ВОПРОСЫ ОБЩИХ ПОНЯТИЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

© 2026

Продолжение статьи 10.04.22г
«Диалектика логических парадоксов»

Оглавление

1. Введение 1
2. Первичные принципы и понятия теории множеств 2
3. Парадокс Рассела 7
4. Множество всех множеств 14
5. Теорема Г.Кантора 18
6. Биекция 21
7. Заключение 25
8. Литература 31

1.Введение

В данной работе предлагается несколько иная версия некоторых начальных положений и понятий теории множеств, в представлении которых существует порядочная неразбериха. Большинство использованных идей изложены в статье «Диалектика логических парадоксов» от 10.04.22г, здесь они выделяются целенаправленно по вопросам теории множеств с некоторой детализацией. Практически в любом учебнике многие начальные положения и понятия основ теории множеств объявлены «наивными» и ошибочными, по крайней мере частично. Некоторые авторы вообще не упоминают первичные понятия, считая их «само – собой разумеющимися» для свободного применения, другие в кратком, путанном изложении с комментариями и ссылкой к разъяснениям должными быть в аксиомах и теоремах самой теории множеств. Это в лучшем случае, но чаще ситуация с исходными понятиями в конечном итоге становится ненамного яснее.

> В современной математической литературе также представлены аксиоматические теории множеств, в которых понятие множества строго определяется посредством набора аксиом, но при этом используются уже другие неопределяемые понятия. [1]

Традиционные оправдания, что достаточно точная формулировка первичных понятий невозможна в силу их максимальной общности и это не имеет особой важности довольно спорны. Классический пример с пресловутым стулом предлагаемым вместо необходимых понятий, который Д.Гильберт считал, что можно употребить в любом утверждении,[2] оригинален, но сомнителен и объяснение применения стула в теории впоследствии весьма проблематично.

> Следуя А. Д. Александрову, необходимо отметить, что ≪аксиомы сами по себе нуждаются в содержательном обосновании, они лишь суммируют другой материал и дают начало логическому построению теории≫ [ЛЗ, стр.51][3]

Возможно в самой теории не обязательно излагать подробные изыскания по этому поводу, но некоторый минимум объяснений и обоснований явно необходим. Иначе объекты рассмотрения, операции с ними и законы появляются неизвестно откуда и непонятно что означают, в итоге представляя теорию во многих случаях игрой без правил. Понятия и термины, в том числе общие и первичные, должны иметь свой смысл и не интуитивный, а хотя бы минимально определенный и зафиксированный. В дальнейшем развитии теории, при

---

[1] Основы дискретной математики ч.1 Кривцова И.Е, Лебедев И.С…Ун-т ИТМО С-П 16г.стр.6
[2] Альманах «Мысли об Истине» Выпуск № 24. 2014г стр,98
[3] Инфинитезимальный анализ. Гордон Е.И, Кусраев А.Г, Кутателадзе С.С. Новосибирск, 2001.стр.17

необходимости, основные понятия можно развивать, корректировать и уточнять средствами теории сколько угодно более широко и конкретно.

2. Основные общие принципы и понятия теории множеств

1. Ссылки и цитаты из источников выбраны из условия краткости, но сути дела в сравнении с более фундаментальными работами это не меняет, т.к. стандартные объяснения существующих мнений и заблуждений действительно, как отмечается, достаточно известны.

> Основные предпосылки канторовской (или, как условно говорят, ≪наивной≫) теории множеств сводятся к следующему:
>
> *1◦ множество может состоять из любых различимых объектов;*
>
> *2◦ множество однозначно определяется набором составляющих его объектов;*
>
> *3◦ любое свойство определяет множество объектов, которые этим свойством обладают*[4]

2. Дальнейшая практика показала, что данные начальные положения нельзя понимать буквально и абсолютно, как любое понятие или положение они имеют свои области применения, условия, контекст. В зависимости от этого возможны различные интерпретации, дополнения и ограничения. Основные требования к понятию множества и другие основные положения по крайней мере не должны противоречить друг другу.

3. Развитие первого положения в расширенном смысле порождает и зачастую трактуется как другое не столь однозначное: элементами множеств могут быть как объекты, так и их действия, отношения, свойства, функции и т.д. Фактически в формулах символы обозначают и элементы множеств и действия и отношения между ними, в том числе служебного или технического характера. ***(n-1◦a)*** Чем они отличаются друг от друга, от элемента или множества зачастую не разъясняется, возможно это понимается только в контексте. Например, «объединение» может трактоваться и как действие, так и множество, но это разные «сорта» понятий, их простое сочетание невозможно, если между ними нет ничего общего или нет логической связи. Развита практика трактовать отношение в качестве множества, $\varphi(c)$ – может быть и свойством и элементом и множеством - допускается выражение $c \in \varphi(c)$

4. Понятие «свойство» представляется элементом присущим некоторому объекту, но как зависимый элемент с обязательной принадлежностью множеству или его отдельной части в виде пересечении, символ пересечения при этом может не употребляется. Например, в аксиоме выделения: $\forall a \exists b \forall c(c \in b \leftrightarrow (c \in a \wedge \varphi(c)))$ где $\varphi(c)$ – свойство элемента c. Исходя из этого понимания можно выделить самостоятельное существование объекта – реальное, который должен обладать минимум двумя свойствами и абстрактного, существующего только в условиях принадлежности реальному предмету. (в формуле $\wedge$ – объединяющий символ «и», соответственно в ТМ – пересечение)

5. Множество определяется своими элементами, это своего рода тавтология понятия «множество элементов», но и само оно в целом является новым объектом, при объединении возникают новые собственные свойства вплоть до противоположных, которых могло не быть в элементах, особенно это касается универсальных множеств. Они детерминируются элементами, согласно объективных законов, но не обязательно равны им.

6. В аспекте данного обстоятельства множества делятся на референтные и нереферентные, или самообратимые и несамообратимые. В первом случае сам объект обладает свойством своих элементов и входит в область их определения, во втором не обладает и само множество не входит в область определения.

7. Положения ***2◦*** и ***3◦*** надо понимать, как действующие одновременно и равносильно: множество определяется и своими элементами и общим для этих элементов свойством – характеристическим, их наличие обязательно.

---

[4] Математический анализ. Ч.1 Зорич В.А. М изд.ЦНМО 2012.стр.26

8. Традиционное представление о происхождении объектов: каждое свойство и соответственно новый объект порождаются определенным видом движения некой субстанции, а движение определяется индивидуальной программой. Т.е. в основе создания объектов и следовательно множеств лежат программы их генерирования, но это, видимо, более глубокий уровень исследования.

9. К основным положениям теории множеств необходимо добавить принцип уникальности или единственности элементов множества. Принцип гарантирует дискретность множества, каждый элемент должен чем – то отличаться от другого. Принцип имеет и логический характер: если элемент считается неуникальным, но абсолютно идентичен некому другому - по всем параметрам равным ему, то он полностью совпадает с ним, т.е. является фактически одним и тем же объектом. (***n-4***◦)

Соответственно из уникальных элементов создаются уникальные множества.

10. Указанные утверждения известны, в качестве нового положения в предложенный вариант изложения предлагается вывод работы «Диалектика логических парадоксов» [Л-4]

> Не существует отдельное абсолютно отрицательное множество, минимум один элемент в нем должен быть положительным.[5] **(*n-5*◦)**

11. Формирование множества только из отрицательных элементов само по себе логически изначально противоречиво. Согласно первому положению элементы имеют основное свойство объединяться, в математике – аддитивность, отрицательные элементы таковым свойством не обладают. Типичный, часто приводимый пример – парадокс Рассела: задавая свойство элементов «не входить во множество», естественно исключаем возможность «входить во множество» и соответственно создание множества, или по закону отрицания отрицания в полученных суждениях искусственно получаем порочный логический круг, противоречие. Это уже изначально ограничивает область определения первого положения теории множеств. Но в реальной ситуации правильный выбор необходимых элементов, в том числе положительных позволяет формировать множество не допуская логического противоречия.

12. Кроме того считаются обязательными к исполнению традиционные принципы, положения и аксиомы:

- Классические логические понятия и законы, в том числе закон тождества как частный случай закона сохранения материи, абстрактных понятий, величин.
- Принцип двойственности (диалектики) и его следствия.
- Принцип относительности – понятия имеют смысл не только собственных характеристик, но зависят и от условий существования и других объектов.
- Аксиома существования бесконечности (аксиома индукции), бесконечной делимости материи и величин.
- И другие общезначимые законы теории множеств и связанных дисциплин.

13. Исходя из стандартного определения основных аспектов понятия множества или общего представление о нем:

> *Множество* есть любое собрание определенных и различных между собой объектов (конкретных или абстрактных), мыслимое как единое целое.[6]

«Множество» как объект имеет смысл «много», т.е. элементов должно быть минимум два и более, но в целях унификации и практической необходимости ко множествам отнесены в качестве условных пустое множество и единичное, имеющие индивидуальные свойства. Оправданием этого являются их свойства, которые могут рассматриваться как абстрактные элементы.

---

[5] Диалектика логических парадоксов. Коротких В.Ф.17.04.22г.

[6] Дискретная математика. Элементы теории множеств. Л.Шаповалова, В.Серегина. Уч.пособие. Зерноград 14г

14. Если множество есть объединение разных элементов, то можно представить его используя символы ТМ формулой: ***(а ∪ в ∪ с…)*** ***(ф-1 º)*** Обычная формула: ***А = {а, в, с, …}*** – проста, но порождает некоторые вопросы - нет разъяснений какую роль играют фигурные скобки и запятые. Например, в дальнейшем скобки используются как некий обобщающий элемент неофициального, неясного свойства, вроде оболочки множества элементов: ***{ ∅ } ≠ ∅ ,*** или просто как символ множества вообще как такового или пустого множества, даже применяется вариант написания: ***∅ = { }***. Используемые здесь и в дальнейшем круглые скобки имеют чисто техническую функцию объединения и разделения форм, в принципе их можно опускать: ***(а) = а,*** если нет необходимости и разногласий в различии символов и формул или достаточно приоритета понятий и отношений или операций при написании формул.

Запятые в грамматике играют роль разделительных знаков однотипных элементов, но официальных функций в теории множеств также не имеют, где нет специальных соглашений (например, в аксиоме пары).

15. Наиболее общезначимый способ объединения множества - с помощью общего элемента для всех частных объектов множества (характеристического или коллективизирующего свойства), т.е. пересечения их данным элементом:

(P∩а ∪P∩в ∪P∩с. . .)=P∩(а ∪в ∪ с . . .), (или: ***(Ра ∪Рв ∪Рс. . .)=Р(а ∪в ∪ с . . .)*** ***(ф-2 º)***

как в арифметике или имея в виду, что формально свойство рассматривается в виде обязательного связующей части элементов или подмножеств, где символ ***Р*** - элемент общий для всех членов множества, собственно это упрощенная расшифровка общепринятой формы: ***А = Р(х),*** где ***х*** – переменная, обозначающая элементы . Объединяющим элементом может быть и множество и свойство.

