.84}$$

Скорость света, измеренная в реальной системе отсчета K', свободно падающей в гравитационном потенциале $\varphi_g = -kM/r$, будет уменьшаться по мере приближения системы к центру притяжения

$$c' = \left(1 - \frac{2kM}{r}\right) c. \tag{6.85}$$

6.9. Синхронизация часов: реальная относительность vs специальная относительность

Приведем гениально простое и точное определение А. Эйнштейна: «Измерение времени производится с помощью часов. Часы — это

такой прибор, который автоматически проходит последовательно через (практически) одинаковые ряды событий (период). Число пройденных периодов (время по часам) служит мерой времени» [55, с. 243].

Под синхронизацией часов мы будем понимать процедуру их сверки (малая синхронизация), заключающейся в выставлении одинаковых показаний в условленный момент времени, и регулировку их хода таким образом, чтобы темп хода часов был равен темпу хода эталонных часов.

В основополагающей статье 1905 г. «К электродинамике движущихся тел» А. Эйнштейн вводит процедуру малой синхронизации (сверки) часов, покоящихся в точках A и B инерциальной системы: «Пусть в момент t_A по «A-времени», луч света выходит из A в B, отражается в момент t_B по «B-времени» от B к A и возвращается назад в A в момент t'_A по «A-времени». Часы в A и B будут идти, согласно определению, синхронно, если $t_B - t_A = t'_A - t_B$» [31, с. 9]. Таким образом, А. Эйнштейн вводит группу разноместных часов, покоящихся в инерциальной системе S, и в момент t_A по «A-времени» имеющих одинаковые показания.

Здесь А. Эйнштейн неявно подразумевает, что темп хода часов, покоящихся в точке A, равен темпу хода часов, покоящихся в точке B, и они соответствует темпу эталонных часов. Именно в этом в специальной относительности заключается конвенциональный (то есть согласительный, условный) характер понятия одновременности событий в разных точках отдельно взятой инерциальной системы отсчета [56].

Дело в том, что регулировка темпа хода часов возможна лишь в условиях, тождественным условиям нахождения эталонных часов. Это означает, что при проведении этой процедуры настраиваемые и эталонные часы должны находиться в одном месте в одинаковых условиях (т.е. при одинаковых температурах, влажности и т.д.)

Если эталонные часы расположены в точке C, покоящейся в инерциальной системе, то по формулам специальной относитель-

ности темп часов, перенесенных из точки регулировки в точку A и темп часов, перенесенных из той же точки в точку B, зависят от траекторий переноса $C \to A$, $C \to B$, а также от графика движения часов по этим траекториям. Дело в том, что чистые преобразования Лоренца (так называемые «бусты») не составляют группы [48]: два последовательно выполненных чистых преобразования Лоренца $L^{a}_{\ a'}(\mathbf{V}_{01})$ и $L^{a''}_{\ a}(\mathbf{V}_{20})$ в общем случае не эквивалентны чистому преобразованию Лоренца с параметром $\mathbf{V}_{21}$, являющимся релятивистской суммой скоростей $\mathbf{V}_{01}$ и $\mathbf{V}_{20}$

$$L^{a''}_{\ a}(\mathbf{V}_{20})\, L^{a}_{\ a'}(\mathbf{V}_{01}) \neq L^{a''}_{\ a'}(\mathbf{V}_{21}). \tag{6.86}$$

Также это обстоятельство прекрасно иллюстрируется «парадоксом часов» специальной относительности, заключающимся в эффекте задержки показаний двигающихся часов и (в общем случае) в эффекте изменения их темпа при их возвращении. Эти эффекты специальной относительности сильнейшим образом зависят от графика движения часов [54, 57].

В реальной относительности понятие одновременности событий в любой точке реальной системы отсчета (внутри области наблюдения) носит не конвенциональный, а безусловный, абсолютный характер, ибо темп хода часов, доставленных в любую точку из точки регулировки и сверки с эталонными часами, не зависит от траектории и графика перемещения часов (мы ограничиваемся случаем, когда эталонные часы находятся в удаленном покоящемся состоянии).

Обратимся к статье А. Эйнштейна 1910 г. «Принцип относительности и его следствия в современной физике»: пусть даны «...две эквивалентные системы отсчета, т.е. такие, в которых длины измеряются одной единицей и в каждой из которых имеется по группе часов, идущих синхронно, если обе системы неподвижны одна относительно другой» [58, с. 152]. Мы видим, что А. Эйнштейн подразумевает необходимое условие синхронизации (сверки и регулировки) группы часов одной системы с группой часов другой системы: обе группы должны быть в тождественных кинематических состояниях, то есть находиться без

движения относительно друг друга.

Далее «...началу координат одной из этих систем (K') сообщается (постоянная) скорость V в направлении возрастающих значений x другой, покоящейся системы (K); эта скорость передается также координатным осям, а также соответствующим масштабам и часам» [31, с. 13] (обозначение движущейся системы изменено). Здесь мы видим, что специальную относительность не интересует процесс ускорения системы K' до указанной скорости V, ибо по формулам этой теории пространственно-временные координаты событий в K' зависят только от V. Координаты событий в K' за каждый момент ускорения берутся такими, какими они есть в инерциальной системе, совпадающей по положению и по скорости в этот момент с K': «В дальнейшем мы всегда будем неявно предполагать, что факт приведения в движение и остановки линейки, или часов, не изменяет ни длины линейки, ни хода часов» [58, сноска 10 с. 152]. При таком предположении временной интервал между двумя близкими событиями, измеренный по часам $K'(O')$, будет соотноситься с соответствующим временным интервалом в покоящейся системе K стандартным образом:

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{V^2_{O'}(t)}{c^2}}. \tag{6.87}$$

В реальной относительности реализация покоящейся системы отсчета K возможна только на значительном удалении от тяготеющих тел и полей. Таким образом, рассматриваемая реальная система $K'(O')$ является системой класса K, так как имеет своим начальным положением удаленную покоящуюся систему K. В соответствии с выводами данной главы, влияние собственного ускорения системы $K'(O')$ на координаты событий в ней заключается в введении соответствующего коэффициента в формулу (6.87)

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{V^2_{O'}(t)}{c^2}}\,\frac{1}{\sqrt{g^{O'}_{00}}}, \tag{6.88}$$

который нейтрализует влияние локально-лоренцева члена

$$dt' = dt, \tag{6.89}$$

так как

$$\sqrt{1 - \frac{V_{O'}^2(t)}{c^2}}\,\frac{1}{\sqrt{g_{00}^{O'}}} = 1. \tag{6.90}$$

В реальной относительности при прямом синхронизированном измерении временных интервалов между событиями (чему соответствует вышеописанная процедура) темп хода удаленных покоящихся часов и темп хода часов, свободно падающих с удаленного расстояния, совпадает.

6.10. Геометрия вращающегося диска: реальная относительность vs специальная и общая относительность

Основатель теории относительности А. Эйнштейн коснулся проблемы «поведения часов и масштабов на вращающихся телах отсчета» в книге [59], первое издание которой вышло в 1917 году. Относительно часов, расположенных в центре и на периферии вращающегося диска, он отмечал, что «... согласно одному из выводов § 12, часы на периферии, с точки зрения тела отсчета K, будут идти медленнее, чем часы в центре диска» (§ 12 книги посвящен «свойствам движущихся масштабов и часов»). В работе А. Эйнштейна [59], а также в последующих работах других авторов [8], вычисления промежутков времени на периферии вращающегося диска (в точке O') были сделаны из предположения, что течение времени подвергается лишь лоренцеву сокращению:

$$dt'(O') = dt\sqrt{1 - \frac{r^2\Omega^2}{c^2}}, \tag{6.91}$$

где r — радиус, а Ω — угловая скорость вращения диска (круговой платформы).

Изучение пространственной геометрии вращающегося диска в рамках общей теории относительности приводит к противоречиям.

С одной стороны, пассивные координатные преобразования

$$r = r', \ \varphi = \varphi' + \Omega t, \ z = z' \tag{6.92}$$

соответствующие абстрактным вращениям плоского пространства, не приводят к возникновению кривизны — все компоненты тензора Римана в системе K' в силу формулы преобразования

$$R^{i'}{}_{j'k'm'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}R^i{}_{jkm} \tag{6.93}$$

остаются нулевыми ($R^{i'}{}_{j'k'm'} = R^i{}_{jkm} = 0$). Следовательно, пространство событий относительно системы K' остается псевдоевклидовым, никакого изменения в геометрии вращающегося диска не происходит.

С другой стороны, данные пассивные координатные преобразования приводят к следующему выражению для элемента пространственного расстояния в системе K' [10]

$$dl'^2 = dr'^2 + dz'^2 + \frac{r'^2 d\varphi'^2}{1 - \Omega^2 r'^2/c^2}. \tag{6.94}$$

Пространственный элемент (6.94) определяет неплоскую геометрию во вращающейся системе K', так как отношение длины окружности на вращающемся диске к ее радиусу превышает 2π:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1 - \Omega^2 r'^2/c^2}} > 2\pi. \tag{6.95}$$

Эти противоречия говорят о том, что пассивные координатные преобразования общей теории относительности не соответствуют реальным активным преобразованиям координат и времени при переходе наблюдателя из покоящейся системы K во вращающуюся систему K'.

Проведем рассуждения с точки зрения реальной относительности. Компонента $g_{00}^{O'}$ метрики геометризованного поля центростремительных сил может быть вычислена через центростремительный потенциал $\varphi = -M^2/2m^2r^2$, где M — момент импульса частицы:

$$g_{00}^{O'} = 1 + 2\varphi/c^2 = 1 - \frac{M^2}{m^2r^2c^2}. \tag{6.96}$$

Подставив значение (6.96) компоненты $g_{00}^{O'}$ метрического тензора геометризованного поля центростремительных сил, удерживающих тело системы K' на круговой орбите, в формулу (6.88) для промежутка собственного времени системы K', мы получим

$$dt'(O') = dt\sqrt{\frac{1 - V_{O'}^2/c^2}{1 - M^2/m^2r^2c^2}}\,. \tag{6.97}$$

Подставив далее в эту формулу значения $M = mr^2\Omega$ и $V_{O'}^2 = r^2\Omega^2$, получим

$$dt'(O') = dt. \tag{6.98}$$

Этот результат означает, что часы на периферии вращающегося диска идут так же, как и в его центре. Из него также следует, что элемент пространственной геометрии в системе K' не меняется по сравнению с системой K

$$dl' = dl. \tag{6.99}$$

Таким образом, в реальной относительности релятивистские эффекты специальной относительности в системе K' компенсируются влиянием собственного центростремительного ускорения этой реальной системы отсчета.

6.11. Эффект Саньяка: реальная относительность vs специальная относительность

Эффект Саньяка заключается в следующем [61]. Во вращающемся кольцевом интерферометре с достаточно большим коли-

чеством зеркал лучи света, испущенные источником на вращающейся платформе, распространяются по кольцевой траектории. Луч света, распространяющийся в направлении вращения платформы интерферометра (+ луч), приходит к источнику позже, чем луч света, распространяющийся против вращения платформы (− луч). Разница во времени этих двух событий по часам вращающейся системы K' с центром в точке O' (точке нахождения источника) составляет

$$\Delta t' = t'^{+} - t'^{-} = 4\Omega\frac{\pi r^2}{c^2}, \tag{6.100}$$

где r — радиус круговой платформы, а Ω — угловая скорость вращения круговой платформы; t'^{+}, t'^{-} — время распространения луча света по направлению и против направления вращения платформы до встречи с источником в системе K'.

Прямое использование специального принципа относительности [31, 32] при расчете эффекта Саньяка приведет к нулевому результату.

«Лицензию» на применение специального принципа относительности для расчета кинематических эффектов во «вращающейся системе координат» дал сам А. Эйнштейн в работе 1914 г. «Формальные основы общей теории относительности» [60, § 1]: «Кинематическая эквивалентность двух систем координат в действительности не ограничивается случаем, когда обе рассматриваемые системы K и K' движутся относительно друг друга равномерно и прямолинейно. Эта эквивалентность с кинематической точки зрения также хорошо, например, выполняется, если одна система равномерно вращается относительно другой».

Отсюда немедленно следует, что скорость света во «вращающейся системе координат» K' равна c и она не зависит от скорости источника света. Таким образом, в системе K' скорости световых лучей по и против направления вращения равны c, пути лучей в системе K' также равны, и, следовательно, времена, затраченное лучами света на обход интерферометра в разных направлениях по часам системы K' одинаковы!

Данный отрицательный результат при объяснении эффекта Саньяка лишний раз подчеркивает, что неинерциальные системы отсчета в общем случае не входят в компетенцию специальной теории относительности.

В рамках реальной относительности эффект Саньяка легко объясняется.

В собственной системе отсчета источника света и интерферометра — вращающейся реальной системе отсчета K' — эффекты специальной относительности (лоренцово сокращение промежутков времени и изменение длины окружности) компенсируются влиянием центростремительного ускорения. Поэтому длина пути $+$ луча и $-$ луча в системе K' не отличается от соответствующих длин в неподвижной системе

$$l'^{\pm} = l^{\pm}. \tag{6.101}$$

Вычислим промежуток времени по часам K' между моментом прихода луча к источнику и моментом испускания луча. Скорость света равна c, если в каждой точке круговой траектории пользоваться собственным временем системы K'. Для $+$ луча имеем

$$\begin{aligned} l'^{+} &= 2\pi r + \Omega t'^{+} r, \\ l'^{+} &= c t'^{+}, \end{aligned} \tag{6.102}$$

откуда получим

$$t'^{+} = \frac{2\pi r}{c}\left(1 + \frac{r\Omega}{c}\right). \tag{6.103}$$

Исходя из подобных рассуждений, для $-$ луча получим

$$t'^{-} = \frac{2\pi r}{c}\left(1 - \frac{r\Omega}{c}\right), \tag{6.104}$$

откуда следует, что разница во времени между приходом $+$ луча и приходом $-$ луча к источнику соответствует результату Саньяка (6.100). Таким образом, приход $+$ луча и $-$ луча к источнику в системе K' — события не одновременные. Этот теоретический результат следует из-за того, что в реальной относительности

эффекты специальной относительности в реальной вращающейся системе отсчета K' компенсируются влиянием собственного центростремительного ускорения системы.

6.12. Принцип нелокальной связи частиц, собственная система отсчета которых принадлежит к одному классу

Предположим, что существует два класса систем отсчета — класс K и класс K'. Системы отсчета класса K имеют общее начало с покоящейся относительно источника поля удаленной квазиинерциальной системой отсчета K. Системы класса K' имеют общее начало с удаленной квазиинерциальной системой K', которая имеет ненулевую скорость $V_{O'}$ относительно источника поля (в макроскопическом случае тело системы K' может быть, например, кометой, имеющей внеземное происхождение). Согласно разд. 6.7, все часы, принадлежащие реальным системам отсчета одного класса, будут иметь единый темп хода, даже находясь в разных мировых точках, и, наоборот, часы реальных систем отсчета разных классов будут иметь разный темп хода даже в случае их встречи в одной мировой точке.

В реальной относительности темп хода реальных часов определяется не их местом нахождения и скоростью передвижения, а принадлежностью к определенному классу собственных систем отсчета.

Таким образом, реальные системы отсчета, покидая свою «материнскую» систему, наследуют определенные свойства, которые будут присущи им в течении последующей истории. Одно такое свойство проявляется во всех реальных системах отсчета, существующих как в макроскопическом, так и в микроскопическом масштабах. Это свойство называется «темп хода часов», и оно определяется классом системы отсчета.

В микроскопических масштабах отдельно взятые молекула или атом играет роль «микровселенной». Микрочастицы, покида-

ющие «микровселенную», например, пара электронов, вылетающие из атома, или пара атомов, разлетающихся в разные стороны после распада молекулы, наследуют свойства единого собственного времени, а также другие свойства, присущие только микромиру. К таким свойствам следует отнести постоянную сумму проекций спинов микрочастиц, которые могут быть измерены одновременно в разных точках, а также другие свойства [62]. Нелокальная, то есть передающаяся мгновенно и действующая непосредственно, связь микрочастиц сводится, таким образом, к наличию определенных свойств, которыми «микровселенная» снабжает покидающие ее микрочастицы, и которые проявляются в 100 % случаев при одновременном измерении параметров частиц, разнесенных на большие расстояния.

В этом и заключается *принцип нелокальной связи частиц, собственная система отсчета которых принадлежит к одному классу*.

6.13. Об экспериментах с движущимися часами

Особо отметим, что выводы предыдущих разделов об одинаковом течении времени (о едином темпе часов) в системах отсчета одного класса касаются систем отсчета, имеющих единое начальное состояние с системой отсчета, *покоящейся на четырехмерной границе исследуемого поля*, или с системой отсчета, *приобретшей какую-либо скорость за этой границей*.

Опыты с движущимися часами, которых мы коснемся в настоящем разделе [63], однозначно говорят о том, что лабораторную систему отсчета $\widetilde{K}$ в точке $\widetilde{O}$ земной поверхности (рис. 6.3), которая существует сама по себе бесконечно долго, необходимо отнести к классу геоцентрической невращающейся (т.е. без суточного вращения) системы отсчета (другое название — геоцентрическая инерциальная система отсчета). Понятие «существующая сама по себе бесконечно долго» в применении к точке

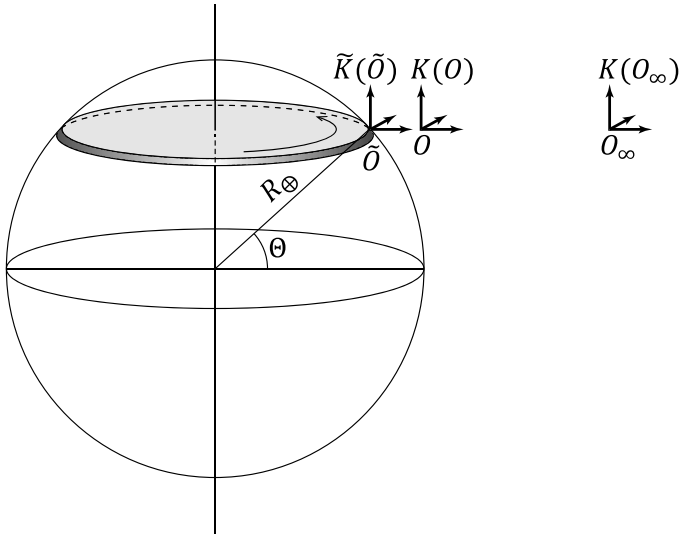

Рис. 6.3: Лабораторная система $\widetilde{K}(\widetilde{O})$ на земной поверхности

на вращающейся поверхности Земли означает ее текущее состояние, длящееся бесконечно долго, а поэтому эквивалентное ее начальному состоянию.

Рассмотрим точку O, покоящуюся в геоцентрической невращающейся системе отсчета и совпадающей с началом лабораторной системы отсчета $\widetilde{O}$ один раз в сутки. Темп хода часов в реальной системе отсчета $K(O)$ совпадает с темпом хода часов, покоящихся в геоцентрической невращающейся системе отсчета на удаленном расстоянии, ибо для суммарного потенциала сил, удерживающих тела систем отсчета $K(O)$ и $K(O_\infty)$ в состоянии покоя относительно источника поля, верно следующее:

$$\varphi_\Sigma(O) = \varphi_\Sigma(O_\infty) = 0. \tag{6.105}$$

Так как $V(O) = V(O_\infty)$=0, то по формулам предыдущих разделов

$$dt(O) = dt(O_\infty). \tag{6.106}$$

Из рассуждения о бесконечно долгом текущем состоянии тела $\widetilde{O}$ следует, что суммарный потенциал сил, действующих на тело $\widetilde{O}$, равен суммарному потенциалу сил, действующих на тело O

$$\varphi_\Sigma(\widetilde{O}) = \varphi_\Sigma(O) = 0, \tag{6.107}$$

поэтому темп хода часов в лабораторной системе отсчета $\widetilde{K}(\widetilde{O})$ отличается от темпа часов в покоящейся системе $K(O)$ только на лоренцевский коэффициент

$$d\widetilde{t} = dt\frac{\sqrt{1-\widetilde{V}^2/c^2}}{\sqrt{g_{00}^{\widetilde{O}}}} = dt\sqrt{1-\widetilde{V}^2/c^2}, \tag{6.108}$$

так как

$$g_{00}^{\widetilde{O}} = 1 + \frac{2\varphi_\Sigma(\widetilde{O})}{c^2} = 1. \tag{6.109}$$

Здесь $\widetilde{V}$ — скорость точки $\widetilde{O}$ в геоцентрической невращающейся системе отсчета

$$\widetilde{V} = V_\oplus \cos\Theta, \tag{6.110}$$

где Θ — географическая широта начала лабораторной системы отсчета, $V_\oplus \approx 465$ м/с — линейная скорость земной поверхности на экваторе [11, гл. 44].

В этом пункте ситуация с системой отсчета $\widetilde{K}(\widetilde{O})$ принципиально отличается от ситуации с реальной системой отсчета $K'(O')$, находящейся на периферии вращающегося диска, ибо начальным состоянием системы $K'(O')$ следует признать состояние без вращения. Это означает, что для приведения тела O' во вращающееся состояние должны быть приложены силы, имеющие текущий центростремительный потенциал $\varphi_\Sigma = -M^2/2m^2r^2$, где M — момент импульса тела. В предыдущих разделах было показано, что в этом случае множитель с центростремительным потенциалом уравновешивает лоренцевский коэффициент в формуле для собственного времени системы $K'(O')$:

$$dt'(O') = dt\sqrt{\frac{1-V_{O'}^2/c^2}{1-M^2/m^2r^2c^2}} = dt, \tag{6.111}$$

где dt — темп хода часов, находящихся на периферии диска в его начальном состоянии (без вращения).

Обратимся теперь к данным из знаменитого эксперимента Хафеле – Китинга 1971 г. [63]. В октябре 1971 г. комплект из четырех атомных часов на цезиевом пучке синхронизировали с часами Военно-морской обсерватории США (USNO), а затем произвели кругосветную транспортировку этого комплекта с помощью обычных пассажирских самолетов с пересадками. Сначала был произведет облет Земли в восточном направлении, несколько дней спустя — в западном.

После первого и второго кругосветного путешествия каждый экземпляр часов сверили с часами в лабораторной системе отсчета (USNO) и получили средние данные об отставании (опережении) показаний транспортируемых часов по сравнению с эталонными часами в лабораторной системе отсчета.

Кругосветный облет часов *в восточном направлении* имел следующие характеристики: продолжительность полета $\widetilde{T}^{+} = 65,42$ часа, средняя скорость относительно поверхности Земли $\Delta V^{+} = 243$ м/с, средняя широта по маршруту $\Theta^{+} = 34^{\circ}$ с. ш.

Облет часов вокруг Земли *в западном направлении* имел следующие характеристики: продолжительность полета $\widetilde{T}^{-} = 80,33$ часа, средняя скорость относительно поверхности Земли $\Delta V^{-} = 218$ м/с, средняя широта по маршруту $\Theta^{-} = 31^{\circ}$ с. ш.

Выше была указана средняя скорость передвижения часов относительно земной поверхности, она подразумевается как положительная величина. При движении самолета в восточном направлении, то есть в направлении линейной скорости вращения земной поверхности, мы будем брать ее со знаком $+$, при движении самолета в западном направлении — со знаком $-$. Запишем закон сохранения потенциальной и кинетической энергии для часов:

$$\frac{(\Delta V)^2}{2} + \Delta\varphi_{\Sigma} = \frac{(\Delta V)^2}{2}(\widetilde{O}) + \Delta\varphi_{\Sigma}(\widetilde{O}) = 0, \qquad (6.112)$$

где $\Delta\varphi_{\Sigma}$ — суммарный потенциал сил, приводящих в движение часы относительно земной поверхности. Отличие хода дви-

жущихся часов от хода часов, покоящихся в геоцентрической невращающейся системе отсчета определяется следующей формулой реальной относительности

$$d\widetilde{t}^{\pm} = dt\frac{\sqrt{1-(\widetilde{V}\pm\Delta V)^2/c^2}}{\sqrt{1+2\Delta\varphi_{\Sigma}/c^2}} = dt\sqrt{1-\frac{\widetilde{V}^2}{c^2}\mp\frac{2\widetilde{V}\Delta V}{c^2}}, \quad (6.113)$$

где учтен закон сохранения энергии (6.112). Разница показаний вернувшихся часов и лабораторных часов определяется следующими нерелятивистскими формулами со средними значениями переменных:

$$\Delta\widetilde{T}^{+} = \widetilde{T}^{+} - \widetilde{T} = \widetilde{T}^{+}\left(-\frac{\widetilde{V}^{+}\Delta V^{+}}{c^2}\right) \quad (6.114)$$

— для движения часов в восточном направлении,

$$\Delta\widetilde{T}^{-} = \widetilde{T}^{-} - \widetilde{T} = \widetilde{T}^{-}\left(+\frac{\widetilde{V}^{-}\Delta V^{-}}{c^2}\right) \quad (6.115)$$

— для движения часов в западном направлении. Здесь $\widetilde{V}^{\pm} = V_{\oplus}\cos\Theta^{\pm}$. Подставляя в полученные формулы характеристики эксперимента, получим расчетные данные, которые дает реальная относительность:

$$\begin{aligned}\Delta\widetilde{T}^{+}_{RR} &= -247\pm 20\ нс,\\ \Delta\widetilde{T}^{-}_{RR} &= +281\pm 20\ нс,\end{aligned} \quad (6.116)$$

из которых явствует, что часы, двигающиеся в восточном направлении должны идти медленнее, то есть отставать по сравнению с лабораторными часами, и наоборот, часы, двигающиеся в западном направлении, должны идти быстрее лабораторных.

Этот эффект противоречит прямым формулам специальной относительности, где учитывается только относительная скорость движущихся и лабораторных часов, — эти формулы приводят к эффекту замедления часов, двигающихся как в восточном,

так и в западном направлении. Здесь стоит еще раз напомнить о «лицензии», которую дал А. Эйнштейн, на применение прямых формул специальной относительности (где фигурирует относительная скорость тел) во «вращающейся системе координат» [60, § 1]: «...представляется необходимым обобщить существующую теорию относительности таким образом, чтобы устранить из нее кажущееся несправедливым предпочтение равномерных и прямолинейных движений перед относительными движениями других типов».

Представим данные эксперимента Хафеле – Китинга (эффект отставания (ускорения) движущихся часов, усредненный по комплекту):

$$\begin{aligned} \Delta\widetilde{T}^{+}_{H-K} &= -59 \pm 10 \text{ нс}, \\ \Delta\widetilde{T}^{-}_{H-K} &= +273 \pm 7 \text{ нс}. \end{aligned} \tag{6.117}$$

Как мы видим, реальная относительность дает теоретические данные, не только качественно соответствующие экспериментальным данным Хафеле – Китинга, но и количественно совпадающие с ними (для часов, двигающихся в западном направлении). Заметим, что расчетные данные (6.116) были получены *по прямым формулам* реальной относительности, исходя из средних значений передвижений часов, предоставленных в [63]. Для более обоснованного теоретического анализа, в том числе для точного определения коридора погрешностей, необходимо иметь полные данные эксперимента (график и карту движения часов, расписание и длительность остановок и т. п.)

Отметим один из главных моментов работы Хафеле – Китинга [63]: теоретический расчет разности показаний двигающихся и лабораторных часов был произведен не по прямым формулам специальной относительности, где используется относительная скорость часов (они ведут к противоречиям с экспериментом). Расчет был произведен с применением «маленькой хитрости», а именно, с помощью «абсолютно покоящихся» часов $K(O)$ (то есть часов, покоящихся в геоцентрической невращающейся системе отсчета $K(O)$). Разность хода движущихся часов и лабораторных часов была получена путем вычитания расчетной раз-

ности хода лабораторных и «абсолютно покоящихся» часов из расчетной разности хода двигающихся и «абсолютно покоящихся» часов. Но, тем не менее, такой ход привел лишь к качественным соответствиям с экспериментальными данными (6.117):

$$\begin{array}{c} \Delta\widetilde{T}^{+}_{H-K}(SR) = -184 \pm 18 \text{ нс}, \\ \Delta\widetilde{T}^{-}_{H-K}(SR) = +96 \pm 10 \text{ нс}. \end{array} \tag{6.118}$$

С помощью другой «маленькой хитрости» авторами [63] были сделаны корректировки к своим расчетам, которые в итоге привели к удовлетворительному соответствию со своими же экспериментальными данными (6.117):

$$\begin{array}{c} \Delta\widetilde{T}^{+}_{H-K}(SR+GR) = -40 \pm 23 \text{ нс}, \\ \Delta\widetilde{T}^{-}_{H-K}(SR+GR) = +275 \pm 21 \text{ нс}. \end{array} \tag{6.119}$$

В заключение отметим, что применение «маленьких хитростей» для корректировки теоретических расчетов с убедительной силой доказывает ограниченность специального принципа относительности в реальных системах отсчета.

Глава 7.

Динамика ориентируемой точки

7.1. О преобразовании величин между реальными системами отсчета

Учитывая, что программа построения прямых глобальных преобразований мировых координат (преобразований координатной сетки всего пространства) при переходе между произвольными K и K'

$$x^{i'} = f^{i'}(x^i), \quad f^{i'} \in T_4 \tag{7.1}$$

выдвинутая А. Эйнштейном в 1913 г. [45], в реальной относительности игнорируется, но существует принципиально иная последовательность (A) преобразований мировых координат событий, происходящих в окрестностях начал систем отсчета, через повороты в касательном расслоении, мы принимаем, что все величины преобразуются между реальными системами отсчета в такой же последовательности по каждому мировому индексу:

$$\begin{array}{ccc} Z^{a\dots rs} & \xrightarrow[\Lambda]{\qquad\qquad} & Z^{a'\dots rs} \\ \Uparrow{\scriptstyle h} & & \Downarrow{\scriptstyle h} \\ Z^{i\dots rs} & & Z^{i'\dots rs} \\ K(O) & & K'(O') \end{array} . \tag{7.2}$$

Диаграмма показывает, что преобразование между реальными системами отсчета $K(O)$ и $K'(O')$ по мировому индексу i величины с верхними мировыми индексами $Z^{i\dots rs}$ состоит из следующих последовательных операций:

1) осуществление проекции на слой расслоения по индексу i в точке O нахождения исходного наблюдателя в системе K

$$Z^{a\dots rs} = h^{a}_{\ i}(O)\, Z^{i\dots rs}; \tag{7.3}$$

2) осуществление преобразования по локально-лоренцеву индексу при четырехмерном повороте $\Lambda^{a'}_{\ a}$ между конечной $K'(O')$ и начальной $K(O)$ реальными системами отсчета

$$Z^{a\dots rs} \xrightarrow[\Lambda]{\qquad\qquad} Z^{a'\dots rs}; \tag{7.4}$$

3) приведение величины $Z^{a'\dots rs}$ к мировым координатам по первому верхнему индексу в точке нахождения конечного наблюдателя, то есть осуществление обратной проекции на базу расслоения в точке O'

$$Z^{i'\dots rs} = h^{i'}_{\ a'}(O')\, Z^{a'\dots rs}. \tag{7.5}$$

В случае, если преобразование по локальному индексу величины $Z^{a\dots rs}$ при четырехмерном повороте $\Lambda^{a'}_{\ a}$ между конечной $K'(O')$ и начальной $K(O)$ реальными системами отсчета осуществляется по следующей формуле:

$$Z^{a'\dots rs} = \Lambda^{a'}_{\ a}\, Z^{a\dots rs}, \tag{7.6}$$

то мы будем говорить, что мировой индекс i величины $Z^{i\dots rs}$ является контравариантным L-тензорным индексом.

Аналогично, между реальными системами отсчета $K(O)$ и $K'(O')$ величина $Z_{j\,\ldots\,qp}$ по одному из нижних мировых индексов преобразуется в следующей последовательности:

1) осуществление проекции на слой расслоения по индексу j в точке O

$$Z_{b\,\ldots\,qp} = Z_{j\,\ldots\,qp}\, h^{j}{}_{b}(O); \tag{7.7}$$

2) осуществление преобразования по локально-лоренцеву индексу при четырехмерном повороте $\Lambda^{a}{}_{a'}$ между начальной $K(O)$ и конечной $K'(O')$ реальными системами отсчета

$$Z_{b\,\ldots\,qp} \xrightarrow[\Lambda]{} Z_{b'\,\ldots\,qp}; \tag{7.8}$$

3) приведение величины $Z_{b'\,\ldots\,qp}$ к мировым координатам по первому нижнему индексу в точке O'

$$Z_{j'\,\ldots\,qp} = Z_{b'\,\ldots\,qp}\, h^{b'}{}_{j'}(O'). \tag{7.9}$$

Аналогично, если преобразование по локальному индексу величины $Z_{b\,\ldots qp}$ при четырехмерном повороте $\Lambda^{a}{}_{a'}$ между начальной $K(O)$ и конечной $K'(O')$ реальными системами отсчета осуществляется по формуле

$$Z_{b'\,\ldots\,qp} = Z_{b\,\ldots\,qp}\, \Lambda^{b}{}_{b'}, \tag{7.10}$$

то мы будем говорить, что мировой индекс j величины $Z_{j\,\ldots\,qp}$ является ковариантным L-тензорным индексом.

Теперь в соответствии с определениями (7.6) и (7.10) мы можем дать второе определение L-тензора, которое мы будем считать основным. Итак, p-контравариантным q-ковариантным L-тензором, или L-тензором типа (p, q), мы будем называть величину $Z^{k_1\,\ldots\,k_p}_{l_1\,\ldots\,l_q}$, полная проекция на слой расслоения которой в начале системы отсчета $K(O)$

$$Z^{a_1\,\ldots\,a_p}_{b_1\,\ldots\,b_q} = h^{a_1}_{k_1}(O)\,\ldots\,h^{a_p}_{k_p}(O)\, h^{l_1}_{b_1}(O)\,\ldots\,h^{l_p}_{b_p}(O)\, Z^{k_1\,\ldots\,k_p}_{l_1\,\ldots\,l_q} \tag{7.11}$$

и полная проекция на слой расслоения которой в начале системы отсчета $K'(O')$

$$Z^{a'_1\,\ldots\,a'_p}_{b'_1\,\ldots\,b'_q} = h^{a'_1}_{k'_1}(O')\,\ldots\,h^{a'_p}_{k'_p}(O')\, h^{l'_1}_{b'_1}(O')\,\ldots\,h^{l'_p}_{b'_p}(O')\, Z^{k'_1\,\ldots\,k'_p}_{l'_1\,\ldots\,l'_q} \tag{7.12}$$

соотносятся следующим образом (в тензорной форме):

$$Z^{a'_1 \dots a'_p}_{b'_1 \dots b'_q} = \Lambda^{a'_1}_{a_1} \cdots \Lambda^{a'_p}_{a_p} \, \Lambda^{b_1}_{b'_1} \cdots \Lambda^{b_q}_{b'_q} \, Z^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q}, \tag{7.13}$$

где $\Lambda^{a'}_{a}$ — матрица четырехмерной ориентации реальной системы $K'(O')$ относительно системы $K(O)$, $\Lambda^{a}_{a'} = \left(\Lambda^{a'}_{a}\right)^{-1}$ — матрица четырехмерной ориентации реальной системы $K(O)$ относительно системы $K'(O')$.

В соответствии с основным определением L-тензоров (7.13), символы Кристоффеля, выраженные стандартным образом через производные по мировым координатам метрического тензора [9]

$$\Gamma^{i}{}_{jk} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right), \tag{7.14}$$

и преобразующиеся как связность при пассивных преобразованиях координатной сетки $x^i \to x^{\tilde{i}}$ внутри одной реальной системы отсчета

$$\Gamma^{\tilde{i}}{}_{\tilde{j}\tilde{k}} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{\tilde{j}} \partial x^{\tilde{k}}} \frac{\partial x^{\tilde{i}}}{\partial x^i} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{\tilde{j}}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{\tilde{k}}} \frac{\partial x^{\tilde{i}}}{\partial x^i} \, \Gamma^{i}{}_{jk}, \tag{7.15}$$

являются полным L-тензором типа (1, 2), так как проекции этой величины на касательное расслоение в начале K и в начале K' соотносятся следующим образом [1]

$$\Gamma^{a'}{}_{b'c'} = \Lambda^{a'}{}_{a} \, \Gamma^{a}{}_{bc} \, \Lambda^{b}{}_{b'} \, \Lambda^{c}{}_{c'}. \tag{7.16}$$

Коэффициенты вращения Риччи [4]

$$T^{a\cdot\cdot}_{\cdot bk} = \left(\nabla_k \, h^a{}_j \right) \, h^j{}_b, \tag{7.17}$$

проявляют L-тензорные свойства только относительно второго нижнего индекса, так как проекции величины (7.17) на касательное расслоение в центрах K' и K соотносятся следующим образом

$$T^{a\cdot\cdot}_{\cdot bc'} = T^{a\cdot\cdot}_{\cdot bc} \, \Lambda^{c}{}_{c'}. \tag{7.18}$$

По верхнему и первому нижнему индексам коэффициенты вращения Риччи преобразуются по формуле [1]

$$T^{a'\,\cdot\cdot}_{\cdot\,b'\,k} = \Lambda^{a'}{}_{a,k}\,\Lambda^{a}{}_{b'} + \Lambda^{a'}{}_{a}\,T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,b\,k}\,\Lambda^{b}{}_{b'}, \tag{7.19}$$

то есть проявляют свойства *связности касательного расслоения*. С другой стороны, коэффициенты вращения Риччи в мировых координатах

$$T^{i\,\cdot\cdot}_{\cdot\,jk} = h^{i}{}_{a}\,T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,bk}\,h^{b}{}_{j}, \tag{7.20}$$

является обычным тензором типа (1, 2), то есть объектом, который при замене координатной сетки $x^i \to x^{\tilde{i}}$ внутри одной реальной системы отсчета преобразуется так [1]:

$$T^{\tilde{i}\,\cdot\cdot}_{\cdot\,\tilde{j}\,\tilde{k}} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{\tilde{j}}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{\tilde{k}}}\frac{\partial x^{\tilde{i}}}{\partial x^i}\,T^{i\,\cdot\cdot}_{\cdot\,j\,k}. \tag{7.21}$$

7.2. О принципе реальной относительности и принципе соответствия

В работе [1] автор выдвинул **принцип реальной относительности**, в первой части которого утверждается равноправность реальных систем отсчета в описании физических событий (например, фиксации вспышек света от удаленного источника):

Для описания событий все реальные системы отсчета равноправны между собой.

Эту часть предложенного принципа подтверждает и иллюстрирует закон преобразования координат событий между любыми реальными системами отсчета K' и K''

$$dX^{i''} = h^{i''}{}_{a''}(O'')\,\Lambda^{a''}{}_{a'}\,h^{a'}{}_{i'}(O')\,dX^{i'}\,. \tag{A}$$

Вторая часть принципа выдвигает требование к основным уравнениям, описывающим законы природы:

Уравнения, локально выражающие законы природы, должны быть инвариантны по отношению к преобразованиям координат событий между реальными системами отсчета.

Так как в законе (A), во-первых, основная часть преобразований соответствует поворотам ортонормированных реперов реальных систем отсчета в касательном расслоении, и, во-вторых, прямые глобальные преобразования мировых координат (преобразования координатной сетки всего пространства) игнорируются, то отсюда следует требование к «локальному выражению» законов природы: фундаментальные уравнения должны быть выражены через неголономные координаты касательного расслоения и должны быть L-ковариантными.

Решая, к примеру, уравнение движения ориентируемой частицы, мы получим в итоге траекторию частицы в неголономных координатах. Для сравнения с экспериментальными данными мы должны спроектировать эту траекторию на векторное пространство мировых координат (базу расслоения), где происходит традиционное измерение координат и скоростей частиц, и исследовать полученную проекцию. Траектория ориентируемой частицы в мировых координатах, как проекция истинной траектории в касательном расслоении, в общем случае не будет содержать полную информацию о последней. Именно поэтому для классической механики, работающей в голономных мировых координатах, остаются непонятными случаи «аномального поведения» некоторых вращающихся объектов [3].

Этот факт объясняется гораздо более сложными и физически насыщенными свойствами касательного расслоения по сравнению с пространством мировых координат.

Проекцию истинной траектории ориентируемой частицы на пространство мировых координат отдаленно можно представить в виде проекции пространственной кривой на плоскость (рис. 7.1).

Для того чтобы сформулировать L-ковариантные уравнения движения ориентируемой частицы, необходимо привлечь **принцип соответствия** [2], по которому новые уравнения должны переходить в старые, классические в предельных случаях. Таким предельным случаем является случай удаления реальных систем отсчета от тяготеющих сил и полей и превращение их в квазиинерциальные реальные системы отсчета. Как показано

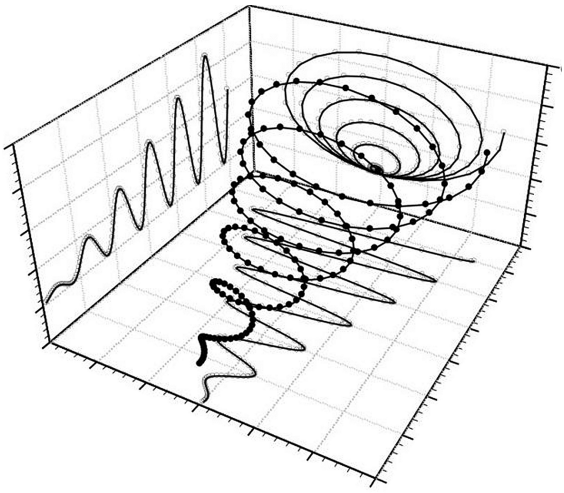

Рис. 7.1: Три проекции пространственной кривой на три плоскости [64]

в [1], в этом пределе принцип реальной относительности, выраженный локально, переходит в принцип специальной относительности, выраженный глобально. В этом пределе уравнения движения ориентируемой частицы должны перейти в уравнения движения материальной точки общей теории относительности относительно удаленного наблюдателя, которые, в нерелятивистском слабополевом пределе, должны перейти в классические уравнения движения частицы в инерциальной системе отсчета.

7.3. Уравнение движения свободной ориентируемой частицы

Термин «свободный» означает, что частица свободна от внешних воздействий и что движение частицы происходит «само по себе» в окружающем пространстве. В рамках специальной относительности или классической механики движение свободной частицы

сводится к простому прямолинейному движению частицы в пустом плоском пространстве.

В рамках первой геометризированной теории — общей теории относительности — свободное движение частицы означает ее движение без дополнительных воздействий во внешнем искривленном пространстве, то есть свободное падение в гравитационном поле.

В рамках реальной относительности свободная частица также должна двигаться «сама по себе» в окружающем геометрическом поле. По условиям классификации реальных систем отсчета и в соответствии с принципом геометризации полей любое дополнительное воздействие на частицу (например, действие реактивной тяги, ускоряющей ракету) должно быть геометризировано и прибавлено к основному геометрическому полю. Таким образом, реальная относительность всегда имеет дело со свободным движением ориентируемой частицы во внешнем геометрическом поле, которое представляет собой пространственно-временной континуум, обладающий кривизной и кручением.

Исходя из принципа соответствия, уравнения движения свободной частицы специальной относительности

$$u^i{}_{,k} = 0 \tag{7.22}$$

должны быть обобщены так, чтобы они соответствовали принципу реальной относительности. Это можно сделать единственным образом:

$$\widetilde{\nabla}_k u^a = u^a{}_{,k} - T^{a\cdot\cdot}_{\cdot bk} u^b = 0. \tag{7.23}$$

В этих уравнениях $\widetilde{\nabla}_k$ — L-ковариантная производная, u^i и u^a — четырехмерная скорость частицы в мировых координатах и в неголономных координатах касательного расслоения соответственно.

Данное уравнение предложено автором в 2003 году [65].

Умножая левую и правую части уравнения (7.23) на четырехмерную скорость $u^k = dx^k/ds$ и суммируя по k, получим

$$\frac{du^a}{ds} - T^{a\cdot\cdot}_{\cdot bk} u^b u^k = 0. \tag{7.24}$$

Это уравнение показывает, как меняется четырехмерная скорость свободной ориентируемой частицы в координатах касательного расслоения по мировой линии частицы. Уравнение (7.24) сохраняет свой вид (является инвариантным) при активных преобразованиях между реальными системами отсчета.

7.4. Уравнение движения ориентируемой частицы в мировых координатах

Основное уравнение движения ориентируемой частицы (7.24) записано в соответствии с принципом реальной относительности в неголономных координатах касательного расслоения. Для того, чтобы выполнить процедуры сравнения этого уравнения в предельных случаях, подразумеваемых принципом соответствия, его необходимо перевести в мировые координаты.

