М.А. Пирожков

ЯВЛЯЕТСЯ ли МНОЖЕСТВО РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ СЧЕТНЫМ

Вопрос, который возник при чтении статьи [1]
П.А. Флоренского "О символах бесконечности".

0. ПРЕДИСТОРИЯ.

Кантор обнаружил счётность множества рациональных чисел в 1873 году. Он изложил это в письме Р.Дедекинду, но формальную публикацию осуществил позже в 1874 году. В этой статье Кантор доказал (не без содействия Р.Дедекинда) счётность множества алгебраических чисел, из чего автоматически следовала и счётность рациональных чисел как их частного случая (об этом в п.5).

След табличного доказательства ведет напрямую к работам Г. Кантора 1873–1874 годов. В своих рассуждениях Кантор располагал все положительные дроби в виде бесконечной таблицы (строки — числители, столбцы — знаменатели). Затем он предлагал обходить её не по строкам или столбцам (что невозможно из-за бесконечности), а по диагоналям, "зигзагом". Это и есть "первый диагональный аргумент", подлежащий обсуждению.

1. СТРУКТУРА МНОЖЕСТВА РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ (МРЧ).

Как неоднократно пояснялось моделью чисел рациональных и иррациональных, т.е. метапеременных (МП), может служить фрактальная структура графа в виде леса безграничных 10 - арных деревьев. Каждое такое дерево определяется в вершине целым числом вида 0.; ± 1.; ± 2.; ± 3.; ….

Таким образом эта модель представляет самое начало того грандиозного ансамбля, которое является полем рациональных чисел. Конструкции деревьев разрастается вверх по уровням и в стороны БЕЗГРАНИЧНО. Здесь представлены: 1) все рациональные числа в виде конечных десятичных дробей, например, 0.0017587389; 1.596532; 7899007.47516573; 2) в перспективе все рациональные числа в виде безгранично растущих десятичных периодических дробей, например, 0.21272127…2127…; 3) истоки всех метапеременных, начинающихся от самых корней деревьев, например, $\sqrt{2}/2 = 0.70710\ldots$; $\pi/4 = 0.78539\ldots$ Расстояние между вершинами начинается с 10^{-1}, а на n – ом уровне становятся равным 10^{-n}. Таким образом, весь массив чисел полностью заполнен, нет ни одного существующего ЧИСЛА или МП, которые не нашли бы здесь место, как это видно на Рис.

6 7 8 9 0 **1** 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 **6** 7 8 9 0
1 1 1 1 2 **2** 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 **3** 3 3 3 4
4 4 4 4 4 **4** 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 **4** 4 4 4 4
1 1 1 1 1 **1** 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 **1** 1 1 1 1
4 4 4 4 4 **4** 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 **4** 4 4 4 4
1. 1. 1. 1. 1. **1**. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. **1.** 1. 1. 1. 1

Здесь во фрактальном дереве с вершиной 1 изображены только первые пять разрядов двух МП:

1.414213562373095048801688724209698078569671875376948073176679737990 7…

и

1.414368756340475801850871223046268476171416569409386272666366811839 1… .

На Рис. они расположены почти рядом, но если использовать все 67 разрядов записи, то никакого масштаба не хватит, чтобы изобразить эти два числа. Это демонстрирует насколько плотно переплетены РЧ и МП, причем рациональные числа, аппроксимируя МП, лежат в безграничном количестве в каждой окрестности любой из этих МП.

Как пишет Р.Курант “никакая наша интуиция не поможет нам увидеть иррациональные точки или отличить их от рациональных” [2], добавим и даже аналитические методы. Поэтому авторы многочисленных учебников анализа, радеющие о каких-то “щелях” и “дырках”, в которые якобы надо вставлять иррациональные числа, могут не беспокоиться.