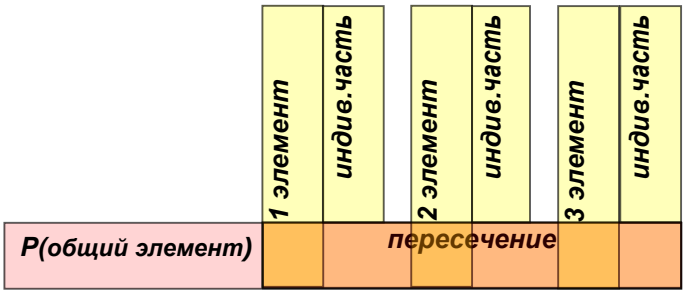


Рис 1.

16. В минимальном варианте множества из двух элементов: ***Р(а ∪в)*** элементы ***а*** и ***в*** называются противоположными в данном множества: ***Р(а ∪ $\bar{а}$)***, для других множеств это просто разные элементы.

17. Из общей формулы множества понятен вывод: *«элементы тоже являются множествами»* Т.е. внутри себя элементы также устроены по схеме множества, состоящие кроме общего характеристического свойства элемента из минимум двух индивидуальных частей.

18. В конечном итоге при дальнейшем делении естественным путем вводится понятие пустого множества как наименьшего исходного «кирпичика» всех множеств вообще, но пустое множество строится таким же универсальным образом и поэтому входит во все множества, даже противоположные.[7]

19. В некоторых источниках употребляется понятие «праэлементов», возможно это и есть первичное пустое множество для любых видов множеств. Т.е. множество всех абстрактных элементов (ложных суждений) Их объединение пересекается единственным положительным элементом (суждение о самом пустом множестве)

[7] Диалектика логических парадоксов. Коротких В.Ф.17.04.22г.стр.27

20. Множество всех элементов является пространством теории множеств – единичное множество, обычно представляется прямоугольником, полем точек или ячеек пустых множеств, в котором изображаются и конструируются рассматриваемые множества. (Иногда единичное множество называют универсальным, но между ними есть разница)

21. Несовместимые объекты не могут объединяться в множество, поскольку у них нет общих элементов, нарушение положения ***n-3***◦

22. Приведенные простейшие формулы очевидны и по сравнению с привычными ничего особенного не представляют, служат только для первоначальной фиксации основных признаков понятия «множество» Этого достаточно на данном этапе, и для дальнейшего изложения необходимо показать, что множество в общем виде есть связанная комбинация различных действий или конструкций: объединения и пересечения элементов.

23. Объединение аналогично сложению, индивидуальность элементов во множестве сохраняется, поскольку находятся в разных местах пространства. Пересечение есть своего рода умножение, свойства элементов в нем смешиваются и взаимодействуют, т.к. они находятся в одном и том же месте пространства.

24. Заложенная в понятии «множество» некоторая противоречивость естественна: с одной стороны это множественность элементов, с другой – единство объекта, ситуацию правильнее назвать парадоксальностью, что обеспечивает в последствии его универсальность и самодостаточность. Она предусматривает в том числе конструктивным образом и пространственную структуру - разные элементы находятся в разных местах, которые одновременно с помощью общего элемента пересекаются, что гарантирует связность элементов множества в одно целое образование.

25. По замыслу данной работы не ставится вопрос рассмотрения теории множеств и ее алгебры, но изложенные моменты входят в исходную базу типовых операций со множествами. Например, в конструкции объединения элементы множеств существуют каждый отдельно, но все равно имеется в виду пересечение всех составляющих частей общим элементом, формально, минимум пустым множеством, как первичными элементами пространства, на основании чего и возможно объединение.

Пересечение множеств обуславливает общую формулу множества $\boldsymbol{A = P(x_1, x_2,\ldots)}$, в которой обязательно наличие индивидуальных частей, без объединения которых множества есть одно и тоже, что равнозначно абсолютному равенству множеств: $\boldsymbol{(P \cap P = P)}$ или это можно назвать единственностью множества.

26. Получается объединение и пересечение принадлежат предложенной схеме одной и той же конструкции, только рассматриваются по отдельности в разных аспектах и имеют разные свойства. В тексте противоположное действие может и не указываться, но всегда имеется в виду в контексте.

27. Далее обычное введение других начальных понятий и основных идей, например:

При корректном использовании схемы аксиом выделения всегда предполагается заданным исходное множество X тех объектов, из которых происходит выделение новых объектов, удовлетворяющих свойству ϕ. Таким образом, аксиома выделения позволяет формировать подмножества уже заданного множества по какому-либо признаку. Запись $\{x : \phi(x)\}$, где $\phi(x)$ — некоторое свойство, допустима. Однако, она должна сопровождаться обоснованием того, почему данная совокупность является множеством (существует).

Стандартный пример некорректного использования этого обозначения известен как парадокс Рассела. Рассмотрим «множество» всех таких множеств, которые не являются элементами себя самих: $R = \{x : x \notin x\}$.

Тогда если $R \in R$, то (по определению R) должно быть $R \notin R$. Если же $R \notin R$, то $R \in R$. Противоречие

Стандартное объяснение данного парадокса состоит в том, что совокупность R не является множеством. В некотором смысле оно слишком велико, чтобы быть множеством. Аксиома выделения не позволяет сформировать множество R, не имея объемлющего его множества.

Совокупности множеств, определяемые некоторым свойством ϕ, но не обязательно являющиеся множествами, называются классами. По существу, говорить о классе или о свойстве, определяющем данный класс, одно и то же. Например, совокупность V всех вообще множеств является классом, но не множеством. В противном случае множество R можно было бы получить с помощью аксиомы выделения: $R = \{x \in V : x \notin x\}$. (Из аксиомы регулярности, кстати, следует, что $R = V$, но для нас это не столь важно.)[8]

28. Здесь возникает множество вопросов остающихся без ответа. Общий принцип формирования множеств из элементов уже имеющихся более обширных множеств понятен, но не объясняется до конца, из – за чего очевидна его неполнота. В конечном итоге он все равно требует некого единственного максимально большого множества, в котором находятся все остальные, но считается, что его существование противоречит основным положениям.

29. Что такое понятие «немножество»? Оно не соответствует духу первого принципа теории множеств ***n1***◦, любые объекты объявляются множествам. Конечно можно причислить к нему сначала пустое множество и единичное принятые и называемые множествами условно. Но, хотя по сути, они действительно не множества и первоначально представляются некими монолитами, их тоже можно считать сложенными из определенных виртуальных элементов. Все множества можно разделить на истинные или существующие, задаваемые истинным свойством и ложные или пустое, если свойство задается ложным предложением. «Немножества» в эту схему не вписываются, единственно предположить их как объекты маркируемыми бессмысленным предложением, нарушающие логические законы, не рассматриваемые традиционной логикой и соответственно теорией множеств.

30. В приведенном примере выражения: $\boldsymbol{R \notin R}$ и $\boldsymbol{R \in R}$ осмысленны, но сами по себе как характеристические свойства порождают парадоксальные множества в виде противоречий, которые современная теория не может объяснить. В своей работе [Л-7] автор Никита Попов вполне обоснованно предлагает ввести термин «недоопределенное множество». Весьма распространенной ошибкой является использование неполной информации при определении понятий, суждений и действий с ними и соответственно множеств. Главным образом не учитываются некоторые существенные свойства множеств и элементов, которые являются следствиями взаимодействия с другими внешними объектами, что приводит к появлению псевдо - парадоксов в виде логических противоречий.

31. Например, в некоторых аксиоматических системах выражение в форме: $\boldsymbol{R \notin R}$ фигурирует как аксиома: 9. ***x*** не принадлежит ***x*** (аксиома основания, или регулярности)[9]

Аксиома имеет определенное разъяснение, контекст и область применения, но не может быть общезначимым предложением, в подобном виде в парадоксе Рассела сразу приводит к противоречию, какой смысл тогда в этой аксиоме? Антитезис аксиомы: «***x*** принадлежит ***x***» тоже истинен в определенных условиях и своей области определения.

32. Во-вторых, представляются бессмысленными выражения: «*слишком большого*» множества или «*не слишком*», поскольку не существует ни меры количества бесконечного множества, ни критериев оценки величины, ссылки на размеры множеств по интуиции только еще больше усугубляют путаницу.

33. Многие авторы понимают недостаточность такого подхода и необходимость некого исходного множества как второго общего понятия по отношению ко множеству, например, вводится термин «класс». «Класс» звучит солиднее, но в чем разница с «множеством» сплошь и рядом не разъясняется, в одних источниках «класс» определяется или является синонимом понятия множества:

---

[8] Логика и Алгоритмы Факультет математики ВШЭ, 1-й курс, осень 2013 г. Л.Д. Беклемишев. Стр.5

[9] Carlos M. Madrid Casado Наука. Величайшие теории: выпуск 34: Вначале была аксиома. Гильберт. Основания математики. (стр.31 **litvek.com**›br/386607?p=30)

Слова ,,класс‘‘, ,,семейство‘‘, ,,совокупность‘‘, ,,набор‘‘ в наивной теории множеств употребляют как синонимы термина ,,множество‘‘.[10]

В других источниках понятие «класс» повторяется: согласно начальному положению ***3***◦ «класс» вполне совпадает с понятием «множество»:

Совокупности множеств, определяемые некоторым свойством ϕ, но не обязательно являющиеся множествами, называются классами. По существу, говорить о классе или о свойстве, определяющем данный класс, одно и то же.[11]

Существует даже мнение «наоборот»

Введем поэтому термин «класс» для произвольных совокупностей объектов и будем отличать те классы, которые являются членами других классов, называя их множествами.[12]

Что бы значили употребляемые выражения: - «*неприемлемых*», «*не обязательно являющиеся множествами*» и прочие? И что тут подразумевают? Объяснений нет, изложенные идеи нисколько не проясняют ситуацию. «Произвольная совокупность» вообще открывает полный простор для «произвола» фантазии.

34. Более общепринято мнение, что по своему смыслу термин «класс» более узкое понятие чем «множество» Он формируется и фигурирует в качестве специфического регулярного множества, например – числа, понимаемого как «класс одинаковых (эквивалентных) элементов», что отличается от общего определения множества. Такой класс может быть только абстрактным множеством. Совсем не обязательно, что «класс» - совокупность множеств и «больше множества» или «мощнее». Для этой цели также используются в теории другие понятия, например, «семейство множеств», имеющее более адекватный смысл. Класс чаще определяется как множество входящее в некоторую упорядоченную систему других множеств или содержащее другие связанные множества, т.е. имеется в виду более или менее строгая классификация.

3. Парадокс Рассела

1. Главный аргумент против «наивной» теории множеств, понимаемой в качестве первоначально логично развиваемой теории о всех реально и абстрактно существующих множествах, явился «неразрешимый» парадокс Рассела. (Логическая схема других парадоксов самореференции аналогична или это различные «художественные» варианты) При рассмотрении и анализе реальной логической ситуации и условий ее существования правильно сформулированный парадокс представляет собой истинное суждение.