Пусть поле коэффициентов Ламэ $h^i{}_a(x^i)$, посредством которого осуществляется перевод локально-лоренцевых координат любых величин к мировым координатам (и наоборот), ассоциировано с удаленной квазиинерциальной системой отсчета $K(O)$ (то есть относится к классу K). Это соответствует идеологии общей теории относительности, в которой отсутствует понятие реальной системы отсчета, а движение частиц, как правило, описывается геодезическими линиями в глобальных (то есть покрывающих все пространство) криволинейных координатах, квазигалилеевых на удалении от источника поля и фактически заданных относительно некоего внешнего наблюдателя [9]. Преобразование уравнения движения (7.24) с помощью поля $h^i{}_a(x^i)$, взятого в точке нахождения частицы, а не в месте нахождения абстрактного наблюдателя, приведет нас к уравнению в упомянутых мировых координатах, то есть к уравнению, которое можно сравнивать с уравнением геодезической общей теории относительности.

В соответствии с определением связности абсолютного параллелизма в выбранном поле коэффициентов Ламэ $h^i{}_a(x^i)$

(Приложение 1)

$$\Delta^i{}_{jk} = h^i{}_a h^a{}_{j,k} = -h^i{}_{a,k} h^a{}_j, \tag{7.25}$$

легко получается следующее уравнение для контравариантных коэффициентов Ламэ $h^i{}_a(x^i)$:

$$h^i{}_{a,k} = -\Delta^i{}_{jk}\, h^j{}_a,$$

из которого путем умножения на $u^k = dx^k/ds$ и суммирования по k получается следующее соотношение:

$$\frac{dh^i{}_a}{ds} = -\Delta^i{}_{jk}\, h^j{}_a\, u^k. \tag{7.26}$$

Из (7.25) также следует уравнение для ковариантных коэффициентов Ламэ $h^a{}_j(x^i)$

$$h^a{}_{j,k} = h^a_i\, \Delta^i{}_{jk},$$

из которого можно получить соотношение

$$\frac{dh^a{}_j}{ds} = h^a_i\, \Delta^i{}_{jk}\, u^k. \tag{7.27}$$

Запишем основное уравнение движения ориентируемой частицы (7.24) в мировых координатах, используя коэффициенты Ламэ, учтенные в классе K — удаленной квазиинерциальной системы отсчета:

$$\frac{dh^a{}_j}{ds} u^j + h^a{}_i \frac{du^i}{ds} = h^a{}_i\, T^{i\,\cdot\cdot}_{\cdot\,jk} u^j u^k. \tag{7.28}$$

Подставив сюда (7.27) и соотношение для связности абсолютного параллелизма $\Delta^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{jk} + T^{i\,\cdot\cdot}_{\cdot\,jk}$, получим в окончательном виде

$$\frac{du^i}{ds} = -\Gamma^i{}_{jk}\, u^j\, u^k, \tag{7.29}$$

где все величины взяты в мировой точке нахождения частицы.

Умножая левую и правую части (7.29) на массу ориентируемой частицы m, получим уравнение движения ориентируемой частицы в мировых координатах относительно удаленной квазиинерциальной системы отсчета K

$$m\frac{du^i}{ds} = F^i{}_{external}, \tag{7.30}$$

где

$$F^i{}_{external} = -m\,\Gamma^i{}_{jk}\,u^j\,u^k \tag{7.31}$$

— четырехмерная сила, действующая на ориентируемую частицу со стороны внешнего геометризированного поля.

Вследствие того, что относительно активных преобразований между реальными системами отсчета символы Кристоффеля представляют собой полный L-тензор типа $(1,2)$, а четырехмерная скорость является контравариантным L-вектором, то относительно активных преобразований четырехмерная сила $F^i{}_{external}$ будет являться контравариантным L-вектором.

Это означает, что если внешняя сила $F^i{}_{external}$ проявляет себя в какой-либо реальной системе отсчета, то никакими активными преобразованиями, связанными с переходом наблюдателя в другую реальную систему отсчета, ее уничтожить невозможно. Но, с другой стороны, путем подбора соответствующей неинерциальной реальной системы отсчета, где на ориентируемую частицу действует, кроме внешней силы, также и сила инерции, можно сделать равной нулю сумму этих сил.

Уравнение (7.31) совпадает с известным уравнением движения частицы в теории гравитации А. Эйнштейна [9], где предполагается, что материальные частицы движутся по геодезическим риманова пространства. Как правило, такие геодезические рассматриваются и рассчитываются в «основных» криволинейных координатах, покрывающих все пространство и переходящих в квазигалилеевы координаты на удалении от источника поля. Это есть координаты, которые заданы относительно внешнего, то есть удаленного наблюдателя [9, §53]. Таким образом, в предельном случае квазиинерциальной реальной системы отсчета, которая

может быть реализована только при ее удалении от источника поля, уравнение движения ориентируемой частицы (7.31) совпадает с уравнением движения материальной точки в теории тяготения А. Эйнштейна. Принцип соответствия в этой части соблюден.

Рассмотрим инерциальную систему отсчета $K_l(P)$, соединенную с частицей P, которая движется с постоянной скоростью $\mathbf{V}'$ относительно неподвижного наблюдателя. Пусть начало O' ускоренной и вращающейся системы отсчета $K'(O')$ в момент времени t имеет нулевую скорость относительно неподвижного наблюдателя и пусть в этот момент частица P находится в достаточно близкой окрестности O'.

Выбор системы $K'(O')$, мгновенно покоящейся относительно неподвижного наблюдателя, не умаляет строгости рассуждений в этой, отчасти абстрактной, ситуации. Нулевую скорость в момент t мы приписали неинерциальной системе $K'(O')$, так как она единственна в настоящем анализе, а пробных частиц, движущихся относительно K', может быть бесконечно много. Абстрактность ситуации проясняет тот факт, что в достаточно близкой окрестности O' мы имеем две системы отсчета — инерциальную систему $K_l(P)$ и движущуюся с ускорением систему $K'(O')$, которые в реальной ситуации должны двигаться либо без ускорения (в отсутствии внешнего поля), либо с одинаковым ускорением (в присутствии внешнего поля). Такая ситуация выбрана для того, чтобы соответствовать классическому анализу неинерциальной системы отсчета при выводе выражений для сил инерции [50]. В более общем случае «слабо ускоренной» частицы [2, разд. 1] под инерциальной системой $K_l(P)$ мы будем подразумевать локально-лоренцеву систему отсчета, совпадающую по скорости и ориентации с собственной системой отсчета частицы в момент t.

Относительно инерциальной системы $K_l(P)$ верно уравнение движения ориентируемой частицы (7.29). Будем обозначать поле коэффициентов Ламэ в классе K_l как $l^i{}_a(x^i)$, поэтому в этом классе

$$u^i = l^i{}_a u^a, \quad u^b = l^b{}_j u^j. \tag{7.32}$$

Относительно реальной системы отсчета $K'(O')$, которая производит четырехмерные повороты $\Lambda^{a'}_{\ a}$ относительно инерциальной системы $K_l(P)$, мы имеем

$$\frac{du^{i'}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\Lambda^{i'}_{\ i}\, u^i\right) = \Lambda^{i'}_{\ i}\,\frac{du^i}{ds} + \frac{d\Lambda^{i'}_{\ i}}{ds}\, u^i, \tag{7.33}$$

где

$$\Lambda^{i'}_{\ i} = \delta^{i'}_{\ s}\, l^s_{\ a}(O')\,\delta^a_{\ a'}\,\Lambda^{a'}_{\ b}\, l^b_{\ i}(P) \tag{7.34}$$

— оператор преобразования L-векторных величин при активных преобразованиях между системами отсчета K_l и K'. Здесь учтено, что поле тетрад взято относительно начальной системы отсчета K_l: $l^{i'}_{\ a'}(O') = \delta^{i'}_{\ s}\, l^s_{\ a}(O')\,\delta^a_{\ a'}$. Рассмотрим второе слагаемое в правой части соотношения (7.33)

$$\begin{aligned}\frac{d\Lambda^{i'}_{\ i}}{ds}\, u^i = \delta^{i'}_{\ s}\,\frac{dl^s_{\ a}(O')}{ds}\,\delta^a_{\ a'}\,\Lambda^{a'}_{\ b}\, l^b_{\ i}(P)\, u^i + \\ + l^{i'}_{\ a'}(O')\,\Lambda^{a'}_{b,k}\, u^k\, l^b_{\ i}(P)\, u^i + \\ + \delta^{i'}_{\ s}\, l^s_{\ a}(O')\,\delta^a_{\ a'}\,\Lambda^{a'}_{\ b}\,\frac{dl^b_{\ i}(P)}{ds}\, u^i.\end{aligned} \tag{7.35}$$

Вычислим отдельно сумму $\sum_{1,3}$ первого и третьего членов в правой части (7.35). Использовав соотношения (7.26), (7.27), и, учтя $\Lambda^{a'}_{\ b}\, u^b = u^{a'}$, $l^d_{\ i}(P) u^i(P) = u^d(P)$, получим

$$\begin{aligned}\sum_{1,3} = -\delta^{i'}_{\ s}\, l^s_{\ c}(O')\,\Delta^c_{\ ak}(O')\, u^k(O')\,\delta^a_{\ a'}\, u^{a'}(O') + \\ + \delta^{i'}_{\ s}\, l^s_{\ a}(O')\,\delta^a_{\ a'}\,\Lambda^{a'}_{\ b}\,\Delta^b_{\ dk}(P)\, u^k(P)\, u^d(P).\end{aligned} \tag{7.36}$$

Далее, использовав соотношение $l^{i'}_{\ a'}(O')\,\Lambda^{a'}_{\ b} = l^{i'}_{\ b}(P) = \delta^{i'}_{\ s}\, l^s_{\ b}(P)$, получим

$$\begin{aligned}\sum_{1,3} = -\delta^{i'}_{\ s}\, l^s_{\ c}(O')\,\Delta^c_{\ ak}(O')\, u^k(O')\, u^a(O') + \\ + \delta^{i'}_{\ s}\, l^s_{\ b}(P)\,\Delta^b_{\ dk}(P)\, u^k(P)\, u^d(P).\end{aligned} \tag{7.37}$$

Путем использования функции

$$\mathbb{Q}(A) = \delta^{i'}{}_{s}\, l^{s}{}_{b}(A)\, \Delta^{b}{}_{dk}(A)\, u^{k}(A)\, u^{d}(A) \tag{7.38}$$

и ее разложения в ряд Тейлора в окрестности начала O' получим следующее выражение для $\sum_{1,3}$:

$$\sum_{1,3} = -\mathbb{Q}(O') + \mathbb{Q}(P) = \frac{d\mathbb{Q}}{ds}(O')\, \Delta s, \tag{7.39}$$

где Δs — четырехмерное расстояние между мировыми точками P и O'.

Определим «достаточно близкую окрестность» начала O' условием малости суммы первого и третьего слагаемого по сравнению со вторым в выражении (7.35), то есть следующим условием

$$|\Delta s| \ll \left| l^{i'}{}_{a'}(O') \frac{d\Lambda^{a'}{}_{b}}{ds}\, u^{b} \,/\, \frac{d\mathbb{Q}}{ds}(O') \right|. \tag{7.40}$$

Ограничимся случаем, когда условие «достаточно близкой окрестности» выполняется, поэтому в соотношении (7.35) мы можем оставить только второе слагаемое:

$$\frac{d\Lambda^{i'}{}_{i}}{ds}\, u^{i} = l^{i'}{}_{a'}(O')\, \Lambda^{a'}{}_{b,k}\, l^{b}{}_{i}(P)\, u^{i}(P)\, u^{k}(P). \tag{7.41}$$

Умножив правую и левую части соотношения (7.33) на m — массу частицы, получим уравнение движения частицы относительно неинерциальной системы отсчета $K'(O')$

$$m \frac{du^{i'}}{ds} = F^{i'}{}_{external} + F^{i'}{}_{inertia}. \tag{7.42}$$

Здесь

$$F^{i'}{}_{inertia} = m\, l^{i'}{}_{a'}(O')\, \Lambda^{a'}{}_{b,k}\, u^{b}\, u^{k} \tag{7.43}$$

— четырехмерная сила инерции,

$$F^{i'}{}_{external} = \Lambda^{i'}{}_{i} \left(m \frac{du^{i}}{ds} \right) = \Lambda^{i'}{}_{i}\, F^{i}{}_{external} \tag{7.44}$$

— внешняя сила относительно системы отсчета $K'(O')$. Соотношение (7.44) еще раз подчеркивает, что сила, действующая на ориентируемую частицу со стороны внешнего поля, является контравариантным L-вектором. Выражение для внешней силы относительно системы K' может быть записано в следующем виде:

$$F^{i'}_{\ external} = \Lambda^{i'}_{\ i}\left(-m\,\Gamma^{i}_{\ jk}\,u^{j}\,u^{k}\right) = -m\,\Gamma^{i'}_{\ j'k'}\,u^{j'}\,u^{k'}. \qquad (7.45)$$

Таким образом, на динамику ориентируемой точки в неинерциальной реальной системе отсчета влияют две силы. Первая сила $F^{i'}_{\ external}$ обусловлена влиянием источника геометризированного поля, в котором движется ориентируемая частица. Вторая сила — четырехмерная сила инерции $F^{i'}_{\ inertia}$ — проявляется только в неинерциальных реальных системах отсчета и обусловлена их четырехмерным вращением

$$\frac{d\Lambda^{a'}_{\ b}}{ds} \neq 0$$

относительно некой квазиинерциальной системы отсчета. Действительно, сила инерции (7.43) в системе отсчета K' исчезает всякий раз тогда, когда четырехмерная ориентация этой системы относительно начальной системы отсчета сохраняется: $\Lambda^{a'}_{\ b,\,k} = 0$.

7.5. Четырехмерная сила инерции

Четырехмерная сила инерции была введена автором в 2003 году [65]. В настоящей работе дан более строгий вывод выражения для четырехмерной силы инерции в неинерциальной системе $K'(O')$, которое представим в двух вариантах :

$$\begin{aligned} F^{i'}_{\ inertia} &= m\,l^{i'}_{\ a'}(O')\,\Lambda^{a'}_{\ b,k}\,u^{b}\,u^{k} = \\ &= m\,l^{i'}_{\ a'}(O')\,\Lambda^{a'}_{\ b,k}\,l^{b}_{\ \ i}(P)\,u^{i}\,u^{k}. \end{aligned} \qquad (7.46)$$

Здесь ${l^i}_a$ — поле коэффициентов Ламэ в классе движущейся инерциальной системы K_l, ${\Lambda^{a'}}_b$ — матрица текущей четырехмерной ориентации K' относительно K_l в координатах исходной инерциальной системы K_l.

Вычислим четырехмерную силу инерции в неинерциальной системе отсчета наиболее общего вида: вращающейся и движущейся с продольным ускорением. Известно, что любое четырехмерное вращение, принадлежащее группе $SO(1.3)$, может быть разложено на вращение в псевдоевклидовой плоскости, которое есть поступательное ускорение ориентируемой частицы, и на трехмерное вращение [48].

Наиболее общая матрица трехмерного вращения в псевдоевклидовом пространстве выглядит следующим образом:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{xx} & \cos\theta_{xy} & \cos\theta_{xz} \\ 0 & \cos\theta_{yx} & \cos\theta_{yy} & \cos\theta_{yz} \\ 0 & \cos\theta_{zx} & \cos\theta_{zy} & \cos\theta_{zz} \end{pmatrix}, \tag{7.47}$$

где $\cos\theta_{\alpha\beta}$ — направляющие косинусы углов [47].

Наиболее общая матрица поворота в псевдоевклидовой плоскости, не связанного с пространственным поворотом, выглядит следующим образом [47]:

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_x\gamma & -\beta_y\gamma & -\beta_z\gamma \\ -\beta_x\gamma & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_x^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_y\gamma & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_y^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_z\gamma & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_z^2}{\beta^2} \end{pmatrix}, \tag{7.48}$$

где $\beta_\alpha = V_{O'\alpha}/c$, $\beta^2 = \beta_x^2+\beta_y^2+\beta_z^2$, $V_{O'\alpha}$ — компоненты скорости конечной системы отсчета по отношению к начальной системе ($\alpha = 1, 2, 3$), γ — релятивистский фактор:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{7.49}$$

Хорошо известно, что вращения L и R в общем случае не коммутируют между собой и произведение L и R зависит от их последовательности. Следовательно, матрицу четырехмерного вращения можно представить как

$$\Lambda^I = R\,L, \tag{7.50}$$

где R и L — соответствующие матрицы поворотов с зависящими от времени параметрами, либо как

$$\Lambda^{II} = L\,R. \tag{7.51}$$

Первый случай мы будем относить к неинерциальной системе отсчета I рода, второй — к неинерциальной системе отсчета II рода. Покажем, что силы инерции, действующие на частицу в рассмотренных двух системах отсчета, различны, и проинтерпретируем полученные результаты.

Учтем, что в системе K_l четырехмерная скорость частицы равна

$$u^i = u^k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.52}$$

и запишем вторую из формул (7.46) в более компактном виде:

$$F^{i'}{}_{inertia} = m\, l^{i'}{}_{a'}(O')\, \Lambda^{a'}{}_{b,\,0}\, l^{b}{}_{0}(P). \tag{7.53}$$

По условиям задачи $\mathbf{V}' = \mathrm{const}$, что эквивалентно отсутствию внешнего поля, поэтому поле коэффициентов Ламэ относительно неподвижного наблюдателя имеет следующий вид [1]:

$$h^i{}_a = \delta^i{}_a, \quad h^b{}_j = \delta^b{}_j. \tag{7.54}$$

Рассмотрим нерелятивистский случай движения пробной частицы P. Ограничимся случаем, когда движение начала O' системы отсчета K' происходит в плоскости XOY системы координат K_l и скорость вращения $\mathbf{\Omega}$ системы K' перпендикулярна

к этой плоскости. Напомним, что $\mathbf{V}'$ есть скорость частицы относительно неподвижного наблюдателя и относительно системы K' в момент времени $t = 0$. Таким образом,

$$\begin{array}{l} \mathbf{V}' = (V'_x,\, V'_y,\, 0), \quad V'_x,\, V'_y \ll c, \\ \mathbf{\Omega} = (0,\, 0,\, \Omega) = (0,\, 0,\, d\phi/dt), \end{array} \tag{7.55}$$

где ϕ — угол ориентации системы K' в плоскости XOY. В этом случае матрица пространственного вращения неинерциальной системы K' в координатной системе K_l будет следующей:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.56}$$

Матрица псевдоевклидова вращения неинерциальной системы K' в координатах системы K_l выражается с точностью до $o(\beta)$ следующим образом:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -\beta_x & -\beta_y & 0 \\ -\beta_x & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.57}$$

где $\beta_x = V_{O'x}(t)/c$; $\beta_y = V_{O'y}(t)/c$; а $V_{O'x}(t)$, $V_{O'y}(t)$ — компоненты скорости системы K' относительно системы K_l. Отметим, что скорость $\mathbf{V}_{O'}$ системы K' относительно системы K_l равна по величине и противоположна по направлению скорости $\mathbf{V}'$ частицы относительно системы K':

$$\begin{array}{l} \mathbf{V}' = -\mathbf{V}_{O'}, \\ B'_\alpha = -\beta_\alpha, \quad B'_\alpha = V'_\alpha/c. \end{array} \tag{7.58}$$

Коэффициенты Ламэ в классе движущейся инерциальной системы K_l выражаются, с учетом (7.54), в следующем виде

$$l^i{}_a = \delta^i{}_b L^b{}_a, \tag{7.59}$$

где ${L^b}_a$ — собственное преобразование Лоренца (буст) от неподвижного наблюдателя в инерциальную систему K_l. Вычисления с точностью $o(B')$ приведут к следующим выражениям

$$ {l^i}_a = \begin{pmatrix} 1 & -B'_x & -B'_y & 0 \\ -B'_x & 1 & 0 & 0 \\ -B'_y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.60} $$

$$ {l^b}_i = \left({l^i}_b\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & B'_x & B'_y & 0 \\ B'_x & 1 & 0 & 0 \\ B'_y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.61} $$

где $B'_\alpha = V'_\alpha/c \ll 1;\ \ \alpha = 1, 2, 3.$

Анализ, представленный в настоящем разделе, связан с активными преобразованиями между инерциальной системой отсчета K_l и неинерциальной системой K', то есть связан с реальным переходом наблюдателя из системы K_l в систему $K'(O')$ и обратно. Как отмечено в [1, разд. 2.10], такое преобразование может быть только локальным, то есть оно может захватывать только ограниченную область пространства событий. Размер этой области (в дальнейшем: «область наблюдения») зависит от свойств реальной системы отсчета, в которой находится наблюдатель.

Простые рассуждения показывают, — чем больше реальная система отличается от инерциальной системы, тем меньше размер области наблюдения. Именно поэтому, как показывает опыт человечества, для описания событий и явлений в подавляющем большинстве используются реальные системы отсчета, наиболее приближенные к инерциальным. Степень отличия реальной системы от инерциальной (которая определяется такими параметрами, как собственное ускорение и скорость вращения) будет увеличиваться при увеличении неоднородности внешнего поля. Поэтому чем больше неоднородность внешнего поля (говоря классическим языком — чем больше градиент эффективного потенциала), в котором находится реальная система отсчета, тем

меньше размер ее области наблюдения. В практической жизни, если нас интересует описание событий вне области наблюдения реальной системы отчета K', то нам следует переместить наблюдателя в реальную систему отсчета K'', чья область наблюдения перекроет (или войдет в) желаемую область описания событий.

Воистину — для описания событий все реальные системы отсчета имеют равные права, но разные возможности!

Заметим, на основе формулы (7.46), что величина сил инерции в системе отсчета, чья четырехмерная ориентация относительно неподвижного наблюдателя является непостоянной, зависит от соответствующих генераторов группы $SO(1.3)$ [46], то есть от величин

$$\frac{\partial \Lambda^{a'}_{\ b}}{\partial x^k}(x^k = 0).$$

Именно поэтому вычисления по формуле (7.53) произведем при $t \approx 0$ или при $\phi \approx 0$.

Прямое вычисление матрицы $\Lambda^{a'}_{b,\,0}$ при $t \approx 0$ (что эквивалентно $\phi \approx 0$) для неинерциальной системы отсчета I рода приведет к результату

$$\begin{aligned}\Lambda^{a'}_{b,\,0}(\phi \approx 0) &= (R\,L)_{,\,0}(\phi \approx 0) = \\ &= \frac{1}{c}\begin{pmatrix} 0 & -\dot\beta_x & -\dot\beta_y & 0 \\ -\dot\beta_x - \beta_y\Omega & 0 & \Omega & 0 \\ -\dot\beta_y + \beta_x\Omega & -\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{7.62}$$

где точка над переменной обозначает производную по времени. Подставив (7.60), (7.61) и (7.62) в формулу (7.53), а также учтя $B'_\alpha = -\beta_\alpha$, получим для пространственных компонентов четырехмерной силы инерции в неинерциальной системы отсчета K' I рода

$$\begin{aligned} F^{1'}_{inertia} &= \tfrac{m}{c}(-\dot\beta_x - 2\,\beta_y\Omega) = \tfrac{m}{c}(-\dot\beta_x + 2\,B'_y\Omega), \\ F^{2'}_{inertia} &= \tfrac{m}{c}(-\dot\beta_y + 2\,\beta_x\Omega) = \tfrac{m}{c}(-\dot\beta_y - 2\,B'_x\Omega), \\ F^{3'}_{inertia} &= 0. \end{aligned} \tag{7.63}$$

Запишем эти выражения в векторном виде

$$\mathbf{F}'_{inertia} = -m\mathbf{w} + 2m\left[\mathbf{V}'\mathbf{\Omega}\right], \tag{7.64}$$

где $\mathbf{w}$ — ускорение системы $K'(O')$ относительно системы K_l

$$w_\alpha = \dot{\beta}_\alpha\, c. \tag{7.65}$$

Мы видим, нерелятивистское выражение для силы инерции в неинерциальной системе отсчета I рода тождественно классическому выражению [50] для силы инерции в неинерциальной системе отсчета. Таким образом, $-m\mathbf{w}$ является силой инерции, связанной с поступательным ускорением начала неинерциальной системы отсчета, $2m\left[\mathbf{V}'\mathbf{\Omega}\right]$ — сила Кориолиса, которая связана с вращательным движением неинерциальной системы отсчета.

Мы рассмотрели случай, когда частица P находится в ближайшей окрестности неинерциальной системы отсчета, поэтому в уравнении (7.64) прямо не присутствует центробежная сила инерции. В реальной ситуации, например при определении сил инерции, действующих на частицу на периферии вращающегося диска, необходимо поступить следующим образом. Следует ввести связанную с диском периферийную неинерциальную системы отсчета, в окрестности которой находится пробная частица. Поступательное ускорение центра такой неинерциальной системы отсчета, очевидно, будет состоять из поступательного ускорения центра диска и центростремительного ускорения точки диска, в которой находится центр этой неинерциальной системы отсчета. Центростремительное ускорение, таким образом, будет учитываться в выражении для силы инерции (7.64) как часть $\mathbf{w}$. Легко видеть, что результатом будет появление центробежной силы инерции в правой части выражения (7.64).

Проводя вычисление матриц (7.62), (7.60) и (7.61) с точностью $o(\beta^2)$, мы получим для нулевой компоненты четырехмерной силы инерции

$$F^{0'}_{inertia} = \frac{m}{c}(\beta_x\,\dot{\beta}_x + \beta_y\,\dot{\beta}_y) = \frac{m}{c}(-\dot{\beta}_x\,B'_x - \dot{\beta}_y\,B'_y). \tag{7.66}$$

С точностью $o(\beta^2) = o(B'^2)$ нулевая компонента четырехмерной скорости ориентируемой частицы равна

$$u^{0'} = \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - B'^2}}. \tag{7.67}$$

Относительно неинерциальной системы отсчета полная энергия частицы без учета внешних полей равна

$$E' = mc^2\,\gamma'. \tag{7.68}$$

С учетом (7.66), (7.67), (7.68), уравнение движения ориентируемой частицы относительно неинерциальной системы отсчета I рода в нерелятивистском приближении для $i' = 0'$ примет следующий вид:

$$\frac{dE'}{dt} = -mw_x V'_x - mw_y V'_y, \tag{7.69}$$

которое можно интерпретировать как уравнение для мощности сил инерции, связанных с поступательным ускорением начала неинерциальной системы отсчета.

Вычисление матрицы $\Lambda^{a'}_{b,\,0}$ при $t \approx 0$ (или $\phi \approx 0$) для неинерциальной системы отсчета II рода дает

$$\Lambda^{a'}_{b,\,0}(\phi \approx 0) = (L\,R)_{,\,0}(\phi \approx 0) = \\ = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} 0 & -\dot\beta_x + \beta_y\Omega & -\dot\beta_y - \beta_x\Omega & 0 \\ -\dot\beta_x & 0 & \Omega & 0 \\ -\dot\beta_y & -\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.70}$$

Аналогичное вычисление пространственных компонентов четырехмерной силы инерции относительно неинерциальной реальной системы отсчета K' II рода дает

$$\begin{aligned} F^{1'}_{inertia} &= \tfrac{m}{c}(-\dot\beta_x - \beta_y\,\Omega) = \tfrac{m}{c}(-\dot\beta_x + B'_y\,\Omega), \\ F^{2'}_{inertia} &= \tfrac{m}{c}(-\dot\beta_y + \beta_x\,\Omega) = \tfrac{m}{c}(-\dot\beta_y - B'_x\,\Omega), \\ F^{3'}_{inertia} &= 0, \end{aligned} \tag{7.71}$$

откуда следует нерелятивистское выражение для силы инерции в неинерциальной системе отсчета II рода в векторном виде:

$$\mathbf{F}'_{inertia} = -m\mathbf{w} + m\left[\mathbf{V}'\mathbf{\Omega}\right]. \tag{7.72}$$

Мы видим, что сила инерции $m\left[\mathbf{V}'\mathbf{\Omega}\right]$, обусловленная вращением неинерциальной системы отсчета II рода, отличается множителем $1/2$ от классической силы Кориолиса.

Уравнение движения центра ориентируемой частицы относительно неинерциальной системы отсчета II рода в нерелятивистском приближении для $i' = 0'$ приводит к тому же уравнению (7.69) для мощности сил инерции, связанных с поступательным ускорением системы отсчета. Уравнение (7.69) подтверждает хорошо известный из классической механики факт, что силы инерции, обусловленные трехмерным вращением неинерциальной системы отсчета (сила Кориолиса в неинерциальной системе отсчета I рода или сила $m\left[\mathbf{V}'\mathbf{\Omega}\right]$ в неинерциальной системе отсчета II рода), работы в неинерциальной системе отсчета не совершают.

В настоящем разделе мы показали, что принцип соответствия с классической механикой в части неинерциальной реальной системы отсчета I рода соблюден. Формула (7.72) для сил инерции для неинерциальной реальной системы отсчета II рода — новация, которая принципиально не может быть получена из построений классической механики. Дело в том, что в классической механике движения по углам (в неголономных координатах) сводятся к перемещениям в мировых голономных координатах [66], что упрощает картину вращения и упускает часть информации.

Вопрос о неинерциальной реальной системе отсчета II рода следует рассмотреть дополнительно, с помощью постановки соответствующих экспериментов.

7.6. Лифт Эйнштейна: реальная относительность vs общая относительность

В основных учебниках показывается, что уравнения движения частицы общей теории относительности в инерциальной систе-

ме имеют предельный переход (в приближении слабых полей) к уравнениям классической механики [10].

Иная ситуация складывается в случае неинерциальной (ускоренной) системы отсчета. Рассмотрим с точки зрения классической механики основной логический опыт общей теории относительности — поведение свободных тел в падающем без вращения лифте вблизи поверхности Земли (в так называемом «лифте Эйнштейна») (рис. 7.2). С точки зрения неподвижной системы отсчета K, связанной с Землей, уравнения движения свободно падающего вместе с лифтом тела массы m запишутся в виде

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{external}, \tag{7.73}$$

где $\mathbf{F}_{external} = m\mathbf{g}$ — сила со стороны внешнего поля (сила гравитации), $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения. С точки зрения неинерциальной системы K', связанной с лифтом, уравнение движения тела будет следующим

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{F}'_{external} + \mathbf{F}_{inertia}, \tag{7.74}$$

где $\mathbf{F}'_{external} = m\mathbf{g}$ — сила гравитации, действующая на тело в системе K' (она не изменилась), $\mathbf{F}_{inertia} = -m\mathbf{a}$ — сила инерции, действующая на тело массы m в неинерциальной системе отсчета, $\mathbf{a}$ — ускорение самой неинерциальной системы отсчета.

С классической точки зрения сила со стороны внешнего поля является вектором, то есть действует на тело в любых системах отсчета, а в неинерциальной системе к ней добавляется еще и сила инерции. Так как для свободно падающего лифта его ускорение равно ускорению свободного падения в гравитационном поле Земли, то сила инерции равна по величине и противоположна по направлению силе гравитации. Итак, относительно системы K' сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю, поэтому внутри лифта тело покоится или движется с равномерной скоростью. Именно это и происходит на опыте.

В общей теории относительности предполагается, что материальные тела движутся по геодезическим риманова пространства.

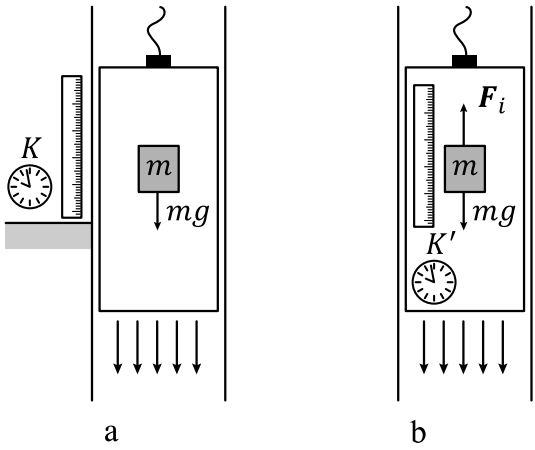

Рис. 7.2: Тело в падающем лифте: a) с точки зрения неподвижной системы отсчета K, b) с точки зрения системы отсчета K', связанной с лифтом

Как правило, такие геодезические рассматриваются и рассчитываются относительно удаленной от источника поля квазиинерциальной системы отсчета.

Уравнение движения тела общей теории относительности в любой системе отсчета следующее

$$m\frac{du^i}{ds} = F^i_{external}, \tag{7.75}$$

где $F^i_{external} = -m\Gamma^i{}_{jk}u^j u^k$ — четырехмерная сила, действующая со стороны гравитационного поля на тело. Влияние внешнего геометризованного поля определяется символами Кристоффеля $\Gamma^i{}_{jk}$, имеющие нетензорный закон преобразования при пассивном преобразовании координат.

Сила инерции в уравнении движения (7.75) не учитывается, но можно соответствующим подбором координатной системы локально «исключить гравитационное поле» [10]. При переходе в систему падающего лифта K' осуществляется пассивное координатное преобразование $x^i \to x^{i'}$ и все символы Кристоффеля

обращаются в нуль:

$$\Gamma^{i'}{}_{j'k'} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \Gamma^i{}_{jk} = 0. \qquad (7.76)$$

Таким образом, путем локального устранения силы гравитационного поля в системе K' мы получим «правильный» результат, совпадающий с опытными данными.

Такой подход может быть подвергнут справедливой критике. Он заключается в простой истине, что никакими координатными преобразованиями, допустимыми в теории тяготения, нельзя обратить в нуль основной признак гравитационного поля — пространственную кривизну риманова пространства событий. Парадоксально, но вследствие этой причины в классическом труде по общей теории относительности [8] гравитационные поля, обусловленные наличием больших масс, названы «неустранимыми гравитационными полями».

Кроме этого, уравнение движения тела (7.75) относительно неинерциальной системы отсчета не переходит в нерелятивистском пределе в соответствующее классическое уравнение движения тела в неинерциальной системе отсчета (7.74), так как исходное уравнение (7.75) не содержит четырехмерную силу инерции. По идеологии предельного перехода к классике поле инерции должно присутствовать в уравнении движения (7.75) на геометрическом уровне.

Отсюда следует вывод: четырехмерные уравнения движения тела геометрической теории тяготения А. Эйнштейна в общем случае не имеют предельного перехода к уравнениям движения в классической механике. Это говорит о системных ограничениях теории в описании событий, которые принадлежат соответствующему пространству событий — риманову пространству.

В реальной относительности трудности предельного перехода к классическим уравнениям движения преодолеваются.

Уравнение движения ориентируемой частицы относительно квазиинерциальной реальной системы отсчета K

$$m\frac{du^i}{ds} = F^i{}_{external} \qquad (7.77)$$

совпадает по форме с соответствующим уравнением (7.75) общей теории относительности, но имеет другое содержание: относительно активных преобразований между реальными системами отсчета внешняя четырехмерная сила $F^{i}{}_{external}$ является L-вектором.

Это означает то, что если сила со стороны внешнего геометризированного поля $F^{i}{}_{external}$ проявляет себя в какой-либо реальной системе отсчета, то никакими активными преобразованиями, связанными с переходом наблюдателя в другую реальную систему отсчета, проявление этой силы уничтожить нельзя. Налицо прямая связь с классической механикой, где сила со стороны внешнего поля является вектором, имеющим (для ненулевого вектора) ненулевые значения в любой системе координат.

Уравнение движения ориентируемой частицы относительно неинерциальной реальной системы отсчета $K'(O')$ приобретает следующий вид

$$m\frac{du^{i'}}{ds} = F^{i'}{}_{external} + F^{i'}{}_{inertia}, \tag{7.78}$$

где

$$F^{i'}{}_{external} = \Lambda^{i'}{}_{i}\, F^{i}{}_{external} = -m\,\Gamma^{i'}{}_{j'k'}\, u^{j'}\, u^{k'} \tag{7.79}$$

— внешняя сила относительно системы отсчета $K'(O')$, являющаяся L-вектором,

$$F^{i'}{}_{inertia} = m\, l^{i'}{}_{a'}(O')\, \Lambda^{a'}{}_{b,k}\, u^{b}\, u^{k} \tag{7.80}$$

— четырехмерная сила инерции, не являющаяся L-вектором.

Уравнение движения (7.78) показывает, что на четырехмерную динамику ориентируемой частицы в неинерциальной реальной системе отсчета влияют две силы. Первая сила $F^{i'}{}_{external}$ обусловлена влиянием источника геометризированного поля, в котором движется ориентируемая частица. Вторая сила — четырехмерная сила инерции $F^{i'}{}_{inertia}$ проявляется только в неинерциальных реальных системах отсчета и обусловлена их четырехмерным вращением относительно некой квазиинерциальной

системы отсчета. В предыдущем разделе показано, что четырехмерная сила инерции в нерелятивистском пределе имеет значение классической силы инерции, возникающей в неинерциальной системе отсчета общего вида (ускоренной и вращающейся).

Таким образом, уравнения движения ориентируемой частицы в произвольной реальной системе отсчета (строго говоря, в произвольной реальной системе отсчета I рода) переходят в нерелятивистском пределе в классические уравнения движения частицы в неинерциальной системе отсчета. Принцип соответствия с классической механикой выполняется.

7.7. Уравнение ориентации ориентируемой частицы

Движение ориентированной частицы можно описывать из удаленной квазиинерциальной системы отсчета $K(O)$ с помощью основного уравнения динамики в неголономных координатах касательного расслоения

$$\frac{du^a}{ds} = T^{a\cdot\cdot}_{\cdot bk} u^b u^k, \tag{7.81}$$

где все величины взяты в точке нахождения частицы P. С помощью коэффициентов Ламэ $h^a{}_i(x^i)$, учтенных в классе $K(O)$, можно перевести (7.81) в уравнение

$$\frac{du^i}{ds} = -\Gamma^i{}_{jk}\, u^j\, u^k, \tag{7.82}$$

описывающее динамику частицы в мировых координатах из квазиинерциальной системы $K(O)$. Следовательно, в квазиинерциальной системе $K(O)$ в мировых координатах

$$F^i{}_{external} = -m\Gamma^i{}_{jk}\, u^j\, u^k, \quad F^i{}_{inertia} = 0, \tag{7.83}$$

в локально-лоренцевых координатах

$$F^a{}_{external} = mT^{a\cdot\cdot}_{\cdot bk} u^b u^k, \quad F^a{}_{inertia} = 0. \tag{7.84}$$

Рассмотрим реальную неинерциальную систему отсчета K' класса K, ассоциированную с ориентируемым телом малых размеров O', которое совершает свободное движение во внешнем поле. Основное уравнение движения частицы P в этой системе в соответствующих локально-лоренцевых координатах примет вид

$$\frac{du^{a'}}{ds} = T^{a'}_{\cdot\, b'k}\, u^{b'} u^{k}, \tag{7.85}$$

где $u^{a'} = \Lambda^{a'}_{\ a} u^{a}$ — локально-лоренцевы координаты четырехмерной скорости частицы, $\Lambda^{a'}_{\ a}$ — матрица четырехмерной ориентации K' относительно K.

По локально-лоренцевым координатам коэффициенты вращения Риччи между реальными системами отсчета $K(O)$ и $K'(O')$ преобразуются по формуле $(A13)$ Приложения 1 (выражаясь точнее, данное преобразование происходит между соответствующими локально-лоренцевыми системами $k(O)$ и $k'(O')$ в касательном расслоении). Вследствие этого основное уравнение (7.85) примет вид

$$\frac{du^{a'}}{ds} = \Lambda^{a'}_{\ a,k}\, \Lambda^{a}_{\ b'}\, u^{b'} u^{k} + \Lambda^{a'}_{\ a}\, T^{a}_{\cdot\, bk}\, \Lambda^{b}_{\ b'}\, u^{b'} u^{k}, \tag{7.86}$$

или, с учетом $u^{a} = \Lambda^{a}_{\ b'} u^{b'}$,

$$m\frac{du^{a'}}{ds} = m\Lambda^{a'}_{\ a,k}\, u^{a} u^{k} + \Lambda^{a'}_{\ a}\, m\, T^{a}_{\cdot\, bk}\, u^{b}\, u^{k}. \tag{7.87}$$

Второе слагаемое в правой части этого уравнения, принимая во внимание (7.84) и основное определение L-тензорного индекса (7.6), можно записать следующим образом

$$\Lambda^{a'}_{\ a}\, m\, T^{a}_{\cdot\, bk}\, u^{b}\, u^{k} = \Lambda^{a'}_{\ a} F^{a}_{\ external} = F^{a'}_{\ external}. \tag{7.88}$$

Первое слагаемое в правой части (7.87) есть четырехмерная сила инерции в локально-лоренцевых координатах системы $k'(O')$

$$m\Lambda^{a'}_{\ a,k}\, u^{a} u^{k} = F^{a'}_{\ inertia}. \tag{7.89}$$

Это утверждение следует из доказанного предельного перехода к классике выражения (7.46) для четырехмерной силы инерции в мировых координатах системы $K'(O')$.

Уравнение (7.87) и следующее из него уравнение

$$u^{a'}{}_{,k} = \Lambda^{a'}{}_{a,k}\, u^a + \Lambda^{a'}{}_{a}\, T^{a\cdot\cdot}_{\cdot b\, k}\, u^b \tag{7.90}$$

есть точное уравнение для локально-лоренцевых координат $u^{a'}$ четырехмерной скорости частицы P в реальной системе отсчета $K'(O')$, находящейся во внешнем поле и совершающей четырехмерные повороты $\Lambda^{a'}_{a}$ относительно начальной квазиинерциальной системы $K(O)$. Решая это уравнение, мы получим точную траекторию движения ориентируемой частицы P в неголономных координатах касательного расслоения. Сделав проекцию найденной траектории на базу расслоения, мы найдем траекторию частицы в мировых координатах $x^{i'}$ системы $K'(O')$.

Заметим, что прямое вычисление траектории частицы в мировых координатах из исследованного ранее уравнения (7.42) в некоторых случаях не будет обладать достаточной точностью, так как область действия уравнения (7.42) ограничена «близкой окрестностью» начала системы отсчета $K'(O')$.

Если совместить тело O' системы отсчета K' с ориентируемой частицей P, то система K' станет собственной системой отсчета частицы P, и в мировых координатах системы K' четырехмерная скорость частицы приобретет вид

$$u^{i'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.91}$$

В координатах локально-лоренцевой системы отсчета $k'(O')$, то есть в неголономных координатах касательного расслоения, четырехмерная скорость частицы будет отличаться от (7.91):

$$u^{a'} = h^{a'}_{i'}\, u^{i'} = h^{a'}_{0'}. \tag{7.92}$$

Подставляя (7.92) в (7.90), получим уравнение

$$h^{a'}{}_{0',k} - \Lambda^{a'}{}_{a,k}\, u^a - \Lambda^{a'}{}_{a}\, T^{a}_{\cdot b\, k}\, u^b = 0. \tag{7.93}$$

В этом уравнении неизвестной величиной является матрица четырехмерной ориентации $\Lambda^{a'}_{a}$ системы отсчета $K'(P)$ относительно начальной системы $K(O)$. Действительно, все входящие в уравнение (7.93) величины, помимо неизвестной Λ, являются характеристиками внешнего поля и могут быть выражены через поле коэффициентов Ламэ. При этом поле коэффициентов Ламэ, так же как и реальная система отсчета K', относится к классу K, то есть определено по отношению к начальной системе K

$$h^{a'}{}_{i'}(P) = \delta^{a'}{}_{a}\, h^{a}{}_{i}(P)\, \delta^{i}{}_{i'}.$$

Следовательно, исследуемое уравнение есть уравнение ориентации ориентируемой частицы P во внешнем поле.

Рассмотрим простейший случай нерелятивистского движения ориентируемой частицы в центральном потенциале $\varphi(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения. Примем, что удаленная квазиинерциальная система отсчета $K(O)$ покоится относительно центра поля. Пусть частица P движется из удаленного положения по направлению к центру поля (то есть с нулевым прицельным расстоянием). Расположим ось OX с началом в центре поля по радиусу-вектору частицы. В соответствии с принципом геометризации полей (разд. 2.4) мы можем записать эффективную метрику геометризированного поля в слабополевом приближении $\varphi/c^2 \ll 1$ в декартовых координатах в точке нахождения частицы

$$g_{km}(\mathbf{r}_P) = \begin{pmatrix} 1+2\varphi/c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+2\varphi/c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{7.94}$$

$$g^{ij}(\mathbf{r}_P) = \begin{pmatrix} 1-2\varphi/c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-2\varphi/c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7.95}$$

Здесь $\mathbf{r}_P$ — радиус-вектор частицы с координатами $\mathbf{r}_P = (x_P, 0, 0)$. Коэффициенты Ламэ в точке нахождения частицы представлены следующими матрицами

$$h^b{}_j(\mathbf{r}_P) = \begin{pmatrix} 1+\varphi/c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\varphi/c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.96}$$

$$h^i{}_a(\mathbf{r}_P) = \begin{pmatrix} 1-\varphi/c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\varphi/c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.97}$$

В ортогональных координатах ненулевые символы Кристоффеля вычисляются по следующему правилу [6, п. 16.10-3]

$$\Gamma^k{}_{ii} = -\frac{1}{2g_{kk}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k}\ (i \neq k), \quad \Gamma^k{}_{ik} = \Gamma^k{}_{ki} = \frac{1}{2g_{kk}}\frac{\partial g_{kk}}{\partial x^i}, \tag{7.98}$$

применяя которое в нашем случае, получим

$$\Gamma^1{}_{00} = \Gamma^0{}_{10} = \Gamma^0{}_{01} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \Gamma^1{}_{11} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \tag{7.99}$$

По известным коэффициентам Ламэ и символам Кристоффеля можно найти коэффициенты вращения Риччи (7.17):

$$T^{a\cdot\cdot}_{\cdot bk} = \left(h^a{}_{j,k} - \Gamma^m{}_{jk}\, h^a{}_m\right) h^j{}_b\,. \tag{7.100}$$

Приведем выражения для ненулевых коэффициентов вращения Риччи

$$T^{1\cdot\cdot}_{\cdot 00} = T^{0\cdot\cdot}_{\cdot 10} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \tag{7.101}$$

По правилам опускания локально-лоренцевых индексов имеем

$$T^{\cdot\cdot\cdot}_{100} = -T^{1\cdot\cdot}_{\cdot 00}, \quad T^{\cdot\cdot\cdot}_{010} = T^{0\cdot\cdot}_{\cdot 10}, \tag{7.102}$$

что соответствует основному свойству коэффициентов вращения Риччи $T^{\cdot\cdot\cdot}_{abk} = -T^{\cdot\cdot\cdot}_{bak}$ (Приложение 1).