Многие математики отмечают, что рациональные и иррациональные числа распределены в высшей степени регулярным и чередующимся образом, а их множества имеют одинаковый размер. Еще одно объяснение, связывающее упомянутые множества, подтверждает это. Рациональные и иррациональные числа образуют линейный континуум. Под иррациональным числом понимается сечение Дедекинда, то есть граница между рациональными числами. Однако количество этих границ не может быть больше, чем количество их концов, которые несмотря на то, что представляют собой открытые интервалы, однозначно определяются рациональными числами. Из этого следует, что множество иррациональных чисел вообще должно быть подмножеством РЧ.

Все дело идет к тому, что мощность МРЧ не меньше мощности множества МП. И вот этот континуум заменяют искусственно созданной для пересчета таблицей в то время, как эти два множества могут быть признаны несчетными, неперечислимыми и даже невычислимыми.

В этом и заключается первый аргумент против счетности РЧ.

2. ИЗОМОРФИЗМ, а НЕ БИЕКЦИЯ

Теперь относительно доказательства счетности через двумерную таблицу. Великолепный фокус, потребовавший почти гениального изобретательства. Но интересно проследить, как же все-таки произошло массовое умопомрачение доказательством счетности РЧ, так и всеми другими результатами Кантора. Поняв, что с сохранением порядка возрастания нельзя расположить всюду плотное множество РЧ в силу того, что ни для одного из них нельзя указать следующего по величине, и был придуман этот трюк “просто перетасовать и разместить в новом порядке”, только и всего, использовав дальше примитивную биекцию.

Но вот о том, что получился совсем другая математическая структура, для которой надо применять изоморфизм, решили не озадачиваться. Действительно, таблица, как искусственно и специально созданный для перечисления пар чисел объект, допускает нумерацию по диагоналям:

$$\begin{array}{lllll} 1/1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \ldots\ldots \\ 2/1 & 2/2 & 2/3 & 2/4 & 2/5 \ldots\ldots \\ 3/1 & 3/2 & 3/3 & 3/4 & 3/5 \ldots\ldots \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{array} \qquad (1)$$

Но причем здесь континуум рациональных чисел со сложно построенной структурой, отмеченной в п.1. Если речь идёт о структурах с порядком, то порядок является частью структуры. Там перестановка может изменить объект и нарушить изоморфизм или эквивалентность множеств.

В результате, доказана счетность искусственно созданной таблицы, а всюду плотное множество РЧ оказалось сопоставлено множеству дискретному, что можно трактовать как полный абсурд.

В этом и заключается второй аргумент против счетности РЧ.

3. ЧИСЛА, а НЕ СИМВОЛЫ

Возражение предыдущего пункта можно было бы и не приводить, поскольку еще большее изумление с фокусом доказательства счетности РЧ вызывает тот факт, что **рациональные числа в этом доказательстве подменены символами m/n** рациональных чисел в виде (1), а это совершенно несовместимые понятия. **m/n** — это

обозначение (имя, запись, представитель) рационального числа, а не само рациональное число в строгом смысле. Отличие не количественное (насколько), а категориальное: это разные уровни — синтаксис и семантика, знак и обозначаемый объект. Символ и число не одно и то же, символы разные, число одно. Отождествить число с записью m/n невозможно, в строгой математике их естественно различают.

Таким образом, счетность РЧ доказана только для символов, что совершенно не доказывает требуемое утверждение относительно РЧ. Неплохая подмена в пользу ложного доказательства. Символы — это особая статья сокрытия истины в математике: как легко спрятать в символе √2, как и в других подобных, невообразимо безграничную последовательность знаков, а потом ловко с ним манипулировать.

Поскольку в доказательстве счетности РЧ речь идет именно о числах, рассмотрим эти числа. Во фрактальных деревьях находятся всевозможные комбинации цифр в числах, в том числе содержащие безграничное количество 9, как например, 0.1379999… , которое рекомендуется воспринимать как 0.138, но на самом деле имеет совершенно иной смысл. В математике на числа с бесконечными 9 из-за неразработанной теории вещественных чисел наложено табу. И это в строгой науке, волевым приемом договаривающихся сторон. Таких чисел в деревьях предостаточно, к которым добавились еще безграничные периодические дроби вида 0.(9738791213954327865043977541). Кроме того, что нумеровать их становится невозможно (см.п.4) в отличии от натуральных чисел, вся сложность структуры РЧ приводит к нарушению биекция множества натуральных чисел со множеством именно РЧ.