2. Математическая логика А.Н.Колмогоров, А.Г.Дергалин МГУ 2009г.стр.134

13. Рассмотрим *множества Рассела:* $R = \{x : x \notin x\}$

Это – конкретное множество, описанное замкнутым термом языка M^+

По аксиоме свертывания для любого u имеем

$$u \in R \equiv u \notin u$$

В частности, подставляя вместо u множество R, получим

$$R \in R \equiv R \notin R$$

С другой стороны, очевидно, имеем $\neg(R \in R \equiv R \notin R)$

Мы пришли к противоречию.

Это короткое рассуждение и является *парадоксом Рассела* в нашем языке

3. Здесь как и во множестве других источников парадокс излагается в общем подобным образом, но фактически не объясняется.

При анализе очевидно, что в процессе рассуждений и выводах просто не соблюдаются некоторые правила теории и законы логики. В первую очередь - закон тождества, если задано множество $R = \{x : x \notin x\}$, то R не может быть u, - общее правило подстановки: «*В процессе*

[10] Инфинитезимальный анализ. Гордон Е.И, Кусраев А.Г, Кутателадзе С.С. Новосибирск 2006г

[11] Введение в математическую логику. Блекмишев Л.Д. МГУ 2020г

[12] Универсальная алгебра. П.Кон.1968г. стр.13

рассуждения тождество не должно нарушаться» Либо не верно исходное тождество, либо ошибочны рассуждения. Как в математике: в частях равенства можно менять или подставлять символы переменных величин, но необходимо выполнять главное правило – при любых изменениях формул равенство должно сохраняться.

4. Во-вторых, если подстановка по формальным причинам все равно произведена, из определения Расселовского множества $R = \{x : x \notin x\}$ в циклической форме заключения парадокса традиционно излагаемой как противоречие: «*..если* $R \in R$, *то (по определению* R*) должно быть* $R \notin R$. *Если же* $R \notin R$, *то* $R \in R$*...*»[13] очевидно смешение формальных рассуждений с содержательными, или логики и металогики, но без должного учета данного факта и исключение некоторых существенных свойств задействованных объектов и отношений. В результате имеем упрощение и искажение реальной схемы логической ситуации до полной потери смысла. Даже не привлекая дополнительных формул и понятий к имеющимся, сразу можно заметить, что в разных приведенных формулировках понятия множества R по своим свойствам противоположно различны (на этот момент обратил внимание сам автор парадокса Б.Рассел, но использовал его в теории типов для других целей, не объяснения и использования реальной логической ситуации для дальнейшего анализа, а в попытке избавления от нее)

5. Поэтому имеем право ввести в рассуждения эти различия. Если условно обозначить понятие R в формуле $(R \notin R)$ как R_1, или в принятой форме: $R_1 = \{x \in V_1 : x \notin x\}$ как первого порядка, поскольку это либо реальные объекты, либо конкретные определения этих объектов, то R_2 в формуле $(R \in R)$ или: $R_2 = \{x \in V_2 : x \in x\}$ есть понятия второго порядка (2-й тип понятий по теории типов Б. Рассела или относящийся к металогике - А.Тарский), так как это понятия уже о понятиях 1-го типа, принципиально более абстрактные, второго уровня рассуждений. (*Где*: $R = V$ – *примечание в цитате*)

6. Имея в виду, что значения R_1 отрицательные = $\neg R$, или условно: $(\bar{R} = R \notin R)$ поскольку в рассматриваемом аспекте дополнительный признак конкретных понятий - «несамообратимость» отрицателен, т.к. их область определения – реальные объекты, в которую они по своей абстрактной сущности входить не могут. Также как и реальные объекты сами в себя входить не могут согласно принципа уникальности, или только абстрактно, по аналогии с условной формулой «A есть A» Понятия второго типа $R_2 = (R \in R)$ могут быть положительными как в данном случае - положительный признак самообратимости или самореференции. Из этого факта очевидно, почему выражение в изложении парадокса: «*…для любого* u» не корректно, подстановка переменной $\bar{R}$ вместо R меняет смысл формулы на противоположный. Для иллюстрации предлагается аналогичный шутливый арифметический софизм[14], в котором вопреки правилам математики складываются различные логические сорта чисел - денег, отрицательные – долг и положительные – наличные без учета знаков.

7. Отсюда, если правильно считать, что в традиционной формуле вывода парадокса как противоречия: $R \notin R \Leftrightarrow R \in R$ значение несамообратимого множества R_1 отрицательное относительно R, то в формуле $R \notin R$ необходимо использовать символ $\bar{R}$. Тогда имеем тождественно верное суждение: $(\bar{R} \notin \bar{R}) \Leftrightarrow \neg(R \notin R) \Leftrightarrow +(R \in R)$ (по закону «отрицание отрицания» и правилу поглощения: **(-)*(-) = (+) ⇔ (+)*(+) = (+)**)

8. Причем следуя реальному положению дел отрицательное множество R_1 целиком, но уже в качестве положительного действительно получает право и фактически входит во

---

[13] Введение в математическую логику. Блекмишев Л.Д. МГУ 2020г

[14] **Парадокс исчезновения 10 рублей**

Допустим, я у подруги взял 100 рублей, пошёл в магазин и потерял их. Встретил друга и занял у него еще 50 рублей. Купил бутылку пива за 20 рублей, у меня осталось 30 рублей, которые я отдал подруге и остался должен ей 70 руб. И другу я остался должен 50 руб., итого 120 руб. Плюс у меня бутылка пива за 20 рублей. Итого 140 рублей! Где остальные 10 рублей? *Вот пример логической ошибки, заложенной в рассуждения*.
Парадоксы формальной логики и логические ошибки. А.В.Галанин 12г

множество положительных элементов R_2 образуя вместе универсальное множество, его характеризует общая логическая формула:

$$(\bar{R}_1 \vee R_1) \,\&\, (\bar{R}_2 \vee R_2)^{15} \qquad \text{ф-3°}$$

9. Вся разница с используемыми понятиями парадокса п.2 в том, что это не простые понятия, а более сложные и обозначаются дополнительными индексами *тип* **1** и *тип* **2**, являются не абсолютно противоположными, а просто разными признаками с относительной противоположностью, характеризуют одно и тоже множество с разных аспектов.

Вывод формулы показан в [Л-4 стр.28], но и без обоснования очевидно, что в логике высказываний это тождественно истинная формула: ***И & И.*** По схеме ***4*** (для вертикальной плоскости) предложение описывает множество из минимального количества элементов состоящих из двух противоположных частей: либо левого и правого, либо нижнего и верхнего (*тип* ***1*** *- тип* ***2)***

(Исходная аналогичная формула известна в логике: $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{A} \vee B) \,\&\, (A \vee \bar{B})$ [16], она также может быть применимой при условном обозначении ***A*** и ***B*** как двух пар противоположных частей ориентированных множеств в плоскости, но не столь наглядна)

9. Далее, рассуждая содержательно, т.е. применяя логику к полученным формулам – металогику и условно выделяя свойства частей множества в качестве отдельных элементов, имеем равносильные предложения:

$$(\bar{R}_1 \vee R_1) \,\&\, (\bar{R}_2 \vee R_2) \Leftrightarrow (\bar{R} \vee R)_1 \,\&\, (\bar{R} \vee R)_2 \Leftrightarrow (\bar{R} \vee R) \vee (1 \,\&\, 2), \qquad \text{ф-3°а}$$

где: ***1*** и ***2*** - разные элементы универсального множества: *тип* ***1*** – конкретные, *тип* ***2*** - абстрактные, а $(\bar{R} \vee R)$ **–** общая часть элементов, причем множество $\bar{R} \vee R$ связано общими с ним частями ***1*** и ***2,*** по традиции и принятым обозначениям знак ***v*** между скобками можно опустить, в итоге получаем логическую формулу парадокса: $(\bar{R} \vee R)$ *(тип* ***1*** *&* ***тип 2)****,* ***ф-3°б,***

10. Формула ***ф-3°*** в символах теории множеств: $(\bar{A}_1 \cup A_1) \cap (\bar{A}_2 \cup A_2)$, ***ф-4°***

(Из определения пересечения: $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in B$

и объединения: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$[17])

$$(\bar{A}_1 \cup A_1) \cap (\bar{A}_2 \cup A_2) = (\bar{A} \cup A)_1 \cap (\bar{A} \cup A)_2 = (\bar{A} \cup A) \cap (1 \cap 2)$$

или: $\Leftrightarrow (\bar{A} \cup A) \cap$ *(тип* ***1*** $\cap$ *тип* ***2)****,* если обозначить: *(тип* ***1*** $\cap$ *тип* ***2)*** $= P$**,** то имеем:

$U = P\ (\bar{A} \cup A)$ Здесь: *тип* ***1*** $= (\bar{1} \cup 1)$, *тип* ***2*** $= (\bar{2} \cup 2)$, ***ф-4°а***

что в целом удовлетворяет начальным требованиям к формированию суждения о простейшем множестве – *ф-2°* - обобщенная формула минимального (из 2-х элементов или подмножеств) универсального множества.

11. Вопрос заключается в том, что может или нет существовать множество состоящее из противоположных элементов? Данное объединение на первый взгляд кажется недопустимым логически по закону непротиворечия, что явилось главным камнем преткновения в многочисленной литературе о парадоксах. Но вполне естественно в теории множеств представление универсального множества в виде: $U = A \cup \bar{A}$, где $\bar{A}$ определяется как дополнение A, только необходимо объяснить, почему и каким образом объединяются элементы и входят в одно множество имея противоположные свойства без противоречий. Вывод данной работы – вполне возможно.

12. Во-первых, как указано выше, противоположности не абсолютны, являются разными частями одного и того же объекта и противоположность имеет смысл только в пределах данного объекта, который является связующим предметом в качестве третьего элемента, общего для

---

[15] Диалектика логических парадоксов. Коротких В.Ф.17.04.22г. стр.26

[16] Формальная логика. И.Я.Чупахин, И.Н.Бродский. 1977г. Стр.223 vk.com›wall-132594609_25

[17] Начала теории множеств. Н.К.Верещагин, А.Шень М. Изд. МЦНМО 2012г. Стр.6

данных противоположностей. С другой стороны является ошибкой мнение об отсутствии структуры множества (см. цитата п.1, 5 раздела), общий предмет, в котором находится объект не только связывает противоположности, но и разделяет не допуская взаимоуничтожения.