Решая уравнение ориентации ориентируемой частицы (7.93), рассмотрим физически значимый случай $a' = 0'$ (из-за нулевых значений $h^{a'}_{0'}$ для $a' = 1', 2', 3'$) и $k = 1$ (что соответствует зависимости только от x параметров статического внешнего поля по линии движения ориентируемой частицы):

$$\underline{h}^{0'}_{0',1} - \Lambda^{0'}_{a,1}\, u^a - \Lambda^{0'}_{a}\, T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot b\,1}\, u^b = 0, \tag{7.103}$$

где литера h с чертой внизу обозначает коэффициенты Ламэ с нижним мировым индексом

$$\underline{h}^{0'}_{0'} = h^{a'=0'}_{i'=0'}. \tag{7.104}$$

В нерелятивистском приближении с точностью $o(\beta_x^2)$, где $\beta_x = V_{O'x}/c$:

$$\Lambda^{a'}_{a} = \begin{pmatrix} 1+\beta_x^2/2 & -\beta_x & 0 & 0 \\ -\beta_x & 1+\beta_x^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.105}$$

В неподвижной начальной системе отсчета $K(O)$ локально-лоренцевы и мировые координаты L-вектора четырехмерной скорости частицы совпадают

$$u^a = \delta^a_{\ i}\, u^i = \begin{pmatrix} 1+\beta_x^2/2 \\ \beta_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.106}$$

Что же касается матрицы $\Lambda^{a'}_{a,\,k}$, задающей скорость изменения ориентации частицы по направлению x^k, то подразумевается, что ее значения в дифференциальном уравнении ориентации должны браться в начале пространственного или псевдоевклидового поворота частицы в поле φ (то есть она должна быть генератором преобразования Λ по направлению x^k [46]):

$$\Lambda^{a'}_{a,\,k} = \frac{\partial \Lambda^{a'}_{\ a}}{\partial x^k}(\phi = 0,\, \beta_x = 0). \tag{7.107}$$

По этому соглашению имеем

$$\Lambda^{a'}_{a,1}(\beta_x=0)=\begin{pmatrix}0 & -\beta_{x,1} & 0 & 0\\ -\beta_{x,1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{7.108}$$

Подставляя в уравнение ориентации (7.103) полученные выражения (7.106), (7.108), значение $\underline{h}^{0'}_{0',1}$ из (7.96), а также учитывая, что $T^{a\cdot\cdot}_{\cdot b\,1}=0$ для любых локально-лоренцевых индексов a, b, получим с точностью до $o(\beta_x^2)$:

$$\frac{1}{c^2}\,\varphi_{,1}+\beta_{x,1}\,\beta_x=0, \tag{7.109}$$

или

$$\left(\varphi+\frac{V^2_{O'x}}{2}\right)_{,1}=0, \tag{7.110}$$

откуда следует

$$m\varphi+m\frac{V^2_{O'x}}{2}=\text{const}, \tag{7.111}$$

что повторяет нерелятивистский закон сохранения кинетической и потенциальной энергии частицы в потенциальном поле φ.

Мы показали, что основное уравнение четырехмерной ориентации ориентируемой частицы (7.93), которое в проекции на трехмерное пространство приобретает также смысл уравнения движения, имеет предельный переход к нерелятивистскому уравнению движения классической материальной точки. Принцип соответствия соблюден.

7.8. Обратное уравнение ориентации

Уравнение

$$h^{a'}_{0',k}-\Lambda^{a'}_{a,k}\,u^a-\Lambda^{a'}_{a}\,T^{a\cdot\cdot}_{\cdot b\,k}\,u^b=0, \tag{7.112}$$

следующее из основных свойств расслоенного пространства событий реальной относительности, определяет текущую четырехмерную ориентацию частицы как функцию внешнего поля

$$\Lambda^{a'}{}_{a}(x^k) = \mathbb{F}\left[h^{a}{}_{i}(x^k)\right]. \tag{7.113}$$

В этом случае оно приобретает смысл уравнения ориентации.

Опытные данные [4] говорят о том, что *система ориентируемых точек* может перемещать свой центр инерции без внешнего поля путем изменения четырехмерных ориентаций ее элементов за счет *моментов сил внутреннего происхождения*. Это утверждение эквивалентно следующему. Изменяя за счет внутренних моментов четырехмерную ориентацию частицы, можно индуцировать силовое поле, локально действующее на частицу. Последнее означает, что наведенное поле способно передвигать рассматриваемую частицу, а вместе с ней систему ориентируемых частиц как целое.

Отсутствие внешнего поля означает, что в декартовых координатах покоящейся системы отсчета K

$$h^{a}{}_{i} = \delta^{a}{}_{i}, \quad h^{j}{}_{b} = \delta^{j}{}_{b}, \quad \Gamma^{i}{}_{jk} = 0, \quad T^{a\cdot\cdot}_{\cdot b\,k} = 0. \tag{7.114}$$

Далее из уравнения ориентации (7.112) следует $\Lambda^{a'}{}_{a,0} = 0$, откуда, с учетом начального условия $\Lambda^{a'}{}_{a}(t{=}0) = \delta^{a'}{}_{a}$ (которое происходит от принадлежности собственной системы отсчета частицы к классу K), получаем решение

$$\Lambda^{a'}{}_{a}(t) = \delta^{a'}{}_{a}. \tag{7.115}$$

Полученный результат означает состояние покоя частицы.

Уравнение (7.112) позволяет рассмотреть обратную задачу: найти индуцированное поле $h^{a}{}_{i}(x^k) = \delta^{a}{}_{i} + \Delta h^{a}{}_{i}(x^k)$ как функцию измененной по внутренним причинам четырехмерной ориентации ориентируемой частицы $\Lambda^{a'}{}_{a}(x^k) = \delta^{a'}{}_{a} + \Delta\Lambda^{a'}{}_{a}(x^k)$

$$h^{a}{}_{i}(x^k) = \mathbb{F}^{-1}\left[\Lambda^{a'}{}_{a}(x^k)\right]. \tag{7.116}$$

Ставя задачу таким образом, мы будем называть уравнение (7.112) *обратным уравнением ориентации*.

Покажем на примере известного механического устройства — инерциоида, что изменяемая за счет внутренних моментов четырехмерная ориентация его составных частей индуцирует силовое поле, действующее непосредственно на эти части. За счет жестких связей действие передается на все устройство, которое таким образом *передвигается как целое* в пустом пространстве (то есть в отсутствии внешнего поля).

7.9. Инерциоид: общие сведения

Рассмотрим инерциоид — механическое устройство, не имеющее механической или реактивной тяги, однако, при определенных настройках, приобретающее продольные импульсы за каждый период вращения его внутренних элементов.

Открытие необычных свойств инерциоида связано с именем В.Н. Толчина [67]. Подробные экспериментальные исследования, показавшие наличие продольной периодической тяги в данном устройстве, проведены в последнее время Г.И. Шиповым [68]. На основе новых представлений о пространстве событий ориентируемых точек Г.И. Шиповым создана феноменологическая модель инерциоида, позволяющая производить расчет движения этого устройства [68].

Устройство состоит из центрального тела массы M и двух малых грузов $m1$ и $m2$ массой m каждый, вращающихся в горизонтальной плоскости по и против часовой стрелки на жестких штангах длиной l каждая (рис. 7.3). Движения и положения малых грузов всегда зеркально симметричны относительно продольного направления OX. Центральное тело M снабжено мотором-тормозом, способным передавать равные по величине Φl и зеркально-симметричные по направлению моменты сил на каждый из двух малых грузов. Устройство движется на колесиках, на которые не проведено механической тяги.

С данным устройством можно связать несколько реальных

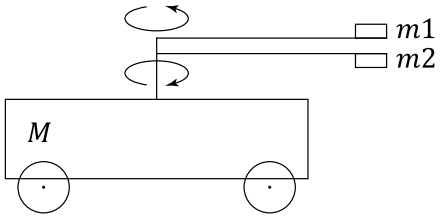

Рис. 7.3: Инерциоид. Вид сбоку

систем отсчета. Первая, покоящаяся реальная система отсчета K, связана с горизонтальной платформой, по которой движется инерциоид. Вторая, неинерциальная реальная система отсчета $\widetilde{K}$, жестко связана с центральным телом M, движущимся в поступательном направлении OX со скоростью $\widetilde{V}$ и с ускорением $d\widetilde{V}/dt = \dot{\widetilde{V}}$. Третья, неинерциальная реальная система отсчета K', соединена с малым грузом $m1$ (рис. 7.4).

Существует несколько разновидностей инерциоидов, отличающихся прежде всего секторами разгона и торможения малых грузов — то есть настройкой функции мотора-тормоза $K(\phi) = \Phi(\phi)/ml$. В анализе инерциоида, проводимом при помощи новой *динамики ориентируемых точек*, мы ограничимся моделью инерциоида, имеющим для груза $m1$ сектор разгона $[0, \epsilon]$, где ϵ — достаточно малый угол, и сектор торможения $[\pi - \epsilon, \pi]$. В секторе углов $[0, \epsilon]$ грузу $m1$ сообщается ускоряющий момент импульса $\Phi\, \Delta t_\epsilon\, l$, благодаря которому угловая скорость вращения груза возрастает с малого значения Ω_0 до значения Ω_ϵ. Далее груз $m1$ свободно (без дополнительных моментов) достигает сектора углов $[\pi - \epsilon, \pi]$, где ему сообщается тормозящий момент импульса, уменьшающий его угловую скорость до значения Ω_0. Затем следует второй полуцикл вращения малого груза $m1$ в интервале углов от π до 2π, совершаемый свободно, но с меньшей средней угловой скоростью. Грузу $m2$ сообщаются ускоряющие и тормозящие моменты таким образом, чтобы его движение по углу ϕ было зеркально-симметричным движению груза $m1$.

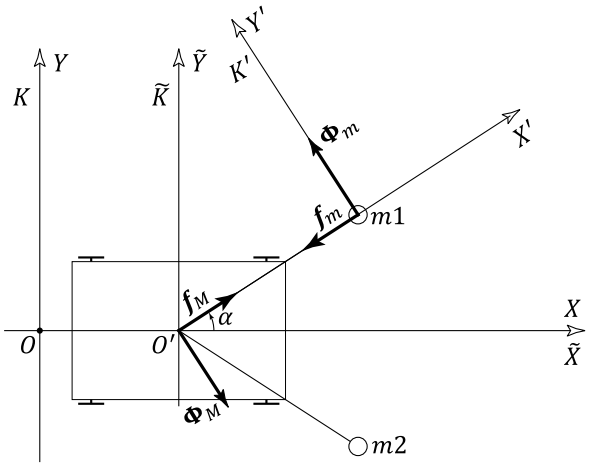

Рис. 7.4: Инерциоид. Вид сверху

7.10. Инерциоид и классическая механика

Рассмотрим исследуемое устройство (инерциоид) с точки зрения ньютоновской механики трехмерной материальной точки.

В силу зеркальной симметрии грузов $m1$ и $m2$ относительно оси OX мы рассмотрим движение одного груза, например $m1$. При этом силы реакции (противодействия), действующие на центральное тело M со стороны $m1$ и $m2$, будут:

— складываться по направлению движения OX инерциоида;

— взаимно компенсироваться в направлении OY, перпендикулярном направлению движения инерциоида.

Уравнение движения груза $m1$ в неподвижной системе $K(O)$ следующее

$$m\frac{d^2\mathbf{R}_{m1}}{dt^2} = \sum \mathbf{F}_{m1}, \tag{7.117}$$

где $\mathbf{R}_{m1}$ — радиус-вектор $m1$ в координатах системы K, $\sum \mathbf{F}_{m1}$ — сумма внешних сил, действующих на $m1$. Заметив, что

$$\frac{d^2\tilde{\mathbf{r}}_{m1}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{R}_{m1}}{dt^2} - \dot{\tilde{V}}\,\mathbf{i}, \tag{7.118}$$

где $\tilde{\mathbf{r}}_{m1}$ — радиус-вектор груза $m1$ в системе $\tilde{K}$, $\mathbf{i}$ — единичный вектор (орт), направленный по оси OX, мы можем записать уравнения движения $m1$ в ускоренной системе $\tilde{K}$:

$$m\,\frac{d^2\tilde{\mathbf{r}}_{m1}}{dt^2} = \sum \mathbf{F}_{m1} - m\,\dot{\tilde{V}}\,\mathbf{i}, \tag{7.119}$$

К силам $\mathbf{F}_{m1}$, действующим на $m1$, относятся:

— сила $\mathbf{f}_m$, удерживающая груз $m1$ и действующая со стороны центрального тела M через жесткую штангу l. Она направлена строго по нормали к траектории движения $m1$;

— сила $\mathbf{\Phi}_m$, приложенная со стороны центрального тела M (сила мотора-тормоза) и имеющая только тангециальную составляющую.

Разложение ускорения $d^2\tilde{\mathbf{r}}_{m1}/dt^2$ на нормальную и тангециальную составляющие имеет вид

$$\frac{d^2\tilde{\mathbf{r}}_{m1}}{dt^2} = -l\,\Omega^2\,\mathbf{i}' + l\,\dot{\Omega}\,\mathbf{j}', \tag{7.120}$$

где $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ — единичные векторы (орты), отложенные по осям $O'X'$ и $O'Y'$ системы отсчета K'. Учитывая соотношение

$$\mathbf{i} = \cos\phi\,\mathbf{i}' - \sin\phi\,\mathbf{j}', \tag{7.121}$$

и, введя обозначения для абсолютных значений сил $\mathbf{f}_m$ и $\mathbf{\Phi}_m$

$$\begin{aligned} f &= |\mathbf{f}_m|, \\ \Phi &= |\mathbf{\Phi}_m|, \end{aligned} \tag{7.122}$$

получим уравнения движения $m1$ в нормальном $(\mathbf{i}')$

$$f + m\,\dot{\tilde{V}}\,\cos\phi = m\,l\,\Omega^2 \tag{7.123}$$

и в тангенциальном $(\mathbf{j}')$ направлениях

$$\Phi + m\,\dot{\tilde{V}}\,\sin\phi = m\,l\,\dot{\Omega}. \tag{7.124}$$

Уравнение движения для центрального тела M в направлении OX выводится при учете сил реакции $\mathbf{f}_M$ и $\mathbf{\Phi}_M$, действующих

на M со стороны $m1$. Эти силы равны и противоположны соответствующим силам $\mathbf{f}_m$ и $\mathbf{\Phi}_m$, действующим на $m1$ со стороны основного тела M:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{f}_M = -\mathbf{f}_m, & |\mathbf{f}_M| = f, \\ \mathbf{\Phi}_M = -\mathbf{\Phi}_m, & |\mathbf{\Phi}_M| = \Phi. \end{array} \tag{7.125}$$

Таким образом,

$$2f\cos\phi + 2\Phi\sin\phi - M\,\dot{\tilde{V}} = 0. \tag{7.126}$$

Из уравнений (7.123) и (7.126) получим соотношение для $\dot{\tilde{V}}$

$$\dot{\tilde{V}} = \varrho\, l\,\frac{\sin\phi\, K + \Omega^2\,\cos\phi}{1+\varrho\cos^2\phi}. \tag{7.127}$$

Здесь обозначено

$$\varrho = \frac{2m}{M} \tag{7.128}$$

и введена функция мотора-тормоза

$$K(\phi) = \frac{\Phi(\phi)}{m\,l}. \tag{7.129}$$

Подставив в уравнение (7.124) соотношение (7.127) и перейдя от производной по времени к производной по угловой переменной

$$\dot{\Omega} = \frac{d\Omega}{d\phi}\,\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\Omega}{d\phi}\,\Omega = \frac{1}{2}\,\frac{d\Omega^2}{d\phi}\,, \tag{7.130}$$

получим следующее уравнение для $\nu = \Omega^2$:

$$\nu' - \frac{2\varrho\sin\phi\cos\phi}{1+\varrho\cos^2\phi}\,\nu = \frac{2\,K(\phi)(1+\varrho)}{1+\varrho\cos^2\phi}\,. \tag{7.131}$$

Штрихом здесь обозначена производная по ϕ:

$$(\ )' = \frac{d(\ )}{d\phi}. \tag{7.132}$$

При заданной функции мотора-тормоза $K(\phi)$ уравнение (7.131) определяет скорость вращения малых грузов $\Omega(\phi)$.

Из уравнения (7.131) мы можем получить обратное соотношение, определяющее функцию мотора-тормоза $K(\phi)$ в зависимости от угловой скорости $\Omega(\phi)$ и углового ускорения $d\Omega/d\phi$:

$$K(\phi) = \Omega\,\frac{d\Omega}{d\phi}\,\frac{1+\varrho\,\cos^2\phi}{1+\varrho} - \Omega^2\,\frac{\varrho\,\sin\phi\,\cos\phi}{1+\varrho}. \tag{7.133}$$

Определим скорость центрального тела M

$$\widetilde{V}(\phi) - \widetilde{V}(0) = \int_{t(0)}^{t(\phi)} \dot{\widetilde{V}}\,dt = \int_0^{\phi} \dot{\widetilde{V}}\,\frac{d\xi}{\Omega}. \tag{7.134}$$

Подставив в (7.134) выражение (7.127) для $\dot{\widetilde{V}}$, получим

$$\widetilde{V}(\alpha) - \widetilde{V}(0) = \varrho\,l\int_0^{\alpha} \frac{\sin\xi\,K(\xi) + \Omega^2(\xi)\,\cos\xi}{1+\varrho\,\cos^2\xi}\,\frac{d\xi}{\Omega(\xi)}. \tag{7.135}$$

Воспользовавшись в полученной формуле соотношением (7.133) для функции мотора-тормоза $K(\phi)$, получим

$$\widetilde{V}(\phi) - \widetilde{V}(0) = \frac{\varrho\,l}{1+\varrho}\int_0^{\phi} [\sin\,\xi\,\frac{d\Omega}{d\xi} + \Omega(\xi)\,\cos\xi]d\xi. \tag{7.136}$$

Произведя в первой части интеграла интегрирование по частям, получим окончательно

$$\widetilde{V}(\phi) - \widetilde{V}(0) = \frac{\varrho\,l}{1+\varrho}\,\sin\phi\,\Omega(\phi). \tag{7.137}$$

Формула (7.137) показывает зависимость скорости центрального тела от угла отклонения малых грузов ϕ и от их угловой скорости $\Omega(\phi)$, которая, в свою очередь, зависит от геометрических характеристик устройства и от функции мотора-тормоза $K(\phi)$ согласно уравнению (7.131). Тем не менее, формула (7.137) позволяет вычислить приращение скорости центрального тела за период

обращения малых грузов (то есть за цикл работы инерциоида) для любой функции мотора-тормоза $K(\phi)$

$$\widetilde{V}(2\pi) - \widetilde{V}(0) = 0. \tag{7.138}$$

Так как в момент завершения полного оборота малых грузов система полностью принимает первоначальное положение, то полученный вывод (7.138) о сохранении скорости касается устройства как целого.

Вычислим координату центрального тела $\widetilde{x}_M$ в неподвижной системе $K(O)$. Без ограничения общности положим, что в момент времени, соответствующий начальному положению грузов $\phi = 0$, скорость и координата центрального тела принимали нулевые значения:

$$\widetilde{V}(0) = 0, \quad \widetilde{x}_M(0) = 0. \tag{7.139}$$

Тогда

$$\widetilde{x}_M(\phi) = \int_{t(0)}^{t(\phi)} \widetilde{V}\, dt = \int_0^{\phi} \widetilde{V}(\xi)\, \frac{d\xi}{\Omega(\xi)} = \frac{\varrho\, l}{1+\varrho}\,(1 - \cos\phi). \tag{7.140}$$

Легко видеть, что изменение координаты центрального тела за цикл инерциоида (период 2π обращения малых грузов) равно нулю:

$$\widetilde{x}_M(2\,\pi) = 0. \tag{7.141}$$

Принимая во внимание, что координата малых грузов по оси OX равна

$$x_m(\phi) = \widetilde{x}_M(\phi) + l\,\cos\phi\,, \tag{7.142}$$

легко можно вычислить координату центра инерции инерциоида системы $M + 2m$

$$x_{(M+2m)} = \frac{M\,\widetilde{x}_M + 2m\,x_m}{M+2m} = \frac{\varrho\, l}{1+\varrho}\,. \tag{7.143}$$

Мы видим, что для любой функции мотора-тормоза $K(\phi)$ центр инерции инерциоида остается в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, что находится точно в соответствии с законами классической механики.

Решим уравнение (7.131) для свободного движения инерциоида, когда малые грузы вращаются без ускоряющего или тормозящего момента:

$$K(\phi) = 0. \tag{7.144}$$

В этом случае уравнение (7.131) принимает вид однородного дифференциального уравнения для $\nu(\phi) = \Omega^2(\phi)$:

$$\nu' - \frac{2\varrho \sin\phi \cos\phi}{1 + \varrho \cos^2\phi}\, \nu = 0\,. \tag{7.145}$$

Решение (7.145) находится методом разделения переменных

$$\Omega(\phi) = \frac{C}{\sqrt{1 + \varrho\, \cos^2\phi}}, \tag{7.146}$$

где C — константа интегрирования. Найдя C из начальных условий, получим окончательно

$$\Omega(\phi) = \Omega_0 \sqrt{\frac{1+\varrho}{1 + \varrho\, \cos^2\phi}}, \tag{7.147}$$

где $\Omega_0 = \Omega(\phi = 0)$. Такое же решение для угловой скорости свободного инерциоида было найдено в [2].

Из (7.146) может быть выведена зависимость времени от угловой переменной. Обозначая

$$k^2 = \frac{\varrho}{1+\varrho} = \frac{2m}{M+2m}, \tag{7.148}$$

получим

$$dt = \frac{1}{\Omega_0}\, \sqrt{1 - k^2 \sin\phi}\; d\phi. \tag{7.149}$$

Интегрируя (7.149), получим аналитическую зависимость времени прохождения малыми грузами углового расстояния от 0 до ϕ ($\phi \le \pi/2$) от угла ϕ

$$\Delta t\,(0 \to \phi) = \frac{1}{\Omega_0} \int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\xi}\; d\xi = \frac{1}{\Omega_0}\, E(\phi,\, k)\,, \tag{7.150}$$

где $E(\phi,\, k)$ — нормальный эллиптический интеграл Лежандра второго рода [6]. Соответственно, время прохождения малыми грузами первой половины полного оборота равно

$$\Delta t\,(0 \to \pi) = \frac{2}{\Omega_0} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}\; d\xi = \frac{2}{\Omega_0}\, E(\frac{\pi}{2},\, k)\,, \quad (7.151)$$

где $E(\frac{\pi}{2},\, k)$ — полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра второго рода [6]. Так как $k^2 < 1$, то в данной формуле можно воспользоваться разложением [6]

$$E(\frac{\pi}{2},\, k) = \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \ldots \right] \quad (7.152)$$

и получить приближенно

$$\Delta t\,(0 \to \pi) \approx \frac{\pi}{\Omega_0} \left(1 - \frac{k^2}{4} \right) . \quad (7.153)$$

С позиции механики Ньютона инерциоид представляет собой «систему материальных точек, взаимодействующих только друг с другом, т.е. ни с какими посторонними телами не взаимодействующих; такую систему называют *замкнутой*» [66, §5]. Скорость центра инерции замкнутой системы не может быть изменена за счет взаимодействия элементов системы. Это положение, которое является следствием законов Ньютона, фактически было подтверждено в модели инерциоида как системы материальных точек с произвольной функцией мотора-тормоза $K(\phi)$.

Но Его Величество Эксперимент дает нам право произнести знаменитую фразу: «*E pur si muove!*» (в переводе с итальянского: «*И все-таки она движется!*») и сделать вытекающий из этого вывод о том, что движение инециоида выходит за рамки механики Ньютона — механики трехмерных материальных точек.

В следующем разделе будет показано, что «аномальное» движение инерциоида может быть объяснено с позиции более общей *динамики ориентируемых точек в четырехмерном пространстве*.

7.11. Инерциоид и динамика ориентируемых точек

На примере инерциоида мы имеем устройство, производящее в отсутствии внешних полей периодические движения его элементов и влияющее посредством внутренних моментов на их четырехмерную ориентацию.

Поставим следующую задачу: с помощью обратного уравнения ориентации

$$h^{a'}{}_{0',k} - \Lambda^{a'}{}_{a,k}\, u^a - \Lambda^{a'}{}_{a}\, T^{a\cdot\cdot}_{\cdot b\, k}\, u^b = 0 \qquad (7.154)$$

определить величину поля, возникающего в месте нахождения ориентируемой частицы в случае изменения ее ориентации исключительно по внутренним причинам. Причиной возникновения (индукции) поля является взаимодействие ориентируемой частицы с касательным расслоением — структурой, являющейся дополнительной по отношению к риманову пространству — пространству событий общей относительности.

В качестве ориентируемой частицы мы рассмотрим груз $m1$, на четырехмерную ориентацию которого влияет мотор-тормоз (внутреннее устройство, передающее зеркально-симметричные моменты на грузы $m1$ и $m2$). Уравнение обратной ориентации (7.154) мы будем рассматривать в слабополевом нерелятивистском пределе в покоящейся системе отсчета $K(O)$, а действующее на ориентируемую частицу поле представим в виде эффективного классического потенциала φ.

Мы имеем отсутствие взаимодействий по вертикальной оси OZ и компенсацию сил, действующих на центральное тело M в поперечном направлении (по оси OY). Классическое поле $\varphi(x^i)$, эффективно воссоздающее действие геометрического поля $h^a{}_k(x^i)$, мы будем рассматривать в общем виде, то есть зависящим от продольной и поперечной координат x и y и от времени t. Имеем для метрики индуцированного поля в декартовых координатах $x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z$ системы

отсчета $K(O)$ [10, §106]:

$$g_{km} = \begin{pmatrix} 1+\frac{2\varphi}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+\frac{2\varphi}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+\frac{2\varphi}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1-\frac{2\varphi}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\frac{2\varphi}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\frac{2\varphi}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{7.155}$$

и для коэффициентов Ламэ с нижним и с верхним мировыми индексами:

$$\underline{h}^b{}_j = \begin{pmatrix} 1+\frac{\varphi}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{\varphi}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{\varphi}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\overline{h}^i{}_a = \begin{pmatrix} 1-\frac{\varphi}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{\varphi}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\frac{\varphi}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.156}$$

(Здесь и далее в настоящем разделе во избежание путаницы при конкретных значениях индексов у коэффициентов Ламэ будем обозначать $\underline{h}^b{}_j = h^b{}_j$, $\overline{h}^i{}_a = h^i{}_a$). Приведем ненулевые символы Кристоффеля, вычисленные в ортогональных координатах системы $K(O)$ по правилам формулы (7.98):

$$\Gamma^0{}_{00} = \frac{1}{c^2}\varphi_{,0} = \frac{1}{c^3}\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$
$$\Gamma^0{}_{11} = \Gamma^0{}_{22} = \Gamma^1{}_{10} = \Gamma^1{}_{01} = \Gamma^2{}_{20} = \Gamma^2{}_{02} = -\frac{1}{c^2}\varphi_{,0} = -\frac{1}{c^3}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{7.157}$$

$$\begin{gathered}\Gamma^{1}{}_{00}=\Gamma^{1}{}_{22}=\Gamma^{0}{}_{01}=\Gamma^{0}{}_{10}=\frac{1}{c^2}\varphi_{,1}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x},\\ \Gamma^{1}{}_{11}=\Gamma^{2}{}_{21}=\Gamma^{2}{}_{12}=-\frac{1}{c^2}\varphi_{,1}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x},\\ \Gamma^{2}{}_{00}=\Gamma^{2}{}_{11}=\Gamma^{0}{}_{02}=\Gamma^{0}{}_{20}=\frac{1}{c^2}\varphi_{,2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y},\\ \Gamma^{1}{}_{12}=\Gamma^{1}{}_{21}=\Gamma^{2}{}_{22}=-\frac{1}{c^2}\varphi_{,2}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y},\end{gathered}\tag{7.158}$$

а также ненулевые коэффициенты вращения Риччи

$$T^{0\cdot\cdot}_{\cdot 11}=T^{1\cdot\cdot}_{\cdot 01}=T^{0\cdot\cdot}_{\cdot 22}=T^{2\cdot\cdot}_{\cdot 02}=\frac{1}{c^2}\varphi_{,0}=\frac{1}{c^3}\frac{\partial\varphi}{\partial t},\tag{7.159}$$

$$\begin{gathered}T^{0\cdot\cdot}_{\cdot 10}=T^{1\cdot\cdot}_{\cdot 00}=T^{1\cdot\cdot}_{\cdot 22}=-T^{2\cdot\cdot}_{\cdot 12}=-\frac{1}{c^2}\varphi_{,1}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x},\\ T^{0\cdot\cdot}_{\cdot 20}=T^{2\cdot\cdot}_{\cdot 00}=T^{2\cdot\cdot}_{\cdot 11}=-T^{1\cdot\cdot}_{\cdot 21}=-\frac{1}{c^2}\varphi_{,2}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y},\end{gathered}\tag{7.160}$$

вычисленные по формуле

$$T^{a\cdot\cdot}_{\cdot bk}=\left(\underline{h}^{a}{}_{j,k}-\Gamma^{m}_{jk}\,\underline{h}^{a}{}_{m}\right)\overline{h}^{j}{}_{b}\,.\tag{7.161}$$

Имеем для ортогональных координат

$$\underline{h}^{a'}{}_{0',k}=0,\quad a'=1',\,2',\,3',\tag{7.162}$$

поэтому обратное уравнение ориентации (7.154) сохраняет свой вид только при $a'=0'$:

$$\underline{h}^{0'}{}_{0',k}-\Lambda^{0'}{}_{a,k}\,u^{a}-\Lambda^{0'}{}_{a}\,T^{a\cdot\cdot}_{\cdot b\,k}\,u^{b}=0.\tag{7.163}$$

В рассматриваемом случае ориентация элементов системы ориентируемых точек меняется благодаря внутренним моментам только во времени, поэтому второй член в обратном уравнении ориентации (7.154) актуален лишь при $k=0$.

Матрица четырехмерной ориентации реальной системы отсчета $K'(O')$(собственной системы отсчета $m1$) относительно неподвижной системы $K(O)$ может быть составлена в двух вариантах: $\Lambda^{a'}_{a}=RL$, либо $\Lambda^{a'}_{a}=LR$, что соответствует реализации

реальной системы отсчета $K'(O')$ в виде неинерциальнй системы отсчета I рода или II рода. Здесь R — матрица пространственного вращения в плоскости XOY:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.164}$$

L — матрица псевдоевклидова вращения, выраженная с точностью до $o(\beta^2)$:

$$L = \begin{pmatrix} 1+\frac{\beta_x^2+\beta_y^2}{2} & -\beta_x & -\beta_y & 0 \\ -\beta_x & 1+\frac{\beta_x^2}{2} & 1+\frac{\beta_x\beta_y}{2} & 0 \\ -\beta_y & 1+\frac{\beta_x\beta_y}{2} & 1+\frac{\beta_y^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.165}$$

где $\beta_x = V_{O'x}(t)/c$, $\beta_y = V_{O'y}(t)/c$, а $V_{O'x}(t), V_{O'y}(t)$ — компоненты скорости системы $K'(O')$ относительно неподвижной системы K.

Рассмотрим второе слагаемое в уравнении (7.163) при актуальном значении $k = 0$. Имеем для неинерциальной системы отсчета $K'(O')$ I и II рода

$$\Lambda^{a'}_{a,\,0}(\phi{=}0,\,\beta{=}0) = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} 0 & -\dot\beta_x & -\dot\beta_y & 0 \\ -\dot\beta_x & 0 & \Omega & 0 \\ -\dot\beta_y & -\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.166}$$

Далее, учитывая u^b с точностью до $o(\beta^2)$

$$u^b = \delta^b{}_j\, u^j = \begin{pmatrix} 1+\frac{\beta_x^2+\beta_y^2}{2} \\ \beta_x \\ \beta_y \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.167}$$

получим с требуемой (до $o(\beta^2)$) точностью

$$\Lambda^{0'}_{a,0}\,u^a = \frac{1}{c}\left(-\dot\beta_x\,\beta_x - \dot\beta_y\,\beta_y\right). \tag{7.168}$$

Определим значение третьего члена $\mathbb{M}^{0'}_{\ k} = \Lambda^{0'}_{\ a}\,T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,b\,k}\,u^b$ в уравнении (7.163), учитывая нулевые значения коэффициентов вращения Риччи при совпадении верхнего и нижнего локально-лоренцевых индексов:

$$\begin{aligned}\mathbb{M}^{0'}_{\ k} = \Lambda^{0'}_{\ a}\,T^{a\,\cdot\cdot}_{\cdot\,b\,k}\,u^b = (\Lambda^{0'}_{\ 0}\,u^1 + \Lambda^{0'}_{\ 1}\,u^0)T^{0\,\cdot\cdot}_{\cdot\,1\,k} + \\ +(\Lambda^{0'}_{\ 0}\,u^2 + \Lambda^{0'}_{\ 2}\,u^0)T^{0\,\cdot\cdot}_{\cdot\,2\,k} + (\Lambda^{0'}_{\ 1}\,u^2 - \Lambda^{0'}_{\ 2}\,u^1)T^{1\,\cdot\cdot}_{\cdot\,2\,k}.\end{aligned} \tag{7.169}$$

Здесь учтены свойства коэффициентов вращения Риччи

$$\begin{aligned}T^{0\,\cdot\cdot}_{\cdot\,1\,k} &= T^{1\,\cdot\cdot}_{\cdot\,0\,k},\\ T^{0\,\cdot\cdot}_{\cdot\,2\,k} &= T^{2\,\cdot\cdot}_{\cdot\,0\,k},\\ T^{1\,\cdot\cdot}_{\cdot\,2\,k} &= -T^{2\,\cdot\cdot}_{\cdot\,1\,k},\end{aligned} \tag{7.170}$$

следующие из условия их антисимметричности $T^{\cdot\cdot\cdot}_{a\,b\,k} = -T^{\cdot\cdot\cdot}_{b\,a\,k}$. Вставляя в полученную формулу конкретные значения u^b (с точностью до $o(\beta^2)$) и значения $\Lambda^{0'}_{\ a}$, получим для случая неинерциальной системы $K'(O')$ I рода ($\Lambda^{a'}_{\ a} = RL$)

$$^{(I)}\mathbb{M}^{0'}_{\ k} = 0, \tag{7.171}$$

и для случая неинерциальной системы $K'(O')$ II рода ($\Lambda^{a'}_{\ a} = LR$)

$$\begin{aligned}{}^{(II)}\mathbb{M}^{0'}_{\ k} = [\beta_x(1-\cos\phi) + \beta_y\sin\phi]\,T^{0\,\cdot\cdot}_{\cdot\,1\,k} + \\ +[-\beta_x\sin\phi + \beta_y(1-\cos\phi)]\,T^{0\,\cdot\cdot}_{\cdot\,2\,k} + (\beta_x^2+\beta_y^2)\sin\phi\,T^{1\,\cdot\cdot}_{\cdot\,2\,k}.\end{aligned} \tag{7.172}$$

Для $k=0$ имеем, с учетом (7.160),

$$\begin{aligned}{}^{(II)}\mathbb{M}^{0'}_{\ 0} = [\beta_x(1-\cos\phi) + \beta_y\sin\phi]\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \\ +[-\beta_x\sin\phi + \beta_y(1-\cos\phi)]\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right).\end{aligned} \tag{7.173}$$

Перепишем обратное уравнение ориентации (7.163) в конкретном виде для значений $a' = 0,\ k = 0$

$$\frac{1}{c^3}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{c}\left(\dot{\beta}_x\,\beta_x + \dot{\beta}_y\,\beta_y\right) = \mathbb{M}^{0'}_{0}. \tag{7.174}$$

Разделим индуцируемый потенциал на классическую и дополнительную части:

$$\varphi = \varphi_{class} + \overset{\star}{\varphi}, \tag{7.175}$$

где φ_{class} подчиняется классическому закону сохранения потенциальной и кинетической энергии (на единицу массы)

$$\varphi_{class} + \frac{V^2_{O'x} + V^2_{O'y}}{2} = \text{const}, \tag{7.176}$$

а для дополнительного потенциала получаем следующие уравнения:

$$\frac{\partial\overset{\star}{\varphi}}{\partial t} = 0 \tag{7.177}$$

— для системы отсчета I рода,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overset{\star}{\varphi}}{\partial t} = &-\left[2\sin^2\!\left(\frac{\phi}{2}\right)V_{O'x} + \sin\phi\,V_{O'y}\right]\left(\frac{\partial\overset{\star}{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_{class}}{\partial x}\right) + \\ &+\left[\sin\phi\,V_{O'x} - 2\sin^2\!\left(\frac{\phi}{2}\right)V_{O'y}\right]\left(\frac{\partial\overset{\star}{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_{class}}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{7.178}$$

— для системы отсчета II рода.

В свободном движении инерциоида (без приложения внутренних моментов) собственная система отсчета $K'(O')$ груза $m1$ является неинерциальной системой отсчета I рода, тогда, согласно уравнению (7.177), дополнительного потенциала $\overset{\star}{\varphi}$ не возникает. В секторе разгона и торможения, при действии на груз $m1$ внутренних моментов, система отсчета $K'(O')$ перескакивает

на другую ветвь и становится неинерциальной системой II рода. Именно тогда возникает дополнительный потенциал $\overset{\star}{\varphi}$, управляемый уравнением (7.178).

Сделаем важное замечание. При движении свободной (то есть движущейся без дополнительных внешних воздействий (п. 7.3)) ориентируемой частицы в окружающем геометрическом поле ее четырехмерная ориентация должна подчиняться прямому уравнению ориентации (7.93) и она есть функция внешнего поля

$$\Lambda^{a'}{}_{a}(x^i) = \mathbb{F}\left[h^{a}{}_{i}(x^i)\right]. \tag{7.179}$$

Если исследуемый объект, движущийся во внешнем поле, способен изменять свою четырехмерную ориентацию *за счет внутренних моментов*, то, согласно обратному уравнению ориентации (7.112), в месте нахождения объекта должно наводиться дополнительное поле, которое *локально* действует на объект. Таким образом, если мы имеем внешнее поле $h^{a}{}_{i}$ и соответствующую ему согласно (7.179) текущую ориентацию $\Lambda^{a'}{}_{a}$ объекта, то добавка $\Delta\Lambda^{a'}{}_{a}$ к матрице ориентации объекта, произведенная внутренними моментами, должна индуцировать добавку $\Delta h^{a}{}_{i}$ к внешнему полю согласно обратному уравнению ориентации

$$h^{a}{}_{i}(\overset{\star}{x}{}^{i}) + \Delta h^{a}{}_{i}(\overset{\star}{x}{}^{i}) = \mathbb{F}^{-1}\left[\Lambda^{a'}{}_{a}(\overset{\star}{x}{}^{i}) + \Delta\Lambda^{a'}{}_{a}(\overset{\star}{x}{}^{i})\right], \tag{7.180}$$

где $\overset{\star}{x}{}^{i}$ — мировые координаты ориентируемого объекта при действии на него внутренних моментов.