И в этом заключается третий аргумент против счетности РЧ.

4. НОВАЯ ТАБЛИЦА

Но нашелся еще один довод в пользу опровержения счетности РЧ. Рассмотрим таблицу, в которой по горизонталям расположены фундаментальные последовательности МП, а сами МП выписаны по вертикали:

x_1 1.4 1.41 1.414 1.4142 1.41421 ……
x_2 3.1 3.14 3.141 3.1415 3.14159 ……
x_3 2.7 2.71 2.718 2.7182 2.71828 ……
……
x_μ …….
…….

Получилась таблица РЧ счетная по горизонталям и несчетная по вертикалям в силу несчетности иррациональных чисел. Поэтому и все это множество РЧ является несчетным в противовес утверждению Кантора. А все дело в том, что двумерная таблица (1), состоящая из символов натуральных чисел, не учитывает тесную взаимосвязь РЧ и МП, обсуждавшаяся в п.1. Вот к чему привела игра с натуральными числами.

И в этом заключается четвертый основной аргумент против счетности РЧ.

5. НУМЕРАЦИЯ БЕЗГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Есть еще и пятый аспект, не менее важный, не допускающий счетности РЧ.

О какой нумерации может идти речь, если это динамическая система, находящая в постоянном росте своих ветвей и их элементов. Речь идет о ветвях фрактальных деревьев, описанных в п.1. Нельзя занумеровать то, что безгранично возрастает, это касается как РЧ, так и метапеременных. Занумеровать их можно только после остановки безграничного процесса порождения чисел, что останавливает естественный рост десятичных разрядов дробей.

И в этом заключается пятый аргумент против счетности РЧ.

Может быть, многие вспомнит о доказательстве счетности РЧ через алгебраические числа. Но и там возможно найти противоречия в доказательстве, поскольку в нем содержится все та же игра с символами, не доходящая до реальных чисел.

Вопрос об ошибочности доказательства Кантора поднимается не впервые. Есть несколько публикаций как наших, так и иностранных, опровергающих счетность РЧ. В одной из них, принадлежащей С.Д.Алатину и опубликованной более 10 лет назад, сообщается: **"***Равномощность множеств натуральных и рациональных чисел не согласуется с наивной интуицией, и данная работа имеет целью исследовать, достаточно ли безукоризненны допущения и ход рассуждений Кантора для того, чтобы интуицией пренебречь*"[3].

Удивление счетности РЧ выразил даже классик теории множеств Ф.Хаусдорф в своем трактате **"**Теория множеств": **"***То, что множество рациональных чисел, которое (употребляя геометрический язык) расположено на прямой повсюду плотно, имеет мощность не большую, чем множество целых чисел, воспринимается, как и многие другие факты теории множеств, как нечто ошеломляющее и даже парадоксальное*".

Изложенные в пп.1-5 возражения приводят к выводу о несчетности множества рациональных чисел. Со временем, вполне возможны дальнейшие открытия последующих опровержений.

И в заключение необычное сравнение РЧ и МП, приведенное в [4] Э. Френкелем: "*Думайте о рациональных числах как о чашке чая. Мы можем выпить ее саму по себе, а можем улучшить вкус чая, добавив сахар, молоко, мед, различные специи – эти роли будут исполнять числа, подобные* $\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$ *и т.п.*".

Вот какая роль, образно рассуждая, предназначена РЧ, а нам доказывают что они счетны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Флоренский П.А., Сочинения, т.1, М., 1994.

2. Курант Р., Роббинс Г., Что такое математика, М., 1967.

3. Алатин С.Д. , К вопросу о счетности и степени множеств, Проблемы современной науки и образования / 2014. № 10 (28).

4. Френкель Э., Любовь и математика, Питер, 2015.