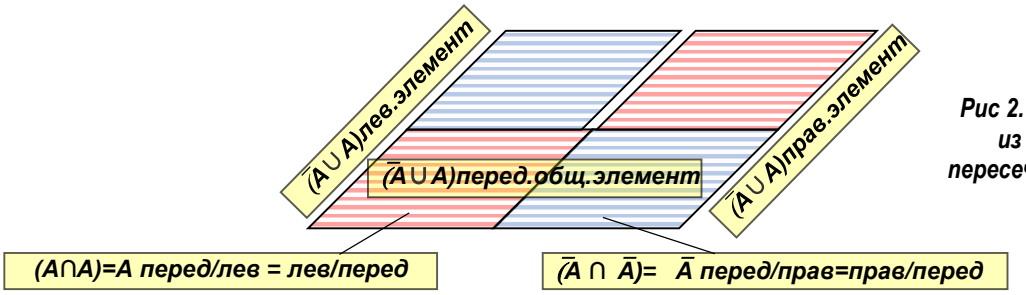


Рис 2. Модель множества из 2-х элементов и пересечения общ. передним

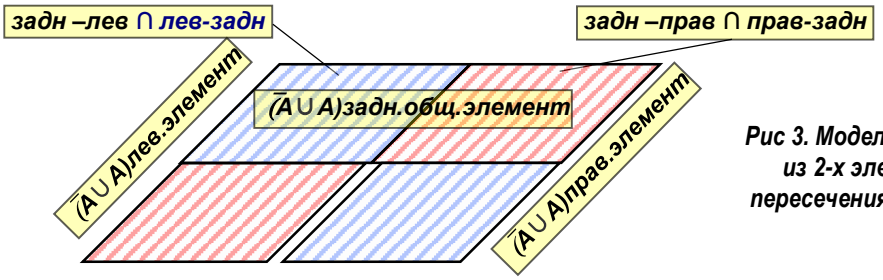


Рис 3. Модель множества из 2-х элементов и пересечения общ. задним

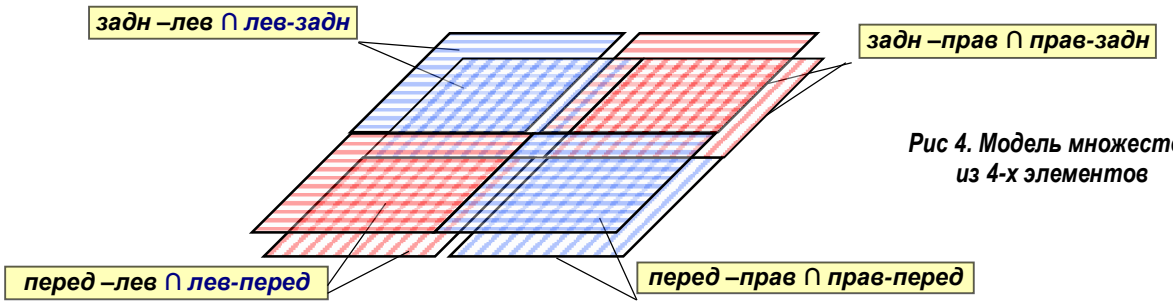


Рис 4. Модель множества из 4-х элементов

13. Как самый простой пример, зрительно можно представить модель в виде единого статического (геометрического) предмета - множества. Учитывая тот факт, что любой объект не плавает в аморфной пустоте (или в пространстве единичного множества), а находится в конкретном ориентированном пространстве реальном или абстрактном. Из – за того, что его поместили в это пространство предмет сам по себе нисколько не изменился и остался единым, целостным объектом, но у него появились дополнительные свойства и соответственно могут рассматриваться как два абстрактных элемента: минимум две половины – левая и правая или передняя – задняя, (разница только в направлениях) связанные одним общем предметом (описываемой именем или характеристическим свойством самого множества) Очевидно, что половины не только разъединены условной нейтральной линией, но и с помощью этого общего для них предмета взаимно пересекаются друг с другом (обычное определение пересечения: в него входит как элемент одного множества так и другого).

14. Но главный смысл формулы заключается в пространственной структуре: разные элементы располагаются в разных местах общего элемента согласно ориентации, поэтому не смешиваются и не уничтожаются взаимно. Можно последовательно отрезать части с любой стороны до последнего минимального элемента объекта, но стороны «левое» и «правое» в этом уменьшенном объекте останутся, т.к. противоположности сами по себе, отдельно друг от друга существуют только абстрактно, а совместно образуют один и тот же объект. С другой стороны

они фактически пересекаются с одноименными частями левого и правого элементов образуя неразрывную цепь из трех элементов: двух крайних и одного общего.

15. Известно начальное положение ТМ ***n-2◦:*** «множество определяется своими элементами» Но в равной степени справедливо и обратное утверждение: «элементы определяются своим множеством» Если элементы или подмножества входят во множество, то его характеристическое свойство является общим признаком любого из его элементов (наряду с индивидуальными признаками).

15. А рассматривая в пространстве комплекты из двух или более объектов получаем другие аспекты измерения: «вперед – назад», «влево – вправо» или «вверх – вниз» и можно присвоить общим пересекающим элементам, т.е. самим объектам соответствующие обобщающие названия: «передний» - «задний» (тоже самое для элементов «левый – правый» или «верхний – нижний»)

16. Данные геометрические фигуры рис.2, 3, 4 удовлетворяют принципу индивидуальности элементов множества (***n-4◦)***: левый отличается от правого, передний от заднего. С другой стороны гарантировано пересечение левого и правого элементов общими передними и задними (поскольку части элементов: левый-передний = передний-левый, правый-передний = передний правый, перестановка названий равенства не нарушает, коммутативность пересечения) Тем самым графически подтверждается правомерность общей формулы множества как объединения разных элементов и пересечения общим.

17. При этом очевидно, почему недопустимо путать предмет, разделенный конструктивно на две разные половины с предметами, которые целиком и одновременно характеризуются противоположными суждениями, т.е. находящимися в контрадикторных отношениях. Получается смешение в одинаковых условиях и в одном месте без разделения в пространстве двух предметов полностью, имеющими собственные противоположные характеристические свойства (левый болт - правый болт) Данные характеристики исключают друг друга: либо один - либо другой. Эти объекты могут объединяться только в своих комплектах с собственными дополнениями до общего, универсального множества. (Левый болт с левой гайкой, правый болт с правой)

18. Тоже самое - примеры попыток создания объектов с абсолютно противоположными свойствами как в парадоксе «Брадобрея», который одновременно должен брить и не должен или в парадоксе «Всемогущего», где требуется создать предмет целиком одновременно подъемный и не подъемный, что и есть пересечение противоположностей в одно и тоже время в одном и том же месте с результатом взаимоуничтожения. В формальной логике это логическое противоречие, в теории множеств их пересечение - пустое множество.

19. Описанная схема является фактором реальности данной геометрической модели как одновременное существование в предмете объединения его разных частей и пересечения их общим свойством, поскольку ориентация в пространстве распространяется на все элементы, а разделение каждого элемента объекта на части исключает их смешение.

20. Может возникнуть вопрос о том, что пересечение только формальное, если нет смешения даже в минимальных элементах. Но пересечение частей общим элементом вполне реально с другими одноименными частями противоположных элементов – п.16. Т.е. минимальный элемент необходимо тоже рассматривать только как комплекс из трех частей.

21. При объединении двух противоположных абстрактных объектов получаем единую плоскость с двумя измерениями. В рисунке ***4*** элементы объекта есть парные множества, разница только в том, что в пространстве их части ориентированы в противоположные стороны. Конфигурация их объединения симметрична «крест на крест», правая часть скрепляется с левой сплошными (пересечением) передней частью и задней, в свою очередь передняя часть соединяется с задней пересечением сплошными левой и правой частями. Симметричность подтверждается коммутативностью формулы ***ф-3°***

22. Далее, между собой набор общих горизонтальных плоскостей пересекается, и таким образом они соединяются между собой, образующимися по третьему направлению - вертикали аналогичными по конструкции плоскостями ***тип 1 - тип 2.*** Штриховка на горизонтальных плоскостях есть их общий признак или элемент пересечения - проекции вертикальных плоскостей. Естественно на рисунке ***5*** показано не все (есть и третья продольная плоскость ***тип 1 - тип 2,*** изображенная пунктиром) и части разъединены, в действительности все слито в один объект, который является моделью абстрактного геометрического объекта или структурой стереометрической типовой схемы участка абстрактного ориентированного пространства. (*Рис.**6)***

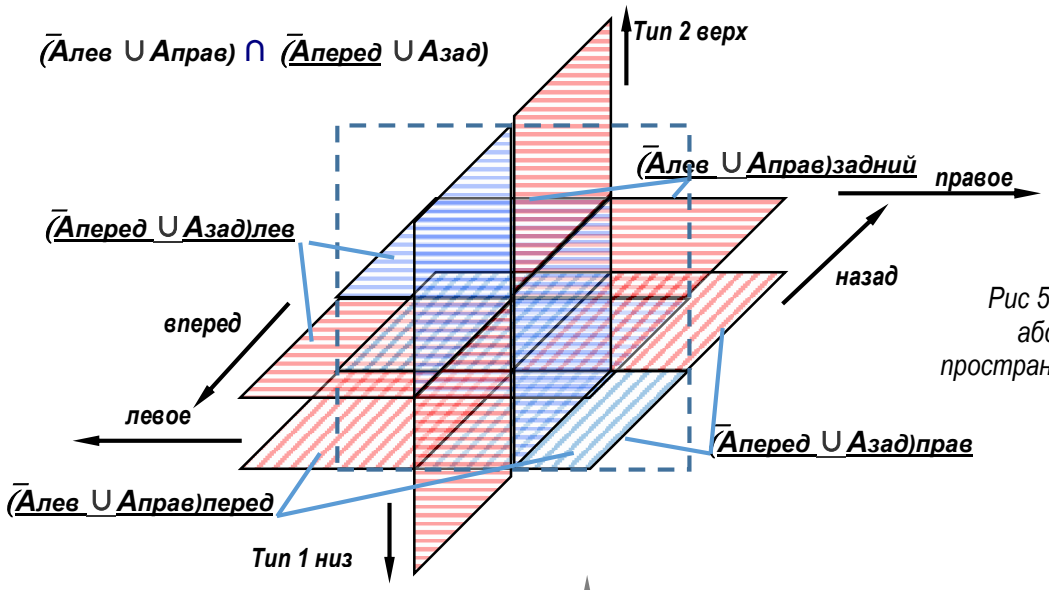


Рис 5. Геом. модель абстрактного пространства или объекта

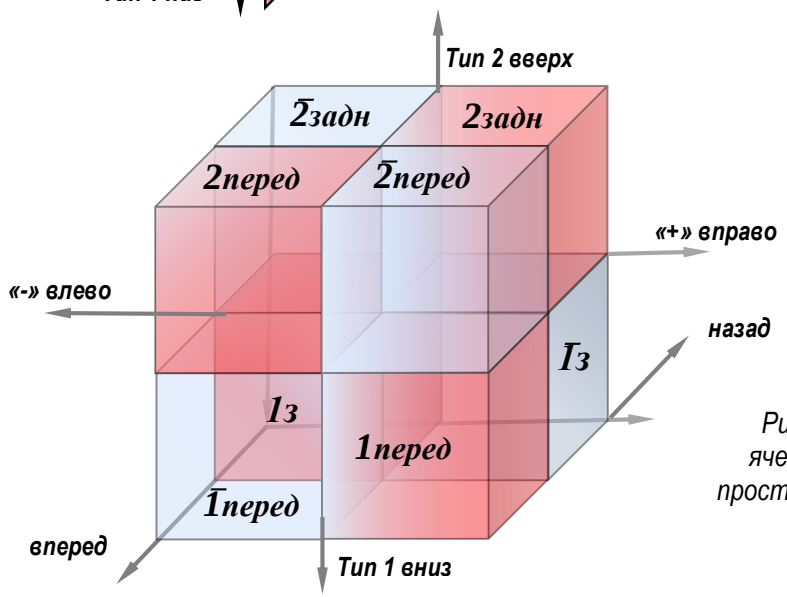


Рис 6. Геом. модель ячейки абстрактного пространства или объекта

23. Тоже самое вполне очевидно и в логической схеме парадокса Рассела. Общие рассуждения о парадоксе Рассела и универсальном множестве изложены в работе [Л-4]. Но ситуацию можно рассматривать не только с общей, объективной стороны множества всех множеств или здесь множества всех обычных множеств, но и более детально, с точки зрения элементов или подмножеств этого множества. По смыслу содержания свойство $R \notin R$ отрицательно, само множество и его элементы несамообратимы и не могут входить в свое множество, и реально не существует множество, составленное исключительно из отрицательных элементов, положение ***n-5◦.*** Но если субъективно все равно создается множество