В приложении к инерциоиду мы рассмотрим наиболее простой случай обратного уравнения ориентации, заключающийся в действии внутренних моментов в отсутствии внешнего поля $h^{a}{}_{i}(\overset{\star}{x}{}^{i}) \approx 0$ при соответствующей постоянной текущей ориентации объекта (груза $m1$) $\Lambda^{a'}{}_{a}(\overset{\star}{x}{}^{i}) \approx \delta^{a'}{}_{a}$. Для этого мы выбираем модель инерциоида, имеющего сектор разгона по углам в начале движения инерциоида $[0, \epsilon]$, где ϵ — достаточно малый угол, и сектор торможения в симметричном секторе в конце первого полуцикла $[\pi - \epsilon, \pi]$. В секторе углов $[0, \epsilon]$ на груз $m1$ действует

достаточно большой *момент силы внутреннего происхождения* $\Phi_0 l$, ускоряющий груз с малой угловой скорости вращения Ω_0 до значения Ω_ϵ, в секторе углов $[\pi - \epsilon, \pi]$ на груз действует такой же тормозящий момент силы, уменьшающий угловую скорость вращения груза со значения Ω_ϵ до значения Ω_0. Большая величина и малая продолжительность передаваемого момента в начале движения инерциоида и в симметричном секторе торможения позволяет пренебречь градиентом классического потенциала по сравнению с градиентом дополнительного потенциала, то есть считать в уравнении (7.178)

$$\frac{\partial \varphi_{class}}{\partial x} \ll \frac{\partial \overset{\star}{\varphi}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \varphi_{class}}{\partial y} \ll \frac{\partial \overset{\star}{\varphi}}{\partial y}. \tag{7.181}$$

Из-за свободного движения груза $m1$ в секторе $[\epsilon, \pi - \epsilon]$ и из-за симметричных ускоряющих и тормозящих моментов функция угловой скорости груза $\Omega(\phi)$ является симметричной функцией относительно $\pi/2$:

$$\Omega(\frac{\pi}{2} - \zeta) = \Omega(\frac{\pi}{2} + \zeta). \tag{7.182}$$

Определим компоненты скорости начала O' системы отсчета K' относительно неподвижного наблюдателя, которые входят в уравнение (7.178)

$$\begin{aligned} V_{O'x} &= -l\Omega \sin\phi + \widetilde{V}, \\ V_{O'y} &= l\Omega \cos\phi. \end{aligned} \tag{7.183}$$

Скорость центрального тела $\widetilde{V}$ в начале движения инерциоида (в секторе малых углов $[0, \epsilon]$) с достаточной точностью можно выразить формулой (7.137) из классического анализа движения инерциоида

$$\widetilde{V} = \frac{\varrho}{1+\varrho}\, l\, \Omega \sin\phi, \quad \widetilde{V}(0) = 0, \tag{7.184}$$

поэтому

$$V_{O'x} = -\frac{1}{1+\varrho}\, l\Omega \sin\phi. \tag{7.185}$$

Подставив полученные выражения для $V_{O'x}$ и $V_{O'y}$ в уравнение (7.178), получим, с учетом (7.181)

$$\frac{\partial \overset{\star}{\varphi}}{\partial t} = -l\Omega \sin\phi \left[1 - \frac{2}{1+\varrho}\sin^2\!\left(\frac{\phi}{2}\right)\right] \frac{\partial \overset{\star}{\varphi}}{\partial x} - \\ -l\Omega \sin^2\phi \left[\frac{1}{1+\varrho} + 2\,\frac{\sin^2\!\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\sin^2\phi}\cos\phi\right] \frac{\partial \overset{\star}{\varphi}}{\partial y}. \tag{7.186}$$

Учитывая члены первого порядка по ϕ, получим окончательно

$$\frac{\partial \overset{\star}{\varphi}}{\partial t} = -l\Omega \sin\phi\, \frac{\partial \overset{\star}{\varphi}}{\partial x}, \tag{7.187}$$

или, принимая во внимание соотношение (7.185),

$$\frac{\partial \overset{\star}{\varphi}}{\partial t} = V_{O'x}(t)(1+\varrho)\, \frac{\partial \overset{\star}{\varphi}}{\partial x}. \tag{7.188}$$

Разделим дополнительный потенциал на две независимые друг от друга части, зависящие соответственно от t и от x

$$\overset{\star}{\varphi} = \overset{\star}{\varphi}{}^{(t)} + \overset{\star}{\varphi}{}^{(x)}. \tag{7.189}$$

Для каждой части получаем уравнение:

$$\frac{1}{V_{O'x}(t)} \frac{\partial \overset{\star}{\varphi}{}^{(t)}}{\partial t} = \mathbb{G}^{+}, \tag{7.190}$$

$$\frac{\partial \overset{\star}{\varphi}{}^{(x)}}{\partial x} = \frac{1}{1+\varrho}\mathbb{G}^{+}, \tag{7.191}$$

где $\mathbb{G}^+$ — константа разделения переменных уравнения (7.188) для сектора разгона. Из уравнения для $\overset{\star}{\varphi}{}^{(t)}$ получаем

$$\frac{\partial \overset{\star}{\varphi}{}^{(t)}}{\partial x_{O'}} = \mathbb{G}^+, \tag{7.192}$$

где $x_{O'}$ — координата начала O' по оси OX. Учитывая локальность действия поля $\overset{\star}{\varphi}$, в формулах (7.191), (7.192) мы можем положить $x = x_{O'}$ и получить дополнительную силу, действующую на груз $m1$ в секторе углов $[0, \epsilon]$

$$\overset{\star}{F}{}_m{}^+ = -m\frac{\partial \overset{\star}{\varphi}}{\partial x} = -m\,\frac{2+\varrho}{1+\varrho}\,\mathbb{G}^+. \tag{7.193}$$

За время действия ускоряющего момента $\Delta t_\epsilon = t_\epsilon - t_0$, где $t_0 = 0$, t_ϵ — время достижения грузом $m1$ угла ϵ, инерциоид, имеющий общую массу $M + 2m$, приобретет продольный импульс

$$\overset{\star}{P}{}_x{}^+ = -2m\,\frac{2+\varrho}{1+\varrho}\,\mathbb{G}^+\Delta t_\epsilon. \tag{7.194}$$

Следовательно, на выходе малых грузов из сектора разгона центр инерции инерциоида приобретет продольную скорость

$$\overset{\star}{V}{}_x = -\frac{\varrho(2+\varrho)}{(1+\varrho)^2}\,\mathbb{G}^+\Delta t_\epsilon. \tag{7.195}$$

Для вычисления времени свободного (без приложения внутренних моментов) движения груза $m1$ в секторе $[\epsilon, \pi - \epsilon]$ можно воспользоваться, учитывая малость ϵ, формулой (7.153), заменив в ней начальную угловую скорость Ω_0 на Ω_ϵ

$$\Delta t\,(0 \to \pi) = \frac{\pi}{\Omega_\epsilon}\,\left[1 - \frac{\varrho^2}{4(1+\varrho)^2}\right]. \tag{7.196}$$

Учитывая, что угловую скорость Ω_ϵ груз $m1$ приобретает за время Δt_ϵ при действии на него постоянного ускоряющего момента силы $\Phi_0 l > 0$, то для Ω_ϵ мы имеем

$$\Omega_\epsilon = \frac{\Phi_0}{ml}\Delta t_\epsilon. \tag{7.197}$$

Зная скорость центра инерции инерциоида и время его движения как целое (время первого полуцикла), определим величину перемещения центра инерции инерциоида за это время

$$\Delta \overset{\star}{X}(0\to\pi)=\overset{\star}{V}_x\,\Delta t(0\to\pi)=-\frac{m\mathbb{G}^+}{\Phi_0}\pi l\,\frac{\varrho(2+\varrho)}{(1+\varrho)^2}\left[1-\frac{\varrho^2}{4(1+\varrho)^2}\right]. \tag{7.198}$$

Значение константы разделения $\mathbb{G}^+$ устанавливается экспериментально. Действительно, определив опытным путем величину перемещения центра инерции инерциоида (7.198) и зная величину Φ_0, мы можем определить $\mathbb{G}^+$. С другой стороны, логические рассуждения приводят нас к выводу, что для выбранной модели инерциоида приобретаемый импульс центра инерции (7.194) должен быть пропорционален величине приложенной силы Φ_0 и должен быть положителен, откуда

$$-\frac{m\mathbb{G}^+}{\Phi_0}=\mathbb{N},\quad \Phi_0=|\Phi_0|, \tag{7.199}$$

где $\mathbb{N}$ - положительная безразмерная константа. Следовательно

$$\mathbb{G}^+=-\frac{\mathbb{N}\Phi_0}{m}, \tag{7.200}$$

$$\overset{\star}{P}_x{}^+=2\,\mathbb{N}\Phi_0\,\frac{2+\varrho}{1+\varrho}\,\Delta t_\epsilon. \tag{7.201}$$

В секторе торможения $[\pi-\epsilon,\,\pi]$ к грузу $m1$ приложен тормозящий момент силы $-\Phi_0 l$, и уравнение (7.186) из-за малости $\sin\phi$ также имеет вид (7.187), но при этом

$$V_{O'x}=-\frac{1}{1+\varrho}\,l\Omega\sin\phi+\overset{\star}{V}_x\,. \tag{7.202}$$

С помощью замены координат $\bar{t}=t,\quad \overline{x}=x-\overset{\star}{V}_x\,t,\quad \overline{y}=y$, перейдем к системе отсчета $\overline{K}$, движущейся со скоростью $\overset{\star}{V}_x$ относительно неподвижного наблюдателя. Следовательно

$$\overline{V}_{O'x}=-\frac{1}{1+\varrho}\,l\Omega\sin\phi, \tag{7.203}$$

и уравнение (7.187) в координатах системы $\overline{K}$ будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial \overset{\star}{\varphi}}{\partial t} = \overline{V}_{O'x}(t)(1+\varrho)\,\frac{\partial \overset{\star}{\varphi}}{\partial \overline{x}}. \tag{7.204}$$

Дополнительная сила, действующая на груз $m1$ в секторе торможения, будет выражаться формулой, аналогичной (7.193)

$$\overset{\star}{F}_m{}^- = -m\frac{\partial \overset{\star}{\varphi}}{\partial \overline{x}} = -m\frac{\partial \overset{\star}{\varphi}}{\partial x} = -m\,\frac{2+\varrho}{1+\varrho}\,\mathbb{G}^-, \tag{7.205}$$

но с константой разделения переменных в секторе торможения $\mathbb{G}^-$, пропорциональной тормозящей силе $-\Phi_0$:

$$\mathbb{G}^- = \frac{\mathbb{N}\Phi_0}{m}. \tag{7.206}$$

В секторе торможения инерциоид приобретет второй продольный импульс $\overset{\star}{P}_x{}^-$ центра инерции, равный по величине и противоположный по знаку первому импульсу $\overset{\star}{P}_x{}^+$:

$$\overset{\star}{P}_x{}^- = -2\,\mathbb{N}\Phi_0\,\frac{2+\varrho}{1+\varrho}\,\Delta t_\epsilon = -\overset{\star}{P}_x{}^+, \tag{7.207}$$

поэтому во втором полуцикле (сектор углов $[\pi,\,2\pi]$) скорость и суммарный импульс центра инерции относительно неподвижного наблюдателя будут отсутствовать:

$$\overset{\star}{P}_x{}^- + \overset{\star}{P}_x{}^+ = 0, \quad \overset{\star}{V}_x = 0. \tag{7.208}$$

Малые грузы покинут сектор торможения с угловой скоростью Ω_0 и начнут свободное движение на интервале углов $[\pi,\,2\pi]$ (второй полуцикл). Очевидно, что полный оборот также будет завершен с угловой скоростью Ω_0. В момент времени, соответствующий углу 2π, малые грузы займут первоначальное положение, центр инерции инерциоида будет неподвижен, цикл завершится. Единственным отличием от начала цикла ($\phi = 0$) будет перемещение

самого инерциоида на расстояние $\Delta\overset{\star}{X}(0\to\pi)$, вычисляемое по формуле (7.198).

Очевидно, что механическая энергия идеального инерциоида, то есть кинетическая и потенциальная энергия всех частей устройства, за цикл сохраняется. Однако для учета полной энергии автономного инерциоида мы должны к его механической энергии прибавить внутреннюю энергию, которую необходимо запасти на борту инерциоида для разгона малых грузов.

Предположим, что автономный инерциоид оборудован системой рекуперации внутренней энергии. В этом случае кинетическая энергия малых грузов в секторе торможения не будет рассеиваться в окружающем пространстве, а будет преобразоваться во внутреннюю энергию, сохраняемую на борту инерциоида.

Таким образом, в случае идеального автономного инерциоида с системой рекуперации энергии мы будем иметь устройство, которое способно передвигаться в пространстве за счет внутренних степеней свободы, сохраняя при этом полную энергию. Такую возможность нам дает динамика системы ориентируемых точек.

Остается заметить, что предложенный в настоящем разделе анализ инерциоида на основе динамики ориентируемых точек подчиняется принципу соответствия. Действительно, при отсутствии внутренних моментов индуцируемое поле φ описывается уравнением (7.174) с нулевой правой частью, то есть является классическим потенциалом $\varphi=\varphi_{class}$, определяемым соотношением (7.176). Это означает, что φ_{class} описывает силы, подчиняющиеся законам Ньютона

$$f_{m\,x}=-m\frac{\partial\varphi_{class}}{\partial x}=m\frac{dx_{O'}}{dt}\frac{\partial V_{O'x}}{\partial x}=m\frac{dV_{O'x}}{dt} \tag{7.209}$$

при $x_{O'}=x$.

Глава 8.

Первое дочернее направление — геометрическая модель сильного взаимодействия

8.1. К истории вопроса

В настоящей главе изложены основные результаты, *полученные автором совместно с Андреем Николаевичем Сидоровым* в первом дочернем направлении теории реальной относительности [69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76].

Удивительно, но работа над геометрической моделью сильного взаимодействия шла задолго до создания материнского направления (теории реальной относительности), — с 1983 г. по 1993 г. В то время мы следовали идеологии общей теории относительности А. Эйнштейна, который описал гравитационное взаимодействие с помощью эффективного риманова пространства событий, а также советам и наставлениям Геннадия Ивановича Шипова, который уже создал общерелятивистскую электродинамику [4].

То, что рассматриваемая модель имеет статус дочернего направления реальной относительности, проясняет внешне неочевидный факт: основное уравнение теории рассеяния в неплоском пространстве событий — уравнение Клейна – Гордона на фоне метрики g_{ij} — является L-ковариантным (см. далее).

8.2. Открытие и описание ядерных сил

Проведя анализ экспериментов по рассеянию α-частиц на атомах тяжелых элементов, проведенных в Кавендишской лаборатории, то есть знаменитых *опытов Резерфорда*, Эрнест Резерфорд в 1911 году создал *планетарную модель атома* [77]. В этой модели он полагал, что почти вся масса атома сосредоточена в ядре, которое имеет положительный электрический заряд Ze, и которое окружено легкими отрицательно заряженными электронами, движущимися по периферийным круговым орбитам. Для рассеяния положительно заряженных α-частиц на ядрах тяжелых элементов им была выведена формула для дифференциального сечения рассеяния частиц

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{zZe^2}{4T_\alpha}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}, \tag{8.1}$$

где ze — заряд частицы, Ze — заряд ядра, $T_\alpha = \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2$ — кинетическая энергия частицы, θ — угол рассеяния. Эта *формула Резерфорда* была получена в предположении, что на α-частицы действует только электростатическое кулоновское поле ядра.

На рубеже 20-х и 30-х годов прошлого века, в период бурного развития экспериментальной ядерной физики, были введено понятие *ядерных сил*, которые должны быть ответственны за устойчивость ядра. Действительно, сцепление нуклонов (протонов и нейтронов) в ядре можно было объяснить короткодействующими силами притяжения между нуклонами, действующими в дополнение к электростатическим силам отталкивания между одноименно заряженными протонами. Кроме этого, в тот же период

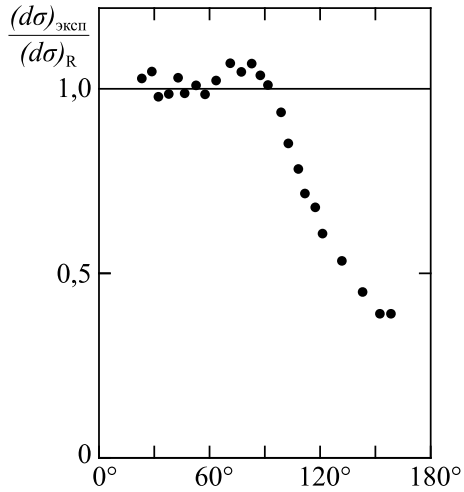

Рис. 8.1: Аномальное рассеяние [80]

времени в Кавендишской и других лабораториях было обнаружен эффект отклонения экспериментального дифференциального сечения рассеяния α-частиц на ядрах от формулы Резерфорда, начиная с некоторых критических углов (эффект аномального рассеяния) (рис. 8.1).

Из-за того, что рассеяние на углы больше критического угла соответствует минимальным прицельным расстояниям и максимальному сближению налетающих частиц, исследователями был сделан вывод о короткодействующем характере нового взаимодействия — *сильного (ядерного) взаимодействия,* — и оценен его радиус

$$r_n \approx 1 \div 10 \text{ Ф}, \tag{8.2}$$

где $1 \text{ Ф} = 10^{-13}$ см. Так же эмпирически была установлена формула для радиуса ядер с массовым числом A (A — количество нуклонов в ядре)

$$r_n \approx r_0 A^{1/3}. \tag{8.3}$$

Так как в то время (отметим: и по наши дни) природа ядерных сил была неизвестна, то исследователям пришлось описы-

вать новые ядерные силы феноменологически, применяя «введенные руками», а не полученные из иерархически более высокой теории, ядерные потенциалы. С начала 30-х годов прошлого века под давлением экспериментальных фактов быстрыми темпами развивались такие феноменогические теории, как теория ядерных сил, теория электромагнитных формфакторов, теории электросильных и электрослабых взаимодействий, различные теории элементарных частиц. Они содержали, как правило, ряд подгоночных констант, значения которых находились при сравнении теоретических и экспериментальных данных.

В 1935 году Х. Юкава [78] на основе предположения об обменной природе сильного взаимодействия создал первую модель сильного взаимодействия. В модели Юкавы потенциал φ взаимодействия между нуклонами *(потенциал Юкавы)*

$$\varphi(r) = -g_n e^{-\frac{\mu c}{\hbar} r}/r \tag{8.4}$$

являлся решением феноменологического уравнения

$$\left(\nabla^2 - \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2}\right)\varphi = 4\pi g_n, \tag{8.5}$$

где g_n — константа межнуклонного (ядерного) взаимодействия, μ — масса *мезона*, посредством обмена которым между нуклонами возникает ядерное взаимодействие.

Приведем мнение лауреата Нобелевской премии по физике Г. Бете о мезонной модели Юкава, высказанное им в более поздний период развития ядерной физики: «Однако попытки вывода ядерных сил из мезонной теории не привели пока к количественным успехам. При осмысленных расчетах ядерной материи следует исходить из точной подгонки к нуклон-нуклонным данным» [79, с. 8].

«Поэтому в настоящее время мы вынуждены обращаться к феноменологическим нуклон-нуклонным потенциалам.

В литературе приводится много разных нуклон-нуклонных потенциалов», — замечает Г. Бете [79, с. 11]. Приведем некоторые из них [79, 80]:

— сферически-симметричная прямоугольная яма конечной глубины

$$\varphi(r) = \left\{ \begin{array}{c} -\varphi_0, r \le R \\ 0,\ r > R \end{array} \right\}, \tag{8.6}$$

— экспоненциальный потенциал

$$\varphi(r) = -\varphi_0\ e^{-r/a}, \tag{8.7}$$

— потенциал Хюльтена

$$\varphi(r) = -\varphi_0\ \frac{e^{-r/a}}{1 - e^{-r/a}}, \tag{8.8}$$

— потенциал Вудса – Саксона

$$\varphi(r) = -\varphi_0\ \frac{1}{1 + e^{(r-R)/a}}, \tag{8.9}$$

— оптический потенциал

$$\varphi(r) = -\frac{U}{1 + exp\left(\frac{r-r_R}{a_R}\right)} - \frac{iW}{1 + exp\left(\frac{r-r_i}{a_i}\right)}. \tag{8.10}$$

Все параметры, входящие в феноменологические потенциалы, определяются с помощью подгонки к экспериментальным данным. Эти параметры, как правило, не являются универсальными константами, а варьируются в зависимости от внешних условий (энергии рассеиваемых частиц, зарядового и массового чисел ядер и т. д.) Существуют подробные таблицы параметров феноменологических ядерных потенциалов. Естественно, что наилучшим образом воспроизводит экспериментальные данные потенциал, имеющий наибольшее число подгоночных параметров (в данном случае это оптический потенциал, имеющий шесть таких параметров).

Приведем мнение Вернера Гайзенберга, одного из основателей квантовой механики: «Под «феноменологической» теорией понимают такую формулировку закономерностей в области наблюдаемых физических явлений, в которой не делается попытки

свести описываемые связи к лежащим в их основе общим законам природы, через которые они могли быть понятыми» [81]. Таким образом, феноменологические теории занимаются классификацией явлений в своих областях, но в сущности являются бессодержательными, так как не раскрывают истинной природы изучаемого явления.

Отметим, что опыты Э. Резерфорда обнаружили сильное взаимодействие в тех пространственно-временных областях, где реальные системы отсчета никак нельзя назвать квазиинерциальными. Действительно, в районе действия ядерных сил ($1 \div 10$ Ф от ядра) рассеиваемые частицы испытывают колоссальное ускорение

$$a_S \approx 10^{30} \div 10^{33} \text{ см/сек}^2. \tag{8.11}$$

Такое ускорение, согласно положениям реальной относительности, вносит доминирующий вклад в преобразование координат событий из покоящейся системы отсчета в реальную систему отсчета, связанную с рассеиваемой частицей. Этим, по всей видимости, объясняются неудачи построения законченной теории ядерных сил, основанной на преобразованиях координат между инерциальными системами отсчета (это — преобразования Галилея в случае малых скоростей частиц, либо преобразования Лоренца в случае сравнимых со скоростью света скоростей частиц). Вот неполный список созданных моделей ядра и моделей ядерных реакций [82]:

— модель составного ядра (Н. Бор, 1936 г.);

— гидродинамическая модель ядра (М. Борн, 1936 г.);

— статистическая модель ядра (Я.И. Френкель, 1936 г., Л.Д. Ландау, 1937 г.);

— гидродинамическая модель ядерных реакций (Н. Бор, Дж. Уилер, Я.И.Френкель, 1939 г.);

— оболочечная модель ядра (М. Гёпперт-Майер, И.Х.Д. Йенсен, 1949–1950 гг.);

— обобщенная модель ядра (Дж. Рейнуотер, 1950 г., О. Бор, Б. Моттельсон, 1950–1953 гг.);

— модель прямых ядерных реакций (С. Батлер, 1953 г.);

— оптическая модель ядра (Г. Фешбах, К. Портер, В. Вайскопф, 1954 г.);

— сверхтекучая модель ядра (Н.Н. Боголюбов, О. Бор, Б. Моттельсон, Д. Пайнс, 1958 г.)

8.3. Требования реальной относительности. Выбор решений с помощью эффективных потенциалов

Факт отсутствия реальных квазиинерциальных систем отсчета в области действия сил, теорию которых необходимо создать, с железной необходимостью заставляет нас строить ее не на псевдоевклидовом пространстве событий, которое соответствует инерциальным системам отсчета, а на более сложном пространстве событий реальных систем отсчета. Уравнения истинной теории сильного взаимодействия должны быть инварианты относительно преобразований координат и полей между реальными системами отсчета (то есть должны быть L-ковариантными).

Пространство событий реальных систем отсчета, которое является ничем иным, как пространством событий ориентируемых точек, представляет собой [1] четырехмерное риманово пространство начал реальных систем отсчета (база расслоения), каждой точке которого соответствует слой расслоения (касательное псевдоевклидово пространство). При этом координатный репер слоя имеет шесть степеней свободы, то есть задается с точностью до шести углов собственной ориентации. Данное пространство событий обладает свойством абсолютного параллелизма с равным нулю общим тензором кривизны.

Каждое фундаментальное решение уравнений теории физического вакуума [4] представляет собой пространство событий, с соответствующей римановой метрикой и полем коэффициентов вращения Риччи. Таким образом, кроме трансляционных симметрий базы расслоения, оно характеризуются также симметриями касательного расслоения. Каждое такое пространство соответ-

ствует некоему элементарному вакуумному возбуждению.

Выбор решения вакуумных уравнений с целью описания соответствующего взаимодействия удобно проводить по эффективному потенциалу. В случае слабого поля и нерелятивистской скорости пробной частицы компонента g_{00} римановой метрики связана с потенциалом φ, эффективно описывающим поле взаимодействия на фоне плоского пространства событий, следующим образом [10]:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\,\varphi}{c^2}\,. \tag{8.12}$$

Следовательно, эффективный потенциал вакуумного возбуждения равен

$$\varphi = \frac{c^2}{2}(g_{00} - 1). \tag{8.13}$$

8.4. Общерелятивистская электродинамика (электродинамика больших полей)

Сферически-симметричное стационарное решение уравнений физического вакуума [4] содержит (относительно удаленного наблюдателя) следующую метрику типа метрики Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\Psi^0}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\Psi^0}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{8.14}$$

а также спинорные компоненты тензора Римана, спинорные компоненты коэффициентов вращения Риччи, компоненты символов Ньюмена – Пенроуза, которые соответствуют внутренним симметриям пространства событий решения (они приведены в [4]). Здесь Ψ^0 — функция источника с размерностью длины.

Если предположить, что решение (8.14) описывает пространство событий, соответствующее электромагнитному взаимодействию источника поля и пробной частицы, то

$$\Psi^0 = -\frac{Q\,e}{mc^2}, \tag{8.15}$$

где e, m — электрический заряд и масса пробной частицы; Q — заряд источника поля. Данное выражение получилось из сравнения эффективной потенциальной энергии частицы в пространстве с метрикой (8.14)

$$U_p = \frac{mc^2}{2}(g_{00} - 1) = -\frac{\Psi^0}{r}mc^2 \tag{8.16}$$

с классической потенциальной энергией частицы в кулоновском поле

$$U_p = \frac{Q\,e}{r} \tag{8.17}$$

(в гауссовой системе единиц).

Введем геометрическую характеристику данного решения с размерностью длины — электромагнитный радиус, зависящий параметрически от удельного заряда пробной частицы e/m:

$$R_e = 2\,\Psi^0 = -2\,\frac{Q\,e}{mc^2}. \tag{8.18}$$

$R_e < 0$ для случая отталкивания одноименных зарядов источника поля и пробной частицы, $R_e > 0$ для случая притяжения разноименных зарядов.

Электромагнитный радиус является единственной геометрической константой пространства событий общерелятивистской электродинамики, построенной Г.И. Шиповым в 1972 г. [83]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_e}{r}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{R_e}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2). \tag{8.19}$$

Симметричные по нижним индексам величины $E^i{}_{jk} = E^i{}_{kj}$, которые определяются через метрический тензор общерелятивистской электродинамики

$$g_{ik} = \eta_{ik} + \frac{e}{m}\,a_{ik} \tag{8.20}$$

следующим образом:

$$E^i{}_{jk} = -\frac{c^2}{2}g^{im}(a_{mj,k} + a_{mk,j} - a_{jk,m}), \tag{8.21}$$

образуют тензор Римана

$$R^i{}_{jkm} = -\frac{2e}{mc^2}\, E^i{}_{j[m,k]} + \frac{2e^2}{m^2c^4}\, E^i{}_{s[k} E^s{}_{|j|m]} \tag{8.22}$$

пространства событий общерелятивистской электродинамики и интерпретируются как характеристики больших по величине электромагнитных полей. Величина a_{ik} рассматривается как тензорный потенциал электромагнитного поля. С помощью соотношений

$$A_0 = \frac{1}{2}\, a_{00}\, c^2\, \frac{dx^0}{ds_0}, \tag{8.23}$$

$$A_\alpha = a_{\alpha 0}\, c^2\, \frac{dx^0}{ds_0} + \frac{c^2}{2} a_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{ds_0}, \quad \alpha,\, \beta = 1,\, 2,\, 3, \tag{8.24}$$

определяется четырехмерный потенциал геометризованного электромагнитного поля $A^i = (A^0, \mathbf{A})$.

Квадрат интервала пространства событий с тензором Римана (8.22) вычисляется следующим образом:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2e}{mc^2}\, A_i \frac{dx^i}{ds_0^2}\right) ds_0^2\,, \tag{8.25}$$

где

$$ds_0^2 = \eta_{ik}\, dx^i\, dx^k \tag{8.26}$$

— интервал плоского пространства.

Интервал (8.25) с большой точностью можно считать псевдоевклидовым при соблюдении неравенства

$$\left| \frac{2e}{mc^2}\, A_i \frac{dx^i}{ds_0^2} \right| \ll 1, \tag{8.27}$$

которое выполняется, если электромагнитные поля не являются большими по величине. Для пространства событий общерелятивистской электродинамики, основанной на решении с метрикой типа метрики Шварцшильда, такие поля появляются на расстоянии

$$r \gg |R_e| \tag{8.28}$$

от источника поля. В этом случае четырехмерный потенциал общерелятивистской электродинамики позволяет получить обычный тензор электромагнитного поля

$$F_{ik} = A_{k,i} - A_{i,k}\,, \tag{8.29}$$

который имеет геометрическую природу. Уравнения движения частицы общерелятивистской электродинамики превращаются в обычные уравнения движения электродинамики Максвелла – Лоренца:

$$mc\,\frac{d^2x^i}{ds_0^2} = \frac{e}{c}\;F^{ik}\,\frac{dx_k}{ds_0}. \tag{8.30}$$

Электромагнитное поле считается большим по величине, если нарушается неравенство (8.27), что происходит на расстояниях

$$r \sim |R_e|\,. \tag{8.31}$$

Для случая, когда источник поля — протон, и пробная частица — электрон, электромагнитный радиус взаимодействия равен удвоенному классическому радиусу электрона:

$$R_{e\ (p-e)} = 5,6 \cdot 10^{-13}\ \text{см}. \tag{8.32}$$

На таком расстоянии от источника поля — протона электростатическое поле достигает величины

$$E_S \approx 10^{16}\ \text{ед. СГСЭ} = 3 \cdot 10^{20}\ \text{В/м}, \tag{8.33}$$

что вызывает колоссальное по величине ускорение пробной частицы — электрона:

$$a_S \approx 10^{33}\ \text{см/сек}^2. \tag{8.34}$$

Система отчета, связанная с пробной частицей, не может считаться квазиинерциальной ввиду значительного влияния ускорения (8.34) на преобразование пространственно-временных координат события между удаленной системой отсчета и собственной системой отчета пробной частицы.

Заметим, что именно на расстояниях порядка 10^{-13} см от ядра обнаружено действие электромагнитных формфакторов.

Сечение рассеяния релятивистских электронов в кулоновском потенциале описывается формулой Мотта [84]. В 1949 году Е. Кизингер [85], исследуя упругое рассеяние слаборелятивистских электронов на тяжелых ядрах, впервые обнаружил отклонение от формулы Мотта. Затем отклонения были замечены при рассеянии ультрарелятивистских электронов на легких ядрах и протонах [86]. Р. Хофштадтер [87] предложил смоделировать аномальное рассеяние электронов с помощью введения некоторого феноменологического распределения заряда у рассеивающего центра (ядра), отличного от точечного. Таким образом, расчет рассеяния электронов стал зависеть от формы распределения заряда.

В теории электромагнитных формфакторов [88] для легких ядер применяются в основном однопараметрические распределения заряда. Для средних и тяжелых ядер применяются двухпараметрические и более сложные распределения заряда, например распределение Вудса – Саксона:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)}. \tag{8.35}$$

Параметры распределений заряда не являются установленными константами для какого-либо сорта ядер, а зависят от внешних условий, например от диапазона энергии рассеиваемых электронов.

Необходимо отметить, что формфакторы появляются в классической электродинамике как раз в тех областях, где ее действие ограничено из-за отсутствия реальных квазиинерциальных систем отсчета.

По мнению Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица, пространственные области, ограниченные «радиусом электрона»

$$r_e \sim \frac{e^2}{mc^2} = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \tag{8.36}$$

«...определяют границы применимости электродинамики к электрону, следующие уже из ее собственных основных принципов» [10, с. 127].

8.5. Пространство событий геометрической модели сильного взаимодействия

Сильное взаимодействие обладает зарядовой независимостью [80]. Это означает, что на геометрическом уровне оно должно генерироваться неким «сильным» зарядом, отличным от электромагнитного. Поэтому к пространству событий из семейства решений уравнений физического вакуума [4], претендующего на роль пространства с фундаментальным ядерным потенциалом, могут быть предъявлены следующие требования [71]:

а) кроме электромагнитного радиуса R_e, в метрику должен входить другой независимый геометрический параметр — сильный зарядовый радиус R_n;

б) эффективный потенциал пространства (8.13) должен обладать общими свойствами феноменологических электроядерных потенциалов.

Этим требованиям удовлетворяет пространство событий Ньюмена – Унти – Тамбурино (НУТ) [27], где двум свободным параметрам придан смысл электромагнитного R_e и сильного зарядового радиусов R_n.

Риманова метрика пространства НУТ в сферических координатах относительно удаленного наблюдателя имеет вид

$$ds^2 = -U\,\left(c\,dt + 4\,R_n\,\sin^2(\theta/2)\,d\varphi\right)^2 + \\ + dr^2/U - (r^2 + R_n^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2), \quad (8.37)$$

где

$$U = -1 + \frac{rR_e + 2R_n^2}{r^2 + R_n^2}. \quad (8.38)$$

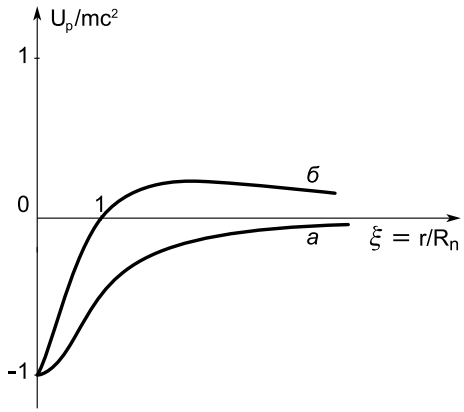

Рис. 8.2: Эффективная потенциальная энергия в пространстве НУТ: а) $R_e = 0,\ R_n \neq 0$, б) $R_e \neq 0,\ R_n \neq 0,\ R_e/R_n = -2$

Спинорные компоненты коэффициентов вращения Риччи, которые соответствуют внутренним симметриям решения, приведены в [4].

Эффективная потенциальная энергия пробной частицы в поле НУТ, согласно (8.13), приводит к следующему выражению:

$$U_p = -\frac{1}{2}\, mc^2\, \frac{rR_e + 2R_n^2}{r^2 + R_n^2}. \tag{8.39}$$

На рис. 8.2 показаны графики $U_p(r)$ в двух специальных случаях:

а) $R_e = 0,\ R_n \neq 0$ (чисто ядерное взаимодействие) и

б) $R_e \neq 0,\ R_n \neq 0$ (электроядерное взаимодействие).

Параметр $G = R_e/R_n$ в случае а) равен 0, в случае б) $G = -2$ (одноименные заряды источника поля и пробной частицы, электростатическое отталкивание).

Кривые $U_p(r)$ напоминают электроядерные потенциалы классической ядерной физики, в которых за кулоновским барьером начинается область действия близкодействующих ядерных сил. Кривая $U_p(r)$ при $G = 0$ напоминает чисто ядерный потенциал Вудса – Саксона.

Для полного решения вопроса о соответствии пространства событий НУТ электроядерным взаимодействиям были развиты:

— теория классического рассеяния частиц (рассеяния геодезических) в пространстве НУТ [69, 76];

— теория квантового рассеяния частиц в пространстве НУТ [72, 73, 74, 75].

8.6. Рассеяние геодезических в пространстве НУТ

В настоящем разделе приведены основные результаты расчетов рассеяния бесспиновых частиц (рассеяния геодезических) в пространстве НУТ, двум свободным параметрам которого придан смысл электромагнитного R_e и сильного зарядового R_n радиусов [1, 76]. При $R_n = 0$ пространство НУТ переходит пространство с метрикой типа метрики Шварцшильда с единственным свободным параметром R_e, то есть становится пространством событий общерелятивистской электродинамики.

В сферических четырехмерных координатах $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \phi$ ковариантный метрический тензор пространства НУТ имеет вид

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} -U & 0 & 0 & -4\,U R_n \sin^2(\theta/2) \\ 0 & 1/U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\rho\bar{\rho} & 0 \\ g_{03} & 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}, \qquad (8.40)$$

где

$$\begin{aligned} \rho\bar{\rho} &= \frac{1}{r^2 + R_n^2}, \\ U &= -1 + \frac{r R_e + 2R_n^2}{r^2 + R_n^2}, \\ g_{33} &= -16\,U R_n^2 \sin^4(\theta/2) - \frac{\sin^2\theta}{\rho\bar{\rho}}. \end{aligned} \qquad (8.41)$$

Уравнение геодезической после процедуры разделения переменных принимает вид следующих уравнений

$$mc^2\,\frac{dt}{ds} = -\frac{E_0}{Uc} - 4\,R_n\,\rho\bar{\rho}\,\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\theta}\,P, \tag{8.42}$$

$$m^2c^2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = U\,K^2\,\rho\bar{\rho} + U\,m^2c^2 + \frac{E_0^2}{c^2}, \tag{8.43}$$

$$m^2c^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = (\rho\bar{\rho})^2\,\left(K^2 - \frac{P^2}{\sin^2\theta}\right), \tag{8.44}$$

$$mc\,\frac{d\phi}{ds} = \frac{\rho\bar{\rho}}{\sin^2\theta}\,P, \tag{8.45}$$

где K^2 — параметр разделения (новая постоянная), а посредством P обозначено

$$P = 4\,R_n\sin^2\frac{\theta}{2}\,\frac{E_0}{c} + L_z. \tag{8.46}$$

В комбинацию P входит E_0 — полная энергия частицы на бесконечности, и L_z — проекция момента импульса частицы на ось симметрии OZ. Введем следующие безразмерные постоянные:

$$\gamma_0 = \frac{E_0}{mc^2}, \qquad \delta = \frac{mcR_n}{K}. \tag{8.47}$$

В [1, 76] показано, что постоянная K равна

$$K = b\,\beta_0\,\gamma_0\,mc = \eta\,\beta_0\,\gamma_0\,R_n mc, \tag{8.48}$$

где $\beta_0 = v_0/c$ — приведенная скорость частицы на бесконечности, $\eta = b/R_n$ — безразмерный прицельный параметр, следовательно, она принимает смысл полного момента импульса частицы на бесконечности. Из (8.48) следует соотношение

$$\frac{1}{\eta} = \beta_0\,\gamma_0\,\delta. \tag{8.49}$$

Формула для плоского угла Λ_Σ между направлениями влета и

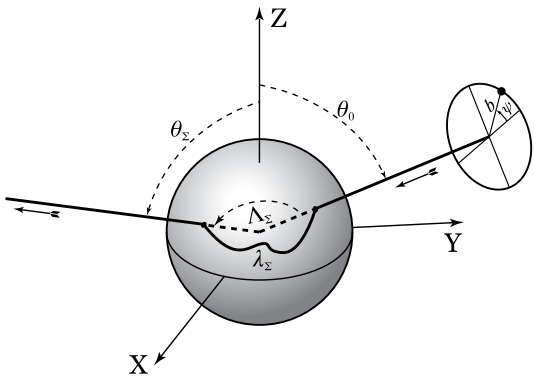

Рис. 8.3: Пучок рассеиваемых частиц

вылета частицы [1, 76]

$$\cos\Lambda_\Sigma = \frac{a^2 + \cos(\lambda_\Sigma\sqrt{a^2+1})}{a^2+1}, \qquad a = 2\delta\gamma_0, \tag{8.50}$$

показывает независимость Λ_Σ от направления влета частицы $(\theta_0,\ \phi_0)$ и локального угла ψ (рис. 8.3), так как конечная длина дуги на сфере единичного радиуса λ_Σ, описанная радиусом-вектором частицы между положениями влета и вылета, зависит только от полной энергии γ_0 и прицельного параметра η частицы [1, 76]; при этом согласно формуле (8.49)

$$a = 2\delta\gamma_0 = \frac{2}{\beta_0\,\eta} = f(\gamma_0,\,\eta)\,. \tag{8.51}$$

Таким образом, плоский угол Λ_Σ зависит только от полной энергии и прицельного параметра частицы. Это означает, что рассеяние частиц, движущихся по геодезическим в аксиально-симметричной геометрии НУТ, обладает сферической симметрией!

Захват частицы соответствует бесконечной суммарной длине дуги на сфере единичного радиуса, которую описывает радиус-вектор частицы при движении в пространстве НУТ. В [1, 76] получена формула для сечения захвата электронейтральных

частиц

$$\sigma_{capture} = \frac{\pi R_n^2}{(\gamma_0^2 - 1)(\gamma_0^2 - 0,5 - \gamma_0\sqrt{\gamma_0^2 - 1})}, \tag{8.52}$$

где использовано $\beta_0^2 \gamma_0^2 = \gamma_0^2 - 1$. Для нерелятивистских электронейтральных частиц ($\beta_0 \ll 1, \quad \gamma_0 \approx 1$) полученная формула дает

$$\sigma_{capture}(\beta_0 \ll 1) = \frac{2\pi R_n^2}{\beta_0^2}, \tag{8.53}$$

а для ультрарелятивистских электронейтральных частиц ($\beta_0 \approx 1$, $\gamma_0 \gg 1$) приводит к формуле

$$\sigma_{capture}(\gamma_0 \gg 1) = 8\pi R_n^2, \tag{8.54}$$

которая показывает, что при увеличении энергии электронейтральных частиц сечение захвата приближается к постоянному пределу.

Дифференциальное сечение рассеяния электронейтральных частиц в поле НУТ в малоугловом приближении равно [1, 76]

$$\frac{d\sigma}{do} = \frac{16R_n^2}{\beta_0^2 \chi^4} = \frac{16R_n^2\gamma_0^2}{(\gamma_0^2 - 1)\chi^4}, \tag{8.55}$$

где χ — угол отклонения частиц от прямой траектории

$$\chi = |\Lambda_\Sigma - \pi|. \tag{8.56}$$

В общем случае дифференциальное сечение рассеяния для электронейтральных частиц пропорционально квадрату сильного зарядового радиуса

$$\frac{d\sigma}{do} = R_n^2 F(\gamma_0, \chi), \tag{8.57}$$

где $F(\gamma_0, \chi)$ — калибровочная функция, определяемая численно для каждого значения полной энергии рассеиваемых частиц γ_0.

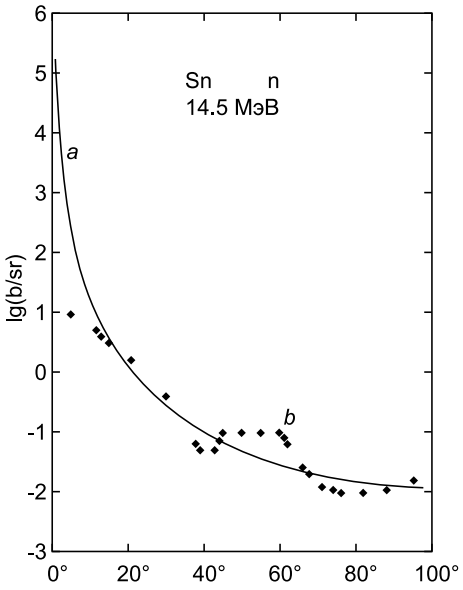

Рис. 8.4: Дифференциальное сечение упругого рассеяния: a — электронейтральных частиц с энергией покоя 939,6 МэВ и кинетической энергией 14,5 МэВ при $R_n \approx 10^{-15}$ см; b — 14,5 МэВ нейтронов на ядрах олова

На рис. 8.4 приведены теоретические и экспериментальные данные дифференциальных сечений рассеяния:

— электронейтральных частиц энергии покоя 939,6 МэВ с кинетической энергией 14,5 МэВ, вычисленного при $R_n \approx 10^{-15}$ см (a);

— нейтронов энергии 14,5 МэВ на ядрах олова [5] (b).

Сравнение малоуглового хода кривой (a) и данных (b), выполненное при различных значениях энергии рассеиваемых частиц, либо для разных элементов мишени, привело к выводу, что в рамках данной модели сильный зарядовый радиус R_n, который является характеристикой сильного взаимодействия частицы и источника поля (ядра), не зависит от энергии налетающих ча-

стиц и пропорционален радиусу действия ядерных сил, принятого в классической ядерной физике [80],

$$R_n \propto A^{1/3}, \tag{8.58}$$

где A — массовое число ядра.

8.7. *L*-ковариантное уравнение для квантовой бесспиновой частицы

Взаимодействие рассеивающего центра и пробной частицы может описываться как классическими уравнениями геодезических в пространстве событий, так и квантовыми уравнениями, построенными на фоне пространства событий (в случае, когда необходимо учитывать волновые свойства процесса). Выведем L-ковариантное уравнение движения квантовой бесспиновой частицы в пространстве событий реальной относительности.

В соответствии с принципом реальной относительности уравнение для квантовой частицы должно быть изначально сформулировано в локальных координатах (локально-лоренцевых координатах касательного расслоения), а в соответствии с квантовомеханической аксиоматикой L-вектор энергии-импульса частицы должен быть заменен на соответствующий дифференциальный L-ковариантный оператор. Для этого в основном уравнении для L-вектора энергии-импульса частицы в локальных координатах

$$p_a\, p^a = p_c\, \eta^{ca}\, p_a = m^2 c^2 \tag{8.59}$$

сделаем следующую замену

$$p_c \to i\hbar \widetilde{\nabla}_c, \tag{8.60}$$

где $\widetilde{\nabla}_c$ — L-ковариантная производная по локальной координате $\widetilde{\nabla}_c = \widetilde{\nabla}_k\, h^k{}_c$ (Приложение 1)

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_c\, Z^a &= Z^a{}_{,c} - T^{a\cdot\cdot}_{\cdot bc}\, Z^b, \\ \widetilde{\nabla}_c\, Z_a &= Z_{a,\,c} + T^{b\cdot\cdot}_{\cdot ac}\, Z_b. \end{aligned} \tag{8.61}$$

В данном рассмотрении мы будем считать ψ-функцию частицы L-скаляром. Для более глубокого анализа заметим, что ψ-функция должна подчиняться L-ковариантному уравнению непрерывности, которое в случае релятивистского движения частицы становится неоднородным (вместо нуля в правой части появятся вакуумные члены, содержащие $T^{a\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,bc}$). В этом случае ψ-функция частицы уже не будет L-скаляром. С учетом этого замечания (то есть считая движение частицы нерелятивистским или слаборелятивистским) из (8.60) и (8.59) получаем

$$\eta^{ca}\,\widetilde{\nabla}_c\,P_a + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0, \tag{8.62}$$

где P_a — L-ковариантный вектор в локальных координатах

$$P_a = \widetilde{\nabla}_c\,\psi = \psi_{\,,c} = \frac{\partial\psi}{\partial x^c}. \tag{8.63}$$

Раскрывая (8.62), получим

$$\eta^{ca}\,\psi_{\,,a\,,c} + T^{bc\,\cdot}_{\cdot\,\cdot\,c}\,\psi_{\,,b} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0, \tag{8.64}$$

где

$$\eta^{ca}\,\psi_{\,,a\,,c} = \eta^{ca}\,(\psi_{\,,i}\,h^i{}_a)_{\,,k}\,h^k{}_c = \psi_{\,,i\,,k}\,g^{ik} + \eta^{ca}\,\psi_{\,,i}\,h^i{}_{a\,,k}\,h^k{}_c. \tag{8.65}$$

В (8.65) мы воспользовались соотношением $\eta^{ca}\,h^i{}_a\,h^k{}_c = g^{ik}$. Из условия равенства нулю полной ковариантной производной мультивекторного объекта $h^i{}_a$ в пространстве событий реальной относительности $\overset{*}{\nabla}_k\,h^i{}_a = 0$ получаем

$$h^i{}_{a\,,k} = -\Gamma^i{}_{jk}\,h^j{}_a - T^{b\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,ak}\,h^i{}_b, \tag{8.66}$$

Подставив (8.66) и (8.65) в (8.64), получаем

$$\psi_{\,,i\,,k}\,g^{ik} - \Gamma^i{}_{jk}\,\psi_{\,,i}\,g^{jk} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0, \tag{8.67}$$

или

$$(\psi_{,i})_{;k}\, g^{ik} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0, \tag{8.68}$$

где под $(\ )_{;k}$ обозначена ковариантная производная относительно связности Γ^{i}_{jk}. Так как

$$g^{ik}_{;l} = 0, \tag{8.69}$$

то (8.68) можно записать в следующем виде

$$(\psi_{,i}\, g^{ik})_{;k} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0, \tag{8.70}$$

и, воспользовавшись еще раз формулой (8.69), ввиду $\psi_{,i} = \psi_{;i}$, получим

$$\psi^{;k}_{;k} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0. \tag{8.71}$$

С помощью [10, (86,13)] приходим к искомому L-ковариантному уравнению движения квантовой бесспиновой частицы

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\right) + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\psi = 0, \tag{8.72}$$

которое совпадает с уравнением Клейна – Гордона на фоне метрики g_{ik} [1, (6.4)]. Полученное уравнение следует применять для описания движения квантовой бесспиновой частицы в нерелятивистском и слаборелятивистском случае.

