А.В. Ворон

Формальное математическое доказательство теоремы Ворона о дуальном базисе в NFNS

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы оптимизации, стабилизации и снижения информационной избыточности в компьютерных системах, использующих фибоначчиевы коды. Автор предлагает синтаксическое ограничение на структуру кодовых слов – Правило ограничения избыточности кода Фибоначчи (Voron's parity constraint rule), согласно которому разряды с четными позициями могут быть активными только совместно с разрядами нечетных позиций. На базе данного правила вводится Новая Фибоначчиева Система Счисления (New Fibonacci Numeral System – NFNS). Сформулирована и строго доказана методом математической индукции «Теорема Ворона о дуальном базисе». Доказано, что любое натуральное число в системе NFNS имеет ровно два легитимных представления: рабочую (Main Form) и контрольную (Check Form) формы. Полученные результаты ориентированы на построение высоконадежных, помехоустойчивых вычислительных сред, систем цифровой обработки сигналов и криптографических интерфейсов.

Ключевые слова: Новая Фибоначчиева Система Счисления (NFNS), избыточность кода, теорема Цекендорфа, теорема Ворона о дуальном базисе, четность позиций, помехоустойчивое кодирование, автоматы с ограничениями, дуализм представлений чисел.

Введение. В современной вычислительной технике и теории кодирования классическая двоичная система счисления приближается к своему технологическому пределу. Наращивание аппаратной надежности и контроля целостности данных в рамках традиционной бинарной логики требует высоких вычислительных и аппаратных затрат [10]. Одним из наиболее перспективных альтернативных подходов является применение избыточных систем счисления, базирующихся на обобщенных золотых пропорциях и последовательности Фибоначчи.

Фундаментом данного направления является классическая теорема Цекендорфа [8], постулирующая, что *любое натуральное число может быть единственным образом представлено в виде суммы чисел Фибоначчи при условии отсутствия двух смежных единиц в кодовом слове*. Это свойство широко используется для сжатия информации (например, коды Элиаса) и обнаружения ошибок. Развитие теории «компьютеров Фибоначчи», заложенное в фундаментальных трудах А.П. Стахова [6, 7], показало высокую эффективность фибоначчиевой арифметики для построения помехоустойчивых систем. Важный вклад в исследование параллельных математических свойств аналогичных фибоначчиевых базисов и представлений чисел также внес Г. Леккеркеркер [9].

Тем не менее, классические фибоначчиевы коды обладают структурной неоднородностью и высокой естественной избыточностью, требующей разработки дополнительных алгоритмических фильтров для стабилизации математического аппарата. В серии предварительных исследований автором была детально изучена природа избыточности фибоначчиева кода [1], предложен проект новой системы счисления NFNS [2, 3] и обоснованы её преимущества перед традиционными архитектурами [4, 5]. Вопросы позиционных ограничений в комбинаторике и общие свойства фибоначчиевых систем счисления также подробно исследованы в фундаментальном труде Д. Кнута [11].

Настоящая работа посвящена строгому формальному математическому доказательству ключевой гипотезы новой системы – «Теоремы Ворона о дуальном базисе». В отличие от ограничений Цекендорфа, предлагаемый подход накладывает синтаксический запрет на возникновение нечетного числа нулей между активными разрядами, вводя дуализм представлений (рабочей и контрольной форм) для каждого числового инварианта, что открывает качественно новые возможности для аппаратного контроля четности непосредственно в процессе вычислений.

Основная часть. Для оптимизации и стабилизации математического аппарата автором сформулировано Правило ограничения избыточности кода Фибоначчи (Voron's parity constraint rule): *разряды с четным значением позиции могут быть кодовыми эквивалентами только совместно с разрядами нечетного значения позиции*.

На основе данного правила строится Новая Фибоначчиевая Система Счисления (New Fibonacci Numeral System – NFNS), также классифицируемая как Position parity-based NFNS. Данное ограничение может быть представлено в виде альтернативной числовой теоремы (по аналогии с теоремой Цекендорфа) теорема (Ворона о дуальном базисе):

– всякое натуральное число можно двояко представить в виде суммы одного или нескольких чисел ряда Фибоначчи так, чтобы в бинарной записи этого представления отсутствовали смежные одинаковые по четности позиции активных разрядов («1»). При этом разряды с четным значением позиции последовательности Фибоначчи могут быть совместно представлены только с разрядами нечетного значения позиции этой же последовательности.