элементов с признаком $x \notin x$, (с формальной стороны: свойство есть свойство, даже понятий *тип* **1)** то, естественно, как элемент (или подмножество) оно получает по закону отрицания отрицания право и действительно входит в данное множество, т.е. для них уже автоматически, с объективной стороны или в другом аспекте - второго уровня абстракции (или содержательно) одновременно для него становится верным свойство $x \in x$ (признак понятия *тип* **2**)

24. Можно повторить аргумент п.8, из – за того, что предметы переместили и объединили во множество, сами по себе они не потеряли собственные свойства, т.е. с субъективной стороны объект сам по себе остался несамообратимым, но с объективной стороны, одновременно стал самообратимым. Данную ситуацию обычно воспринимают и отвергают как логическое противоречие, но в итоге просто образовалось универсальное множество из элементов, обладающих отрицательными и положительными свойствами. Так как речь идет об одном и том же объекте, очевидна непосредственная взаимосвязь или взаимопроникновение объектов тип **1** и тип **2** настолько, что это вполне можно рассматривать просто как факт, в терминах теории множеств это и есть пересечение, формула *ф-4ºа:* $(\bar{A} \cup A) \cap$ *(тип* **1** $\cap$ *тип* **2)** И множество всех множеств обобщая их содержит (или включает) в себя таким образом все элементы одновременно положительные и отрицательные (см. п.12), т.е. это реальные отношения, наблюдаемые и в природе и в правильной логической модели абстрактного объекта, расположенного в ориентированном пространстве.

25. Существует множество реальных примеров (Л-4 и другие) В простой ситуации аналогичного парадокса «Деревенского брадобрея» - в обычной жизни никто не сомневается, что он умеет всех успешно брить, в том числе и себя, невзирая на навязанные противоречивые инструкции. Т.е. сам брадобрей вполне обладает как одним характеристическим свойством так и противоположным, а если кому – то понадобилось разделить его работу, то должен обеспечить соответствующие различные условия (их дополнительными факторами могут быть, например, время или пространство, где и когда он работает) И как правильно их определить, сформулировать и скомпоновать вместе – проблема логиков. Т.е. исключить недопустимые ситуации в реальности, не надо изобретать ложные правила, ошибки находятся в рассуждениях людей и заключениях, искусственном создании логических противоречий, которые не соответствуют действительности (в этом основную роль играет упущение существенных факторов ситуации, недоопределение характеристических свойств и соответственно рассматриваемых множеств).

26. Известно, что в реальности изложенная ситуация соответствует диалектическому единству противоположностей в природе, конкретное следствие известного естественного и логического закона единства и борьбы противоположностей, в котором теорию множеств интересует в первую очередь конструкция единства, конкретно здесь в статическом смысле, (динамические ситуации и конструкции в большей степени должны описываться физикой, но основные изложенные требования должны соблюдаться и в них. Например, электрический ток возможен только при обеспечении связи между потенциалами – объединения в одну систему с одной стороны и сопротивления между ними с другой) Безусловно и формальная логика также соблюдена, никакого логического противоречия нет, это два разных суждения об одном и том же предмете, т.к. при более подробном рассмотрении очевидно, что части объекта кроме общего имеют различные элементы и приобретенные свойства, которые определяются с противоположных аспектов разными факторами.

27. В этом есть существенная разница с типовой прямолинейной логикой и стандартными схемами диаграмм Венна, в них множества изображаются в точечном множестве (пространстве) - прямоугольнике без ориентации сторон, который представляет собой не универсальное множество, а единичное (чаще обозначается ***I)*** Но потом при введении объектов в данное множество и выполнении логических действий с ними неожиданно возникают

противоположности, которые задают ориентацию в данном пространстве. Ориентация: «правый - левый» или « + » - « - » возникает сразу даже при первой логической операции разделения общего множества на подмножество и его дополнение. Это тоже пример взаимодействия: свойства объектов ориентирует пространство, а пространство как внешняя среда по принципу обратной связи влияет на характеристику самих объектов и их элементов. Фактически единичное множество тоже можно рассматривать как универсальное, известно, что единица есть бесконечно большое множество бесконечно малых элементов. Это значит, что даже чисто логически необходимо считать реальным существование предмета в пространстве, состоящего из правой стороны и левой, передней части и задней, верхней и нижней, рассматриваемых с точки зрения наблюдателя или данного объекта. По отдельности противоположные части не существуют сами по себе, или только абстрактно. (Для различных геометрических «фокусов» типа ленты Мебиуса оговариваются специальные условия)

28. Варианты формул и их комбинации предложенного универсального множества безусловно могут и должны быть более сложными, в формуле ϕ-3^{o} элементов может быть любое количество (в том числе плоскости «левое – правое», «перед – зад», «верх – низ» могут быть поделены на любое число элементов), но картина будет чересчур запутана. Сами формулы могут быть изложенными и в других терминах различных типовых объектов и ситуаций, кроме того, как выше отмечено, функции связанных пар элементов взаимно относительны, т.е., если «передний – задний» элементы есть общие объединяющие для частей «левое – правое», то верно и обратное: «левые и правые» связывают воедино «передние – задние».

Как, например, в другом наглядном бытовом предмете: поперечные нити ткани фиксируют продольные, продольные нити закрепляют поперечные, получается прочная неразъемная конструкция. Таким же образом может строиться и трехмерная конструкция.

29. В графических схемах и формулах в основном взяты понятия и термины из парадокса Рассела или геометрии, но в других логических парадоксах самореференции роль направлений в абстрактных пространствах играют другие собственные аспекты: «субъективное» (отрицательное) – «объективное» (положительное), «ложное (отрицательное) – истинное» (положительное), и третье измерение: «реальное – конкретное – общее - абстрактное», в схеме ***4*** - типы понятий ***1*** и ***2.*** (или Рис.3 Л-4) Но принципиальная графическая схема конструкции парадокса от изменения названий связанных пар терминов не меняется.

30. В этом смысле общая схема формализма парадокса Рассела аналогична, например, парадоксу Лжеца. Характеристическое свойство «Все ложные суждения» задано субъективно, как попытка создания отдельного полностью отрицательного множества, что противоречит выводу ***n-5***◦: даже логически не может существовать отдельное отрицательное множество, т.е. данное суждение о нем без учета контекста просто ложно. Но формально свойство, даже отрицательное, как $R \notin R$ (*тип 1*) может образовать множество, только внезапно, в реальности, само множество в целом оказывается положительным с объективной стороны (***тип 2***) т.к. оно входит во множество с признаком $R \notin R$, на этом основании множество одновременно будет иметь право и входит в положительное множество со свойством $R \in R$.

31. В итоге, рассуждая в рамках всего комплекса логической ситуации с объективной стороны элементы со свойством $R \notin R$ по объективному закону отрицания отрицания имеют одновременно положительное свойство $R \in R$ и поэтому оба суждения должны рассматриваться только совместно. Единое общее суждение об универсальном множестве как соответствующее действительности истинно и ситуация естественна.

4. Множество всех множеств.

1. Главную сумятицу в основание теории множеств внесли обнаруженные логические парадоксы, но и без них очевидно, что многие первичные понятия, как в рассматриваемом

примере «множества всех множеств» и само понятие «множество» на первый взгляд сами по себе в известном плане противоречивы, точнее с объективной точки зрения это называется парадоксальностью и ничего чрезвычайного в этом нет. Если по смыслу понятия универсального множества: $U = \forall a: a \in U,$ где a – любой элемент, то в его входят различные элементы (от термина «все»), даже противоположные: реальные и абстрактные, истинные и ложные, положительные и отрицательные, и т.д. Однако распространено мнение:

> Высказывание о существовании бесконечного множества отличается от (ложного в данной аксиоматике) высказывания о существовании «множества всех множеств» ($\exists A \forall b(b \in A)$)[18]

2. Одни теории утверждают его существование, другие нет, третьи признают частично, в виде локальных универсальных множеств или области определения рассматриваемых множеств (которые иногда трактуют как схожие с ними первичные единичные множества - I).

> «…если роль нуля в алгебре множеств играет пустое множество. То универсальное множество, играет роль единицы в алгебре множеств»[19]

Но явно или не явно понятие используется довольно широко и обойтись без него в теории не могут.

3. В принципе в теории множеств нет запрета на существование множеств состоящих из различных элементов, наоборот, есть требование индивидуальности элементов, среди которых максимально различные называются противоположными.

4. Как понятия или свойства одной и той же сущности, их отношения являются контрарными, но противоположность относительна. В отличии от отношений суждений логического квадрата, в котором имеются в виду только простые суждения, характеристические свойства противоположных элементов описываются более сложными предложениями с дополнениями об условиях. Поэтому оба суждения могут быть истинными.

5. Представляется, что вопрос существования понятия «множества всех множеств» не проблема математиков и логиков, а скорее практики общества, естествознания или философии. Основной вопрос философии: если признается существование материального Мира, то «множество всех множеств» существует как факт, как отправная посылка рассуждений, для логики не подлежащая обсуждению, это абстрактный эквивалент реального Мира в теории - просто его оптимальное название зафиксированное в терминах теории множеств. (Если это аксиома - необходимо ее сформулировать) Сама мысль о том, что Мир слишком велик и он не существует или существует только идеально известна, но очевидно абсурдна, Не проще ли допустить негодность подобной теории.

6. Для понимания происхождения ориентации в пространстве, виртуальных множеств, субъективных или отрицательных областей имеется в виду универсальное множество, в качестве некоторой абстракции нашего Мира, которая представляется вселенной и ее отражением в сознании человека, в философии – сознание и материя.