8.8. Квантовая теория рассеяния в пространстве НУТ

Следующим этапом работы явилось развитие теории рассеяния квантовой бесспиновой частицы в пространстве НУТ [75].

С помощью процедуры разделения переменных

$$\psi(t, r, \theta, \phi) = \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)\frac{\chi_l(r)}{\sqrt{r^2 + R_n^2}}P_{lm}(\theta)\exp(im\phi), \tag{8.73}$$

из уравнения Клейна – Гордона в пространстве НУТ

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\right)+\frac{\mu^2c^2}{\hbar^2}\right]\psi=0 \tag{8.74}$$

были получены радиальное и угловое уравнения для волновой функции (здесь и далее в этом разделе μ — масса частицы).

Угловое уравнение Клейна – Гордона – НУТ выглядит следующим образом:

$$\left\{\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\left[L\sin^2\theta-\left(4R_n\frac{E}{\hbar c}\sin^2\frac{\theta}{2}+m\right)^2\right]\right\}\times \\ \times P_{lm}(\cos\theta)=0, \tag{8.75}$$

где l и m — азимутальное и магнитное квантовые числа, L — константа разделения.

Введем следующие обозначения:

$$\frac{r}{R_n}=\xi,\quad \frac{R_e}{R_n}=G,\quad \frac{E}{\mu c^2}=\gamma,\quad \frac{R_n\mu c}{\hbar}=\delta,\quad C=2\gamma\delta,\quad x=\cos\theta \tag{8.76}$$

и сделаем замену

$$P_{lm}(x)=(1+x)^\alpha(1-x)^\beta\eta(x). \tag{8.77}$$

Уравнение (8.75) при условии

$$\begin{aligned}\beta^2&=\left(\frac{m}{2}\right)^2,\\ \alpha^2&=\left(C+\frac{m}{2}\right)^2\end{aligned} \tag{8.78}$$

эквивалентно следующему уравнению для $\eta(x)$:

$$\left\{(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}+2\left[\alpha-\beta-(\alpha+\beta+1)x\right]\frac{d}{dx}+\lambda\right\}\eta(x)=0, \tag{8.79}$$

где

$$\lambda = (\alpha - \beta)^2 - (\alpha + \beta) + L - (C + m)^2. \tag{8.80}$$

Уравнение (8.79) имеет регулярные решения тогда и только тогда, когда [89]

$$\lambda = l\,(l + 2\beta + 2\alpha + 1), \qquad l = 0,\, 1,\, 2\ldots, \tag{8.81}$$

и эти решения есть полиномы Якоби

$$\eta(x) = P_l^{(2\beta,\, 2\alpha)}(x). \tag{8.82}$$

Из (8.78), (8.80), (8.81) получаем два решения (остальные два не удовлетворяют условию перехода к сферическим функциям при $C \to 0$):

$$\begin{aligned} &\alpha^+ = C + \frac{m}{2}, \quad \beta^+ = -\frac{m}{2}, \\ &P^+_{lm}(x) = (1 + x)^{C + \frac{m}{2}} (1 - x)^{-\frac{m}{2}} P_l^{(-m,\, 2C + m)}(x), \\ &L^+ = l\,(l + 1) + C(2l + 1) \end{aligned} \tag{8.83}$$

и

$$\begin{aligned} &\alpha^- = -C - \frac{m}{2}, \quad \beta^- = \frac{m}{2}, \\ &P^-_{lm}(x) = (1 + x)^{-C - \frac{m}{2}} (1 - x)^{\frac{m}{2}} P_l^{(m,\, -2C - m)}(x), \\ &L^- = l\,(l + 1) - C(2l + 1). \end{aligned} \tag{8.84}$$

В каждом конкретном процессе, описываемым моделью, должно реализовываться только одно из двух решений. Можно предположить, что выбор решения определяется неким внутренним квантовым числом системы.

Заметим, что проекция момента m не входит в константу разделения. Это означает, что радиальная волновая функция не зависит от m, что соответствует $(2l + 1)$-кратному вырождению энергетических уровней в связанных состояниях. Такой эффект возникает в любом сферически-симметричном потенциале на фоне плоского пространства и в сферически-симметричном поле

Шварцшильда, где при движении частицы сохраняется момент импульса. Поэтому эффект вырождения уровней по магнитному квантовому числу является признаком сферической симметрии поля.

В работе [76], где среди других вопросов исследовано движение классических частиц в пространстве НУТ, показано, что интегралом движения частицы в аксиально-симметричном пространстве НУТ является не только проекция обобщенного момента импульса частицы на ось симметрии поля L_z, но также и квадрат обобщенного момента импульса. Исследование геодезических показало, что, во-первых, они не являются плоскими и, во-вторых, угол между направлением влета и направлением вылета частицы не зависит от ориентации оси симметрии поля.

Факт сферической симметрии классического рассеяния частиц, а также наличие сохраняющегося обобщенного момента импульса частицы в пространстве НУТ позволяют нам утверждать, что квантовая картина рассеяния в пространстве НУТ также будет обладать сферической симметрией.

Радиальное уравнение Клейна – Гордона – НУТ для функции

$$R_l(r) = \frac{\chi_l(r)}{\sqrt{r^2 + R_n^2}} \tag{8.85}$$

в безразмерных координатах $\xi = r/R_n$ выглядит следующим образом

$$\frac{\xi^2 - G\xi - 1}{\xi^2 + 1}\,\frac{d^2R_l}{d\xi^2} + \frac{2\xi - G}{\xi^2 + 1}\,\frac{dR_l}{d\xi} + \\ + \left(\frac{\xi^2 + 1}{\xi^2 - G\xi - 1}\gamma^2\delta^2 - \delta^2 - \frac{L}{\xi^2 + 1}\right) R_l = 0. \tag{8.86}$$

После введения «черепашьих» координат, растягивающих область вблизи иррегулярной особой точки $\xi \sim \xi_+$ в радиальном уравнении до полубесконечного интервала $(-\infty, 0]$:

$$\xi_* = \xi + \frac{\xi_+^2}{\xi_+ - \xi_-}\ln(\xi - \xi_+) - \frac{\xi_-^2}{\xi_+ - \xi_-}\ln(\xi - \xi_-), \tag{8.87}$$

где

$$\xi_+ = \frac{G}{2} + \sqrt{\frac{G^2}{4} + 1} > 0, \qquad \xi_- = \frac{G}{2} - \sqrt{\frac{G^2}{4} + 1} < 0, \quad (8.88)$$

радиальное уравнение Клейна – Гордона – НУТ для функции χ_l приобретает вид одномерного уравнения Шредингера

$$\frac{d^2\chi_l}{d\xi_*^2} + \mathbb{D}\,\frac{\xi^2 - G\xi - 1}{\xi^2 + 1}\,\chi_l = 0\,, \quad (8.89)$$

где

$$\mathbb{D} = \left[\frac{-G\xi^3 - 5\xi^2 + 2G\xi + 1}{(\xi^2+1)^3} + \frac{\xi^2+1}{\xi^2 - G\xi - 1}\gamma^2\delta^2 - \delta^2 - \frac{L}{\xi^2+1}\right]. \quad (8.90)$$

При $\xi_* \in (-\infty, 0]$ уравнение (8.89) запишем следующим образом:

$$\frac{d^2\chi_l}{d\xi_*^2} + \left[k_1^2 - W_1(\xi)\right]\chi_l = 0, \quad (8.91)$$

где обозначено

$$k_1 = \gamma\delta,$$
$$W_1(\xi) = \frac{\xi^2 - G\xi - 1}{\xi^2 + 1}\left[\frac{G\xi^3 + 5\xi^2 - 2G\xi - 1}{(\xi^2+1)^3} + \delta^2 + \frac{L}{\xi^2+1}\right]. \quad (8.92)$$

Аналогично, при $\xi_* \in [0, \infty)$ уравнение (8.89) запишется в следующем виде:

$$\frac{d^2\chi_l}{d\xi_*^2} + \left[k_2^2 - W_2(\xi)\right]\chi_l = 0, \quad (8.93)$$

где

$$k_2 = \delta\sqrt{\gamma^2 - 1},$$
$$W_2(\xi) =$$
$$= \frac{\xi^2 - G\xi - 1}{\xi^2 + 1}\left[\frac{G\xi^3 + 5\xi^2 - 2G\xi - 1}{(\xi^2+1)^3} - \delta^2\frac{G\xi + 2}{\xi^2 - G\xi - 1} + \frac{L}{\xi^2+1}\right]. \quad (8.94)$$

Легко видеть, что $W_{2,1} \to 0$ при $\xi_* \to \pm\infty$.

Для определения амплитуды рассеяния необходимо знать фазы радиальной функции $\chi_l(\xi_*)$ на бесконечности. Так как радиальному уравнению придан вид одномерного уравнения Шредингера, то радиальную функцию целесообразно представить в виде [90]

$$\chi_{l\ 1,2}(\xi_*) = A_{1,2}(\xi_*)\left[\exp\left(i\,k_{1,2}\,\xi_*\right) + B_{1,2}(\xi_*)\exp\left(-i\,k_{1,2}\,\xi_*\right)\right], \tag{8.95}$$

где $A(\xi_*)$ — амплитудная функция, а $B(\xi_*)$ — фазовая функция, причем $A_2(+\infty) = 1$. Таким образом, асимптотическое выражение для $\chi_{l\ 2}$ будет следующим:

$$\chi_{l\ 2} \to \exp\left(i\,k_2\,\xi_*\right) + B_l \exp\left(-i\,k_2\,\xi_*\right), \tag{8.96}$$

где B_l — искомое значение фазовой функции на бесконечности.

Уравнения (8.91) и (8.93) эквивалентны уравнениям первого порядка для фазовой функции

$$\frac{dB_{1,\,2}(\xi_*)}{d\xi_*} = \frac{W_{1,\,2}(\xi)}{2i}\left[1 + B_{1,\,2}(\xi_*)\exp\left(2\,i\,k_{1,\,2}\xi_*\right)\right]^2 \tag{8.97}$$

и уравнению для амплитудной функции. Значение B_l определяется с помощью численного интегрирования уравнения (8.97) от $-\infty$ до 0, вычисления $B_2(0)$ как функции $B_1(0)$ (полученной из условия непрерывности радиальной волновой функции и ее производной) и дальнейшего интегрирования уравнения (8.97) от 0 до $+\infty$.

Примем, что начальная плоская волна распространяется параллельно оси симметрии поля по направлению к полюсу $\theta = 0$. Пространственная часть волновой функции из условий аксиальной симметрии задачи должна быть представлена состояниями с различными l, но с $m = 0$

$$e^{i\,kr\cos\theta} + f(\theta)\frac{e^{i\,kr}}{r} = \sum_{l=0}^{\infty} Q_l\left(\frac{e^{i\,kr}}{r} + B_l\frac{e^{-i\,kr}}{r}\right)P_{l0}(\cos\theta) \tag{8.98}$$

при $r \to \infty$. Здесь $f(\theta)$ — амплитуда рассеяния; Q_l — нормировочные коэффициенты. Для вывода формулы для амплитуды рассеяния нам понадобится формула разложения плоской волны по угловым гармоникам Клейна – Гордона – НУТ, которую приведем, опустив громоздкое доказательство.

Разложение плоской волны по угловым гармоникам Клейна – Гордона – НУТ имеет вид

$$e^{i\,xy} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(y) P_{n0}(x), \tag{8.99}$$

где $P_{n0}(x) = (1+x)^C P_n^{(0,\,2C)}(x)$, а $g_n(y)$ — коэффициенты разложения, подлежащие определению. Точное выражение для $g_n(y)$ имеет следующий вид:

$$g_n(y) = \frac{(-1)^n (2n+2C+1)C}{2^C (n+C+1)(n+C)} e^{-i\,y} \times \\ \times\, {}_2F_2\left(\begin{array}{cc} 1-C, & 1+C \\ & \\ 1-C-n, & 2+C+n \end{array} \middle| \, 2\,i\,y \right), \tag{8.100}$$

где ${}_2F_2\left(\begin{array}{cc} \alpha, & \beta \\ & \\ \gamma, & \delta \end{array} \middle| \, z \right)$ — обобщенная гипергеометрическая функция.

Асимптотическое значение функции $g_n(y)$ при $y \to \infty$ выражается следующей формулой:

$$g_n(y) = \frac{2n+2C+1}{2^{1+C}\,i\,y} \left[e^{i\,y} + E_n^0(C) e^{-i\,y} \right], \tag{8.101}$$

где

$$E_n^0(C) = (-1)^n \frac{e^{i\,\pi(1+C)}}{(2\,i\,y)^C}\; D\,,$$

$$D = \frac{\Gamma(1+n+C)}{\Gamma(1+n)} + \frac{C}{\Gamma(1+C)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(1+k+C)\Gamma(n-k+C)}{\Gamma(1+k)\Gamma(n-k+1)}. \tag{8.102}$$

Подставив (8.99) и (8.101) при $y = kr$ в формулу (8.98), получим окончательную формулу для амплитуды рассеяния

$$f(\theta) = \frac{1}{2^{1+C}\, i\, k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 2C + 1) \left(\frac{E_l^0}{B_l} - 1 \right) P_{l0}(\cos\theta). \quad (8.103)$$

Здесь k — размерный волновой вектор:

$$k = \frac{\delta}{R_n} \sqrt{\gamma^2 - 1} = \frac{\mu c}{\hbar} \sqrt{\gamma^2 - 1}\,. \quad (8.104)$$

8.9. Результаты расчетов. Перспективы развития модели

В работах [72, 74] были приведены теоретические дифференциальные сечения рассеяния квантовых электронейтральных частиц, взаимодействующих с источником поля сильным образом. Из сравнения с экспериментальными данными по рассеянию нейтронов на ядрах были определены значения R_n, соответствующие этому процессу взаимодействия. Было установлено, что соблюдается эмпирический закон ядерной физики

$$R_n \propto A^{1/3}, \quad (8.105)$$

где A — массовое число ядра. Было также установлено, что энергия рассеиваемых частиц слабо влияет на параметр сильного взаимодействия R_n.

Определенные таким образом значения R_n затем были использованы в задаче по получению сечения рассеяния квантовой частицы, взаимодействующей с источником поля электроядерным образом ($R_e \neq 0$, $R_n \neq 0$), причем полагалось, что $R_n(p) = R_n(n)$ для процесса рассеяния на одних и тех же ядрах. Значения R_e определялись из формулы для электромагнитного радиуса [4], которая для рассеиваемых протонов принимает вид

$$R_e = -2Z\alpha \frac{\hbar}{\mu_p c}, \quad (8.106)$$

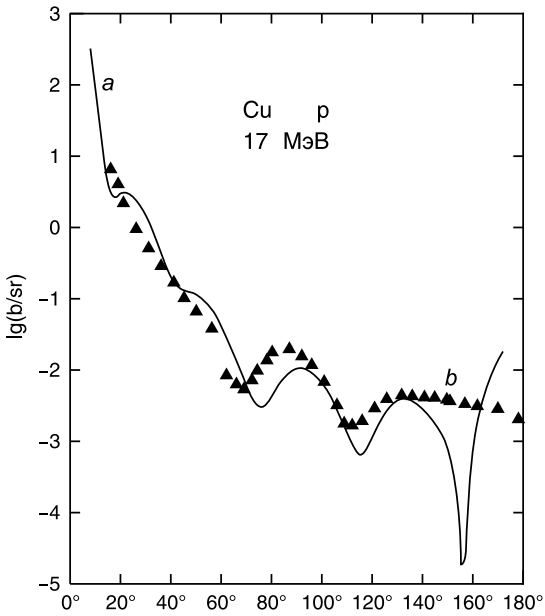

Рис. 8.5: Дифференциальное сечение рассеяния: a — теоретический расчет при $mc^2 = 938,5$ МэВ, $T = 17$ МэВ, $R_n = 3,15\times$ $\times 10^{-15}$ см, $R_e = -8,9 \times 10^{-15}$ см (сплошная кривая); b — упругое рассеяние 17 МэВ протонов на ядрах меди (экспериментальные точки)

где α — параметр тонкой структуры, Z — зарядовое число ядра, μ_p — масса протона.

На рис. 8.5 сплошной кривой представлено дифференциальное сечение рассеяния квантовой частицы энергии покоя 938,5 МэВ, кинетической энергии 17 МэВ. Параметр $\delta = 0,15$, что соответствует $R_n = 3,15 \times 10^{-15}$ см; параметр $G = -2,8$, что соответствует $R_e = -8,9 \times 10^{-15}$ см (поле отталкивания). Экспериментальные точки — дифференциальное сечение упругого рассеяния протонов энергии 17 МэВ на ядрах меди [80].

Хорошее соответствие экспериментальных и теоретических

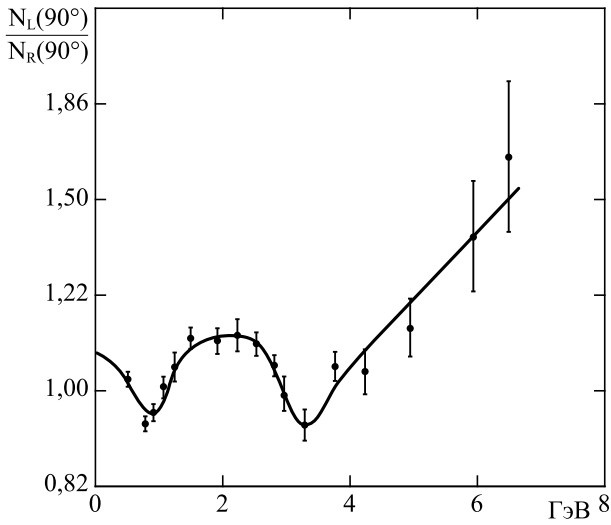

Рис. 8.6: Рассеяние неполяризованного протонного пучка энергии 28 ГэВ на поляризованной протонной мишени. По вертикальной оси — отношение числа протонов, рассеянных влево на угол 90°, к числу протонов, рассеянных вправо на угол 90°, по горизонтальной оси — передача энергии в ГэВ [91]

данных в квантовой картине рассеяния как для электронейтральных, так и для заряженных частиц, а также соблюдение зависимости $R_n \propto A^{1/3}$ позволяют утверждать, что выбранное решение вакуумных уравнений с метрикой типа НУТ дает фундаментальное описание ядерного взаимодействия. На геометрическом уровне это взаимодействие генерируется сильным зарядовым радиусом. Это эквивалентно существованию сильного заряда, являющегося источником сильного поля.

Некоторые экспериментальные эффекты в спиновой физике высоких энергий, кажущиеся аномальными с точки зрения современных теорий, могут быть объяснены в рамках геометрической модели сильного взаимодействия. Рассмотрим, например, левоправую асимметрию при рассеянии неполяризованного протонно-

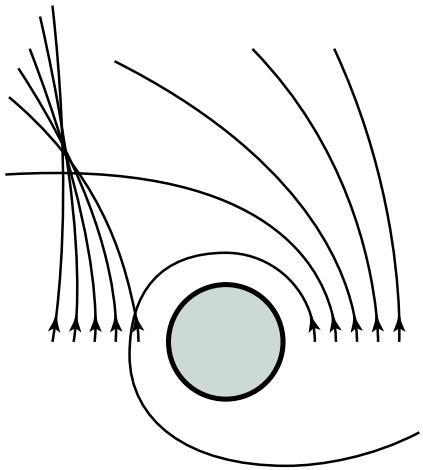

Рис. 8.7: Иллюстрация эффекта увлечения частиц в пространстве Керра – НУТ

го пучка ультрарелятивистской энергии на поляризованной протонной мишени [91]. При энергии падающего пучка 28 ГэВ число протонов, рассеиваемых влево на угол 90°, превышало на $2/3$ число протонов, рассеиваемых вправо на тот же угол (рис. 8.6). Этот эффект представляет собой серьезную трудность для квантовой хромодинамики, согласно которой спиновые эффекты должны снижаться с ростом энергии.

В геометрической модели сильного взаимодействия этот эффект качественно может быть объяснен с помощью введения независимого параметра, характеризующего поляризационные (спиновые) свойства ядер мишени, — параметра Керра R_s. В модели, таким образом, будут фигурировать три параметра — R_e, R_n и R_s, а пространство событий будет описываться решением вакуумных уравнений с метрикой типа метрики Керра – НУТ [4]. Введение спинового параметра R_s приведет к известному эффекту увлечения частиц [92], который значителен как в области малых, так и в области ультрарелятивистских энергий. Увлечение

частиц порождает лево-правую асимметрию в сечении рассеяния частиц и, тем более, в сечении захвата частиц (рис. 8.7).

8.10. Краткие выводы

В начале XX века была создана специальная теория относительности, которую считают теорией, имеющей всеобщую приложимость. Специальный принцип относительности, устанавливающий эквивалентность инерциальных систем отсчета для описания событий, является основанием, на котором выстроено все здание современной теоретической физики.

Как было показано выше, в пространственно-временных областях, где сосредоточено сильное взаимодействие, реальные системы отсчета нельзя отнести к квазиинерциальным. В исследуемых областях частицы испытывают огромное ускорение, которое вносит доминирующий вклад в преобразования координат событий относительно систем отсчета, связанных с частицами. Этим можно объяснить неудачи в попытках найти «фундаментальный» потенциал взаимодействия на фоне плоского пространства событий, которое соответствует инерциальным системам отсчета.

Выход заключается в следующем. Фундаментальные уравнения, описывающие сильные взаимодействия, должны быть инвариантны относительно преобразований между реальными системами отсчета (L-ковариантность). Поэтому круг поиска пространства, эффективно описывающего сильное взаимодействие, был сужен до прямых решений уравнений вакуума [4], соответствующих элементарным возбуждениям физического вакуума.

На решении вакуумных уравнений с метрикой типа Ньюмена – Унти – Тамбурино (НУТ) построена геометрическая модель сильного взаимодействия. Расчеты движения частиц в пространстве НУТ привели к теоретическим кривым дифференциального сечения рассеяния частиц, которые хорошо согласуются с экспериментальными данными по рассеянию нейтронов на ядрах в результате сильного взаимодействия, а также с данными по рассеянию протонов в результате электроядерного взаимодействия.

Эти исследования дают нам основание утверждать, что сильное взаимодействие, подобно электромагнитному, на геометрическом уровне генерируется новым «сильным» зарядовым радиусом. Другими словами, наряду с электрическим зарядом существует «сильный» заряд, являющийся источником сильного поля.

На решении вакуумных уравнений с метрикой типа де Ситтера построена геометрическая модель кварков [1, разд. 4.6], описание которой здесь было опущено. Было показано, что простейшее вакуумное возбуждение, «микровселенная» де Ситтера, позволяет описать внутреннюю часть геометризированной частицы — адрона. Теория физического вакуума позволяет сконструировать более общую геометрию, внутренняя область которой имеет свойства «микровселенной» де Ситтера, а внешняя область отвечает электроядерному взаимодействию.

Отметим, что общерелятивистская электродинамика, геометрическая модель электроядерного взаимодействия, геометрическая модель кварков являются фундаментальными моделями, так как они основаны на прямых решениях теории физического вакуума [4]. Это позволяет на геометрическом уровне проследить за единым происхождением элементарных взаимодействий и установить универсальную связь между ними.

Глава 9.

Второе дочернее направление — электродинамика ориентируемой точки

9.1. К истории вопроса

Над созданием новой электродинамики автор начал заниматься в 2009 году, сразу после публикации книги «Теория реальной относительности».

Автор хорошо понимал, что уравнения классической электродинамики (система уравнений Максвелла) инвариантны относительно преобразований координат и полей специальной относительности, как это показал А. Эйнштейн в 1905 году [31]. Поэтому единственный путь к расширению классической электродинамики лежал через расширение ее платформы — специального принципа относительности. Так как принцип реальной относительности, обобщающий принцип специальной относительности, был к тому времени создан, то автор начал поиски уравнений новой электродинамики, которые были бы инвариантны относи-

тельно преобразований координат и полей между реальными системами отсчета, и которые переходили бы в классические уравнения Максвелла при превращении реальных систем отсчета в квазиинерциальные системы отсчета.

Работа в основном была закончена в марте 2012 года. В апреле 2013 года она была опубликована в виде книг «Электродинамика ориентируемой точки» [2] (русскоязычное издание) и «Electrodynamics of oriented point» [95] (англоязычное издание). В дальнейшем последовали выступления автора на международных и российских научных конференциях, которые касались, во-первых, оснований новой электродинамики [96], [97], [98], и, во-вторых, приложений этой теории [99], [100], [101].

9.2. Классическая электродинамика и специальная относительность

А. Эйнштейн в основополагающей статье по специальной теории относительности [31] доказал инвариантность системы уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \tfrac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v}, \\ \operatorname{div}\mathbf{E} &= 4\pi\rho \end{aligned} \tag{9.1}$$

при переходе из инерциальной системы K в инерциальную систему K', который сопровождается преобразованиями координат и времени

$$\begin{aligned} x' &= (x - Vt)\gamma, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= (t - Vx/c^2)\gamma, \end{aligned} \tag{9.2}$$

и преобразованиями электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей

$$\begin{aligned} E'_x = E_x,\ \ E'_y = (E_y - \tfrac{V}{c}H_z)\gamma,\ \ E'_z = (E_z + \tfrac{V}{c}H_y)\gamma, \\ H'_x = H_x,\ \ H'_y = (H_y + \tfrac{V}{c}E_z)\gamma,\ \ H'_z = (H_z - \tfrac{V}{c}E_y)\gamma, \end{aligned} \tag{9.3}$$

при условии совпадения покоящейся и движущейся систем отсчета при $t' = t = 0$, где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{9.4}$$

есть релятивистский фактор. Величины со штрихом относятся к системе отсчета K', движущейся относительно покоящейся системы K равномерно и прямолинейно со скоростью V в положительном направлении оси OX.

Инвариантность системы уравнений (9.1) относительно преобразований (9.2) и (9.3) означает, что в инерциальной системе K' поля $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ подчиняются той же самой системе уравнений, что и в системе K:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E}' &= -\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t'}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H}' &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}' &= \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} + \tfrac{4\pi}{c}\rho' \mathbf{v}', \\ \operatorname{div} \mathbf{E}' &= 4\pi\rho'. \end{aligned} \tag{9.5}$$

Здесь ρ' и $\mathbf{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)$ — плотность заряда и скорость заряженной частицы в системе K', с соответствующими формулами преобразования из системы K [31]

$$\rho' = \gamma(1 - \frac{V v_x}{c^2})\rho, \tag{9.6}$$

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - V v_x/c^2}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - V v_x/c^2)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - V v_x/c^2)}. \tag{9.7}$$

Как было замечено Г.И. Шиповым [4], при доказательстве инвариантности уравнений Максвелла (9.1) и уравнений движения заряда в электромагнитном поле А. Эйнштейн в основополагающей работе [31] ввел неявный постулат об инвариантности заряда при переходе из системы отсчета K в систему отсчета K'

$$e = e' = inv. \tag{9.8}$$

Покажем, что данное условие инвариантности выполняется при условии, когда электрон «слабо ускорен» [31], то есть когда собственная система отсчета электрона может быть заменена локально-лоренцевой системой отсчета в любой момент времени. Действительно, в системах K и K' имеем

$$e = \int \rho dV = \int \frac{\rho}{c\,dt} d\Omega, \tag{9.9}$$

$$e' = \int \rho' dV' = \int \frac{\rho'}{c\,dt'} d\Omega' = \int \frac{\rho'\gamma}{c\,dt} d\Omega, \tag{9.10}$$

где $d\Omega = d\Omega'$ — инвариантный элемент четырехмерного объема, а dt' — приращение собственного времени в системе K':

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma}. \tag{9.11}$$

Сравнивая (9.9) и (9.10), получим условие выполнения постулата об инвариантности заряда

$$\rho' = \frac{\rho}{\gamma}. \tag{9.12}$$

Легко видеть, что равенства (9.6) и (9.12) можно выполнить, лишь когда

$$v_x = V = const, \tag{9.13}$$

то есть когда собственная система отсчета заряда совпадает с инерциальной системой K' в любой момент времени. Так как при точном выполнении условия (9.13) о динамике электрона не имеет смысла говорить вообще, то А. Эйнштейн рассмотрел уравнения движения заряженной частицы при слабом нарушении (9.13), описав «динамику (слабо ускоренного) электрона» [31].

При слабом нарушении условия (9.13), когда собственную систему отсчета заряда можно считать локально-лоренцевой системой отсчета в любой момент времени $K'(V(t))$, уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле остаются

инвариантными (не меняют своего вида) при преобразованиях (9.2), (9.3) между системами отсчета K и K'

$$\frac{d}{dt}(\gamma m v_x) = e\left(E_x + \frac{v_y}{c}H_z - \frac{v_z}{c}H_y\right), \tag{9.14}$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma m v_y) = e\left(E_y + \frac{v_z}{c}H_x - \frac{v_x}{c}H_z\right), \tag{9.15}$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma m v_z) = e\left(E_z + \frac{v_x}{c}H_y - \frac{v_y}{c}H_x\right), \tag{9.16}$$

где в данном случае

$$v_y, v_z \ll v_x,\ v_x(t) \simeq V_x(t),\ \gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - v_x^2(t)/c^2}}, \tag{9.17}$$

$\mathbf{v} = (v_x,\ v_y,\ v_z)$ — скорость заряженной частицы в системе отсчета K.

Используя известную зависимость дифференциала интервала ds, связанного с частицей, и дифференциала dt [10]

$$ds = \sqrt{c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2} = \frac{c}{\gamma}\,dt, \tag{9.18}$$

мы можем записать уравнения движения заряда (9.14) – (9.16) в четырехмерной форме [10]

$$mc\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c}\,F^{ik}u_k, \tag{9.19}$$

где F^{ik} — тензор электромагнитного поля:

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{9.20}$$

u^k — четырехмерная скорость частицы:

$$u^k = \gamma\left(1,\ \frac{v_x}{c},\ \frac{v_y}{c},\ \frac{v_z}{c}\right). \tag{9.21}$$

При $i = 0$ четырехмерное уравнение (9.19) представляет собой уравнение мощности

$$mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = e\mathbf{E}\mathbf{v}. \tag{9.22}$$

Условие «слабого ускорения» электрона эквивалентно требованию представления собственной системы отсчета электрона локально-лоренцевой системой отсчета на интервале времени измерения параметров электрона. Оно заключается в малом изменении псевдоевклидова угла ориентации собственной системы отсчета электрона

$$\theta_x(t) = \operatorname{arth}\frac{v_x(t)}{c} \tag{9.23}$$

за время измерения параметров электрона. Отсюда следует условие для скорости изменения псевдоевклидова угла $\theta_x(t)$, записанное в безразмерном виде

$$r_e \frac{d\theta_x}{c\,dt} = r_e\gamma^2 \frac{dv_x(t)}{c^2\,dt} \ll 1. \tag{9.24}$$

Здесь введена геометрическая характеристика электрона, имеющая размерность длины — классической радиус электрона r_e

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}. \tag{9.25}$$

Найдя в нерелятивистском случае dv_x/dt из уравнения движения (9.14), вычислим значение сильного (большого по величине) электрического поля, при котором электрон испытывает ускорение, приводящее к нарушению условия (9.24)

$$E_S = \frac{m^2c^4}{e^3} = \frac{e}{r_e^2} \approx 10^{16} \text{ ед. СГСЭ } = 3 \cdot 10^{20}\,\text{В/м}. \tag{9.26}$$

Отметим, что максимальные величины электрических полей, генерируемых в лабораторных условиях, отличаются от E_S в меньшую сторону на десять-двенадцать порядков! Из структуры формулы (9.26) видно, что электрические поля напряженностью E_S

появляются на расстояниях r_e от заряда e. Процитируем еще раз классическое руководство по электродинамике и специальной относительности: «...расстояния порядка e^2/mc^2 опять оказываются той границей, за которой электродинамика приходит в противоречие сама с собой» [10, § 75].

Таким образом, при выполнении условий

$$E \ll E_S, \tag{9.27}$$

уравнения движения заряженной материальной точки (9.19) и уравнения классической электродинамики (9.1) инвариантны относительно преобразований специальной теории относительности. Оценка их области применимости та же: считается, что эти уравнения верно описывают все проявления электрического и магнитного полей, если поля значительно меньше E_S, то есть являются такими, которые обеспечивают инвариантность уравнений относительно преобразований специальной относительности.

Такой анализ, на наш взгляд, несостоятелен, ибо в этом случае применимость (внешняя граница) объекта оценивается «при взгляде изнутри его самого», а именно — из глубины платформы специальной относительности. В предыдущих главах неоднократно показывалось, что платформу специальной относительности невозможно «продлить» до относительности реальных неинерциальных систем отсчета, находясь в ней самой.

Реальная электродинамика есть электродинамика ускоренных заряженных частиц. Естественно ожидать, что ускоренное движение зарядов сопровождается «полем инерции электромагнитной природы», которое является дополнительным источником электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей нового типа, — полей, которые принципиально не может учесть классическая электродинамика, инвариантная относительно преобразований между системами отсчета, сохраняющими свою скорость.

Известен ряд работ (см., например, [93], а также ссылки в [93]), в которых предложены уравнения электромагнитного поля во вращающейся системе отсчета, отличающиеся от уравнений классической электродинамики дополнительными членами. По

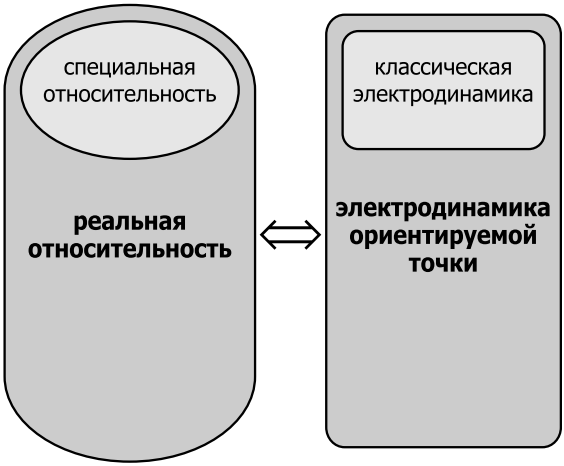

Рис. 9.1: Новой относительности — новая электродинамика

мнению автора работы [93], дополнительные члены уравнений присутствуют из-за эффекта «электромагнитных сил инерции». В этих работах преобразования координат и полей из инерциальной в ускоренную систему отсчета представляют собой квазистатические преобразования специальной относительности, возникшие, образно говоря, «из глубины ее платформы». Заметим, что в обсуждаемых работах даже не ставился вопрос о соответствии реконструированных уравнений экспериментальным свойствам новых электродинамических полей.

В настоящее время экспериментально обнаружены новые эффекты при динамическом взаимодействии специальных электромагнитных структур, а именно, при их относительном вращении [94]. Данные эффекты выходят за рамки классической электродинамики и — специально отметим — обнаружены при нерелятивистских скоростях и при «комнатных» напряженностях электрического поля, даже отдаленно не приближающихся к значению E_S.

Следуя факту полного соответствия специальной относительности и классической электродинамики (электродинамики ма-

териальной точки), можно утверждать, что в той мере, в которой нарушается инерциальное движение зарядов, должна нарушаться и точность уравнений классической электродинамики. Для реального неинерциального движения зарядов должна быть предложена новая электродинамика. Проводя аналогию между «близнецами-братьями» — специальной относительностью и классической электродинамикой, новая электродинамика должна быть основана на принципе реальной относительности и соответствовать преобразованиям координат между реальными системами отсчета. Новая электродинамика, так же как и реальная относительность, должна использовать пространство событий ориентируемых точек и работать с новым элементарным объектом — ориентируемой точкой, снабженной зарядом. Поэтому новая электродинамика есть электродинамика ориентируемой точки (рис. 9.1).

9.3. Уравнения электродинамики ориентируемой точки в общем виде

Для того чтобы сформулировать уравнения новой электродинамики, необходимо использовать *принцип соответствия*, по которому новые уравнения должны переходить в старые, классические в предельных случаях. Таким предельным случаем является случай превращения реальной системы отсчета, связанной с заряженной частицей, в квазиинерциальную систему отсчета, удаленную от других полей.

Принцип соответствия поможет сформулировать требования к основным величинам новой электродинамики. По поводу величины F^{ik}, составленной таким же образом, как и в классической электродинамике, из компонентов электрического и магнитного полей (см. формулу (9.20)), и являющейся в классическом пределе обыкновенным тензором второго ранга, можно сказать следующее. Величина F^{ik} в классическом пределе входит в выражение для четырехмерной силы, действующей на частицу со стороны

электромагнитного поля (выражение для внешней силы выбрано в единицах, соответствующих выражению внешней четырехмерной силы со стороны геометризированного гравитационного поля [1, 10])

$$m\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c^2}\,F^{ik}u_k. \tag{9.28}$$

Как было показано выше, в Главе 7, четырехмерная сила $F^i{}_{external}$, действующая со стороны любого геометризированного поля, является L-вектором, неустранимым никакими активными преобразованиями между реальными системами отсчета. Таким образом, мы полагаем, что в электродинамике ориентируемой точки внешняя сила

$$F^i{}_{external} = \frac{e}{c^2}\,F^{ik}u_k \tag{9.29}$$

также является L-вектором. Так как в выражении (9.29) четырехмерная скорость частицы представлена ковариантным L-вектором, то величина F^{ik} должна быть L-тензором второго ранга.

Требования второй части принципа реальной относительности, в том числе требование к «локальному выражению» законов природы, заключаются в том, что фундаментальные уравнения изначально должны быть сформулированы через неголономные координаты касательного расслоения и должны быть L-ковариантными (разд. 7.2).

Следовательно, основным выражением для L-тензора электромагнитного поля будет являться его выражение в координатах касательного расслоения, то есть в локально-лоренцевых координатах

$$F^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -e_x & -e_y & -e_z \\ e_x & 0 & -h_z & h_y \\ e_y & h_z & 0 & -h_x \\ e_z & -h_y & h_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.30}$$

Он может быть выражен также в ковариантном виде

$$F_{cd} = \begin{pmatrix} 0 & e_x & e_y & e_z \\ -e_x & 0 & -h_z & h_y \\ -e_y & h_z & 0 & -h_x \\ -e_z & -h_y & h_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{9.31}$$

в соответствии с процедурой опускания индексов

$$F_{cd} = \eta_{ca}\, F^{ab}\, \eta_{bd}, \tag{9.32}$$

где

$$\eta_{ca} = \eta_{bd} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{9.33}$$

есть псевдоевклидова метрика слоя касательного расслоения. В формулах (9.30), (9.31) e_x, e_y, e_z, h_x, h_y, h_z — локально-лоренцевы компоненты электрического и магнитного полей (компоненты полей, выраженные в координатах касательного расслоения).

L-тензор электромагнитного поля в локально-лоренцевых координатах вычисляется из величины F^{ik} в голономных мировых координатах (9.20) следующим образом:

$$F^{ab} = h^a{}_i\, F^{ik}\, h^b{}_k, \tag{9.34}$$

который для предельного случая квазиинерциальной системы отсчета K примет наиболее простой вид

$$F^{ab} = \delta^a{}_i\, F^{ik}\, \delta^b{}_k. \tag{9.35}$$

Локально-лоренцевы координаты L-тензора электромагнитного поля в реальных системах отсчета K' и K соотносятся следующим образом:

$$F^{a'b'} = \Lambda^{a'}{}_a\, F^{ab}\, \Lambda^{b'}{}_b, \tag{9.36}$$

где $\Lambda^{a'}{}_a$ — матрица текущей четырехмерной ориентации системы K' относительно K.

Напомним четырехмерную запись уравнений Максвелла, которые, как показано в предыдущем разделе, реализуются в случае «квазиинерциального» движения заряда. Первая и вторая пары уравнений Максвелла, а также уравнение непрерывности в голономных мировых координатах выглядят так [10]

$$F_{ik,\,l} + F_{li,\,k} + F_{kl,\,i} = 0, \tag{9.37}$$

$$F^{ik}{}_{,\,k} = -\frac{4\pi}{c} j^i, \tag{9.38}$$

$$j^i{}_{,\,i} = 0, \tag{9.39}$$

где $j^i = (c\rho, \mathbf{j}) = (c\rho, \rho\mathbf{v})$. Те же уравнения в локально-лоренцевых координатах, благодаря предельному значению поля тетрад $h^i{}_a = \delta^i{}_a$ в квазиинерциальной системе отсчета, связанной с зарядом, и, вследствие этого, из-за совпадения мировых и локально-лоренцевых координат в этой системе, выглядят таким же образом

$$F_{ab,\,c} + F_{ca,\,b} + F_{bc,\,a} = 0, \tag{9.40}$$

$$F^{ab}{}_{,\,b} = -\frac{4\pi}{c} j^a, \tag{9.41}$$

$$j^a{}_{,\,a} = 0. \tag{9.42}$$

В соответствии с перечисленными основаниями остается вывести уравнения электродинамики ориентируемой точки, которые в L-ковариантном виде формулируются единственным образом. Первая пара уравнений выглядит так

$$\widetilde{\nabla}_c F_{ab} + \widetilde{\nabla}_b F_{ca} + \widetilde{\nabla}_a F_{bc} = 0, \tag{9.43}$$

где $\widetilde{\nabla}_c$ — L-ковариантная производная по координате касательного расслоения

$$\widetilde{\nabla}_c(\,) = \widetilde{\nabla}_k(\,)\, h^k{}_c. \tag{9.44}$$

Вторая пара уравнений электродинамики ориентируемой точки составляет следующее соотношение

$$\widetilde{\nabla}_b F^{ab} = -\frac{4\pi}{c} j^a. \tag{9.45}$$

Уравнение непрерывности формулируется следующим образом

$$\widetilde{\nabla}_a j^a = 0. \tag{9.46}$$

Раскроем уравнения (9.43), (9.45) и (9.46), используя определение L-ковариантной производной для контравариантного и ковариантного L-тензора второго ранга (см. Приложение 1):

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_c Z^{ab} &= Z^{ab}{}_{,c} - T^{a\cdot\cdot}_{\cdot d c} Z^{db} - T^{b\cdot\cdot}_{\cdot d c} Z^{ad}, \\ \widetilde{\nabla}_c Z_{ab} &= Z_{ab,\,c} + T^{d\cdot\cdot}_{\cdot a c} Z_{db} + T^{d\cdot\cdot}_{\cdot b c} Z_{ad}. \end{aligned} \tag{9.47}$$

Во-первых, найдем уравнения электродинамики ориентируемой точки в предельном случае квазиинерциального движения заряженной частицы, удаленной от других полей. В системе отсчета K, связанной с частицей, в декартовых координатах будем иметь:

$$h^i{}_a = \delta^i{}_a, \;\; h^b{}_j = \delta^b{}_j, \tag{9.48}$$

тогда, в соответствии с определением коэффициентов вращения Риччи (Приложение 1),

$$T^{a\cdot\cdot}_{\cdot b k} = 0, \tag{9.49}$$

следовательно,

$$T^{i\cdot\cdot}_{\cdot j k} = 0. \tag{9.50}$$

Последнее соотношение (9.50), записанное в декартовых координатах, верно в любых координатах в реальной системе отсчета K, так как $T^{i\cdot\cdot}_{\cdot j k}$ является полным тензором относительно пассивных преобразований (преобразований координат объекта при переходе от одной координатной сетки к другой, Приложение 1). Следовательно, в системе K выражения для L-ковариантной производной упрощаются:

$$\widetilde{\nabla}_c Z^{ab} = Z^{ab}{}_{,c}, \;\; \widetilde{\nabla}_c Z_{ab} = Z_{ab,\,c}, \tag{9.51}$$

и общие уравнения электродинамики ориентируемой точки (9.43), (9.45) и уравнение непрерывности (9.46) в «предельной» квазиинерциальной реальной системе K приобретают вид уравнений

классической электродинамики и классического уравнения непрерывности в локально-лоренцевых координатах (9.40), (9.41), (9.42). *Этим доказывается соблюдение принципа соответствия в отношении электродинамики ориентируемой точки.*

Для получения уравнений новой электродинамики в произвольной реальной системе отсчета K' приведем формулы преобразования коэффициентов вращения Риччи между реальными системами K и K' (Приложение 1):

$$T_{\cdot\, b'\, k}^{a'\, \cdot\cdot} = \Lambda^{a'}{}_{a,k}\, \Lambda^{a}{}_{b'} + \Lambda^{a'}{}_{a}\, T_{\cdot\, b\, k}^{a\, \cdot\cdot}\, \Lambda^{b}{}_{b'}, \quad T_{\cdot\, b'\, k'}^{a'\, \cdot\cdot} = T_{\cdot\, b'\, k}^{a'\, \cdot\cdot}\, \Lambda^{k}{}_{k'}, \tag{9.52}$$

которые при выборе в качестве исходной системы квазиинерциальной системы отсчета K принимают вид

$$T_{\cdot\, b'\, k}^{a'\, \cdot\cdot} = \Lambda^{a'}{}_{a,k}\, \Lambda^{a}{}_{b'}, \quad T_{\cdot\, b'\, k'}^{a'\, \cdot\cdot} = T_{\cdot\, b'\, k}^{a'\, \cdot\cdot}\, \Lambda^{k}{}_{k'}. \tag{9.53}$$

Произведя раскрытие L-ковариантной производной в уравнениях (9.43), (9.45) и в уравнении непрерывности (9.46) относительно системы K', получим четырехмерные уравнения электродинамики ориентируемой точки в произвольной реальной системе отсчета K'. Первая пара уравнений:

$$\begin{aligned} &F_{a'b',\, c'} + F_{c'a',\, b'} + F_{b'c',\, a'} + \\ &+ 2\, T_{\cdot\, [a'\, c']}^{d'\, \cdot\cdot} F_{d'b'} + 2\, T_{\cdot\, [b'\, c']}^{d'\, \cdot\cdot} F_{a'd'} + 2\, T_{\cdot\, [a'\, b']}^{d'\, \cdot\cdot} F_{c'd'} = 0, \end{aligned} \tag{9.54}$$

вторая пара уравнений:

$$F^{a'c'}{}_{,\, c'} - T_{\cdot\, d'\, c'}^{a'\, \cdot\cdot} F^{d'c'} - T_{\cdot\, d'\, c'}^{c'\, \cdot\cdot} F^{a'd'} = -\frac{4\pi}{c}\, j^{a'}, \tag{9.55}$$

уравнение непрерывности:

$$j^{c'}{}_{,\, c'} - T_{\cdot\, d'\, c'}^{c'\, \cdot\cdot} j^{d'} = 0. \tag{9.56}$$

Здесь введен коммутатор

$$T_{\cdot\, [b'\, c']}^{a'\, \cdot\cdot} = \frac{1}{2} \left(T_{\cdot\, b'\, c'}^{a'\, \cdot\cdot} - T_{\cdot\, c'\, b'}^{a'\, \cdot\cdot} \right) \tag{9.57}$$

и использовано L-ковариантное свойство антисимметричности L-тензора электромагнитного поля

$$F^{a'b'} = -F^{b'a'}. \tag{9.58}$$

9.4. Круговое нерелятивистское движение заряда

Ввиду того, что основной величиной, характеризующую реальную систему отсчета, является ее текущая четырехмерная ориентация $\Lambda^{a'}_{a} \in SO(1.3)$ относительно другой (желательно покоящейся) системы отсчета, где $SO(1.3)$ — группа вращений ортонормированных реперов в псевдоевклидовом пространстве, то главной характеристикой «степени неинерциальности» системы отсчета будет являться ее угловая скорость при движении во внешнем поле. В предельном случае, при удалении от тяготеющих сил и полей, реальная система отсчета становится квазиинерциальной и угловые скорости векторов репера стремятся к нулю (при отсутствии начального вращения)

$$\frac{d\phi}{dt} \longrightarrow 0, \qquad \frac{d\theta}{dt} \longrightarrow 0. \tag{9.59}$$

Здесь ϕ — один из трехмерных углов (углов поворота в плоскостях XOY, YOZ, ZOX), θ — один из псевдоевклидовых углов (углов поворота в плоскостях XOT, YOT, ZOT).