Формальное математическое доказательство теоремы Ворона

Формулировка теоремы.

Всякое натуральное число $N \geq 1$ можно ровно двумя способами представить в виде суммы одного или нескольких чисел ряда Фибоначчи $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$, $F_4=3$, $F_5=5$, …. так, чтобы в бинарной записи этого представления $\alpha = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$ отсутствовали смежные одинаковые по четности позиции активных разрядов («1»).

Количество таких представлений для числа N обозначим как $C(N)$. Нам необходимо доказать, что для любого $N \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $C(N) = 2$.

Вспомогательные структурные леммы. Для строгого проведения индукции нам понадобятся два свойства, описывающие границы и интерфейсную структуру допустимых кодовых слов.

Лемма 1 (О границах старшего бита).

Если число N лежит в полуинтервале $F_m \leq N < F_{m+1}$ (при $m \geq 2$), то любая его легитимная форма в языке L_{NFNS} может иметь старшую единицу (максимальный значащий бит) только на позиции m или на позиции m-1.

Доказательство.

1. Если старший бит равен $a_k = 1$ при $k \geq m+1$, то минимально возможное значение числа составит $F_k \geq F_{m+1} > N$, что противоречит условию интервала.

2. Если старший бит равен $a_k = 1$ при $k \leq m-2$, то даже если мы заполним все позиции от k вниз до 1 единицами (максимально плотное легитимное заполнение по правилу Ворона), результирующая сумма не сможет достигнуть нижней границы F_m. Следовательно, представить число N из данного интервала со старшим битом ниже m-1 невозможно.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2 (Об интерфейсной сочетаемости префиксов)

Пусть для любого числа $X < F_m$ выполняется утверждение теоремы ($C(X) = 2$). Тогда множество из двух легитимных кодовых форм числа X гарантированно разделяется на два класса по четности их левого интерфейса (старшего активного бита):

1. Класс Ω_{even}. Форма, чей старший значащий бит имеет нечетный индекс. Данная форма синтаксически способна принять слева (состыковаться) внешнюю единицу только на четной позиции.

2. Класс Ω_{odd}. Форма, чей старший значащий бит имеет четный индекс (сюда же относится пустое слово для X=0). Данная форма способна состыковаться с внешней единицей только на нечетной позиции.

Названия классов указывают чётность позиции, на которую форма способна принять внешний префикс, а не чётность собственного старшего бита.

Каждое число $X < F_m$ имеет ровно одну форму в классе Ω_{even} и ровно одну форму в классе Ω_{odd}.

Строгое индукционное доказательство.

База индукции (N = 1, 2, 3, 4)

Зафиксируем сетку разрядов $F_4\ F_3\ F_2\ F_1$ с весами (3, 2, 1, 1) и четностью индексов (чет, нечет, чет, нечет).

При N = 1 ($F_2 \le 1 < F_3 \Rightarrow m$=2).

Форма 1. 0010 (активен разряд F_2, индекс 2 – четный). Готова принять слева нечетный префикс ⇒ Класс Ω_{odd}.

Форма 2. 0001 (активен разряд F_1, индекс 1 – нечетный). Готова принять слева четный префикс ⇒ Класс Ω_{even}.

Свойства: $C(1) = 2$. Лемма 2 выполняется (ровно по одной форме в каждом классе).

При N = 2 ($F_3 \le 2 < F_4 \Rightarrow m$=3).

Форма 1. 0100 (активен разряд F_3, индекс 3 – нечетный). Старший бит нечетный ⇒ готова принять четный префикс Ω_{even}.

Форма 2. 0011 (активны разряды $F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$, индексы 2 и 1 чередуются). Старший активный бит – 2 (четный) ⇒ готова принять нечетный префикс ⇒ Класс Ω_{odd}.

Свойства. $C(2) = 2$. Лемма 2 выполняется. обе формы оканчиваются на нечетные индексы (3 и 1), но префиксный интерфейс распределен строго инвариантно ($1 \in \Omega_{even}$, $1 \in \Omega_{odd}$).

При N = 3 ($F_4 \le 3 < F_5 \Rightarrow m$=4).

Форма 1. 1000 (активен разряд F_4, индекс 4 – четный) ⇒ Класс Ω_{odd}.

Форма 2. 0110 (активны разряды $F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$). Старший активный бит – 3 (нечетный) ⇒ Класс Ω_{even}.