7. Кроме парадоксов, привлекается как аргумент против универсального множества - общепризнанный принцип образования множеств путем выбора элементов из некоторого другого изначально заданного – «исходного», который понимается как «само собой разумеющийся: «*Аксиома выделения не позволяет сформировать множество R, не имея объемлющего его множества» (см.п.2б)* Но логически все равно люди понимают неполноту данной идеи и приходится предполагать наличие первичного, максимально большого, единственного множества всех множеств, которое существует само по себе и самодостаточно, из которого выбираются все прочие множества. Избегая логического тупика многие авторы предлагают различные «немножества», «классы» или что – то подобное, дополнительное к понятию «множества». Если в теории множеств статус этих объектов не рассматриваются, то их надо отнести к области непознанного. Аксиома выделения не догма, мнение о ее

---

[18] https://ru.wikipedia.org/wiki/Система_Цермело_—_Френкеля (05.06.26г)
[19] https://studfile.net/preview/952624/page:2/

абсолютности основано только на страхе перед логическими парадоксами, понимаемых как противоречие. Конструкция универсального множества по предложенной парадоксальной схеме естественна, и если будет признано, что она вполне адекватна действительности, то проблема отпадает сама собой.

8. Сама аксиома выделения множества из элементов другого может быть аргументом верности данной схемы, например, типовое изложение аналогичное многим другим:

Схема выделения. Любому множеству a и свойству φ отвечает множество b, элементами которого являются те и только те элементы a, которые обладают свойством φ. Схема выделения содержит счётное количество аксиом, так как каждая формула $\varphi(x)$ логики первого порядка порождает аксиому. $\forall a \exists b \forall c(c \in b \leftrightarrow (c \in a \wedge \varphi(c)))$

Согласно аксиомы выделили и образовали из a новое множество b, но то что осталось после выделения множества в a никуда не исчезло и множеством оно не перестало быть. По аксиоме просто разделили множество a на b и дополнение b - принцип дуализма. Нет никакой причины называть a или оставшееся дополнение b «немножеством», «классом» или неизвестно чем. Естественно, справедливо мнение, что подобное выделение подмножества в реальности бывает недопустимым – нельзя оторвать правую часть предмета от левой, но в абстракции все позволено, что логично обосновано и соответственно определено и учтено. Т.е. вопрос стоит о создании правильной принципиальной схемы универсального множества, как единственного множества всех множеств, так и частных, в том числе первичных, минимальных.

9. Как объект исследования множество всех множеств может быть утверждено чисто логически: если существуют наблюдаемые объекты, то по правилу обобщения существует множество всех и оно единственно, кроме него больше ничего нет. Различные системы, которые отрицают факт существования данного множества просто рассматривают только выделенную область объекта исследования, игнорируя прочие реально существующие оставшиеся объекты. Возводится в качестве абсолютного типовое рассуждение: «должно быть множество из которого конструируется все и в том числе первичное…», прикладывая это требование к тому же множеству всех множеств получаем порочный логический круг.

10. Либо вынужденно предполагается упомянутая мистика: есть иерархия множеств, из элементов больших по объему множеств формируются рассматриваемые множества и подмножества, но откуда берется первичное множество неизвестно, кем «задается» исходное множество? какое оно? какие его свойства и правила оперирования с ним? Все покрыто мраком таинственности и умолчания. Получается заранее неполный объект исследования, не имеющий или начала, или конца, и соответственно строится заранее неполноценная теория. Остается только уповать на некую непознаваемую сверх – сущность и сверх - разум, который знает ответы на все вопросы и по своему произволу выдаст человечеству методы их решения. Т.е. «в уме» предлагается та же давно известная схема, только вместо человека – Бог, множество людей верят в это, в этом есть своя логика, но окончательно никто теологический вариант не доказал.

11. В математике аналог понятия множества всех множеств – абсолютная бесконечность, свой количественный эквивалент понятия «Мир», она единственна и максимальна, все прочие величины либо равны ей, либо входят в нее по определению. В общем понимании абсолютная бесконечность объективно может рассматриваться как актуальная, но не является обычным числом, т.к. в силу ее единственности как таковой нет сравнения с другими величинами, нет определенности величины, это и есть «Абсолют» Г.Кантора.

> … Даубен утверждает и нечто большее: “В конце концов, Кантор рассматривал трансфинитные числа как ведущие прямо к Абсолюту, к единственной “истинной бесконечности”, величину которой невозможно ни увеличить, ни уменьшить, а только представить как абсолютный максимум, непостижимый

в пределах человеческого понимания”[74]. Шкала трансфинитных чисел оказывается в этом смысле своеобразной *лестницей на небо,* лестницей, ведущей к самому Абсолюту…[20]

Или как выразился сам Г.Кантор:

Как ни различны учения этих авторов, при обсуждении вопроса о конечном и бесконечном они по существу сходятся в том, что к понятию числа принадлежит его конечность и что, с другой стороны, истинное бесконечное или абсолютное, заключающееся в боге, не допускает никакого определения. [Л-15] Стр.74

12. Безусловно известно, что данный процесс познания для людей бесконечен, т.е. для них в определенном смысле познание Мира в целом, законченном виде не достижимо и никогда не будет закончено, но никто не сомневается в его существовании и ни что не мешает представлять его абстрактно, присвоить ему имя и изучать его. Задача логиков – оптимально сформулировать определение данного понятия, несмотря на существование реальных и мнимых противоположностей.

13. Тоже самое касается и частных универсумов, например, Расселовского множества всех подмножеств или элементов не являющихся собственными подмножествами или противоположного множества элементов являющимися собственными подмножествами в одноименном парадоксе Б. Рассела. Относительно деревенского брадобрея из известного аналогичного псевдо - парадокса допустимо и надо заявить, что подобного субъекта с изложенными требованиями просто не может быть, и это будет правдой, но высказать, что не существует, например, сообщество всех людей абсурдно, и таких примеров бесконечно много, так как множество Рассела (обычное) есть множество всех реальных предметов.

14. Более обобщенно проблему можно разрешить формулировкой аксиомы о существования универсального множества в виде простейшего объединения из двух элементов: положительного и отрицательного, объективного и субъективного, реального и абстрактного. В теории множеств это: $U = (A \cup \bar{A})$, где $\bar{A}$ рассматривается как дополнение A или «не A» Логическая истинная формула данного множества известна: $U = (A \vee \bar{A})$,

15. Общепризнана практика определять универсальное множество в виде всех тождественно истинных суждений, (т.е. множества всех существующих элементов) например суждение $U = \forall x \{ x = x \}$ А пустое множество определяется как всех ложных: $\varnothing = \forall x \{ x \neq x \}$ или другим логическим противоречием, более общим утверждением будет: $A \ \& \ \bar{A}$, в теории множеств: $\varnothing = A \cap \bar{A}$.

16. Но тогда возникает вопрос, каким образом $\varnothing$ входит в универсальное множество по известной формуле: $U \cup \varnothing = U$ или $\varnothing \in U$, если оно содержит исключительно истинные суждения? Обычно об этом не задумываются, достаточно того, что если $\varnothing$ – пустое множество, то его как бы и нет, но когда возникает потребность его извлекают из небытия. По сути дела, в формуле $U \cup \varnothing = U$ понятие « $\varnothing$ » есть аналог или представляет все виртуальные множества в качестве отрицательного $\bar{U}$

17. И практически, изучая природу в целом, ни у кого нет сомнения, что в устройстве нашего материального Мира, упрощенно говоря, участвуют не только реальные множества, но и абстрактные или виртуальные, они не существуют реально, но опосредственно в материи и ее движении. В принципе теория множеств рассматривает все множества и реальные и виртуальные. Имеется в виду, что со всеми материальными вещами непосредственно связаны различные абстрактные объекты: понятия, отношения, законы и т. д, не существующие реально, но отражаемые в сознании человека, обобщенно в виде информации. Причем очевидно, что реальные объекты и идеальные, фигурально используя термины теории множеств, находятся в отношении пересечения друг с другом - информация должна иметь

[20] Лестница в небо. Генезис теории множеств…В.Н.Катасонов. 2000г

материального носителя и материя имеет свои законы существующие вполне объективно воплощенные в материальных объектах и их движении.

18. В известном смысле формула $U = (A \cup \bar{A})$ условна. Для выполнения вышеуказанного принципа: *«формирования множества из элементов другого его объемливающего»* предлагается такая трактовка: реальное множество A условно находится в виртуальном множестве $\bar{A}$ и наоборот: $\bar{A}$ принадлежит реальному множеству A. На первый взгляд это голословно, но учитывая, что универсальное множество есть не только объединение, но и пересечение как минимум пустым множеством, входящим в оба, формально такая комбинация не противоречива, значит возможна,

19. Множество $\bar{A}$ само по себе существовать не может, а если существует (логически), то в целом является положительным. Даже, если это пустое множество или множество всех отрицательных элементов логический анализ парадокса «Лжец» подтверждает, что пустое множество с объективной стороны с необходимостью характеризуется положительным, т.е. истинным утверждением, на основании чего имеет право входить в положительное множество и формально оно есть его подмножество. С другой стороны (отмечено в п.14) элементы пустого множества обладают общим положительным свойством, т.е. положительное множество A формально также входит в $\bar{A}$.

20. Более наглядно подобная схема универсального множества раскрывается в парадоксе Рассела, в котором «обычное» множество всех реальных вещей и конкретных понятий и «необычное» - всех абстрактных понятий вместе составляют универсальное множество, итоговая (минимальная) формула:

$$U = (\bar{R} \cup R) \cap (тип\ 1 \cap тип\ 2)$$

21. Из формулы очевидно, что подмножества R и $\bar{R}$ универсального множества U обладают общим свойством $(тип\ 1 \cap тип\ 2)$, поэтому, аналогично п.п.18,19: $R \subseteq \bar{R}$ и $\bar{R} \subseteq R$, что формально удовлетворяет требованию аксиомы выделения. Формула внешне похожа на аксиому равенства, но равенства множеств нет (не считая формального количества элементов как в аксиоме), наоборот R и $\bar{R}$ противоположны, но входят друг в друга, не допуская смешения индивидуальных свойств.

22. Причина сего, как выше изложено, заключается в структуре множества: данная схема (пример, рис. **4** для плоскости) обеспечивает пересечение одноименных частей множества и одновременно разделение индивидуальных элементов не допуская контрадикторных отношений противоположных свойств. Получается своего рода круговая связка элементов как простейшая схема ячейки универсального множества.

23. В принципе подобная схема как типовая ячейка может быть предложена в качестве простейшей конкретной основы Декартовой прямоугольной конструкции абстрактного пространства с точки зрения теории множеств. В отличии от различных замысловатых фрактальных схем устройства пространства. Соответственно математическое пространство состоит не одних единиц, а их комбинаций с разделительным нулем: **0+1+0+1+0+1+0+1+…** (по осям абсцисс, ординат, аппликат)

5. Теорема Кантора *(общая)*

Источник: https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Кантора (от 05.02.2025г)

Доказательство

Предположим, что существует множество A, равномощное множеству всех своих подмножеств 2^A, то есть, что существует такая биекция f, ставящая в соответствие каждому элементу множества A некоторое подмножество множества A.

Рассмотрим множество , состоящее из всех элементов A, не принадлежащих своим образам при отображении f [1]: $B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$

Отображение f биективно, а $B \subseteq A$, поэтому существует $y \in B$ такой, что $f(y) = B$.

Теперь посмотрим, может ли y принадлежать B. Если $y \in B$, то $y \in f(y)$, а тогда, по определению B, $y \notin B$. И наоборот, если $y \notin B$, то : $y \notin f(y)$, а следовательно, $y \in B$. В любом случае, получаем противоречие.