Выясним, каково должно быть в нерелятивистском случае соотношение тангециальной силы $\mathbf{F}_{\|}$ и нормальной силы $\mathbf{F}_{\perp}$, действующих на частицу (рис. 9.2), для того, чтобы угловая скорость в псевдоевклидовых углах

$$\frac{d\theta_x(t)}{dt} = \gamma^2 \frac{dV_x(t)}{c\,dt} \tag{9.60}$$

была равна угловой скорости в трехмерных углах

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt}. \tag{9.61}$$

Здесь $V_x(t) \ll c$ — скорость частицы в текущий момент времени, $\gamma = 1/\sqrt{1 - V_x^2/c^2} \approx 1$ — релятивистский фактор, m — масса частицы. Из уравнений динамики частицы в тангециальном и нормальном направлениях

$$F_{\|} = m\frac{dV_x(t)}{dt}, \quad F_{\perp} = m\frac{d\phi}{dt}V_x(t), \tag{9.62}$$

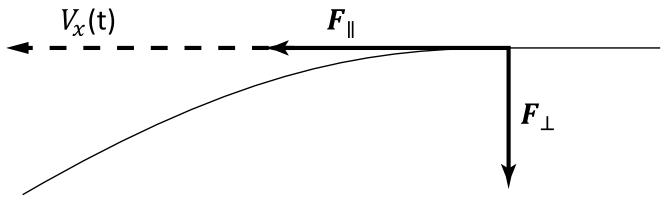

Рис. 9.2: Траектория ориентируемой частицы: $\mathbf{F}_{\parallel}$, $\mathbf{F}_{\perp}$ — тангециальная и нормальная силы, $V_x(t)$ — текущая скорость частицы

получим, что условием равенства угловых скоростей

$$\frac{d\theta_x(t)}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \tag{9.63}$$

является следующее соотношение сил

$$F_{\parallel} = \frac{c}{V_x(t)} F_{\perp}, \qquad \frac{c}{V_x(t)} \gg 1. \tag{9.64}$$

Мы видим, что для достижения угловой скорости репера в псевдоевклидовых углах, равной его угловой скорости в трехмерных углах, необходима тангециальная сила гораздо большей величины, чем нормальная сила. Другими словами, эффект «неинерциальности» реальной системы отсчета будет гораздо больше при центростремительном ускорении системы, чем при продольном ускорении такой же величины.

Чем больше будет «степень неинерциальности» частицы, снабженной зарядом, тем сильнее проявятся специальные эффекты новой электродинамики (то есть эффекты, отличные от классических). Таким образом, неклассические эффекты с гораздо большей вероятностью следует ожидать у частиц, совершающих круговые движения, чем у частиц, совершающих продольные движения с продольным ускорением.

Именно поэтому здесь и далее мы будем подразумевать, что собственная система отсчета источника поля реализована в виде

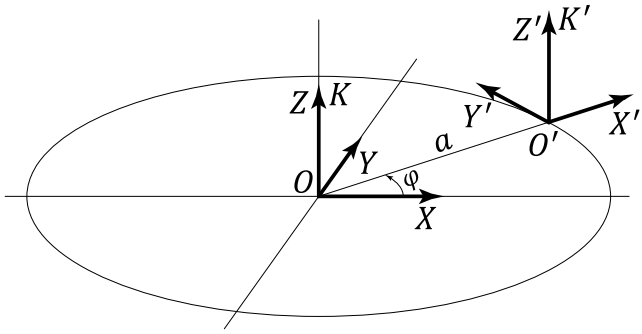

Рис. 9.3: Круговое движение заряда

системы отсчета $K'(O')$, совершающей нерелятивистское движение по окружности радиуса a в плоскости XOY с угловой скоростью Ω относительно покоящейся системы $K(O)$ (рис. 9.3). Параметры активного преобразования, связанного с переходом наблюдателя из системы $K(O)$ в реальную систему отсчета $K'(O')$, приведены в [1, разд. 2.10]. При активном преобразовании $K \to K'$ мы ограничиваемся областью окрестности текущего четырехмерного положения центра системы K' $\Delta t \approx 0,\ \Delta x \approx 0,$ $\Delta y \approx 0,\ \Delta z \approx 0,$ или, в цилиндрических координатах (рис. 9.3)

$$\begin{aligned} t &\approx 0, \\ a\,\varphi &\approx 0, \end{aligned} \tag{9.65}$$

где подразумевается $t = 0$ при $\varphi = 0$.

Мы рассматриваем нерелятивистское движение системы K', возможно, с непостоянной угловой скоростью $\Omega(t)$

$$\frac{a\Omega(t)}{c} \ll 1. \tag{9.66}$$

Матрица четырехмерной ориентации системы K' относительно покоящейся системы K с точностью до $o(\beta) = o(a\Omega/c)$ в

локальной области $a\varphi \approx 0$ будет выражена следующим образом

$$\Lambda^{a'}{}_{a}(\varphi \approx 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a\Omega/c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a\Omega/c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9.67}$$

поэтому

$$\Lambda^{a}{}_{b'}(\varphi \approx 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a\Omega/c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a\Omega/c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9.68}$$

и формула (9.53) для коэффициентов вращения Риччи с точностью до $o(a\Omega/c)$ приведет к выражению

$$\begin{gathered} T^{a'}{}_{b'0} = \Lambda^{a'}{}_{a,0}\,\Lambda^{a}{}_{b'} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega & 0 \\ 0 & -\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ T^{a'}{}_{b'\alpha} = 0, \quad \alpha = 1,\ 2,\ 3. \end{gathered} \tag{9.69}$$

Переходя с помощью формулы

$$T^{a'}{}_{b'c'} = T^{a'}{}_{b'k}\,h^{k}{}_{c}(O)\,\Lambda^{c}{}_{c'} = T^{a'}{}_{b'k}\,\delta^{k}{}_{c}\,\Lambda^{c}{}_{c'}, \tag{9.70}$$

к коэффициентам вращения Риччи с полностью локальными штрихованными индексами, получим следующие ненулевые коэффициенты $T^{a'}{}_{b'c'}$ в системе K':

$$\begin{aligned} T^{1'}{}_{2'0'} &= \Omega/c, \\ T^{2'}{}_{1'0'} &= -\Omega/c. \end{aligned} \tag{9.71}$$

Как показано в [1], в нерелятивистском приближении (с точностью до $o(a\Omega/c)$) значение поля коэффициентов Ламэ в точке O' (в центре системы K') равно

$$h^{i'}{}_{a'}(O') = \delta^{i'}{}_{a'}, \quad h^{b'}{}_{j'}(O') = \delta^{b'}{}_{j}, \tag{9.72}$$

поэтому в системе $K'(O')$ локально-лоренцевы координаты величин будут равны их мировым координатам.

Подставляя ненулевые коэффициенты вращения Риччи $T^{1'}_{2'0'}$, $T^{2'}_{1'0'}$ в четырехмерные уравнения электродинамики ориентируемой точки (9.54), (9.55) и четырехмерное уравнение непрерывности (9.56), получим уравнения для полей $\mathbf{e}'$, $\mathbf{h}'$ в локально-лоренцевых координатах в системе K':

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{e}' &= -\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \mathbf{h}'}{\partial t'} - \tfrac{1}{c}[\mathbf{\Omega}\mathbf{h}'], \\ \operatorname{div}\mathbf{h}' &= 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{h}' &= \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \mathbf{e}'}{\partial t'} + \tfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}' + \tfrac{1}{c}[\mathbf{\Omega}\mathbf{e}'], \\ \operatorname{div}\mathbf{e}' &= 4\pi\rho', \end{aligned} \tag{9.73}$$

и уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \operatorname{div}\mathbf{j}' = 0, \tag{9.74}$$

где $\mathbf{\Omega} = (0,\ 0,\ \Omega)$.

Приведя в системе K' в соответствии с формулой (9.72) поля $\mathbf{e}'$, $\mathbf{h}'$ в локально-лоренцевых координатах к полям $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ в мировых координатах, произведя далее нерелятивистские преобразования координат и полей из системы K' в покоящуюся систему K, получим уравнения электродинамики ориентируемой точки в системе K в случае кругового нерелятивистского движения системы K'

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \tfrac{1}{c}\left[\mathbf{\Omega}\mathbf{H}\right], \\ \operatorname{div}\mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \tfrac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \tfrac{1}{c}\left[\mathbf{\Omega}\mathbf{E}\right], \\ \operatorname{div}\mathbf{E} &= 4\pi\rho, \end{aligned} \tag{9.75}$$

и уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0. \tag{9.76}$$

Найдем выражения для плотности энергии и плотности потока энергии электромагнитного поля, которое описывается уравнениями (9.75). Пользуясь стандартной процедурой [10], умножим правую и левую части первого уравнения системы (9.75)

на $\mathbf{H}$, правую и левую части третьего уравнения системы (9.75) на $\mathbf{E}$, затем сложим полученные уравнения почленно. В результате получим

$$\frac{1}{c}\,\mathbf{E}\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\frac{1}{c}\,\mathbf{H}\,\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=-\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{jE}- \\ -\left(\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}-\mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\right)-\frac{1}{c}\,\mathbf{H}\left[\mathbf{\Omega H}\right]-\frac{1}{c}\,\mathbf{E}\left[\mathbf{\Omega E}\right]. \quad (9.77)$$

Заметив, что

$$\mathbf{H}\left[\mathbf{\Omega H}\right]=0, \quad \mathbf{E}\left[\mathbf{\Omega E}\right]=0, \quad (9.78)$$

$$\left(\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}-\mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\right)=\mathrm{div}\left[\mathbf{EH}\right], \quad (9.79)$$

перепишем уравнение (9.77) в виде

$$\frac{1}{2c}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(E^2+H^2\right)=-\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{jE}-\mathrm{div}\left[\mathbf{EH}\right], \quad (9.80)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2+H^2}{8\pi}\right)=-\mathbf{jE}-\mathrm{div}\,\mathbf{S}, \quad (9.81)$$

где, в соответствии с классической электродинамикой [10], величина $\mathbf{S}$, или вектор Пойтинга,

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}\left[\mathbf{EH}\right], \quad (9.82)$$

есть плотность потока энергии электромагнитного поля, а величина

$$W=\frac{E^2+H^2}{8\pi} \quad (9.83)$$

есть плотность энергии электромагнитного поля.

Мы видим, что неклассические источники в уравнениях (9.75): вакуумный источник вихревого электрического поля $-[\mathbf{\Omega}\,\mathbf{H}]/c$ и вакуумный источник магнитного поля $[\mathbf{\Omega}\,\mathbf{E}]/c$, не входят в формулу (9.81) для плотности потока электромагнитной энергии. Тем не менее, эти источники прямо влияют на решения системы уравнений (9.75), представляемых в виде полей $\mathbf{E}(t,\,x,\,y,\,z)$

и $\mathbf{H}(t, x, y, z)$. Влияние возрастает с увеличением скорости вращения реальной системы отсчета K', связанной с классическими или с вакуумными источниками. Утверждение основано на факте, что в пустоте, в отсутствии классических источников — зарядов и токов, система полевых уравнений (9.75) имеет ненулевые решения в виде стоячих электромагнитных волн [2]. Это является новым эффектом, так как классические электромагнитные волны нулевой частоты в пустом безграничном пространстве существовать не могут [10].

Заметим, что, наряду с обычными плотностью заряда и плотностью тока, в общий вид уравнения непрерывности (9.56) входит вакуумный источник заряда $T^{c'}_{\cdot d' c'} j^{d'}$, который в нерелятивистском случае движения K' не учитывается из-за своей малости (уравнение (9.74)). В релятивистском случае этот вакуумный источник может быть ответственен за эффект рождения заряда.

9.5. Электромагнитное поле в пустоте: плоские монохроматические волны

Электромагнитное поле генерируется прежде всего классическими источниками — зарядами и токами, но в новой электродинамике есть новый источник полей — вращение нейтрализованных по объему зарядов при вращении нейтрального тела [2, разд. 13.3].

Действительно, при $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$, уравнения (9.75) примут вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \tfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}_H, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \tfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}_E, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \end{aligned} \tag{9.84}$$

где

$$\mathbf{j}_H = -\frac{[\mathbf{\Omega}\,\mathbf{H}]}{4\pi} \tag{9.85}$$

— плотность вакуумного магнитного тока,

$$\mathbf{j}_E = \frac{[\mathbf{\Omega}\,\mathbf{E}]}{4\pi} \tag{9.86}$$

— плотность вакуумного электрического тока. Мы видим, что в отсутствии классических источников в уравнениях (9.84) представлены вакуумные токи $\mathbf{j}_H$ и $\mathbf{j}_E$. Это говорит, во-первых, об их независимости от классических источников. Во-вторых, это говорит о том, что реальная система отсчета K' в случае $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$ может быть ассоциирована либо со вращающимся нейтральным телом, либо — в пустом пространстве — со вращением нейтрализованных по объему виртуальных зарядов произвольной плотности $\rho^+ + \rho^- = 0$.

Кроме того, мы рассматриваем поля в пустом пространстве не абстрактным образом, а в прямой связи с их генерацией, которая происходит по условиям электродинамики ориентируемой точки при определенном ускоренном движении реальной системы отсчета K'. Если генерация полей происходила при круговом вращении реальной системы K', то мы имеем вакуумные токи со структурой (9.85), (9.86). Если генерация полей происходила при поступательном ускорении K', то мы будем иметь следующие вакуумные токи [2, разд. 5]:

$$\mathbf{j}_H = -\frac{[\dot{\boldsymbol{\beta}}\,\mathbf{E}]}{4\pi}, \qquad \mathbf{j}_E = -\frac{[\dot{\boldsymbol{\beta}}\,\mathbf{H}]}{4\pi}, \tag{9.87}$$

которые будут определять совершенно иные свойства полей [2, разд. 6]. Здесь $\dot{\boldsymbol{\beta}} = (\dot{\beta}_x,\ 0,\ 0)$, $\beta_x = V_x(t)/c$, $V_x(t)$ — скорость K' относительно покоящейся системы отсчета.

Таким образом, вакуумные токи несут в себе информацию о способе генерации полей, то есть о варианте реализации реальной системы отсчета K'. Они определяют неклассические свойства полей, которые, как будет показано ниже, в специальных режимах генерации становятся доминирующими над классическими свойствами полей.

Мы будем искать решение системы уравнений (9.84) в виде плоских монохроматических волн

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right\},\quad \mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right\}, \tag{9.88}$$

несмотря на то, что задача имеет цилиндрическую симметрию относительно оси OZ. В данном случае такой анализ правомерен в приближении волновой зоны [10], на больших расстояниях от излучающей системы $R\gg a$ и на больших расстояниях по сравнению с длиной волны $R\gg\lambda$. Именно на таких расстояниях поле имеет сферическую симметрию и на малых участках пространства его можно рассматривать как плоскую волну. Здесь амплитуды электрического и магнитного полей $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}$, $\mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega}$ — постоянные комплексные величины, волновой вектор $\mathbf{k}$ и круговая частота ω — постоянные действительные величины.

В этом разделе мы ограничимся рассмотрением распространения плоской монохроматической волны в направлении оси вращения заряда

$$\mathbf{\Omega}=\frac{\mathbf{k}}{k}\,\Omega,\quad \mathbf{k}=(0,\ 0,\ k). \tag{9.89}$$

Из уравнений (9.84) получим систему уравнений для комплексных амплитуд полей

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{k}\mathbf{E}_{k\omega}]=\tfrac{\omega}{c}\mathbf{H}_{k\omega}+\tfrac{i\Omega}{ck}[\mathbf{k}\mathbf{H}_{k\omega}],\\
&(\mathbf{k}\mathbf{H}_{k\omega})=0,\\
&[\mathbf{k}\mathbf{H}_{k\omega}]=-\tfrac{\omega}{c}\mathbf{E}_{k\omega}-\tfrac{i\Omega}{ck}[\mathbf{k}\mathbf{E}_{k\omega}],\\
&(\mathbf{k}\mathbf{E}_{k\omega})=0.
\end{aligned} \tag{9.90}$$

Из второго и четвертого уравнения системы (9.90) следует, что плоские монохроматические волны удовлетворяют условиям поперечности, то есть для каждой из амплитуд соблюдается $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}\perp\mathbf{k}$, $\mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega}\perp\mathbf{k}$. Это означает, что вектора $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}$ и $\mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega}$ лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волн.

Исключая из уравнений (9.90) комплексную амплитуду электрического поля $\mathbf{E}_{k\omega}$, получим уравнение для амплитуды магнит-

ного поля

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\Omega^2}{c^2}\right)[\mathbf{k}\mathbf{H}_{k\omega}] = -2ik\frac{\Omega\omega}{c^2}\mathbf{H}_{k\omega}. \tag{9.91}$$

Умножив левую и правую части уравнения (9.91) слева векторно на $\mathbf{k}$, получим

$$2ik\frac{\Omega\omega}{c^2}[\mathbf{k}\mathbf{H}_{k\omega}] = k^2\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\Omega^2}{c^2}\right)\mathbf{H}_{k\omega}. \tag{9.92}$$

Исключая из выражений (9.91) и (9.92) амплитуду $\mathbf{H}_{k\omega}$, получим дисперсионное соотношение

$$4\,\frac{\Omega^2\omega^2}{c^4} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\Omega^2}{c^2}\right)^2, \tag{9.93}$$

имеющее четыре решения

$$k_{1,\,2} = k_\omega^+ \pm \frac{\Omega}{c}, \quad k_\omega^+ = +\frac{\omega}{c}, \tag{9.94}$$

$$k_{3,\,4} = k_\omega^- \pm \frac{\Omega}{c}, \quad k_\omega^- = -\frac{\omega}{c}, \tag{9.95}$$

которые приводят нас к выражениям для монохроматических волн, распространяющимся по условию (9.89) вдоль оси OZ

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_{k\omega}\,e^{\pm i\Omega z/c}\,e^{i(k_\omega^+ z-\omega t)}\right\},\\ \mathbf{H}(\mathbf{r},t) &= \mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}_{k\omega}\,e^{\pm i\Omega z/c}\,e^{i(k_\omega^+ z-\omega t)}\right\},\end{aligned} \tag{9.96}$$

—- для волн, распространяющихся вперед,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_{k\omega}\,e^{\pm i\Omega z/c}\,e^{i(k_\omega^- z-\omega t)}\right\},\\ \mathbf{H}(\mathbf{r},t) &= \mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}_{k\omega}\,e^{\pm i\Omega z/c}\,e^{i(k_\omega^- z-\omega t)}\right\},\end{aligned} \tag{9.97}$$

—- для волн, распространяющихся назад.

Мы видим, что в направлении вперед система уравнений (9.90) дает в качестве решения мультипликацию двух плоских монохроматических волн, первая из которых — волна нулевой частоты (стоячая волна) $\propto \exp(\pm i\Omega z/c)$, вторая — волна с частотой $\omega \propto \exp[i(k_\omega^+ z - \omega t)]$, распространяющаяся со скоростью c. Знак $+$ или $-$ в показателе экспоненты стоячей волны соответствует правому или левому вращению системы K' (то есть вращению по или против часовой стрелки в направлении распространения волны).

В каждом решении мы имеем две плоские монохроматические волны в пустом пространстве, где отсутствует дисперсия и волны сохраняют свою форму [102]. Если рассматривать эти волны отдельно, то плотность энергии в каждой из них ненулевая. Однако наблюдатель, находящийся на расстоянии z_0 от начала координат, может зафиксировать только стационарную фазу стоячей волны $\pm\Omega z_0/c$, но не поток энергии этой волны и не передачу сигналов, связанную с потоком. Поток энергии связан с бегущей монохроматической волной, — он воспринимается как «свет от далекой звезды», распространяющийся со скоростью c.

Рассмотрим решение, соответствующее волне, распространяющейся вперед. Из системы уравнений для амплитуд полей (9.90) получим соотношения:

$$k\,(\mathbf{E}_{k\omega}\,\mathbf{E}^*_{k\omega}) + i\frac{\Omega}{c}(\mathbf{E}_{k\omega}\,\mathbf{H}^*_{k\omega}) = \frac{\omega}{c}\,(\mathbf{n}\,[\mathbf{E}_{k\omega}\mathbf{H}^*_{k\omega}])\,, \tag{9.98}$$

$$k\,(\mathbf{H}_{k\omega}\,\mathbf{H}^*_{k\omega}) + i\frac{\Omega}{c}(\mathbf{E}_{k\omega}\,\mathbf{H}^*_{k\omega}) = \frac{\omega}{c}\,(\mathbf{n}\,[\mathbf{E}_{k\omega}\mathbf{H}^*_{k\omega}])\,, \tag{9.99}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ — единичный вектор в направлении вперед, $k = k_\omega^+ \pm \Omega/c$. Вычитание правой и левой частей (9.99) из соответствующих частей (9.98) приводит к следующему соотношению

$$(\mathbf{E}_{k\omega}\mathbf{E}^*_{k\omega}) = (\mathbf{H}_{k\omega}\mathbf{H}^*_{k\omega}), \tag{9.100}$$

что означает равенство модулей комплексных векторов $\mathbf{E}_{k\omega}$ и $\mathbf{H}_{k\omega}$

$$|\mathbf{E}_{k\omega}| = |\mathbf{H}_{k\omega}|\,, \tag{9.101}$$

из которого следует, что сами вектора отличаются друг от друга только фазовым множителем

$$\mathbf{H}_{k\omega} = \mathbf{E}_{k\omega}\, e^{-i\delta}. \tag{9.102}$$

Известно, что комплексный вектор $\mathbf{E}_{k\omega}$ можно представить в виде суммы двух действительных взаимно перпендикулярных векторов $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ и фазового множителя:

$$\mathbf{E}_{k\omega} = (\mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2)e^{i\alpha}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1^*, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2^*, \quad (\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2) = 0, \tag{9.103}$$

где α — начальная фаза, определяемая через соответствующее соотношение действительной и мнимой частей постоянного вектора $\mathbf{E}_{k\omega}$ [103, разд. 2.3]. Подставляя (9.103) и (9.102) в (9.98), получим

$$\left(k + ie^{i\delta}\frac{\Omega}{c}\right)(b_1^2 + b_2^2) = -2i\, e^{i\delta}\,\frac{\omega}{c}\, b_1 b_2\, \mathbb{S}, \tag{9.104}$$

где b_1, b_2 — модули соответствующих векторов, $\mathbb{S} = +1$, если $(\mathbf{n}[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]) > 0$, и $\mathbb{S} = -1$, если $(\mathbf{n}[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]) < 0$.

Рассмотрим случай правого вращения K'. Подставляя в этом случае $k = \omega/c + \Omega/c$ в уравнение (9.104), получим, что для произвольных частот ω оно может быть выполнено только при определенной постоянной фазе $\delta^+ = \pi/2$ между амплитудами $\mathbf{E}_{k\omega}$ и $\mathbf{H}_{k\omega}$. Это означает, что при правом вращении K' выполняется следующее соотношение между амплитудами электрического и магнитного поля

$$\mathbf{H}_{k\omega} = -i\mathbf{E}_{k\omega} = -\left[\mathbf{n}\mathbf{E}_{k\omega}\right]. \tag{9.105}$$

Дальнейшая подстановка $\delta^+ = \pi/2$ в уравнение (9.104) дает следующее соотношение между модулями действительных векторов $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$

$$(b_1 - b_2\,\mathbb{S})^2 = 0, \tag{9.106}$$

которое может быть выполнено только при равенстве b_1 и b_2 и при условии, что вектора $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{n}$ образуют правую тройку векторов:

$$b_1 = b_2 = b, \quad \mathbb{S} = +1, \tag{9.107}$$

то есть при условии

$$\mathbf{b}_1 = b\,\mathbf{i},\ \mathbf{b}_2 = b\,\mathbf{j},\ \mathbf{n} = \mathbf{k}, \tag{9.108}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты правой декартовой системы координат. Таким образом, в случае правого кругового вращения K' электрическая волна имеет круговую поляризацию с правой спиральностью [103, разд. 2.3]. Вычисление в этом случае наблюдаемого электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = E_x\,\mathbf{i} + E_y\,\mathbf{j}$ как действительной части $\mathbf{E}_{k\omega}\,e^{+i\Omega z/c}\,e^{i(k_\omega^+ z-\omega t)}$ (формула (9.96), $k_\omega^+ = \omega/c$) дает

$$\begin{aligned} E_x &= b\,\cos(\omega t - k_\omega^+ z - \alpha - \Omega z/c),\\ E_y &= b\,\sin(\omega t - k_\omega^+ z - \alpha - \Omega z/c). \end{aligned} \tag{9.109}$$

Здесь и далее в этом разделе аргумент тригонометрических функций представлен таким образом, чтобы он увеличивался с ростом t. Аналогично вычисляется наблюдаемое магнитное поле $\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = H_x\,\mathbf{i} + H_y\,\mathbf{j}$:

$$\begin{aligned} H_x &= -b\,\sin(\omega t - k_\omega^+ z - \alpha - \Omega z/c),\\ H_y &= b\,\cos(\omega t - k_\omega^+ z - \alpha - \Omega z/c), \end{aligned} \tag{9.110}$$

и соотношения между компонентами электрического и магнитного поля:

$$\begin{aligned} H_x &= -E_y,\\ H_y &= E_x. \end{aligned} \tag{9.111}$$

В случае левого вращения K' аналогичные вычисления приводят нас к другой постоянной фазе между амплитудами $\delta^- = -\pi/2$, что дает, во-первых,

$$\mathbf{H}_{k\omega} = i\mathbf{E}_{k\omega} = [\mathbf{n}\mathbf{E}_{k\omega}]\,, \tag{9.112}$$

и, во-вторых,

$$(b_1 + b_2\,\mathbb{S})^2 = 0. \tag{9.113}$$

Последнее соотношение может быть выполнено только при равенстве b_1 и b_2 и при условии, что вектора $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{n}$ образуют левую тройку векторов:

$$b_1 = b_2 = b, \quad \mathbb{S} = -1, \tag{9.114}$$

то есть при следующем условии

$$\mathbf{b}_1 = b\,\mathbf{i},\ \mathbf{b}_2 = -b\,\mathbf{j},\ \mathbf{n} = \mathbf{k}. \tag{9.115}$$

Это означает, что в случае левого кругового вращения K' электрическая волна имеет круговую поляризацию с левой спиральностью. Вычисление наблюдаемого электрического поля $E_x\,\mathbf{i} + E_y\,\mathbf{j} = \mathrm{Re}\{\mathbf{E}_{k\omega}\,e^{-i\Omega z/c}\,e^{i(k_\omega^+ z - \omega t)}\}$ в случае левой спиральности приводит к следующим формулам

$$\begin{aligned} E_x &= b\,\cos(\omega t - k_\omega^+ z - \alpha + \Omega z/c), \\ E_y &= -b\,\sin(\omega t - k_\omega^+ z - \alpha + \Omega z/c). \end{aligned} \tag{9.116}$$

Наблюдаемое магнитное поле и соотношения между компонентами электрического и магнитного поля в этом случае следующие:

$$\begin{aligned} H_x &= b\,\sin(\omega t - k_\omega^+ z - \alpha + \Omega z/c), \\ H_y &= b\,\cos(\omega t - k_\omega^+ z - \alpha + \Omega z/c), \end{aligned} \tag{9.117}$$

$$\begin{aligned} H_x &= -E_y, \\ H_y &= E_x. \end{aligned} \tag{9.118}$$

Заметим, во-первых, что выражения для компонентов электрического и магнитного полей совпадает с аналогичными выражениями для компонентов классического электромагнитного поля с точностью до фазы $\mp\Omega z/c$ в аргументе тригонометрических функций (правой спиральности соответствует знак $-$, левой спиральности соответствует знак $+$) [103, разд. 2.3]. Во-вторых, соотношения (9.111) и (9.118) между компонентами наблюдаемых электрического и магнитного полей для любой спиральности одни и те же и они тождественны аналогичным соотношениям для классической плоской монохроматической волны [102].

Плотность энергии и плотность потока энергии электромагнитного поля выражаются следующим образом через комплексные амплитуды электрического и магнитного поля [102, § 5]

$$W_{k\omega} = \frac{(\mathbf{E}_{k\omega}\mathbf{E}^*_{k\omega}) + (\mathbf{H}_{k\omega}\mathbf{H}^*_{k\omega})}{16\pi}, \quad \mathbf{S}_{k\omega} = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\,[\mathbf{E}_{k\omega}\mathbf{H}^*_{k\omega}]\,. \tag{9.119}$$

Подставив соотношения $k = \omega/c \pm \Omega/c, \quad \mathbf{H}^*_{k\omega} = \mathbf{E}^*_{k\omega} e^{\pm i\pi/2}$ в формулу (9.98), где знаки $+$ и $-$ соответствуют правой и левой спиральности волны, получим

$$\mathbf{n}|\mathbf{E}_{k\omega}|^2 = [\mathbf{E}_{k\omega}\mathbf{H}^*_{k\omega}], \tag{9.120}$$

откуда следует, что $[\mathbf{E}_{k\omega}\mathbf{H}^*_{k\omega}]$ — действительный вектор. Далее, учитывая (9.100), получим соотношение между плотностью потока энергии и плотностью энергии в монохроматической волне

$$\mathbf{S}_{k\omega} = c\, W_{k\omega}\mathbf{n}, \tag{9.121}$$

которое является классическим, то есть тождественным аналогичному соотношению для плоской монохроматической волны в классической электродинамике [10, § 47].

9.6. Электромагнитное поле в пустоте: плоские монохроматические волны (продолжение)

Из предыдущего раздела следует, что плоские монохроматические волны новой электродинамики отличаются от таких же классических волн лишь одной деталью — линейным набегом фазы, то есть дополнительным фазовым сдвигом, линейно зависящим от расстояния $\mp\Omega z/c$.

Рассмотрим случай *макроскопического* происхождения плоской монохроматической волны, то есть случай, когда ее генерация осуществляется токами в проводниках, расположенных в устройствах генерации. Плотность тока в проводнике определяется плотностью электронов проводимости n_0 и средней скоростью упорядоченного движения электронов $\overline{\mathbf{v}}$

$$\mathbf{j} = n_0 e\overline{\mathbf{v}}, \tag{9.122}$$

где e — электрический заряд электрона. Оценки показывают, что средняя скорость упорядоченного движения электронов проводимости не превышает $\overline{\mathbf{v}}_{max} = 10^{-2}$ см/с [104, с. 378]. Положим,

что минимальный радиус кривизны проводников в устройствах генерации составляет $a_{min} = 10^{-2}$ см, тогда максимальная угловая скорость упорядоченного движения электронов по круговой траектории составит

$$\Omega_{max} \approx 1 \text{ рад/с}, \tag{9.123}$$

что соответствует пространственному периоду (то есть расстоянию между положениями равной фазы) волны $\exp(\pm i\Omega z/c)$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\Omega_{max}} \approx 1,9 \cdot 10^9 \text{ м}, \tag{9.124}$$

что составляет пятикратное расстояние от Земли до Луны. В обычных лабораторных установках с апертурой порядка 1 м набег фазы составит ничтожную величину $\Delta\phi \approx 3 \cdot 10^{-9}$ рад. Именно поэтому исследуемые плоские монохроматические волны макроскопического происхождения фактически не отличаются от классических плоских монохроматических волн.

Возникает принципиально иная картина, если электромагнитные волны имеют *микроскопическое* происхождение, то есть если они генерируются круговыми токами в молекулярных, атомных или ядерных системах. Тогда в большинстве случаев будет соблюдаться

$$\omega_{r_max} \ll \Omega, \tag{9.125}$$

где $\omega_{r_max} \approx 10^{12}\ c^{-1}$ — максимальная круговая частота радиодиапазона [104, с. 570].

Именно случай подавляющего превышения угловой скорости системы отсчета K' над круговой частотой электромагнитной волны $\omega \ll \Omega$ мы будем рассматривать в настоящем разделе.

Рассмотрим прежде всего $\omega = 0$, то есть случай плоской стоячей волны.

Анализ, представленный в предыдущем разделе, формально применим для случая $\omega = 0$: все формулы сохраняют свое значение для плоских монохроматических волн нулевой частоты.

Более информативным будет новый анализ системы уравнений (9.84) для случая постоянного электромагнитного поля $\partial/\partial t = 0$. В этом случае система уравнений (9.84) запишется так

$$\begin{array}{ll} \operatorname{rot}\mathbf{E} = & -\frac{1}{c}\left[\mathbf{\Omega H}\right], \\ \operatorname{div}\mathbf{H} = & 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} = & \frac{1}{c}\left[\mathbf{\Omega E}\right], \\ \operatorname{div}\mathbf{E} = & 0. \end{array} \tag{9.126}$$

Мы будем искать решение системы уравнений (9.126) в виде плоских волн

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \operatorname{Re}\left\{\mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}\right\}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \operatorname{Re}\left\{\mathbf{H}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}\right\}. \tag{9.127}$$

Данный анализ правомерен в приближении волновой зоны $R \gg a$, $R \gg \lambda$. Подставив (9.127) в систему (9.126), получим систему уравнений для комплексных амплитуд электрического и магнитного полей:

$$\begin{array}{l} [\mathbf{kE_k}] = \frac{i}{c}\left[\mathbf{\Omega H_k}\right], \\ (\mathbf{kH_k}) = 0, \\ [\mathbf{kH_k}] = -\frac{i}{c}\left[\mathbf{\Omega E_k}\right], \\ (\mathbf{kE_k}) = 0. \end{array} \tag{9.128}$$

Из первых двух уравнений системы (9.128) получим соотношение между магнитной и электрической амплитудами

$$\mathbf{E_k} = \frac{i}{c}\,\frac{(\mathbf{k\Omega})}{k^2}\,\mathbf{H_k}, \tag{9.129}$$

из третьего и четвертого уравнений системы (9.128) — соотношение между электрической и магнитной амплитудами

$$\mathbf{H_k} = -\frac{i}{c}\,\frac{(\mathbf{k\Omega})}{k^2}\,\mathbf{E_k}. \tag{9.130}$$

Исключая из соотношений (9.129) и (9.130) комплексные амплитуды $\mathbf{E_k}$, $\mathbf{H_k}$, получим дисперсионное соотношение между волновым вектором $\mathbf{k}$ и вектором угловой скорости $\mathbf{\Omega} = (0,\ 0,\ \Omega)$

$$\mathbf{k} = \frac{1}{c^2}\,\frac{(\mathbf{k\Omega})}{k^2}\,\mathbf{\Omega}, \tag{9.131}$$

из которого следует, что волновой вектор должен быть параллелен вектору $\mathbf{\Omega}$ и по значению равен $k = \pm\,\Omega/c$

$$\mathbf{k} = \left(0,\ 0,\ \pm\frac{\Omega}{c}\right). \tag{9.132}$$

Мы получаем, что возможно существование плоских стоячих электромагнитных волн в направлении, перпендикулярном плоскости вращения K'

$$\mathbf{E}(z) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_k e^{\pm i\Omega z/c}\right\},\quad \mathbf{H}(z) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}_k e^{\pm i\Omega z/c}\right\}, \tag{9.133}$$

с длиной волны (пространственным периодом)

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\Omega}. \tag{9.134}$$

Этот вывод может быть сделан прямо из формул (9.96) и (9.97) при $\omega = 0$. Он также говорит о том, что стоячая волна $\propto \exp(\pm i\Omega z/c)$ существует всегда при $\Omega \neq 0$, а при $\omega \neq 0$ она взаимодействует с классической плоской монохроматической волной $\propto \exp[i(k_\omega^+ z - \omega t)]$, приводя к набегу фазы $\mp\Omega z/c$.

Заметим, что в данном пункте электродинамика ориентируемой точки резко отличается от классической электродинамики Максвелла – Лоренца, ибо классические плоские стоячие волны в пустом неограниченном пространстве существовать не могут. Действительно, система уравнений Максвелла в пустоте ($\rho = 0,\ \mathbf{j} = 0$) в статическом случае ($\partial\mathbf{E}/\partial t = 0,\ \ \partial\mathbf{H}/\partial t = 0$) дает тривиальное решение $\mathbf{E} = 0,\ \ \mathbf{H} = 0$ [10, § 46].

Легко видеть, что анализ, проведенный в настоящем разделе, верен и в квазистатическом случае, когда круговая частота монохроматических волн гораздо меньше величины угловой скорости Ω

$$\omega \ll \Omega. \tag{9.135}$$

В этом случае в уравнениях (9.90) для электрической и магнитной амплитуд можно пренебречь индукционными членами по

сравнению со вращательными членами

$$\left|\frac{\omega}{c}\,\mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega}\right| \ll \left|\frac{i}{c}\,[\mathbf{\Omega}\mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega}]\right|, \quad \left|\frac{\omega}{c}\,\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}\right| \ll \left|\frac{i}{c}\,[\mathbf{\Omega}\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}]\right|, \tag{9.136}$$

и система (9.90) переходит в систему уравнений (9.128) для плоских стоячих волн в пустоте. Для диапазона радиочастот ω_r квазистатический случай достижим, когда вращение заряда имеет микроскопическую природу и представляет собой орбитальное или собственное вращение заряда на ядерном, атомном или молекулярном уровне.

Заметим, что в исследуемую систему полевых уравнений (9.75) не заложено условие постоянства во времени угловой скорости $\partial\mathbf{\Omega}/\partial t = 0$ или условие ее однородности (т.е. постоянства по пространственным координатам $\partial\mathbf{\Omega}/\partial x^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3$).

Угловая скорость вращения заряда может быть промодулирована макроскопическим образом (способ модуляции здесь не рассматривается):

$$\Omega(t) = \Omega_0 + \varepsilon(t), \quad |\varepsilon(t)/\Omega_0| \ll 1, \tag{9.137}$$

где $\varepsilon(t)$ — медленная функция, допустим, такая:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\Omega' t), \quad \Omega' \ll \Omega_0. \tag{9.138}$$

Рассмотрим модель, в которой функция источника $\Omega(t) = \Omega_0 + \varepsilon(t)$ является однородной и заданной на всей оси распространения волны $-\infty < z < +\infty$. Это приближение оправдано «неклассическим» пространством распространения волны, и тем, что рассматриваемая функция источника принадлежит к касательному расслоению, которое дополняет традиционное риманово пространство. Именно поэтому для Ω необязательно требование о пространственной локализации, которое необходимо для классических источников (зарядов и токов).

На фиксированном расстоянии z_0 мы будем иметь переменное электрическое и магнитное поле неиндукционного характера

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z_0, t) &= \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_k\, e^{i\Omega_0 z_0/c}\, e^{iF[\varepsilon(t)]}\right\}, \\ \mathbf{H}(z_0, t) &= \mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}_k\, e^{i\Omega_0 z_0/c}\, e^{iF[\varepsilon(t)]}\right\}, \end{aligned} \tag{9.139}$$

где $F[\varepsilon(t)]$ — функция, зависящая от функции модуляции $\varepsilon(t)$ и подлежащая определению. Измерительные приборы, расположенные на расстоянии z_0 от начала координат, зафиксируют сигнал, то есть поток электромагнитной энергии, связанный с изменением фазы стоячей волны. В рассматриваемом приближении скорость передачи сигналов подобным образом будет бесконечной вследствие единого и одновременного изменения модуляционной фазы $F[\varepsilon(t)]$ по всей длине волны $-\infty < z < +\infty$.

Для решения более конкретных задач — задач генерации и распространения сигналов, связанных с модуляцией фазы стоячей волны, модуляционная часть функции источника $\varepsilon(z,\, t)$ должна быть задана с четкой локализацией по пространственным и временным координатам. В этом случае мы уже не получим бесконечной скорости распространения сигнала, связанного с изменением фазы стоячей волны. Тем не менее, эта скорость может быть большой (по сравнению со скоростью света) и будет зависеть от конкретного выбора функции модуляции $\varepsilon(z,\, t)$.

Вычислим в рассматриваемом квазистатическом случае электродвижущую силу $\mathcal{E}$, возбуждаемую электромагнитным полем в любом замкнутом контуре в плоскости волны. По теореме Стокса [6] криволинейный интеграл от $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ по замкнутому контуру C равен потоку ротора $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ через поверхность S, натянутую на этот контур:

$$\mathcal{E} = \oint_C (d\mathbf{r}\, \mathbf{E}(\mathbf{r})) = \int_S (d\mathbf{S}\ \mathrm{rot}\, \mathbf{E}(\mathbf{r}))\,, \tag{9.140}$$

где вектор $d\mathbf{S}$ равен по величине площади элемента поверхности и перпендикулярен этому элементу поверхности. Таким образом, мы можем записать

$$d\mathbf{S} = dS\, \frac{\mathbf{\Omega}}{\Omega}, \tag{9.141}$$

и, использовав первое из уравнений системы (9.126)

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\, [\mathbf{\Omega H}]\,, \tag{9.142}$$

вычислить электродвижущую силу

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{dS}{\Omega}\left(\mathbf{\Omega}\left[\mathbf{\Omega}\mathbf{H}\right]\right) = 0. \tag{9.143}$$

Таким образом, квазистатические электромагнитные поля (9.139) имеют неиндукционный характер и не возбуждают никакой электродвижущей силы в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. Этой характеристикой квазистатические поля (9.139) резко отличаются от классического электромагнитного поля в пустом пространстве, обязанного быть переменным во времени и имеющего индукционную электродвижущую силу, так как

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{9.144}$$

Квазистатические поля (9.139) должны иметь высокую проникающую способность в проводниках, так как по своей структуре они не производят никакой работы над свободными зарядами и, следовательно, не рассеиваются в проводниках.