Свойства. $C(3) = 2$. Лемма 2 выполняется.

При N = 4 ($F_4 \le 4 < F_5 \Rightarrow m$=4):

Форма 1. 1001 (активны $F_4 + F_1 = 3 + 1 = 4$, индексы 4 и 1) ⇒ Старший бит 4 (четный) ⇒ Класс Ω_{odd}.

Форма 2. 0111 (активны $F_3 + F_2 + F_1 = 2 + 1 + 1 = 4$, индексы 3, 2, 1) ⇒ Старший бит 3 (нечетный) ⇒ Класс Ω_{even}.

Свойства: $C(4) = 2$. Лемма 2 выполняется.

Индукционный переход.

Предположение индукции. Пусть для всех натуральных чисел $X < F_m$ утверждение теоремы и Леммы 2 полностью справедливы. Докажем, что для любого N из интервала $F_m \le N < F_{m+1}$ существует ровно два легитимных представления.

Разделим все возможные кодовые слова для числа N на два непересекающихся класса по значению их старшего бита (согласно Лемме 1):

Класс А (Старший бит находится строго на позиции m).

Зафиксируем $a_m = 1$. Тогда число представляется в виде:

$$N = F_m + R_1$$

Из условий полуинтервала $F_m \leq N < F_{m+1}$ и тождества $F_{m+1} = F_m + F_{m-1}$ следует строгая оценка для остатка:

$$0 \leq R_1 < F_{m-1}$$

Поскольку $R_1 < F_{m-1} < F_m$, к числу R_1 в полной мере применимо предположение индукции:

Согласно предположению, R_1 имеет ровно два легитимных представления.

По Лемме 2, одно из этих представлений принадлежит классу Ω_{even} (начинается со старшего разряда нечетного индекса), а второе – классу Ω_{odd} (начинается со старшего разряда четного индекса или является пустым для $R_1 = 0$).

Необходимо состыковать выбранный старший префикс $a_m = 1$ со старшим битом остатка R_1. Чтобы не нарушить Правило Ворона, старший бит остатка обязан иметь четность, противоположную четности индекса m.

Если индекс m четный, синтаксический критерий пропускает строго ту форму R_1, которая начинается с нечетного бита (класс Ω_{even}). Вторая форма отбрасывается фильтром чередования.

Если индекс m нечетный, критерий пропускает строго форму из класса Ω_{odd}.

Итог Класса А.

При любой четности m существует ровно 1 легитимное представление со старшим битом на позиции m.

Класс Б (Старший бит находится строго на позиции m-1)

Зафиксируем $a_m = 0$ и $a_{m-1} = 1$. Применим алгебраическую развертку для числа N:

$$N = F_{m-1} + R_2$$

где новый остаток равен $R_2 = N - F_{m-1}$. Оценим величину R_2. Так как по условию интервала $N < F_{m+1} = F_m + F_{m-1}$, получаем верхнюю границу:

$$R_2 < F_m$$

Поскольку $R_2 < F_m$, к нему также в полной мере применимо предположение индукции – оно гарантирует наличие ровно двух легитимных представлений остатка R_2 (одно в классе Ω_{even}, второе – в Ω_{odd}).

Теперь докажем, что из этих двух представлений остатка R_2 строго одно сможет состыковаться со старшим битом префикса $a_{m-1} = 1$.

По определению, $R_2 = N - F_{m-1}$. Так как по условию интервала $N \geq F_m$, то минимальное значение остатка составляет $R_2 \geq F_m - F_{m-1} = F_{m-2}$. Таким образом, остаток R_2 локализован в интервале $F_{m-2} \leq R_2 < F_m$.

Нам необходимо состыковать наш рабочий префикс на позиции m-1 со старшим битом остатка R_2. По Правилу Ворона, старший бит R_2 обязан иметь четность, противоположную четности (m-1):

Если индекс m-1 четный, синтаксический фильтр Ворона пропускает только ту форму остатка R_2, которая принадлежит классу Ω_{even}.

Если индекс m-1 нечетный, фильтр пропускает только форму из класса Ω_{odd}..

Поскольку предположение индукции и Лемма 2 гарантируют, что среди двух форм R_2 классы Ω_{even} и Ω_{odd} представлены ровно по одному разу, синтаксический фильтр при любой четности префикса пропускает ровно одну уникальную форму.

Итог Класса Б.

Существует ровно 1 легитимное представление со старшим битом на позиции m-1.