Следовательно, исходное предположение ложно и A не равномощно 2^A, Таким образом доказана строгость неравенства.

Для определения знака неравенства построим инъективное отображение $g: A \to 2^A$, сопоставляющее каждому элементу a из A подмножество $\{a\}$, состоящее из этого единственного элемента. В 2^A остались множества (состоящие из более чем одного элемента). Отсюда можно сделать вывод, что $/2^A/ > /A/$

Примечания

1.↑ Оно существует по аксиоме выделения, значение есть подмножество A.

1. Теорема приведена как пример ложного изложения парадокса Рассела, псевдо-парадокса. Это еще нагляднее в редакции издания Р.Куранта…:

Мы определим T как подмножество A, состоящее из всех таких элементов x, что S_x не содержит x.[21]

Т.е. подмножество T определяется как S_x «состоящее» из x, но «не содержащее» элементов x – аналог псевдо - парадокса брадобрея, которому предписано одновременно брить и не брить, заранее составленное логическое противоречие, естественно его следствия тоже противоречие.

2. Существует несколько равносильных вариантов теоремы. 1 вариант - исходная гипотетическая посылка теоремы есть определение бесконечности по Дедекинду, согласно его существует вывод, что все бесконечности счетны и равны между собой. В частности бесконечная часть равна бесконечному целому множеству.

3. Теорема призвана доказать, что есть бесконечности больше счетных названные несчетными, некой критической формулой является 2^A (или 10^A), или булеан – множество возможных подмножеств, комбинаций элементов исходного множества.

4. Нет разъяснений каково множество A, названное как «любое», но, судя по математическим формулам и другим редакциям, речь идет о мощности актуальных бесконечных счетных множеств, гипотетически приравненной к понятию числа, имеется в виду множество натуральных чисел: Л-5 стр,28. (несколько подробнее изложено у Петросяна В.К [Л-10])

5. Теорема излагается весьма непоследовательно, предлагается начальная посылка: все элементы A соответствуют подмножествам $f(x)$ булеана 2^A, $A \leftrightarrow 2^A$, $2^A = \{x \in : x \in f(x)\}$ Затем без объяснений выскакивают элементы A, не соответствующие, явное противоречие.

6. Возникает вопрос: откуда взялись элементы $x \notin f(x)$? в [Л-11 стр.65] сказано:

При этом элемент x может содержаться в подмножестве $f(x)$, которое ему соответствует, или нет. *(Вариант по изданию Г.Куранта…)*

7. Допустим, это вторая дополнительная посылка: A состоит из подмножества B и дополнения $\overline{B}$. (Подобная схема теоремы с разделением множества в различных вариантах наблюдается и в других источниках) Булеан состоит из подмножеств A и: «$B \subseteq A$, поэтому существует $y \in B$ такой, что $f(y) = B$.», следовательно, подмножество B состоит из других элементов $y \neq x$, это возможно, т.к. отношение «$\in$» не транзитивно и элемент x не отражается в образах, предназначенных для элементов другого подмножества.

8. Далее очевидно, что формулы и рассуждения в тексте трактуются сначала чисто формально, и выполняется подстановка y в формулу $x \notin f(x)$ как одно из значений x.

9. Но прежде чем начать выполнять некие операции можно уточнить, где и какие элементы находятся (по схеме множеств теоремы). Если элементы $x \notin f(x)$, то $x \notin B$, и если B не пусто, значит существуют элементы $\neg x \in B$, из этого ясно откуда взялся другой символ «y» – это собственно второе имя элементов $\neg x$, из $\neg x = y$ замена одного другим правомерна.

10. Но подстановка y в формулу $x \notin f(x)$ не допустима, т.к. нарушает общее правило подстановки: она не должна нарушать эквивалентность, замена x на $\neg x$, противоречит

[21] Р.Курант, Г,Роббинс. Что такое математика?.2000г.стр,111

правилам логики и математики, это очевидно разные переменные, область определения элементов x не пересекается с областью определения $\neg x$, и по смыслу изложенного: $x \in \bar{B}$.

Или по терминологии [Л-7], стр.65 x и $\neg x$ есть термы различных «сортов», их взаимная подстановка не допускается.

Еще более строгие требования подстановки к элементам в теории множеств - даже их равенства в аксиоме подстановки и [Л-7], стр.65 (*логически допустим вариант* $\neg x \Leftrightarrow y$)

Наиболее развернутая формулировка:

> Согласно книге Теренса Тао «Анализ I», аксиома подстановки — одна из четырёх аксиом равенства для *объектов* (которые, по сути, являются допустимыми элементами множества). В частности, она гласит, что для любых двух объектов x и y одного типа, если $x = y$, тогда $f(x)=f(y)$ для всех функций и операций f и, кроме того, $P(x)$ и $P(y)$ являются логически эквивалентными суждениями (то есть они вытекают друг из друга) для всех суждений P истинность которого зависит от x и y.[22]

Символы x и y одного и того же множества могут быть однотипными и взаимозаменяемыми, но формулы: $x \in f(x)$ и $x \notin f(x)$, в данном случае дают четкое разделение типов элементов на противоположные.

11. О равенстве x и $\neg x$ не может быть и речи. Здесь единственный возможный вариант – значение $x = 0$ (пустое множество), что означает отсутствие элементов множества B и следовательно самого множества. Об этом приходят к выводу в другой редакции теоремы: [Л-11] стр.45 об аналогичном элементе: *«Значит, такого элемента x_1 не существует…»* Но это противоречит аксиоме и фактам - подмножество B существует и может быть непустым. Обоснование: кроме ссылки в данном источнике на аксиому выделения, есть примеры - «Парадокс Галилея» и многие другие по определению бесконечного множества Дедекинда. Правильнее очевидный вывод: рассуждения в предложенной теореме не верны, действия не корректны, что вполне логически подтверждается.

12. Можно предложить еще проще способ рассуждения: если допустить, что вместо x можно подставлять любой элемент, даже $\neg x$, то и $x \notin B$ и $\neg x \notin B$, следовательно B не содержит элементов вообще, т.е. есть просто пустое множество.

13. А также величина (мощность) бесконечных множеств $\mathbf{A}$ или 2^A не играет здесь никакой роли, почему в литературе существует мнение, что противоречие есть следствие «слишком большого» исходного множества непонятно, объяснений фактически нет, либо они довольно невразумительны. Непосредственная причина противоречия очевидна - искусственно созданная логическая ошибка и странные сокращенные логические рассуждения натянутые на желательный вывод.

14. Похожего качества и приведенный аргумент во второй части теоремы: «…*остались множества (состоящие из более чем одного элемента)»* ни о чем не говорит, поскольку здесь имеются в виду счетные бесконечные множества. Согласно определения бесконечности по Дедекинду (или теорема 3.1.1. Л-13) это предусматривается, и все счетные множества, как известно, по ТМ равномощны – все биективны натуральному ряду чисел. Апелляция к принципу: «целое больше части» для бесконечных счетных множеств не имеет смысла при использовании упрощенной биекции теории множеств.

15. Кроме того, если окончательный вывод теоремы принят на основании данного аргумента: «*Отсюда можно сделать вывод, что* - $/\mathbf{2^A}/ > /\mathbf{A}/$» (*см. источник*), то непонятно зачем вообще выше приведены путанные и сомнительные рассуждения основной части теоремы, отношения «больше – меньше» и есть неравенство - отсутствие биекции между множествами, что пытаются доказать в теореме.

16. Имеет значение только вопрос: «все или не все» элементы множеств используются в рассуждениях. В некоторых редакциях теоремы указаны кванторы, здесь полнота должна присутствовать как необходимая, иначе выводы рассуждений будут неопределенными из-за наличия различных вариантов.

---

[22] https://math.stackexchange.com/questions/3898339/does-the-axiom-of-substitution-have-limits

17. Стандартная ошибка в рассуждениях заключается в игнорировании простого факта, что если элемент $y \in f(y)$, то $y \notin f(y)$ есть другой элемент и $\neg y = x$, дополнения подмножества B.

Например, в аналогичной теореме Кантора сказано:

> Диагональная последовательность в этих терминах представляет собой множество тех i, для которых $i \in A_i$, а последовательность β, отсутствовавшая в перечислении, теперь будет его дополнением $(B = \{i \mid i \notin A_i\})$[23]

Ситуация аналогична двойной морали: в одном источнике истина в том, что дополнение есть, в другом о том же самом утверждается, что дополнения нет, это уже точно называется логическим противоречием.

18. Дополнение играет роль отрицательного подмножества по отношению к основному, а поскольку y - все элементы B, и $x = \neg y$, то согласно правильной подстановке верно утверждение $\neg y \notin f(y)$

В итоге общее суждение: $y \in f(y) - И \Leftrightarrow \neg y \notin f(y) - И$. [Л-4] истинно, при правильном определении элементов и их размещении по подмножествам никакого противоречия нет.

19. Теорему Кантора можно сформулировать с применением других терминов согласно известной теоремы, как частному случаю закона отрицания отрицания: ***«дополнение от дополнения множества равно самому множеству»***. (Закон двойного дополнения), но это не принципиально.

20. Вывод – исходное допущение (определение бесконечного множества Дедекинда в своих условиях) верно и данная теорема не может служить аргументом существования особых «несчетных» множеств.

21. В [Л-7] о теореме Г.Кантора замечено:

> Обратите внимание на аналогию между этим рассуждением и рассуждением в парадоксе Рассела[24]

Аналогия есть, но не полная, множество A рассматривается как отдельное универсальное (других множеств нет), также делится на подмножество и его дополнение. Имеются все три необходимые условия образования парадокса: отрицательное, самореферентное суждение и элементы множеств рассматриваются все. (Точнее – псевдо-парадокс, или заранее известное противоречие - ложное суждение и попытка создания отдельного множества из одних отрицательных элементов: $x \notin f(x) = \neg x \in f(x)$, что противоречит **п-5**◦) Отличия теоремы от парадокса в том, что ставится другой несколько странный вопрос: «принадлежит элемент **y** множеству B или нет?» (Хотя принадлежность утверждается как исходная посылка и ее опровержение некорректно) Рассуждая по существу, зачем подставлять y в B вместо x, если x в B не содержится? Данное утверждение вместе с первичным определением B является логическим противоречием и формирует псевдо-парадокс.

22. Логическая схема парадокса Рассела несколько сложнее, основной вопрос известен – о свойстве не элементов, а самого множества B, если: $B = \{x \in A: x \notin f(x)\}$, то B обладает отрицательным свойством $x \notin f(x)$, на этом основании по закону отрицания отрицания (или содержательно) при $B = f(x)$ имеем: $B \notin B \Leftrightarrow B \in B$: и B входит в собственное множество. В данной ситуации настоящего парадокса тоже нет противоречия (см. раздел 4), т.к. свойства подмножества B взяты в разных аспектах: $x \notin x$ - в субъективном, а: $x \in x$ - в объективном (или *тип-1* и *тип-2* понятий). Но в предлагаемой теореме дополнительные факторы, объективно существующие в реальности не обозначены и не учитываются. В итоге, логическая схема данной теоремы должна описываться не изложенным искусственным противоречием, а формулой парадокса (ϕ-**3** ^{o}**б**) и будет представлять собой истинное суждение.