9.7. Три способа генерации статического электромагнитного поля при круговом движении зарядов

Стационарные ($\partial/\partial t = 0$) уравнения электродинамики ориентируемой точки в случае кругового нерелятивистского движения зарядов ($a\Omega/c \ll 1$) имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\tfrac{1}{c}\left[\mathbf{\Omega}\mathbf{H}\right], \\ \operatorname{div}\mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \tfrac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \tfrac{1}{c}\left[\mathbf{\Omega}\mathbf{E}\right], \\ \operatorname{div}\mathbf{E} &= 4\pi\rho. \end{aligned} \tag{9.145}$$

В этих уравнениях имеются три источника статического электромагнитного поля — электрические заряды, ток, а также неклассический источник — вакуумный ток, пропорциональный угловой

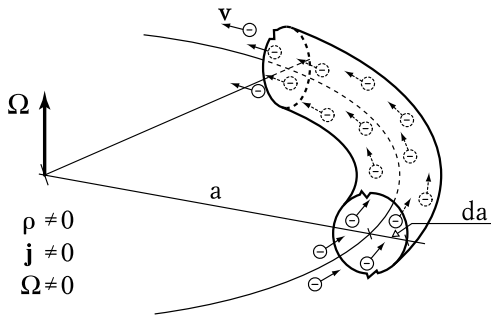

Рис. 9.4: Первый способ генерации электромагнитостатических полей при круговом движении зарядов

скорости вращения зарядов. Приведем основные результаты анализа первого, второго и третьего способа генерации статического электромагнитного поля, которые отличаются друг от друга возможными сочетаниями источников. С упомянутым анализом в полном объеме можно ознакомится в книге автора [2, разд. 13].

9.7.1. Первый способ: $\rho \neq 0,\ \mathbf{j} \neq 0,\ \mathbf{\Omega} \neq 0$

Первый способ генерации статических полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ связан с наличием всех трех источников (рис. 9.4): электрических зарядов объемной плотностью ρ, равномерно распределенных по азимуту и вращающихся по круговой траектории, тока объемной плотностью $j = a\Omega\rho$, а также вакуумных токов, учтенных в первом и третьем уравнениях системы (9.145).

Исходя из структуры уравнений (9.145), главной частью электростатического поля в первом способе генерации будет его потенциальная часть $\mathbf{E}_0$, определяемая четвертым уравнением (9.145). Вихревая часть электростатического поля $\mathbf{E}_T$, как следует из первого уравнения системы (9.145), будет являться малой величиной $\sim o(a\Omega/c)$ по отношению к главной части и может быть определена во вторую очередь.

Главная часть электрического поля определяется классиче-

ским выражением [103]

$$\mathbf{E}_0 = 2\pi f_0(r')\, da\, \rho\, \mathbf{n}, \tag{9.146}$$

$\mathbf{n}$ — единичная нормаль к поверхности кольца,

$$f_0(r') = \left\{ \begin{array}{l} r'/da,\ r' < da, \\ da/r',\ r' \geq da, \end{array} \right\} \tag{9.147}$$

r' — расстояние от точки наблюдения до центральной нити кольца ($r' \ll a$).

Главная часть магнитного поля может быть вычислена по закону Био – Савара (то есть она соответствует классическому магнитному полю) и приводит к следующим выражениям в цилиндрической системе координат [103]

$$H_{0\,r} = \frac{2J}{c}\, Q_{0\,r}(r,\, z,\, a),\ H_{0\,z} = \frac{2J}{c}\, Q_{0\,z}(r,\, z,\, a),\ H_{0\,\varphi} = 0, \tag{9.148}$$

$$Q_{0\,r} = \frac{z}{r\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[\frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} \mathbf{E}(k) - \mathbf{K}(k) \right], \tag{9.149}$$

$$Q_{0\,z} = \frac{1}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[\frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} \mathbf{E}(k) + \mathbf{K}(k) \right], \tag{9.150}$$

где $\mathbf{K}(k)$, $\mathbf{E}(k)$ — полные нормальные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода [6]

$$\mathbf{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin\xi}}, \quad \mathbf{E}(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin\xi}\, d\xi, \tag{9.151}$$

$J = \rho\, \Omega a \pi (da)^2$ — ток, проходящий через поперечное сечение кольца, r — проекция радиуса-вектора точки наблюдения на плоскость кольца, $k^2 = 4ar/[(a+r)^2 + z^2]$.

Расчеты, проведенные в [2, разд. 13.1] показали, что по сравнению с потенциальной частью $\mathbf{E}_0$ вихревая часть электрического поля $\mathbf{E}_T$ является величиной второго порядка малости по

приведенной скорости и первого порядка малости по геометрическому фактору

$$\frac{|\mathbf{E}_T|}{|\mathbf{E}_0|} \sim \left(\frac{a\Omega}{c}\right)^2 \frac{da}{a}. \tag{208}$$

Поэтому в рассматриваемом способе генерации $\rho \neq 0$, $\mathbf{j} \neq 0$, $\mathbf{\Omega} \neq 0$ при круговом нерелятивистском движении зарядов вихревая часть $\mathbf{E}_T$ фактически находится за пределами нерелятивистского приближения. Из этого также следует, что магнитное поле будет целиком состоять из своей главной, классической части: $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$.

9.7.2. Второй способ: $\rho = 0,\ \mathbf{j} \neq 0,\ \mathbf{\Omega} \neq 0$

Второй способ генерации заключается в движении зарядов одного знака (электронов) через неподвижную пространственную решетку, в узлах которой находятся заряды другого знака (примером может быть металлическая кристаллическая решетка, в узлах которой — атом-ионы). Суммарная плотность зарядов равна нулю $\rho = \rho^- + \rho^+ = 0$, однако суммарная плотность токов не равна нулю $j = j^- + j^+ = a\Omega\rho^-$, так как $j^+ = \rho^+ v^+ = 0$. Фактически мы рассматриваем генерацию поля круговым током в проводнике.

Второй способ генерации (рис. 9.5) получается из первого путем выбора $\rho = 0$, откуда

$$\mathbf{E}_0 = 0. \tag{9.152}$$

В этом случае поле $\mathbf{H}_0$ будет точно соответствовать формулам (9.148) — (9.150).

Вихревая часть электрического поля $\mathbf{E}_T$ будет такой же малой величиной, как и в первом способе генерации, однако по причинам отсутствия главной, потенциальной части она может быть обнаружена прецизионными методами. В данном случае вихревая часть электрического поля пропорциональна квадрату скорости движения зарядов

$$|\mathbf{E}_T| \propto (v^-)^2 = (a\Omega)^2. \tag{9.153}$$

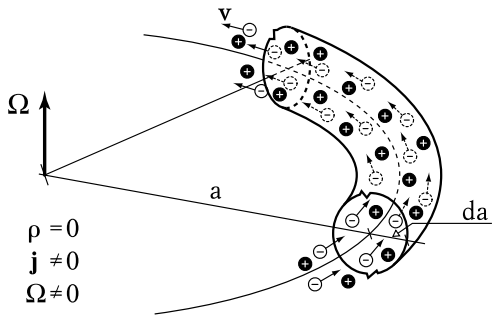

Рис. 9.5: Второй способ генерации электромагнитостатических полей при круговом движении зарядов

В обычных проводниках, как упоминалось выше, скорость упорядоченного движения электронов проводимости составляет ничтожную величину $v^- \leq 10^{-2}$ см/с, а в проводниках, находящихся в *сверхпроводящем состоянии*, она значительно больше, так как определяется скоростью Ферми, которая может составлять 1% от скорости света $v^- \leq 0,01\, c = 3 \cdot 10^8$ см/с [105, с. 6]. Отсюда следует, что вихревое электрическое поле $\mathbf{E}_T$ может быть обнаружено вблизи кольцевых проводников, находящихся в сверхпроводящем состоянии.

9.7.3. Третий способ: $\rho = 0,\ \mathbf{j} = 0,\ \mathbf{\Omega} \neq 0$

Дифференциальные уравнения, составляющие систему уравнений электродинамики ориентируемой точки, линейны. Вследствие этого поля, соответствующие третьему способу генерации, можно представить как суперпозицию полей с $\rho = 0,\ \mathbf{j}_+ \neq 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E}_+ &= -\tfrac{1}{c}\left[\mathbf{\Omega}\mathbf{H}_+\right], \\ \operatorname{div} \mathbf{H}_+ &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_+ &= \tfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}_+ + \tfrac{1}{c}\left[\mathbf{\Omega}\mathbf{E}_+\right], \\ \operatorname{div} \mathbf{E}_+ &= 0, \end{aligned} \tag{9.154}$$

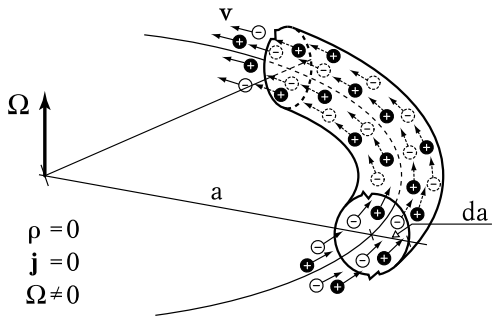

Рис. 9.6: Третий способ генерации электромагнитостатических полей при круговом движении зарядов

и полей с $\rho = 0,\ \mathbf{j}_- \neq 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E}_- &= -\tfrac{1}{c}\left[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{H}_-\right], \\ \operatorname{div}\mathbf{H}_- &= 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{H}_- &= \tfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}_- + \tfrac{1}{c}\left[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{E}_-\right], \\ \operatorname{div}\mathbf{E}_- &= 0, \end{aligned} \tag{9.155}$$

причем $\mathbf{j}_- = -\mathbf{j}_+$. В результате суперпозиции суммы полей $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_+ + \mathbf{H}_-$ будут удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\tfrac{1}{c}\left[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{H}\right], \\ \operatorname{div}\mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \tfrac{1}{c}\left[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{E}\right], \\ \operatorname{div}\mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \tag{9.156}$$

Из рис. 9.6 видно, что третий способ генерации связан со вращением всех положительных $\mathbf{j}_+ > 0$ и всех отрицательных $\mathbf{j}_- < 0$ зарядов нейтрального тела, где $\mathbf{j} = \mathbf{j}_+ + \mathbf{j}_- = 0$, в одну сторону с одинаковой угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$, что, вообще говоря, является *макроскопическим вращением* твердого тела!

Из-за наличия в правых частях системы (9.156) вакуумных токов $\mathbf{j}_H$ и $\mathbf{j}_E$, система имеет нетривиальные решения: $\mathbf{E} \neq 0,\ \mathbf{H} \neq 0$.

Рассматриваемый в текущем разделе третий способ генерации статических полей связан со вращением нейтрального тела, которое и определяет постоянную функцию источника $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_0$. Заметим, что в общем анализе плоских стоячих волн, представленном в предыдущем разделе, величина $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ является произвольной.

Из-за совпадения систем уравнений (9.156) и (9.126) поле $\mathbf{E}$ должно обладать взаимно соответствующими свойствами. Одним из таких свойств является неклассическое свойство проницаемости электрического квазистатического поля сквозь проводящие среды. Таким образом, электрическое поле $\mathbf{E}$, генерируемое путем вращения макроскопического тела в третьем способе генерации, должно обладать свойством сверхпроникаемости сквозь электромагнитные экраны.

9.8. Экспериментальные следствия электродинамики ориентируемой точки: неклассические явления

В данном разделе под «неклассическими явлениями» подразумеваются экспериментальные эффекты, выходящие за границы классической электродинамики. Область научно зафиксированных неклассических явлений обширна. Она расширяется день за днем.

9.8.1. Униполярная индукция М. Фарадея

Униполярный генератор М. Фарадея (рис. 9.7) представляет собой цилиндрический магнит, вращающийся вокруг оси симметрии. Магнитное поле магнита однородно и направлено вдоль оси вращения. На круговом торце магнита по радиусу на расстояниях R_1 и R_2 от центра расположены два скользящих контакта электрической цепи с подключенным вольтметром [106]. При вращении магнита с постоянной угловой скоростью на вольтметре

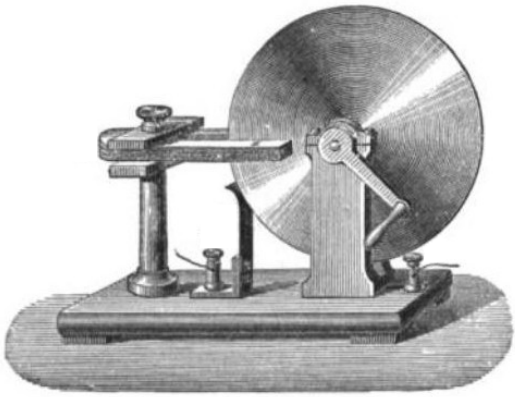

Рис. 9.7: Униполярный генератор М. Фарадея

в электрической цепи между скользящими контактами фиксируется постоянное напряжение, пропорциональное угловой скорости. Униполярная индукция Фарадея подразумевает собой эффект возникновения постоянного электрического поля в электрически нейтральном магните с постоянным значением магнитного поля.

Экспериментальная формула [106] зависимости постоянного напряжения на внешней измерительной цепи U_{un} от скорости вращения магнита в системе СИ

$$U_{un} = \frac{\pi n B}{60}(R_2^2 - R_1^2), \tag{9.157}$$

где R_1, R_2 — радиусы контактов внешней цепи с магнитом в *м*, n — число оборотов в минуту вращения магнита, B — магнитная индукция магнита в *Тл*.

Только некоторые независимые авторы, в частности, К. Мейл (K. Meyl, Германия) [107, 108], Ф.Ф. Менде (Украина) [109] публично высказались о том факте, что открытие униполярной индукции М. Фарадеем (около 1830 г.) не нашло своего объяснения в классической полевой концепции электромагнетизма, выдвинутой Дж. Максвеллом в 1862 г. Действительно, классическая ин-

дукция, то есть наведение переменного электрического поля в замкнутом проводящем контуре возможна только при переменном магнитном потоке, охватываемым этим контуром. Униполярная индукция Фарадея — это эффект наведения постоянного электрического поля в замкнутой электрической цепи (содержащей два скользящих контакта) при постоянном магнитном потоке, охватываемым этой цепью.

Не секрет, что тема униполярного генератора М. Фарадея обходится классической электродинамикой или находит в ней поверхностные объяснения, не выдерживающие критики. Объяснение рассматриваемого эффекта, данное в классическом курсе электродинамики сплошных сред [110, §63], сводится к равнозначности электродинамических эффектов при относительных движениях: движения проводника относительно магнитного поля и, наоборот, движения магнитного поля относительно проводника. На этом основании система отсчета, связанная со вращающимся магнитом, объявляется покоящейся, а неподвижный проводник, содержащий два контакта, объявляется движущимся (по круговой траектории) относительно магнита. Кинематические формулы вращательного движения подставляются в формулы для электродвижущей силы в движущихся проводниках, — и эффект «находит объяснение».

Специальная относительность основана на относительности равномерного прямолинейного движения абстрактных (в общем случае) систем отсчета, поэтому любая из них может быть выбрана в качестве покоящейся. Это также означает, что классическая электродинамика может использовать только относительность равномерного прямолинейного движения тел.

Здесь стоит напомнить, что вращение тела относительно остальных тел не эквивалентно вращательному движению всех других тел относительно этого тела. И. Ньютон именно в этом видел отличие абсолютного и относительного движения [30, с. 34]. Поэтому использование формул классической электродинамики с заменой покоящегося состояния проводника на его движение по круговой траектории не состоятельно и являет-

ся подгонкой под результат.

Эффект униполярной индукции Фарадея, который проявляется в случае постоянного во времени электромагнитного поля, находит объяснение в рамках электродинамики ориентируемой точки [2]. Действительно, этому эффекту соответствует следующая неявная зависимость вихревой компоненты электрического поля

$$\mathbf{E}_T = \frac{1}{c}[\mathbf{\Omega}\mathbf{A}] \tag{9.158}$$

от магнитного поля генератора

$$\mathbf{H} = \mathrm{rot}\mathbf{A}, \tag{9.159}$$

которая выполняется и в стационарном случае $\partial\mathbf{H}/\partial t = 0$, $\partial\mathbf{E}/\partial t = 0$. Здесь $\mathbf{A}$ — векторный потенциал, который представляет собой пространственную часть L-вектора четырехмерного потенциала электромагнитного поля

$$A^i = (\Phi,\, A_x,\, A_y,\, A_z), \tag{9.160}$$

$\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость вращения униполярного генератора.

Выберем декартову систему координат OX, OY, OZ с ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ таким образом, чтобы орт $\mathbf{k}$ был направлен по оси вращения магнита $\mathbf{\Omega} = \Omega\,\mathbf{k}$. Полагая магнитное поле генератора однородным во внутренней области магнита $\mathbf{H} = H\,\mathbf{k}$, воспользуемся следующим выражением для вектор-потенциала для этого случая

$$\mathbf{A} = Hx\,\mathbf{j}. \tag{9.161}$$

Непосредственным вычислением можно проверить, что формула (9.159) выполняется. Вычисляя затем $\mathbf{E}_T$ по формуле (9.158), получим

$$\mathbf{E}_T = -\Omega Hx\,\mathbf{i}. \tag{9.162}$$

Примем, что первый и второй (периферийный) контакты внешней цепи расположены по оси OX с координатами R_1 и R_2 соответственно. Вычислим разность эффективного потенциала между

контактами в соответствии с формулой $\mathbf{E}_T = -\mathrm{grad}\,\varphi_{ef}$

$$\Delta\varphi_{ef} = -\int_{R_1}^{R_2} E_T(x)dx = \frac{1}{2c}\Omega H(R_2^2 - R_1^2). \qquad (9.163)$$

Заметим, что формула (9.163) записана в гауссовой системе величин SGS. Для перевода в систему СИ воспользуемся следующими соотношениями [103, Доп. 1]

$$c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}, \quad \varphi|_{SGS} = \sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\varphi|_{SI},$$
$$H|_{SGS} = B|_{SGS} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}B|_{SI}, \qquad (9.164)$$

а также соотношением $\Omega = 2\pi n/60$. В итоге получим

$$\Delta\varphi_{ef}|_{SI} = \frac{\pi n}{60}B|_{SI}(R_2^2 - R_1^2), \qquad (9.165)$$

что совпадает с экспериментальной формулой (9.157).

Почти два столетия назад Майкл Фарадей, создав униполярный генератор, неявно продемонстрировал вихревое электростатическое поле $\mathbf{E}_T$, которое затем было «потеряно» классической электродинамикой. Теперь мы можем утверждать, что неклассическое поле $\mathbf{E}_T$ приобрело законный статус в электродинамике ориентируемой точки.

9.8.2. Эффект сверхпроникающего излучения и эффект двойного сигнала Н.А. Козырева

Обратимся к описанию знаменитых экспериментов Н.А.Козырева (1908 – 1983) [111].

Н.А. Козырев рассчитывал местоположение видимой звезды на небесной сфере в текущий момент и направлял на это место телескоп. Звезда в этом месте небесной сферы была не видна из-за запаздывания, связанного с конечностью скорости света. Входной объектив телескопа был закрыт светонепроницаемой алюминиевой крышкой толщиной около 1,5 мм. На оптической

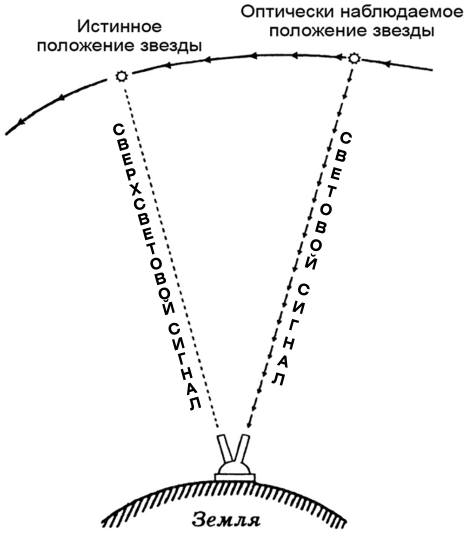

Рис. 9.8: Эффект двойного сигнала Н.А. Козырева

оси телескопа в фокальной плоскости устанавливалось регистрирующее устройство, представляющее собой резистор, включенный в сбалансированный мостик Уинстона. Эффект Козырева заключался в том, что при наведении телескопа на предполагаемое в настоящий момент место нахождения звезды, регистрирующее устройство фиксировало некий сигнал. Таким образом, им было зарегистрировано новое излучение, идущее от звезды со скоростью, во много раз превышающей скорость света, и обладающее способностью прохождения сквозь непрозрачные для электромагнитных волн экраны (рис. 9.8).

Изложение коснется только экспериментальных открытий Н.А. Козырева, которые, отметим, выходят за рамки классической научной парадигмы. Его главная научная гипотеза о наделении времени прямыми физическими свойствами [111, 112] здесь рассматриваться не будет.

Если говорить кратко, то экспериментальные открытия Н.А. Козырева сводятся к двум эффектам:

— к эффекту двойного сигнала от звезды — светового сигнала и сверхсветового сигнала;

— к эффекту сверхпроникаемости, вследствие прохождения сверхсветового сигнала сквозь электромагнитные экраны.

Опыты Н.А. Козырева были успешно повторены в конце 1980 гг. М.М. Лаврентьевым с сотрудниками в Новосибирске [113] и в начале 1990 гг. в Главной астрономической обсерватории АН Украины в Киеве и в Крымской астрофизической обсерватории [114].

С позиции электродинамики ориентируемой точки эффекты Н.А. Козырева могут быть объяснены с последовательной простотой. Более конкретно — эти эффекты производят небесные светила, которые имеют в своем составе источники электромагнитных волн двух типов.

Первый тип — обычные источники, которые излучают стандартные электромагнитные волны с круговой частотой ω. Фазовая скорость такой волны или групповая скорость волн с частотами, близкими к ω, равна c. Таким образом излучается «световой сигнал».

Второй тип — круговые токи с высокой угловой скоростью зарядов, гораздо большей круговой частоты излучаемых квазистатических волн ($\Omega \gg \omega$, разд. 9.6). При модуляции круговых токов ($\Omega = \Omega_0 + \varepsilon_0 \sin(\Omega' t)$, $\Omega' \ll \Omega$) возможна передача сигналов квазистатическими волнами со скоростью, гораздо большей скорости света. Отметим второе неклассическое свойство квазистатических волн — свойство сверхпроницаемости через электромагнитные экраны (в данном случае через алюминиевую крышку, размещенную на входном отверстии телескопа). Таким образом излучается «сверхсветовой сигнал».

Сигналы от источников первого и второго типа, излученные звездой одновременно, достигают земной поверхности в разное время: сверхсветовой сигнал — почти мгновенно, световой сигнал — с задержкой на время прохождения светом расстояния от звезды до Земли. За это время Земля поворачивается вокруг своей оси на определенный угол, и видимое положение звезды

на небесной сфере смещается на тот же угол (с противоположным знаком) относительно ее истинного положения в текущий момент (рис. 9.8).

9.8.3. Экспериментальная генерация квазистатических ($\Omega \gg \omega$) электромагнитных полей. Торсионные генераторы А.Е. Акимова

Практическая генерация электромагнитных полей новой электродинамики с неклассическими свойствами осуществляется с помощью устройств, называемых торсионными генераторами [115].

Как правило, источником нового излучения является спин-ориентированная структура — ферромагнетик. В ферромагнетике микроскопическими источниками магнитного поля, а также нового квазистатического электрического поля являются кольцевые молекулярные токи. При ориентации спинов молекул ферромагнетика преимущественно по одному направлению кольцевые токи упорядочиваются, вследствие этого возникает коллективное квазистатическое электромагнитное поле с достаточно узкой диаграммой направленности.

Выше в настоящей главе (разд. 9.5, 9.6) изложена теория генерации и распространения электромагнитных волн в *квазистатическом режиме*, когда угловая скорость вращения излучаемого заряда по круговой орбите Ω значительно превышает частоту рассматриваемой электромагнитной волны ω: $\Omega \gg \omega$. Так как круговая частота вращения электронов в атомах и молекулах значительно превосходит верхнюю частоту радиодиапазона, то излученное ими электромагнитное поле в диапазоне радиочастот можно рассматривать как стоячую волну. Показано, что такое квазистатическое электромагнитное поле обладает рядом специальных (неклассических) свойств, которые не свойственны классическим электромагнитным полям Максвелла – Лоренца. Отметим два из них:

— свойство существования стоячей электромагнитной волны в пустом неограниченном пространстве;

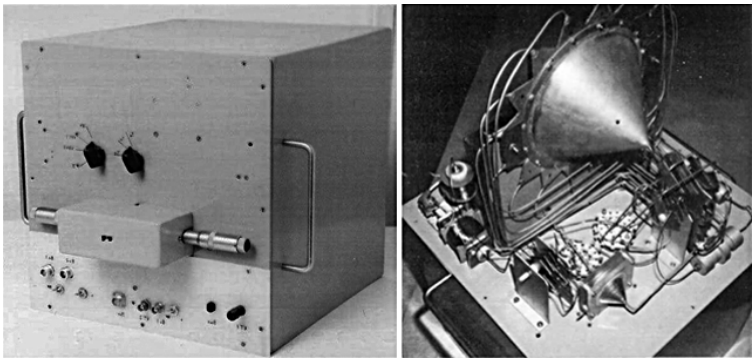

Рис. 9.9: Внешний вид и внутреннее устройство большого генератора А.Е. Акимова

— свойство сверхпроникаемости через электромагнитные экраны, являющиеся непреодолимой преградой для классических электромагнитных полей.

К первому, классическому типу торсионных генераторов относятся устройства, которые осуществляют управление спиновополяризованными средами с помощью электрического и магнитных полей, расположенных внутри устройства. Такие генераторы содержат возможность модуляции пространственной частоты или фазы генерируемого квазистатического поля в широком диапазоне: от нулевой частоты (статический режим) до частот порядка нескольких ГГц (динамический режим)

$$0 \leq \Omega' \leq 10^{10}\ \mathrm{c}^{-1} \ll \Omega. \tag{9.166}$$

Внешний кожух генератора, как правило, делается из соответствующих материалов для экранировки классических электромагнитных полей, находящихся внутри генератора, в целях получения на выходе исключительно нового излучения.

К генераторам первого типа относятся получившие широкую известность торсионные генераторы А.Е. Акимова [116, 117]. На рис. 9.9 показаны внешний вид и внутреннее устройство большого генератора А.Е. Акимова, на рис. 9.10 приведена принци-

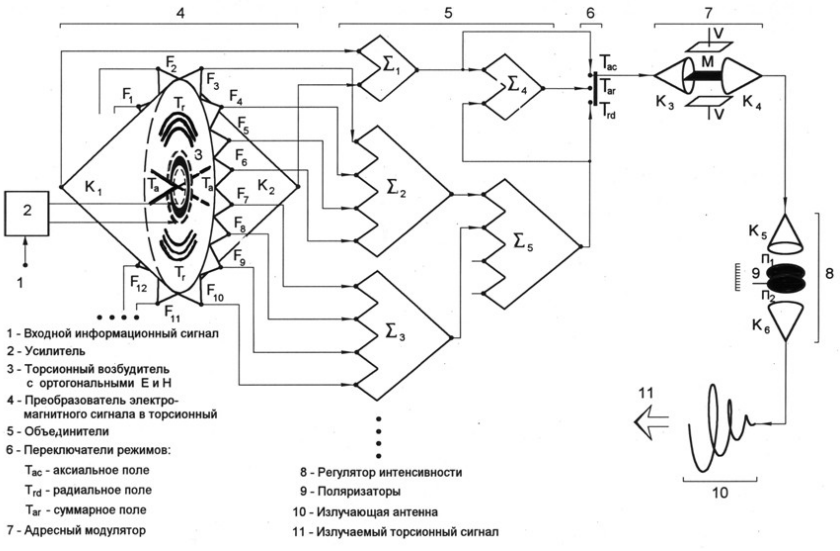

Рис. 9.10: Принципиальная схема большого генератора А.Е. Акимова

пиальная схема этого генератора. Частотно-фазовая модуляция пространственной частоты коллективного квазистатического поля осуществляется посредством подачи на обкладки конденсатора, находящегося под постоянным напряжением (преобразователь 4 на рис. 9.10), модулирующего внешнего сигнала частотой Ω' ($\Omega' \ll \Omega$).

Под вторым типом торсионных генераторов подразумеваются устройства, состоящее из источника квазистатического поля — спиново-поляризованной среды (в качестве которой может быть, например, намагниченный ферромагнетик) с возможностью низкочастотной модуляции поля посредством механического периодического движения (вращения) источника. Верхняя граница частоты модуляции, таким образом, является невысокой: $\Omega' \leq 10^3$ с$^{-1}$. К торсионным генераторам второго типа относится, например, генератор спинового поля В.Г. Краснобрыжева [115, с. 162 - 226].

Прямые эксперименты, доказывающие вышеприведенные свойства квазистатических полей $\Omega \gg \omega$ были проведены А.Е. Акимовым с сотрудниками в 1986 г. [118]. Торсионный генератор располагался на границе Москвы, а на расстоянии 22 км от генератора, в центре Москвы, располагалась приемная биоэлектронная система. Приемная система основывалась на свойстве клеточных мембран изменять свою проводимость под действием сигнала торсионного генератора [119]. Эквивалентная толщина железобетонного экрана, создаваемого зданиями на пути торсионного сигнала, превышала 50 м, при этом отражение сигнала от ионосферы или зданий исключалось по причине свойств самого сигнала.

В экспериментах 1986 г. был установлен эффект изменения электрической проводимости биологических тканей относительно среднего уровня при перемене правой спиральности Ω^+ квазиклассического поля на левую Ω^- и наоборот. Здесь обозначено $\Omega^+ = |\Omega|,\ \ \Omega^- = -|\Omega|$.

Таким образом, была подтверждена возможность передачи сигналов по новому каналу связи, который был реализован с помощью квазистатического поля новой электродинамики $\Omega \gg \omega$, «установленном» на прямом отрезке длиной 22 км между генератором и приемной системой. Прямая траектория сигнала проходила через сложный рельеф местности с плотной городской застройкой, чем, следовательно, и была доказана его высокая проникающая способность.

Отметим, что в 2018 г. в Германии С. Кернбахом была проведена успешная репликация экспериментов А.Е. Акимова 1986 года [120].

9.8.4. Опыты Ф.Ф. Менде с кольцевыми сверхпроводниками

Рассмотрим эксперименты Ф.Ф. Менде с кольцевым сверхпроводником, роль которого выполнял сверхпроводящий тор [109, § 20]. В экспериментах показано, что при установлении по-

стоянного тока в сверхпроводящем торе между экраном тора 3 и экраном установки 1 возникало некое электростатическое поле (рис. 9.11 (а)). Поле описывалось с помощью градиента эффективного электрического потенциала

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi_{ef}, \tag{9.167}$$

который в эксперименте обнаруживался электрометром, подключенным между экраном тора 3 и экраном установки 1.

В описании эксперимента подчеркивается, что ниобиевый сверхпроводящий тор 4 до появления в нем постоянного тока был электронейтральным, экран установки 1 был заземлен. Объяснение Ф.Ф. Менде эффекта возникновения электростатического поля в установке с электронейтральными элементами основывается на его же гипотезе о зависимости скалярного потенциала заряда от его скорости. Заметим, что предложенная зависимость должна действовать прежде всего в нерелятивистской области, так как скорость зарядов проводимости в сверхпроводниках не превышает нескольких процентов от скорости света.

На взгляд автора, гипотеза Ф.Ф. Менде несостоятельна, так как в противном случае эффект зависимости скалярного потенциала заряженных частиц от их скорости был бы давно замечен в других экспериментах, прежде всего, в ускорителях заряженных частиц. Однако научные сообщения об этом отсутствуют.

По мнению автора, в приведенных экспериментах с кольцевыми сверхпроводниками обнаружено вихревое электростатическое поле $\mathbf{E}_T$, описанное во втором способе генерации статических электромагнитных полей при круговом движении зарядов (разд. 9.7.2). В [2, с. 60] приведена точная формула для поля $\mathbf{E}_T$ в этом случае

$$\mathbf{E}_T = -\frac{1}{2}\left(\frac{a\Omega}{c}\right)^2\left(\frac{da}{a}\right)\rho^{-}da\,\mathbf{f}_T(r,\,z,\,a), \tag{9.168}$$

где $\mathbf{f}_T(r,\,z,\,a)$ — безразмерная векторная функция, определяю-

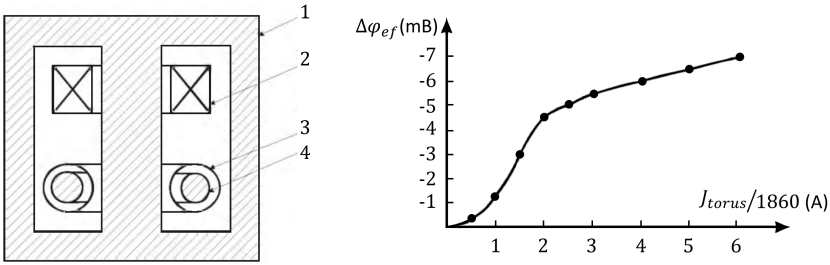

Рис. 9.11: Слева: принципиальная схема эксперимента со сверхпроводящим тором: (1 — экран установки (ярмо трансформатора), 2 — первичная обмотка трансформатора, 3 — экран тора, 4 — ниобиевый сверхпроводящий тор) [109, с. 129]; справа: зависимость эффективной разности потенциалов между экраном тора и экраном установки, от тока в сверхпроводящем торе [109, с. 130]

щая конфигурацию поля $\mathbf{E}_T$ кольцевого проводника с током

$$\mathbf{f}_T(r,\, z,\, a) = \int Q_{0\,r}(dV)\frac{[\mathbf{i}_\varphi\, \mathbf{R}_{dV}]}{R^3_{dV}}dV. \qquad (9.169)$$

Здесь $\mathbf{i}_\varphi$ — орт цилиндрической системы координат, $\mathbf{R}_{dV}$ — вектор, проведенный из элемента dV в точку наблюдения, a — расстояние от оси симметрии кольцевого проводника до его центральной нити, da — радиус кругового сечения проводника, ρ^- — объемная плотность зарядов проводимости в сверхпроводнике. Функция $Q_{0\,r}$, зависящая от цилиндрических координат r, z элемента dV и геометрического параметра a, определена в разд. 9.7.1 (формула (9.149)).

При постоянных размерах и пропорциях установки мы имеем следующую зависимость

$$\mathbf{E}_T \propto (a\Omega)^2\rho^- \propto \frac{J^2_{torus}}{\rho^-}, \qquad (9.170)$$

так как, в свою очередь, $J_{torus} \propto \rho^- a\Omega$. Здесь J_{torus} и Ω — ток и угловая скорость зарядов проводимости в сверхпроводящем торе.

На рис. 9.11 (б) представлен экспериментальный график зависимости $\Delta\varphi_{ef}$ от тока в сверхпроводящем торе. Видно, что при малых значениях тока функция $\Delta\varphi_{ef}(J_{torus})$ близка к квадратичной функции, при больших значениях тока — близка к линейной. Это означает, что при малых токах увеличение J_{torus} происходит в основном за счет увеличения линейной скорости зарядов при постоянной их плотности, при больших токах это увеличение происходит за счет и того и другого.

9.8.5. Поле вращающихся нейтральных объектов. Опыты И.А. Мельника

Выше, в разд. 9.7.3, показано, что в электродинамике ориентируемой точки существует третий способ генерации постоянного электромагнитного поля — при однонаправленном круговом движении всех положительных и всех отрицательных зарядов, имеющих одинаковую плотность, с одной угловой скоростью. При таком способе генерации суммарная плотность зарядов $\rho = \rho^{+} + \rho^{-}$ и суммарная плотность токов $\mathbf{j} = \mathbf{j}^{+} + \mathbf{j}^{-}$ равны нулю, но система уравнений для статических потенциалов имеет ненулевые решения, благодаря источникам, имеющих свое происхождение в новой надпространственной структуре — касательном расслоении [2, с. 69]:

$$\nabla^2\mathbf{A} = (T^{1'}_{2'0'})\,[\mathbf{i}_z\,\mathrm{grad}\Phi] - (T^{1'}_{2'0'})^2\,[\mathbf{i}_z[\mathbf{i}_z\mathbf{A}]], \tag{9.171}$$

$$\nabla^2\Phi = (T^{1'}_{2'0'})\,\mathrm{div}[\mathbf{i}_z\mathbf{A}]. \tag{9.172}$$

Здесь Φ, $\mathbf{A}$ — скалярный и векторный потенциалы, составляющие временную и пространственную части четырехмерного L-вектора потенциала электромагнитного поля $A^i = (\Phi,\, A_x,\, A_y,\, A_z)$, $T^{1'}_{2'0'} = \Omega/c$ — один из коэффициентов вращения Риччи, принимающий ненулевое значение в реальной системе отсчета K', вращающейся по круговой орбите с угловой скоростью $\mathbf{\Omega} = \Omega\,\mathbf{i}_z$, $\mathbf{i}_z$ — орт цилиндрической системы координат.

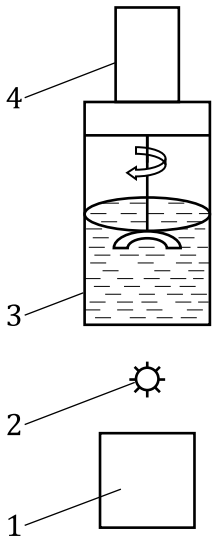

Рис. 9.12: Принципиальная схема эксперимента И.А. Мельника: 1 — детектор, 2 — источник гамма-излучения, 3 — стальной стакан с жидкостью, 4 — вал электродвигателя

В разд. 9.7.3 показано, что генерируемое таким образом электромагнитное поле обладает специальным (неклассическим) свойством — свойством сверхпроницаемости сквозь классические электромагнитные экраны (например, клетку Фарадея).

Экспериментальным подтверждением того, что, во-первых, генерация статического электромагнитного поля путем вращения тела с нулевой плотностью заряда возможна, и что, во-вторых, полученные поля обладают специальными свойствами проницаемости через проводящие среды, является серия экспериментов И.А. Мельника [121], [122, с. 92] по дистанционному воздействию нейтральных вращающихся тел на радиоактивный изотоп. На рис. 9.12 представлена принципиальая схема одного из экспери-

ментов И.А. Мельника [121].

В этих экспериментах показано, что твердые или жидкие нейтральные тела при вращении генерируют вокруг себя некое поле, которое действует на находящийся поблизости радиоактивный образец. Действие поля заключается в изменении интенсивности и статистического распределения излучения ядер образца. Так как данное поле достигает ядер образца и действует на них, то, следовательно, оно обладает большим (макроскопическим) радиусом действия и обладает свойством проницаемости сквозь электронные оболочки ядер.

Именно этими свойствами обладают электромагнитные поля новой электродинамики, генерируемые нейтральными вращающимися телами и описываемые уравнениями для потенциалов (9.171) и (9.172).

9.9. Краткие выводы

В настоящей главе представлены основные положения электродинамики ориентируемой точки, построенной в соответствии с принципом реальной относительности. Уравнения новой электродинамики L-ковариантны, то есть не меняют своего вида при активных преобразованиях координат и полей между реальными системами отсчета. Показано, что в пределе, когда реальная система отсчета, связанная с зарядом, становится квазиинерциальной, найденные уравнения переходят в уравнения классической электродинамики, что, таким образом, подтверждает выполнение принципа соответствия новой теории классическим фундаментальным теориям.

Для произвольной собственной системы отсчета заряда уравнения новой электродинамики сформулированы в четырехмерном виде, через компоненты L-тензора электромагнитного поля. Рассмотрен главный случай реализации собственной системы отсчета заряда в виде системы, вращающейся по круговой траектории, что является наиболее интересным с точки зрения новых неклассических эффектов. Для этого случая общие четырехмер-

ные уравнения были записаны в трехмерном виде относительно неподвижного наблюдателя, через компоненты электрического и магнитного полей.

Показано, что при специальных условиях генерации (при значительном превышении угловой скорости заряда над круговой частотой монохроматической волны $\Omega \gg \omega$) электромагнитное поле можно рассматривать как квазистатическое, проявляющее специальные (неклассические) свойства. Отметим основные из них:

1) свойство существования стоячей волны (волны нулевой частоты) в пустом неограниченном пространстве;

2) свойство сверхпроникаемости сквозь проводящие среды, непрозрачные для классических электромагнитных полей;

3) свойство сверхсветового переноса сигналов (при модуляции генерирующего тока $\Omega = \Omega_0 + \varepsilon_0 \sin(\Omega' t),\ \Omega'(t) \ll \Omega_0$);

4) свойство доступности чисто вакуумных источников.

Если первые три специальных свойства были продемонстрированы в разд. 9.8 как «экспериментальные свойства электродинамики ориентируемой точки», то на четвертом свойстве — свойстве доступности для электродинамической системы дополнительных вакуумных источников, позволяющих генерировать электромагнитные поля, необходимо остановиться подробнее.

В [2] были сформулированы уравнения для потенциалов новой электродинамики $A^i = (\Phi,\ A_x,\ A_y,\ A_z)$, из которых следует, что электродинамическая система, имеющая классические источники поля - заряд и ток, также может иметь чисто вакуумные источники поля:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}[\mathbf{\Omega}\,\mathrm{grad}\Phi] - \frac{1}{c^2}[\mathbf{\Omega}[\mathbf{\Omega}\mathbf{A}]] - \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t}\mathbf{A}\right], \tag{9.173}$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho + \frac{1}{c}\,\mathrm{div}[\mathbf{\Omega}\mathbf{A}]. \tag{9.174}$$

Факт генерации электромагнитных полей, обладающих спе-

циальными свойствами и снабженных дополнительной энергией (из вакуумных источников), подтверждают прямые эксперименты, в которых изучались свойства вращающихся электродинамических структур. Приведем результаты двух экспериментальных исследований.

В работе В.В. Рощина и С.М. Година 2000 года доложено о том, что в динамической магнитной системе, которая представляет собой установку с неподвижным магнитным статором и вращающимся ротором с магнитными роликами, зафиксирован эффект преобразования энергии окружающей среды во вращательную механическую энергию системы, которая затем была преобразована в электрическую энергию [94].

В работе А.И. Климова с сотрудниками [123] обнаружены необычные физические свойства продольного неравновесного разнородного плазмоида, наблюдаемого в плазменном вихревом реакторе (PVR). Так, калориметрическим методом был измерен coefficient of performance (COP), он составил от 2 до 10 единиц.

Упомянутые эксперименты указывают на то, что при некоторых режимах работы электродинамических систем (вращающихся электромагнитных устройств или вихревых плазменных образований) электрическая мощность, передаваемая системой на внешнюю нагрузку (или тепловая мощность, генерируемая системой), больше, чем мощность, потребляемая системой от стандартных источников. Это свидетельствует о том, что в этом случае в систему добавляются неклассические источники из тонких структур физического вакуума. Коэффициент COP понимается здесь как отношение мощности, генерируемой самой системой, к мощности, получаемой системой из стандартных источников.

Отметим, что первый и второй примеры [94, 123] появления сверхисточников энергии связаны со вращением элементов установки или с вихревым вращением плазмы. Это полностью соответствует уравнениям для потенциалов (9.173), (9.174), где в члены, описывающие вакуумные источники, входит соответствующая угловая скорость $\boldsymbol{\Omega}$.

Второе из перечисленных специальных свойств (свойство

сверхпроницаемости) соответствует тому, что квазистатические ($\omega \ll \Omega$) электромагнитные поля имеют неиндукционный характер и не возбуждают никакой электродвижущей силы в плоскости, перпендикулярной волновому вектору. Именно поэтому попытки измерить обычной электроизмерительной аппаратурой сигнал торсионного генератора оканчивались неудачей (аппаратура ничего не показывала). Дело в том, что классическая измерительная аппаратура, как правило, может измерять классические поля, несущие в себе индукционные свойства.

Таким образом, вихревое электростатическое поле, не проявляющее классических индукционных свойств, необходимо измерять специальной электроизмерительной аппаратурой. Это требование следует отразить штрихом в единице измерения поля:

$$[E_T] = \left(\frac{\text{В}}{\text{м}}\right)' \ (\text{СИ}). \tag{9.175}$$

Общее рассуждение от автора

Разорваны мгновенья
И выброшены прочь.
Нам вместо сновиденья
Сегодня будет ночь.

Ночь вязкая, густая,
Без хитростей, без звезд, –
От края и до края
Обрушившийся мост.

Быть может, там, за краем,
Когда-нибудь потом,
Мгновенья мы узнаем,
И время обретем?

Автор, 1981

Название настоящего труда указывает на наличие в нем неких принципов, то есть положений, принимаемых a priori, и которые являются логической основой труда. Из четырех таких принципов два являются новыми:

— принцип реальной относительности (который включает как частное специальный принцип относительности);

— принцип нелокальной связи частиц, собственная система отсчета которых принадлежит к единому классу;

и два принципа являются традиционными:

— принцип геометризации любых полей;

— принцип соответствия новой теории классическим фундаментальным теориям.