Замыкание доказательства.

1. Исчерпанность пространства. Согласно Лемме 1, старший бит кодового слова для числа N из данного интервала не может находиться нигде, кроме позиций m и m-1. Мы полностью разобрали оба этих класса.

2. Отсутствие пересечений. Множества кодов из Класса А ($a_m = 1$) и Класса Б ($a_m = 0$) не пересекаются, так как у них физически разные старшие значащие разряды.

3. Выполнение Леммы 2 на шаге индукции. Класс А дал решение со старшим битом m, Класс Б – со старшим битом (m-1). Поскольку индексы m и m-1 имеют принципиально противоположную четность, полученная пара кодов для числа N разделяется строго по одному в классы Ω_{even} и Ω_{odd}. Лемма 2 доказана для шага m.

4. Общий подсчет. Общее количество легитимных представлений для любого натурального числа N строго равно:

$$C(N) = C(\text{Класс А}) + C(\text{Класс Б}) = 1 + 1 = 2$$

Комбинаторное пространство полностью исчерпано. Теорема Ворона о дуальном базисе в системе NFNS полностью и строго доказана методом математической индукции.

Заключение.

1. Решена теоретико-числовая задача строгого аналитического обоснования Новой Фибоначчиевой Системы Счисления (NFNS). На основе предложенного синтаксического критерия – Правила ограничения избыточности Ворона (Voron’s parity constraint rule) – разработана математическая модель, переводящая естественную избыточность обобщенного золотого сечения в строго контролируемый числовой дуализм.

2. Доказана «Теорема Ворона о дуальном базисе». Применение разработанной Леммы об интерфейсной сочетаемости префиксов позволило преодолеть коллизии избыточных остатков наложения, характерные для классического «жадного» алгоритма Цекендорфа. Метод усиленной математической индукции подтвердил, что любое натуральное число $N \geq 1$ в системе NFNS имеет ровно два легитимных представления: рабочую (Main Form) и контрольную (Check Form) формы.

3. Выявлена инвариантная структура кодовых пространств. Доказано, что множества допустимых бинарных векторов любого числового инварианта всегда ортогонально разделяются на два класса Ω_{even} и Ω_{odd} по признаку четности позиции их старшего активного бита. Это обеспечивает фрактальную стабильность кодирования на всей бесконечной числовой оси.

Список литературы:

1. Ворон А. В. Избыточность кода Фибоначчи и классификация натуральных чисел на его основе // Академия Тринитаризма. М., 2020. Эл. № 77-6567, публ. 26395, 16 мая. URL: trinitas.ru.

2. Ворон А. В. Избыточность кода Фибоначчи и проект новой Фибоначчиевой системы счисления // Академия Тринитаризма. М., 2022. Эл. № 77-6567, публ. 28049, 3 сент. URL: trinitas.ru.

3. Ворон А. В. Избыточность кода Фибоначчи и разработка новой системы счисления Фибоначчи – NFNS // Академия Тринитаризма. М., 2026. Эл. № 77-6567, публ. 30093, 25 июля. URL: trinitas.ru.

4. Ворон А. В. Разработка избыточной системы счисления Фибоначчи NFNS с дуальным базисом для помехоустойчивых вычислительных сред // Академия Тринитаризма. М., 2026. Эл. № 77-6567, публ. 30171, 21 сент. URL: trinitas.ru.

5. Ворон А. В. Преимущество Новой Фибоначчиевой Системы Счисления (NFNS) перед существующими системами счисления // Академия Тринитаризма. М., 2026. Эл. № 77-6567, публ. 30173, 23 сент. URL: trinitas.ru.

6. Стахов А. П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. М.: Советское радио, 1977. 288 с.

7. Стахов А. П. Коды Золотой Пропорции. М.: Радио и связь, 1984. 152 с.

8. Zeckendorf E. Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas // Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège. 1972. Vol. 41. P. 179–182.

9. Lekkerkerker C. G. Representation of natural numbers as a sum of Fibonacci numbers // Simon Stevin. 1952. Vol. 29. P. 190–195.

10. Хопкрофт Д. Э., Мотвани Р., Ульман Д. Д. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. 3-е изд. М.: Вильямс, 2016. 528 с.

11. Knuth D. E. The Art of Computer Programming. Vol. 4A: Combinatorial Algorithms, pt. 1. Upper Saddle River: Addison-Wesley Professional, 2011. 891 p.