Тем не менее, слово «принципы» в названии не случайно. Оно обращено к величайшей фигуре Исаака Ньютона (1642 – 1727) — основоположника парадигмы трехмерной материальной точки и создателя классической механики. Отдавая дань трепетного уважения к его наследию, до сих пор не оцененному человечеством в полной мере, автор заявляет, что в настоящем труде впервые преодолено колоссальное «поле притяжения» механики Ньютона, на «внешней орбите» которой обоснован новый способ безреактивного безопорного движения системы ориентируемых тел.

На протяжении почти трех веков, прошедших со времени ухода великого ученого, он представлялся широкой общественности исключительно как основоположник господствующей научной парадигмы. И лишь в последнее время все возрастающий интерес стали вызывать его «скрытые до поры» алхимические и теологические труды, не изданные по его воле при жизни. Объяснение этому находится в самих трудах, в частности в «Замечаниях на книгу пророка Даниила и Апокалипсис св. Иоанна» [124], где Исааком Ньютоном раскрываются предсказания библейского пророка Даниила, *касающиеся нашего времени*: «Пророческое предвещание грядущего относится к состоянию Церкви во все века; и между всеми древними пророками Даниил наиболее точен в указании сроков событий и доступнее всех для понимания; вследствие этого, во всем, что относится до последних времен, он может служить ключом для уразумения всех остальных пророчеств» [124, с. 11].

Обратимся же к этому сияющему труду. Вот что пишет Исаак Ньютон: «С обращением 10 королевств к Римскому исповеданию папа лишь расширил свое духовное господство, но еще не возвысился, как рог зверя. Папа сделался одним из этих рогов лишь благодаря приобретению светских владений; а владения эти он приобрел в последнюю половину VIII столетия, покорив себе три первых рога, как изложено было выше. Теперь, добившись светского господства и могущества выше всякой человеческой власти, он «стал по виду больше прочих» (Дан. VII, 20), и «времена и законы (с той поры) были преданы в руки его до времени,

времен и половины времени» (там же 25) или на три времени с половиной, т.-е. на 1260 солнечных лет, считая *время* за календарный год в 360 дней, а *день* за солнечный год» [124, с. 89].

В цитате определяется промежуток времени длиной в 1260 лет, который начался во второй половине VIII века, то есть между 750 г. и 800 г. Следовательно, его окончание определено следующими календарными датами: от 2010 г. по 2060 г. Закон золотого сечения дает наиболее вероятную дату — 2041 год.

Читаем далее: «После этого «возсядут судьи и отнимут у него — не сразу, а постепенно, — власть губить и истреблять до конца» (там же 26). «Царство же и власть и величество царственное во всей поднебесной дано будет (постепенно) народу святых Всевышнего, Которого царство — вечное, и все властители будут служить и повиноваться ему» (там же 27, 28)» [124, с. 89].

По мнению автора, Исаак Ньютон в книге пророка Даниила расшифровал срок цивилизационного поворота, то есть срок перехода к новой духовной и научной парадигме, в основании которой должны лежать новые знания о метафизическом (логическом) устройстве мира и о свойствах окружающего пространства.

Заметим, что цивилизационный поворот середины XXI века в основных сакральных источниках определен (назначен) именно на это время — 2041–2044 гг.

Еврейская каббала — «гармония мысли и чисел» для раскрытия законов мироздания — 2044 год относит к концу истории «мира сего» перед «тысячелетием субботы». В эти сроки, по мнению планировщиков-каббалистов, завершится исполнение трехтысячелетнего плана Соломона, и тогда дом Иакова вокруг Нового Иерусалима будет пасти народы мира по завету Всевышнего. Каббалисты связывают грядущий поворот с открытием «тайника знаний» о надземных связях мироздания, «когда устремления тела и души поднимутся на уровень духа», и у людей возникнет канал подключения к высшим истинам [125].

В Писании говорится об этом, как об обретении «нового не-

ба и новой земли, на которых обретает правда». Именно тогда вскроются тонкие поля и «мир невидимый станет видимым».

Проект Великого Единения человечества (Датун) вокруг центра Земли, который занимает Китай, создали китайские мудрецы во времена правления первого Сына Неба Вэнь Вана (Царь просвещенный) примерно 3000 лет назад. До нашего времени его донесли даосские монахи и учителя конфуцианства. Путь Неба (поиск гармонии человека с ритмами Природы — Дао) они изъясняют через Закон Перемен.

В текущий момент Великое Единение называется «Сообщество единой судьбы человечества». У китайских мудрецов-даосов путь к Великому Единению также планируется закончить к середине XXI века. Китайский циклический календарь *ся ли* точно указывает на дату духовного и цивилизационного поворота — 2044 год по григорианскому линейному календарю дат [125].

Как показывает анализ истории, борьба и смена главенствующих мировых цивилизаций всегда сопровождалась сменой главных научных парадигм, в основе которых лежат элементарные (не приводящиеся к более простым) представления человечества об окружающем пространстве и представления о метафизическом (философском) устроении мира.

В беспощадной «войне миров» всегда побеждает и выходит вперед то общество, которое несет в себе и генерирует более совершенные знания. Такими знаниями могут быть только те, которые составляют основу истинно новой парадигмы.

Как правило, принципиально новые научные знания рождаются и утверждаются в том обществе, которое достигло новых глубин в философско-метафизическом понимании действительности. Поэтому понятен и приятен тот факт, что в России — родине ноосферной идеологии — родилось и быстро набрало свою силу научное знание о дополнительной тонкой структуре окружающего пространства.

Приложения

Приложение 1. Коэффициенты вращения Риччи и ковариантное дифференцирование в пространстве абсолютного параллелизма

Изложим способ введения коэффициентов вращения Риччи как коэффициентов связности касательного расслоения в расслоенном пространстве.

Формула изменения мировых криволинейных координат вектора A^i при параллельном перенесении вектора из точки A в близкую точку $A+dA$ следующая [9]

$$\begin{aligned} d_{\parallel}A^i &= -\Gamma^i{}_{jk}A^j dx^k, \\ d_{\parallel}A_i &= \Gamma^j{}_{ik}A_j dx^k. \end{aligned} \qquad (A1)$$

Здесь $\Gamma^i{}_{jk}$ — символы Кристоффеля или коэффициенты связности базы расслоения (2.12).

Если вектор задан локально-лоренцевыми координатами A^a в слое расслоения, то при параллельном переносе вектора его локально-лоренцевы координаты будут меняться вследствие меняющейся ориентации сопровождающего локально-лоренцева репера. Введем коэффициенты вращения Риччи через закон изменения локально-лоренцевых координат вектора при его параллельном переносе из мировой точки A в близлежащую точку $A+dA$ [5]

$$\begin{aligned} d_{\parallel}A^a &= T^{a\cdot\cdot}_{\cdot bk}A^b dx^k, \\ d_{\parallel}A_a &= T^{\cdot b\cdot}_{a\cdot k}A_b dx^k. \end{aligned} \qquad (A2)$$

Исходя из смысла формулы $(A2)$ и аналогии с $(A1)$, коэффициенты вращения Риччи представляют собой коэффициенты связности неголономных координат x^a в касательном расслоении.

Величины

$$d\chi^{a}_{\cdot b} = T^{a\cdot\cdot}_{\cdot bk}dx^{k} \qquad (A3)$$

есть углы поворота локально-лоренцева репера при перемещении его в точку $A + dA$ относительно его положения в точке A [4].

Из условия сохранения скалярного произведения векторов при параллельном переносе на расстояние dx^k

$$d_{\parallel}(A^a B_a) = (T^{\cdot\cdot\cdot}_{abk} + T^{\cdot\cdot\cdot}_{bak})A^a B^b dx^k = 0 \qquad (A4)$$

получим свойство антисимметричности коэффициентов вращения Риччи по первым двум локальным индексам [5]

$$T^{\cdot\cdot\cdot}_{abk} = -T^{\cdot\cdot\cdot}_{bak}. \qquad (A5)$$

Запишем формулу изменения координат коэффициентов Ламэ $h^a{}_j$ при параллельном переносе на расстояние dx^k в пространстве абсолютного параллелизма. Напомним, что коэффициенты Ламэ $h^a{}_j$ являются мультивекторным объектом, а именно: локальный индекс является векторным индексом относительно ортогональных преобразований локально-лоренцевых реперов (четырехмерных поворотов $\Lambda^{a'}_{a} \in SO(1.3)$), мировой индекс является векторным индексом относительно преобразований мировых координат. При параллельном переносе коэффициентов Ламэ происходит изменение мировых и локально-лоренцевых координат этого объекта в соответствии с формулами $(A1)$ и $(A2)$

$$d_{\parallel}h^a{}_j = \Gamma^i{}_{jk}h^a{}_i dx^k + T^{a\cdot\cdot}_{\cdot bk}h^b{}_j dx^k = h^a{}_i(\Gamma^i{}_{jk} + T^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk})dx^k. \qquad (A7)$$

Используя соотношение (2.16), мы можем полученную формулу записать в следующем виде

$$d_{\parallel}h^a{}_j = \Delta^i{}_{jk}h^a{}_i dx^k, \qquad (A8)$$

где $\Delta^i{}_{jk} = h^i{}_b\, h^b{}_{j,k}$ — связность абсолютного параллелизма.

Если вектор $\mathbf{A}$ задан мировыми координатами, то ковариантная производная ∇_k относительно связности мировых координат

$\Gamma^{i}{}_{jk}$ определяется формулой [9]

$$\begin{aligned} \nabla_k A^i &= A^i{}_{,k} + \Gamma^i{}_{jk} A^j, \\ \nabla_k A_i &= A_{i,k} - \Gamma^j{}_{ik} A_j. \end{aligned} \tag{A9}$$

Если вектор задан своими локально-лоренцевыми коодинатами, то, исходя из закона изменения локально-лоренцевых координат вектора при его параллельном переносе $(A2)$, ковариантная производная $\widetilde{\nabla}_k$ относительно связности $T^{a\cdot\cdot}_{\cdot bk}$ определяется следующим образом [1]

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_k A^a &= A^a{}_{,k} - T^{a\cdot\cdot}_{\cdot bk} A^b, \\ \widetilde{\nabla}_k A_a &= A_{a,k} + T^{b\cdot\cdot}_{\cdot ak} A_b. \end{aligned} \tag{A10}$$

Таким образом, тензорные свойства величин $\widetilde{\nabla}_k A^a$ и $\widetilde{\nabla}_k A_a$ относительно ортогональных преобразований локально-лоренцевых реперов сохраняются. Производную $\widetilde{\nabla}_k$ мы будем называть *ковариантной производной в касательном расслоении* или *L-ковариантной производной* [1].

Полная ковариантная производная мультивекторного объекта $A^a{}_i$ в пространстве абсолютного параллелизма выражается, как следствие формулы $(A7)$, в следующем виде

$$\begin{aligned} \overset{*}{\nabla}_k A^a{}_j &= A^a{}_{j,k} - \Gamma^i{}_{jk} A^a{}_i - T^{a\cdot\cdot}_{\cdot bk} A^b{}_j, \\ \overset{*}{\nabla}_k A^i{}_a &= A^i{}_{a,k} + \Gamma^i{}_{jk} A^j{}_a + T^{b\cdot\cdot}_{\cdot ak} A^i{}_b. \end{aligned} \tag{A11}$$

Прямые вычисления полной ковариантной производной коэффициентов Ламэ $h^a{}_j$ приводят к следующему результату

$$\begin{aligned} \overset{*}{\nabla}_k h^a{}_j &= 0, \\ \overset{*}{\nabla}_k h^i{}_a &= 0. \end{aligned} \tag{A12}$$

Приведем формулы преобразования коэффициентов вращения Риччи при ортогональных преобразованиях локально-лоренцевых

реперов [1]. По первым верхнему и нижнему локальным индексам коэффициенты вращения Риччи при четырехмерном повороте $\Lambda^{a'}_{\ a}$ локально-лоренцева репера преобразуются следующим образом:

$$T^{a'\cdot\cdot}_{\cdot\, b'\, k} = G\Lambda^{a'}_{\ a,k}\,\Lambda^{a}_{\ b'} + \Lambda^{a'}_{\ a}\,T^{a\cdot\cdot}_{\cdot\, b\, k}\,\Lambda^{b}_{\ b'}, \qquad (A13)$$

где $G = 1$. Второй нижний индекс коэффициентов вращения Риччи является тензорным относительно поворотов $\Lambda^{a'}_{\ a}$ локально-лоренцевых реперов

$$T^{a\cdot\cdot}_{\cdot\, b\, c'} = T^{a\cdot\cdot}_{\cdot\, b\, c}\,\Lambda^{c}_{\ c'}. \qquad (A14)$$

Проекция коэффициентов вращения Риччи на пространство мировых координат (базу расслоения) являются стандартным тензором типа (1, 2), то есть объектом, который при замене координатной сетки (пассивном преобразовании координат $x^i \to x^{\tilde{i}}$) преобразуется следующим образом [1]:

$$T^{\tilde{i}\cdot\cdot}_{\cdot\,\tilde{j}\,\tilde{k}} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{\tilde{j}}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{\tilde{k}}}\frac{\partial x^{\tilde{i}}}{\partial x^i}\,T^{i\cdot\cdot}_{\cdot\, j\, k}. \qquad (A15)$$

Приведем известные формулы преобразования символов Кристоффеля при пассивных преобразованиях координат $x^i \to x^{\tilde{i}}$ [9]

$$\Gamma^{\tilde{i}}_{\ \tilde{j}\tilde{k}} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{\tilde{j}}\partial x^{\tilde{k}}}\frac{\partial x^{\tilde{i}}}{\partial x^i} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{\tilde{j}}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{\tilde{k}}}\frac{\partial x^{\tilde{i}}}{\partial x^i}\,\Gamma^{i}_{\ jk}. \qquad (A16)$$

Заметим, что проекция символов Кристоффеля на слой расслоения

$$\Gamma^{a}_{\ bc} = h^{a}_{\ i}\,\Gamma^{i}_{\ jk}\,h^{j}_{\ b}\,h^{k}_{\ c} \qquad (A17)$$

является полным тензором типа (1, 2) относительно ортогональных преобразований локально-лоренцевых реперов [1]

$$\Gamma^{a'}_{\ b'c'} = \Lambda^{a'}_{\ a}\,\Gamma^{a}_{\ bc}\,\Lambda^{b}_{\ b'}\,\Lambda^{c}_{\ c'}. \qquad (A18)$$

В расслоенном пространстве со связностью $\Delta^{i}_{\ jk} = \Gamma^{i}_{\ jk} + T^{i\cdot\cdot}_{\cdot\, jk}$ проекция на слой расслоения ковариантной производной

вектора A^i равна ковариантной производной в касательном расслоении от проекции на слой этого вектора $A_a = A_i\, h^i{}_a$

$$(\nabla_k A_i) h^i{}_a = \widetilde{\nabla}_k (A_i\, h^i{}_a). \qquad (A19)$$

Приложение 2. Метрика Шварцшильда в декартовых координатах

Метрику Шварцшильда в сферических координатах [10]

$$(ds)^2 = (1 - \frac{r_g}{r})(c\,dt)^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}(dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2 \sin^2\theta (d\varphi)^2, \qquad (A20)$$

используя очевидное соотношение

$$(dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta (d\varphi)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2,$$

запишем в следующем виде:

$$(ds)^2 = (1 - \frac{r_g}{r})(c\,dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 - A\left(d\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2, \qquad (A21)$$

где

$$A = \frac{r_g/r}{1 - (r_g/r)},$$

откуда прямо вычисляется ковариантный метрический тензор геометрии Шварцшильда в декартовых координатах (начало координат совмещено с источником поля)

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{r_g}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - A\frac{x^2}{r^2} & -A\frac{xy}{r^2} & -A\frac{xz}{r^2} \\ 0 & -A\frac{xy}{r^2} & -1 - A\frac{y^2}{r^2} & -A\frac{yz}{r^2} \\ 0 & -A\frac{xz}{r^2} & -A\frac{yz}{r^2} & -1 - A\frac{z^2}{r^2} \end{pmatrix}. \qquad (A22)$$

Соответственно, контравариантный метрический тензор выглядит следующим образом:

$$g^{km} = \begin{pmatrix} g^{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 + B\frac{x^2}{r^2} & B\frac{xy}{r^2} & B\frac{xz}{r^2} \\ 0 & B\frac{xy}{r^2} & -1 + B\frac{y^2}{r^2} & B\frac{yz}{r^2} \\ 0 & B\frac{xz}{r^2} & B\frac{yz}{r^2} & -1 + B\frac{z^2}{r^2} \end{pmatrix}, \qquad (A23)$$

где

$$g^{00} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}, \qquad B = \frac{r_g}{r}.$$

Приложение 3. О классе систем отсчета, основанных на удаленной движущейся квазиинерциальной системе $\overline{K}$

Рассмотрим случай движения удаленной квазиинерциальной системы отсчета $\overline{K}(\overline{O})$ со скоростью $\overline{\mathbf{V}}_{\overline{O}} = (V_{\overline{O}},\ 0,\ 0)$ относительно неподвижной системы $K(O)$. Вычислив скорость локально-лоренцевой системы $k'(O')$ относительно удаленной системы $\overline{K}(\overline{O})$

$$V_{\underline{O'}} = \frac{V_{O'} - V_{\overline{O}}}{1 - V_{O'}V_{\overline{O}}/c^2} \qquad (A24)$$

(здесь использован факт совпадения скорости реальной системы отсчета $K'(O')$ со скоростью мгновенно совпадающей с ней локально-лоренцевой системы $k'(O')$ относительно покоящейся системы $K(O)$), мы можем построить новый ряд преобразований координат событий между системами $K'(O')$, $k'(O')$, $K''(O'')$, $k''(O'')$ и исходной квазиинерциальной системой $\overline{K}(\overline{O})$. Так, преобразования координат событий, связанных с движением частицы, между удаленной квазиинерциальной системой отсчета $\overline{K}$ и локально-лоренцевой системой $k'(O')$ совершенно аналогичны

преобразованиям $K(O) \to k'(O')$

$$\begin{pmatrix} cdt'_L \\ dx'_L \\ dy'_L \\ dz'_L \end{pmatrix} = L^{a'}_{\overline{a}} \begin{pmatrix} cd\overline{t} \\ d\overline{x} \\ d\overline{y} \\ d\overline{z} \end{pmatrix}, \qquad L^{a'}_{\overline{a}} = \begin{pmatrix} \overline{\gamma} & -\overline{\beta}_x\,\overline{\gamma} & 0 & 0 \\ -\overline{\beta}_x\,\overline{\gamma} & \overline{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{A25}$$

где

$$\overline{\beta}_x = \frac{V_{\underline{O}'}}{c}, \quad \overline{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1-\overline{\beta}_x^2}}. \tag{A26}$$

Обозначим скорость частицы относительно системы $\overline{K}(\overline{O})$ как $\overline{\mathbf{v}} = (\overline{v}_x, \overline{v}_y, \overline{v}_z)$. Из (A25) получим выражения для скорости частицы в локально-лоренцевой системе $k'(O')$, подобные выражениям (6.4), (6.5):

$$v'_{xL} = \frac{\overline{v}_x - V_{\underline{O}'}}{1 - V_{\underline{O}'}\overline{v}_x/c^2}, \tag{A27}$$

$$v'_{yL} = \frac{\overline{v}_y}{\overline{\gamma}(1 - V_{\underline{O}'}\overline{v}_x/c^2)}, \quad v'_{zL} = \frac{\overline{v}_z}{\overline{\gamma}(1 - V_{\underline{O}'}\overline{v}_x/c^2)}, \tag{A28}$$

при этом выражения (6.7) для скорости частицы в реальной системе отсчета $K'(O')$ останется без изменений.

Далее получим соотношение между координатами частицы в локально-лоренцевой системе $k''(O'')$ и движущейся удаленной системе $\overline{K}(\overline{O})$

$$\begin{pmatrix} cdt''_L \\ dx''_L \\ dy''_L \\ dz''_L \end{pmatrix} = L^{a''}_{\overline{a}} \begin{pmatrix} cd\overline{t} \\ d\overline{x} \\ d\overline{y} \\ d\overline{z} \end{pmatrix}, \tag{A29}$$

где $L^{a''}_{\overline{a}}$ — матрица чистого преобразования Лоренца в общем виде из движущейся удаленной системы $\overline{K}(\overline{O})$ в локально-лорен-

цеву систему $k''(O'')$

$$L^{a''}_{\overline{a}} = \begin{pmatrix} \overline{\Gamma} & -\overline{B}_x\overline{\Gamma} & -\overline{B}_y\overline{\Gamma} & -\overline{B}_z\overline{\Gamma} \\ -\overline{B}_x\overline{\Gamma} & 1+\overline{\epsilon}\overline{B}_x^2 & \overline{\epsilon}\overline{B}_x\overline{B}_y & \overline{\epsilon}\overline{B}_x\overline{B}_z \\ -\overline{B}_y\overline{\Gamma} & \overline{\epsilon}\overline{B}_x\overline{B}_y & 1+\overline{\epsilon}\overline{B}_y^2 & \overline{\epsilon}\overline{B}_y\overline{B}_z \\ -\overline{B}_z\overline{\Gamma} & \overline{\epsilon}\overline{B}_x\overline{B}_z & \overline{\epsilon}\overline{B}_y\overline{B}_z & 1+\overline{\epsilon}\overline{B}_z^2 \end{pmatrix},$$

$$\overline{B}_x = \frac{\overline{v}_x}{c},\ \overline{B}_y = \frac{\overline{v}_y}{c},\ \overline{B}_z = \frac{\overline{v}_z}{c},$$

$$\overline{B}^2 = \overline{B}_x^2 + \overline{B}_y^2 + \overline{B}_z^2,\ \overline{\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{1-\overline{B}^2}},\ \overline{\epsilon} = \frac{\overline{\Gamma}-1}{\overline{B}^2}. \qquad (A31)$$

Вычисления, проведенные по этим формулам, приводят к результату, подобному (6.15):

$$\begin{pmatrix} cdt''_L \\ dx''_L \\ dy''_L \\ dz''_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cd\overline{t}/\overline{\Gamma} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (A32)$$

откуда следует соотношение между промежутками времени в собственной системе отсчета частицы $K''(O'')$ и движущейся удаленной системой $\overline{K}(\overline{O})$

$$dt'' = d\overline{t}\frac{\sqrt{1-\overline{v}^2/c^2}}{\sqrt{|g_{00}^{O''}|}}, \qquad (A33)$$

где $\overline{v}^2$ — квадрат скорости частицы в системе $\overline{K}(\overline{O})$.

В приближении слабого поля получим

$$\frac{\sqrt{1-\overline{v}^2/c^2}}{\sqrt{|g_{00}^{O''}|}} = 1 - \frac{1}{mc^2}\left[\frac{m\overline{v}^2}{2}(O'') + m\varphi(O'')\right]. \qquad (A34)$$

Выражение в квадратных скобках есть сумма кинетической и потенциальной энергии в системе $\overline{K}(\overline{O})$ для частицы, находящейся в мировой точке O''. Исходя из общего начала у реальной

системы отсчета K'' и движущейся удаленной системы $\overline{K}$, мы подразумеваем $\overline{v}|_\infty = 0$, поэтому

$$\frac{m\overline{v}^2}{2}(O'') + m\varphi(O'') = \frac{m\overline{v}^2}{2}|_\infty + m\varphi|_\infty = 0, \qquad (A35)$$

что означает совпадение собственного времени в реальной системе отсчета $K''(O'')$ и собственного времени в самой системе $\overline{K}(\overline{O})$

$$dt''_{pr} = d\bar{t}_{pr}. \qquad (A36)$$

Такой же результат дает анализ общерелятивистского случая в отношении систем K'' и $\overline{K}$, изложенный в п. 6.4. для систем K'' и K.

Литература

[1] *Губарев Е.А.* Теория реальной относительности. М.: Новый Центр, 2009.

[2] *Губарев Е.А.* Электродинамика ориентируемой точки. М.: Новый Центр, 2013.

[3] *Шипов Г.И., Гаряев П.П.* Квантовый геном в понятиях теории физического вакуума. М.: Концептуал, 2018.

[4] *Шипов Г.И.* Теория физического вакуума. М.: фирма «НТ–Центр», 1993.

[5] *Родичев В.И.* Теория тяготения в ортогональном репере. Пер. с англ. Новокузнецк: ИО НФМИ, 1998.

[6] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). Определения, теоремы, формулы. 6-е изд., стер. СПб.: Лань, 2003.

[7] *Чуб В.Ф.* Основы инерциальной навигации. Изд. 2-е, стереотип. М.: ЛЕНАНД, 2019.

[8] *Мёллер К.* Теория относительности. Изд. 2-е. Пер. с англ. Под ред. проф. Д. Иваненко. М.: Атомиздат, 1975.

[9] *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. Ч.2: Римановы пространства и пространства аффинной связности. Тензорный анализ. Математические основы общей теории относительности. Изд. 8-е, обнов. М.: КРАСАНД, 2014.

[10] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. 7-е изд., испр. М.: Наука, 1988.

[11] *Под ред. Григорьева И.С., Мейлихова Е.З.* Физические величины: Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991.

[12] *Эйнштейн А.* Геометрия Римана с сохранением понятия «абсолютного» параллелизма // Собрание научных трудов. Т. II. М.: Наука, 1966. С. 223–228.

[13] *Эйнштейн А.* Новая возможность единой теории тяготения и электричества // Собрание научных трудов. Т. II. М.: Наука, 1966. С. 229–233.

[14] *Эйнштейн А.* О современном состоянии теории поля // Собрание научных трудов. Т. II. М.: Наука, 1966. С. 244–251.

[15] *Эйнштейн А.* К единой теории поля // Собрание научных трудов. Т. II. М.: Наука, 1966. С. 252–259.

[16] *Эйнштейн А.* Единая теория поля и принцип Гамильтона // Собрание научных трудов. Т. II. М.: Наука, 1966. С. 270–274.

[17] *Эйнштейн А.* Единая теория физического поля // Собрание научных трудов. Т. II. М.: Наука, 1966. С. 286–306.

[18] *Эйнштейн А.* Единая теория поля, основанная на метрике Римана и абсолютном параллелизме // Собрание научных трудов. Т. II. М.: Наука, 1966. С. 307–320.

[19] *Эйнштейн А.* Совместность уравнений единой теории поля // Собрание научных трудов. Т. II. М.: Наука, 1966. С. 321–328.

[20] *Эйнштейн А.* Два строгих статических решения уравнений единой теории поля (совместно с В. Майером) // Собрание научных трудов. Т. II. М.: Наука, 1966. С. 329–341.

[21] *Эйнштейн А.* К теории пространств с римановой метрикой и абсолютным параллелизмом // Собрание научных трудов. Т. II. М.: Наука, 1966. С. 342–343.

[22] *Эйнштейн А.* О современном состоянии общей теории относительности // Собрание научных трудов. Т. II. М.: Наука, 1966. С. 344–346.

[23] *Эйнштейн А.* Систематическое исследование совместных уравнений поля, возможных в римановом пространстве с абсолютным параллелизмом (совместно с В. Майером) // Собрание научных трудов. Т. II. М.: Наука, 1966. С. 353–365.

[24] *Эйнштейн А.* Основы общей теории относительности // Собрание научных трудов. Т. I. М.: Наука, 1965. С. 452–504.

[25] *Newman E.T., Penrose R.* An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients // J. Math. Phys., 1962, V. 3. P. 896–902.

[26] *Kerr R.P.* Gravitation field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics // Phys. Rev. Lett., 1963, V. 11. P. 237–238.

[27] *Newman E.T., Tamburino L., Unti T.* Empty-Space Generalization of the Schwarzschild Metric // J. Math. Phys., 1963, V. 4, No. 7. P. 915–923.

[28] *Жотиков В.Г.* Введение в геометрию Финслера и ее обобщения (для физиков): учеб. пособие / В.Г. Жотиков. М.: МФТИ, 2014. ISBN 978-5-7417-0462-2.

[29] *Владимиров Ю.С.* Геометрофизика. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.

[30] *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии: Пер. с лат. А.Н. Крылова / Под ред. и с предисл. Л.С. Полака. Изд. стереотип. М.: Издательство ЛКИ, 2014.

[31] *Эйнштейн А.* К электродинамике движущихся тел // Собрание научных трудов. Т. I. М.: Наука, 1965. С. 7–35.

[32] *Эйнштейн А.* Сущность теории относительности // Собрание научных трудов. Т. II. М.: Наука, 1966. С. 5–82.

[33] *Эйнштейн А.* Автобиографические заметки // Собрание научных трудов. Т. IV. М.: Наука, 1966. С. 259–293.

[34] *Намбу Ё.* Кварки. Пер. с японск. М: Мир, 1984.

[35] *Уилер Дж.* Гравитация, нейтрино и Вселенная. М.: Изд. иностранной литературы, 1962.

[36] *Шипов Г.И.* Уравнения поля тетрад в пространстве абсолютного параллелизма // Известия ВУЗов, Физика, 1976, № 6. С. 132–133.

[37] *Шипов Г.И.* Проблемы теории элементарных взаимодействий // М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1979.

[38] *Эйнштейн А.* О принципе относительности и его следствиях // Собрание научных трудов. Т. I. М.: Наука, 1965. С. 65–114.

[39] *Бете Г.* Теория ядерной материи. М.: Издательство «Мир», 1974.

[40] *Brillouin L.* Relativity Reexamined. New York and London, Academic Press, 1970.

[41] *Бриллюэн Л.* Новый взгляд на теорию относительности. М.: Издательство «Мир», 1972.

[42] *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. Изд. 3-е. М.: Издательство ЛКИ, 2007.

[43] *Паули В.* Теория относительности. Пер. с англ. 2-е изд., испр. и доп. / Под ред. В.Л. Гинзбурга и В.П. Фролова. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983.

[44] *Зельманов А.Л., Агаков В.Г.* Элементы общей теории относительности. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

[45] *Эйнштейн А.* Проект обобщенной теории относительности и теории тяготения // Собрание научных трудов. Т. I. М.: Наука, 1965. С. 227–266.

[46] *Фаддеев Л.Д., гл. ред.* Математическая физика. Энциклопедия. М.: Большая Российская энциклопедия, 1998.

[47] *Пул Ч.* Справочное руководство по физике. Фундаментальные концепции, основные уравнения и формулы. Пер. с англ. М.: Мир, 2001.

[48] *Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца, их применение. М.: Физматгиз, 1958.

[49] *Шипов Г.И.* Общерелятивистская нелинейная электродинамика с тензорным потенциалом // Известия ВУЗов, Физика, 1972, №10. С. 98–104.

[50] *Матвеев А.Н.* Механика и теория относительности: Учеб. для студентов вузов. 3-е изд. М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век», ООО «Издательство «Мир и Образование», 2003.

[51] *Эйнштейн А.* Принципиальное содержание общей теории относительности // Собрание научных трудов. Т. I. М.: Наука, 1965. С. 613–615.

[52] *Эйнштейн А.* Об инерции энергии, требуемой принципом относительности // Собрание научных трудов. Т. I. М.: Наука, 1965. С. 53–64.

[53] *Эйнштейн А.* Диалог по поводу возражений против теории относительности // Собрание научных трудов. Т. I. М.: Наука, 1965. С. 616–625.

[54] *Артеха С.Н.* Основания физики (критический взгляд): Критика основ теории относительности. Изд. 3-е, расш. и доп. М.: ЛЕНАНД, 2018.

[55] *Эйнштейн А.* Пространство-время // Собрание научных трудов. Т. II. М.: Наука, 1966. С. 234–243.

[56] *Тяпкин А.А.* Выражение общих свойств физических процессов в пространственно-временной метрике специальной

теории относительности // Успехи физических наук, т. 106, вып. 4, 1972. С. 617–659.

[57] *Мардер Л.* Парадокс часов. Пер. с англ. М.: Мир, 1974.

[58] *Эйнштейн А.* Принцип относительности и его следствия в современной физике // Собрание научных трудов. Т. I. М.: Наука, 1965. С. 138–164.

[59] *Эйнштейн А.* О специальной и общей теории относительности (общедоступное изложение) // Собрание научных трудов. Т. I. М.: Наука, 1965. С. 530–600.

[60] *Эйнштейн А.* Формальные основы общей теории относительности // Собрание научных трудов. Т. I. М.: Наука, 1965. С. 326–384.

[61] *Sagnac M.G.* C. R. Acad. Sci., 1913, V. 157. P. 708; J. Phis.–Paris Ser. 5, 1914, V. 4. P. 177.

[62] *Баргатин И.В., Гришанин Б.А., Задков В.Н.* Запутанные квантовые состояния атомных систем // Успехи физических наук, т. 171, вып. 6, 2001. С. 625–647.

[63] *Hafele J., Keating R.* Around the world atomic clocks: predicted relativistic time gains // Science, 177 (4044), July 14, 1972. P. 166–168.

[64] *Бортник Е.* Применение компьютерных технологий и методов в профессиональной подготовке по электротехнике // Тезисы докладов международной научно-практической конференции "Формирование профессиональной культуры специалистов XXI века в техническом университете". СПб.: Издательство СПбГТУ, 2001.

[65] *Губарев Е.А.* Динамика ориентируемой точки и явление инерции (препринт № 15). М.: Международный институт теоретической и прикладной физики РАЕН, 2003.

[66] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. I. Механика. 5-е изд., стереот. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[67] *Толчин В.Н.* Инерциоид. Силы инерции как источник поступательного движения. Пермь: Кн. изд-во, 1977.

[68] *Шипов Г.И.* 4*D* гироскоп в механике Декарта. М.: Кириллица, 2006.

[69] *Губарев Е.А., Сидоров А.Н.* Рассеяние нейтронов в поле нелинейной электромезодинамики // Гравитация и фундаментальные взаимодействия: Сб. научных трудов под ред. Я.П. Терлецкого. М.: Изд-во УДН, 1988. С. 92.

[70] *Губарев Е.А., Сидоров А.Н., Шипов Г.И.* Фундаментальная модель ядерных взаимодействий на основе решений уравнений вакуума. Состояние и перспективы // Актуальные проблемы фундаментальных наук. Т. 3. М.: Изд-во МГТУ, 1991. С. 102–105.

[71] *Губарев Е.А., Сидоров А.Н., Шипов Г.И.* Фундаментальные модели элементарных взаимодействий и теория физического вакуума (препринт №17). М.: Межотраслевой научно-технический центр венчурных нетрадиционных технологий (МНТЦ ВЕНТ), 1992.

[72] *Губарев Е.А., Сидоров А.Н.* Вакуумная модель сильного взаимодействия // Тезисы докладов 28-й научной конференции факультета физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов. Доп. вып. М.: Изд-во Проблемного автономного института международного сотрудничества, 1992. С. 3.

[73] *Губарев Е.А., Сидоров А.Н.* Вакуумная модель сильного взаимодействия // Теоретические и экспериментальные проблемы гравитации. Тезисы докладов 8-й Российской гравитационной конференции. М.: 1993. С. 251.

[74] *Губарев Е.А., Сидоров А.Н., Шипов Г.И.* Модель сильного взаимодействия на основе решений теории вакуума // Труды V семинара «Гравитационная энергия и гравита-

ционные волны». Дубна: Изд-во Объединенного института ядерных исследований, 1993. С. 232–237.

[75] *Губарев Е.А., Сидоров А.Н.* Вакуумная модель сильного взаимодействия. Новые результаты // Труды VI семинара «Гравитационная энергия и гравитационные волны». Дубна: Изд-во Объединенного института ядерных исследований, 1994. С. 146–152.

[76] *Губарев Е.А., Сидоров А.Н.* Рассеяние геодезических в геометрии НУТ. Геометрическая модель сильного взаимодействия. М.: Новый Центр, 2008.

[77] *Rutherford E.* // Philos. Mag., 1919, V. 37. P. 537.

[78] *Yukawa H.* // Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 1935, V. 17. P. 48.

[79] *Бете Г.* Теория ядерной материи. М.: Мир, 1974.

[80] *Валантэн Л.* Субатомная физика: ядра и частицы: В 2 т. М.: Мир, 1986.

[81] *Heisenberg W.* Die Rolle der phänomenologischen Theorien im System der theoretischen Physik, in «Preludes in Theoretical Physics» (in Honor of V.F. Weisskopf), Amsterdam, 1966. (Перевод на русский язык: *Гейзенберг В.* Роль феноменологических теорий в системе теоретической физики // Успехи физических наук, т. 91, вып. 4, 1967. С. 731–733).

[82] *Ширков Д.В., гл. ред.* Физика микромира. Маленькая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1980.

[83] *Шипов Г.И.* Общековариантная нелинейная электродинамика с тензорным потенциалом // Известия ВУЗов. Физика. 1972. № 10. С. 98–104.

[84] *Mott N.* // Proc. Roy. Soc. London A, 1929, V. 124. P. 425.

[85] *Kinzinger E.Z.* // Naturfosch. A, 1949, Bd. 4. S. 88.

[86] *Lyman M., Hanson A., Scott M.* // Phys. Rev., 1951, V. 84. P. 626; *Bimiller F., Hofstadter R.* // Phys. Rev., 1956, V. 103. P. 1454.

[87] *Hofstadter R.* // Rev. Mod. Phys., 1956, V. 28, No. 3. P. 814.

[88] *Федянин В.* Электромагнитная структура ядер и нуклонов. М.: Высшая школа, 1968.

[89] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: ГИФМЛ, 1961.

[90] *Бабиков В.И.* Метод фазовых функций в квантовой механике. М.: Наука, 1986.

[91] *Криш А.* Столкновения вращающихся протонов // В мире науки, 1987, №10. С. 12–18.

[92] *Дымникова И.Г.* Движение частиц и фотонов в гравитационном поле вращающегося тела // Успехи физических наук, т. 148, вып. 3, 1986. С. 393–432.

[93] *Irvine W.M.* Electrodynamics in a rotating system of reference // Physica, V. 30, № 6, 1964. P. 1160–1170.

[94] *Рощин В.В., Годин С.М.* Экспериментальное исследование физических эффектов в динамической магнитной системе // Письма в ЖТФ, 2000, том 26, вып. 24. С. 70–75.

[95] *Gubarev E.A.* Electrodynamics of oriented point. Moscow: New Centre, 2013.

[96] *Губарев Е.А.* Уравнения электродинамики, ковариантные относительно преобразований теории относительности реальных систем отсчета // Фридмановские чтения: тезизы докладов международной научной конференции. Пермь, 24 – 28 июня 2013 г. Пермь: Перм. гос. нац. исслед. ун-т., 2013. С. 69.

[97] *Gubarev E.A.* Electrodynamics of oriented point as a consequence of the real relativity principle // Proceedings of the Twelfth Asia-Pacific International Conference on

Gravitation, Astrophysics, and Cosmology, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2016. P. 242–243.

[98] *Губарев Е.А.* Относительность реальных систем отсчета: теория и приложения // Метафизика, 2019, № 2 (32). С. 128–134.

[99] *Губарев Е.А.* Поля электродинамики ориентируемой точки в научном и прикладном аспекте // Торсионные поля и информационные взаимодействия – 2016: Материалы V-й международной научно-практической конференции. Москва, 10 – 11 сентября 2016 г. М.: 2016. С. 32–36.

[100] *Губарев Е.А.* Поля электродинамики ориентируемой точки. Их роль в описании биоинформационного взаимодействия // Биоэнергоинформационные взаимодействия. Практики оздоровления: Труды конференции. Москва, 20 апреля 2017 г. М.: Московское НТОРЭС им. А.С. Попова, 2017. С. 21–25.

[101] *Губарев Е.А.* О некоторых свойствах полей электродинамики ориентируемой точки // Материалы 25-й Российской конференции по холодной трансмутации ядер химических элементов и шаровой молнии 1 – 8 октября 2018 г. Адлер, Сочи, Краснодарский край. М.: 2019. С. 134–146. ISBN 978-5-907155-45-9.

[102] *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Изд. «Советское радио», 1957.

[103] *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Современная электродинамика, часть 1. Микроскопическая теория: Учебное пособие. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

[104] *Яворский Б.М., Детлаф А.А.* Справочник по физике. 5-е изд., стер. М.: Наука, 1971.

[105] *Глазков В.Н.* Свойства электронного ферми-газа. М.: Московский физико-технический институт, 2016.

[106] *Смирных Л.Н.* Парадоксы униполярной генерации. О проблеме увлечения магнитного поля вращающимся магнитом // Поиск математических закономерностей мироздания: физические идеи, подходы, концепции: Избранные труды Четвертой сибирской конференции по математическим проблемам физики пространства-времени сложных систем (ФПВ – 2002). Новосибирск, 28 – 31 июля 2002 г. / Под ред. М.М. Лаврентьева. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2002. С. 60–72.

[107] *Meyl K.* Scalar Waves: Theory and Experiments // Journal of Scientific Exploration, Vol. 15, No. 2, 2001. P. 199–205.

[108] *Meyl K.* Scalar Waves: From an extended vortex and field theory to a technical, biological and historical use of longitudinal waves. Edition belonging to the seminar (part 1 – 3) «Electromagnetic Environmental compatibility». INDEL publishing house department, 2003. ISBN 3-9802 542-4-0.

[109] *Менде Ф.Ф.* Новая электродинамика. Революция в современной физике. Харьков, «НТМТ», 2012. ISBN 978-617-578-029-8.

[110] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. литературы, 1982.

[111] *Козырев Н.А.* Астрономические наблюдения посредством физических свойств времени // Проблемы исследования Вселенной. Вспыхивающие звезды: Труды симпозиума, приуроченного к открытию 2,6 м телескопа Бюраканской астрофизической обсерватории. Бюракан, 5 – 8 октября 1976 года. Ереван: 1977. С. 209–227.

[112] *Козырев Н.А.* Причинная или несимметричная механика в линейном приближении. Пулково: ГАО АН СССР, 1958.

[113] *Лаврентьев М.М., Еганова И.А., Луцет М.К., Фоминых С.Ф.* О дистанционном воздействии звезд на резистор // Доклады АН СССР, 1990, т. 314, № 2. С. 352–355.

[114] *Акимов А.Е., Ковальчук Г.У., Медведев В.Г., Олейник В.К., Пугач А.Ф.* Предварительные результаты астрономических наблюдений неба по методике Н.А.Козырева // Академия наук Украины, Главная астрономическая обсерватория, Препринт ГАО–92–5Р, Киев, 1992 г.

[115] *Дульнев Г.Н., предисловие.* Эксперименты с генераторами и детекторами торсионного поля. Сборник работ. М.: Фолиум, 2014. ISBN 978-5-93881-097-6.

[116] *Акимов А.Е.* Эвристическое обсуждение проблемы поиска новых дальнодействий. EGS-концепции // Сознание и физический мир. Сборник статей. Выпуск 1. Под ред. А.Е. Акимова. Межотраслевой научно-технический центр венчурных нетрадиционных технологий (МНТЦ ВЕНТ). М.: Издательство Агентства «Яхтсмен», 1995 г. ISBN 5-86071-027-5.

[117] *Акимов А.Е., Тарасенко В.Я., Самохин А.В., Курик М.В., Майборода В.П., Лихарев В.А., Перов Ю.Ф.* Способ коррекции структурных характеристик материалов и устройство для его осуществления. Описание изобретения к патенту SU–1748662 // Госкомитет по изобретениям и открытиям при ГКНТ СССР, Бюллетень № 26 от 15.07.1992.

[118] *Акимов А.Е., Тарасенко В.Я., Толмачев С.Ю.* Торсионная связь — новая физическая основа для систем передачи информации // Электросвязь, № 5, 2001. С. 24–30.

[119] *Соколова В.А.* Исследование реакции растений на воздействие торсионных излучений (препринт № 48). М.: Межотраслевой научно-технический центр венчурных нетрадиционных технологий (МНТЦ ВЕНТ), 1994.

[120] *Кернбах С.* Репликация эксперимента по удаленному воздействию на биологические организмы, проведенного в

1986 г. // Журнал Формирующихся Направлений Науки, вып. 19 – 20, 2018. С. 98–104.

[121] *Мельник И.А.* Экспериментальные исследования влияния вращающейся жидкости на интенсивность излучения радиоактивного изотопа // Известия ВУЗов, Физика, 2003, № 10. С. 56–59.

[122] *Мельник И.А.* Осознание пятой силы. М.: Фолиум, 2010. ISBN 978-593881-081-5.

[123] *Klimov A., Grigorenko A., Efimov A., Evstigneev N., Ryabkov O., Sidorenko M., Soloviev A., Tolkunov B.* High-energetic Nano-cluster Plasmoid and its Soft X-ray Radiation // J. Condensed Matter Nucl. Sci., 19 (2016). P. 145–154.

[124] *Ньютон И.* Замечания на книгу пророка Даниила и Апокалипсис св. Иоанна: Пер. с англ. Изд. стереотип. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2016.

[125] *Девятов А.П.* Неофициальная история предконечных времен. М.: ИП Жигульская А.А., 2017.

Губарев Евгений Алексеевич

ПРИНЦИПЫ РЕАЛЬНОЙ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ



Фонд перспективных технологий и новаций
«Время не ждет»
www.trinitas.ru • fptn@mail.ru