5. **Биекция.**

1. Не все положения и методы теории множеств равносильны и общезначимы. Метод биекции, который широко используется в теории и с помощью которого предлагают различать мощности множеств в том числе мощности счетных - несчетных бесконечных множеств,

---

[23] Начала теории множеств Н.К.Верещагин, А.Шень. М 12г.стр.28

[24] Математическая логика. А.Н. Колмогоров, А.Г. Драгалин. МГУ 2006г.стр.155

основан на математической индукции, но упрощен до потери смысла своего назначения как взаимно – однозначное соответствие элементов без учета их величины, качества и индивидуальной структуры множеств.

> В теории множеств никакие дополнительные структуры на множествах не изучаются - поэтому остается изучать только запас точек в множестве, который для конечного множества А совпадает с количеством точек в множестве - |A|. Для сравнения множеств используется биекция.[25]

2. Само взаимно – однозначное соответствие (математическая биекция) элементов – древнейший способ сравнения множеств по правилам математической индукции: с учетом равенства исходных баз, величины элементов и структуры множеств.

И та и другая биекции имеют смысл только для дискретных множеств.

3. Биекция теории множеств (ТМ) основа понятия мощности множества или чаще употребляют термин «равномощность»

> ***Определение 15*** Два множества *X* и *Y* называются ***равномощными,*** если существует биекция одного из них на другое.
>
> ***Определение 16 Мощностью*** множества *X* называется класс эквивалентности множества *X*.[26]

4. Определение мощности фактически совпадает с одним из определений числа, для конечных множеств – полностью, для бесконечных мощность есть кардинальное число, нечто вроде условного числа, косвенно или неким обобщенным образом должное характеризовать величину множества.

5. Г.Кантор вообще предложил нечто невообразимое:

> ($\overline{\overline{A}}$ - Кантор определял (???) мощность множества A как такое его свойство, которое остается после абстрагирования от:
>
> a) качества ??? элементов множества A,
>
> b) от их порядка.
>
> $\overline{\overline{A}}$ - двойное отрицание подчеркивает этот двойной акт абстрагирования.
>
> Разумеется ???, этим не оправдывается понятие мощности множества или его кардинального числа, а только вводится новый термин для понятия равномощности.
>
> В конечном счете этот термин не обязателен, поскольку теоремы теории множеств можно сформулировать так, чтобы в них шла речь не о свойствах кардинального числа (или мощности), а об отношениях между ними, и эти отношения всегда можно доказать при помощи понятия равномощности. [Л-16]

Типичное нарушение принципа двойственности, утверждение о полной абстракции объекта от качества бессмысленно, не бывает количества без качества и наоборот: нет качества – нет признаков, нет объекта, прямое нарушение основного положения ***n-3***◦. Аналогично: нет количества – имеем только пустое множество. Точнее - нечто неопределенное, пустое множество имеет свое определение относительно прочих величин. (Поэтому, видимо, автор выразил недоумение изобразив символ ???)

6. Более приемлемо понятие «равномощность» (или ее отсутствие) - конечные множества простым попеременным перебором можно поставить в биекцию (или не поставить) Но бесконечность есть недоступность и неопределенность, напрямую количественно сравнивать их невозможно, биекция тут не поможет. На практике существуют косвенные факторы или параметры, позволявшие судить о равенстве бесконечных множеств или его отсутствии, а это уже есть некоторое «качество», от которого объявлено избавление.

7. Ненамного яснее излагает сам Кантор:

> Наоборот, в случае бесконечных множеств до сих пор ни в моих, ни в чьих-либо других работах не была вообще речи о каком-нибудь точно определенном количестве их элементов, но зато им можно было приписать определенную, совершенно не зависящую от их порядка мощность.[27]

---

[25] Элементы теории множеств и мат. логики. Л.Ю.Белова, Ю.А.Белов. Ярославль.2012г.стр.29

[26] Основы дискретной математики ч.1 Кривцова И.Е, Лебедев И.С..Ун-т ИТМО С-П 16г.

[27] Кантор Г. Труды по теории множеств. Ф. А. Медведев и П. С. Юшкевич «Наука» 1985г. стр.66

Очередная нелепость: качество игнорируется, количество неизвестно, но что-то таинственное приписываем объекту. Можно по произволу «приписать» условную (т.е. неопределенную) мощность множеству некоторого качества, названному «счетным», затем относительное ее увеличение по формуле 2^A континууму и назвать его «несчетным» и т.д. Проблема только в том, что от этого определенности бесконечному множеству не добавляется: и A – неопределенно бесконечно и 2^A – неопределенно бесконечно, можно только констатировать неизвестное увеличение мощности, т.к. применена арифметическая формула придающая множеству некоторое «качество».

8. До некоторой степени возможно абстрактно считать элемент точкой, но совершенно игнорировать структуру по смыслу понятия множества состоящего из дискретных элементов - иллюзия. Это тоже структура типа «куча – мала», неупорядоченная.

9. Применение биекции, как выше сказано, тоже невозможно в силу недоступности бесконечного количества, отсутствия «конца». Некоторые приводимые аргументы в наивных примерах: «один стул – один студент» или «биекции центра и окружности» есть просто апелляция к житейским наблюдениям, как бы «само - собой» очевидных, фактически это возврат к новым аксиомам, составленных из неизвестных понятий. А если начать математическое описание ситуации, то потребуется целая дополнительная теория, что такое «стул и студент» или что такое «центр и круг», у которых должно быть свое обоснование и которым должна быть теория множеств, т.е. логический круг замкнется.

10. Тем более, что в ТМ принята вольная практика считать элементом все, что хочется, на один «стул» разрешается посадить любое количество «студентов», (использование функции).

11. Только упорядоченная структура последовательности может гарантировать некий прогноз величины бесконечного множества индуктивным методом, разница величин элементов или сравнение структур являются аргументом соотношения множеств.

12. Практически в методе биекции ТМ подразумевается простейшая равномерно - монотонная структура множества типа натурального ряда чисел, но без порядка, (элемент – точка без какого – либо качества), а не собственная данных множеств, задаваемая формулами, программами, алгоритмами. Но в общем виде в теории множеств уже доказано:

Теорема Цермело. Всякое множество можно вполне упорядочить.[28]

13. Понимание мощности бесконечного множества, как количество элементов во множестве без учета порядка при его постановке в биекцию с натуральным рядом чисел автоматически налагает на множество аналогичную структуру. В результате оно естественно превращается в «счетное» множество равное всем другим дискретным бесконечным вопреки фактам и принципу индивидуальности. Но причина равенства заключается не в процедуре биекции, а в том, что бесконечность есть неопределенность, если нет параметров конкретных предметов.

Это равнозначно использованию терминов как прилагательные «конечное» и «бесконечное», но только все знают, что конечные числа могут быть и равными и разными, а здесь выходит, что все бесконечные величины равны, хотя все понимают, что в действительности это не так и все предметы разные и качественно и количественно.

14. Метод упрощенной биекции для бесконечных множеств противоречит общезначимым принципам и положениям: «целое больше части», индивидуальности элементов, аксиомам Пеано. Парадоксально, но именно неопределенность создает видимость эффективности метода биекции – никто не знает каков результат, если нет конца, но и обесценивает его.

---

[28] Логика и Алгоритмы, лекции 4–5 hse.ru›data/2011/10/21/1269030798/Лекции 4,5.pdf .стр.6

15. Еще более сомнителен искусственно придуманный логический принцип употребления в теории множеств упрощенной биекции:

> Если между множествами **A** и **B** можно установить взаимно однозначное соответствие, то говорят, что они имеют **одинаковое** количество элементов или **равномощны**. Если же при **любом** способе образования пар некоторые элементы из **A** всегда остаются без пар, то говорят, что множество **A** содержит больше элементов, чем **B**, или что множество **A** имеет большую мощность, чем **B.**[29]

Чем объясняется преимущество одного способа сравнения перед другим не объясняется, (в литературе не нашел, Авторов другого мнения достаточно много: «О равномощности множеств» Андрей Рамин. Проза.ру[30], и многие другие)

Чаще ситуация такова, что на практике существуют и верны оба варианта сопоставления или даже несколько разных способов, в разных исходных условиях этот факт однозначен, но в теории множеств без объяснений считается, что «ненужные» можно отбросить. Наглядный пример: «парадокс Галилея» - непосредственно визуально наблюдается, что в натуральном ряду чисел больше чем целочисленных квадратов, это просто факт, но очевидна и упрощенная биекция, т.к. любое натуральное число порождает целочисленный квадрат (или их можно просто пересчитать натуральными числами). Все дело в условиях рассмотрения: игнорировании или нет определений понятий, величин элементов множеств и структуры самих множеств, без этого узнать каков конечный результат в бесконечности невозможно, один Бог знает, даже индукция тут не поможет, т.к. для корректной биекции она требует равных исходных баз и изоморфность структур конкретных последовательностей множеств.

16. В оправдание или доказательства биекции ТМ обычно привлекается понятие функции. Например, в парадоксе Галилея биекция есть, если под понятием «числа» имеются в виду только имена чисел как элементы множеств. (*парадокс, по сути дела, сведен к логической ошибке – подмене понятий: вопрос ставится о конкретных предметах, а в рассуждениях и выводе – обезличенные элементы*) Но «функцию» также можно трактовать двояко, в теории множеств она упрощенно используется как взаимно – однозначное соответствие (отображение) по схеме: «аргумент → функция» (причем в числовых множествах с дополнительными условиями, без учета числа корней, по модулю: $/A/$ и $/f(A)/$) как «один элемент ↔ элементу другого множества» без учета их величины и получаемой структуры.

17. Другое, традиционное понимание функции алгебраическое: $A = f(A)$, где функция есть показатель различия между числами – множествами: $A^2 > A$. Никакой биекции здесь быть не может. Что можно доказать первым методом и для чего – непонятно, рассматриваемое соотношение: $2^A > A$ или $A \rightarrow 2^A$ тоже функция аналогичная другим арифметическим, в чем ее исключительность не установлено.

18. Согласно аксиом традиционной математики числа $1 < 2 < 3$ и т.д., следовательно должна быть тому причина. Возможные варианты, (например, если учитывать только рациональные числа): либо бесконечно малые элементы одного множества больше соответствующих элементов другого, либо бесконечное количество элементов каждого числа разное. Но в теории множеств путем игнорирования реальных отношений и величин элементов считается, что счетные бесконечные множества «равномощны», поскольку все биективны натуральному ряду.

19. На первый взгляд выводы ТМ и арифметики о счетных множествах одинаковы, но содержание разное, разные причины и методы. Различны подходы к смыслу данной ситуации: традиционное представление бесконечных множеств микро-масштаба в виде конкретных

---

[29] Научная библиотека избр.естественно-научных изданий Математика. *Гл.*XV Теория функций действит. переменного. стр.7

[30] https://proza.ru/2009/01/03/595 11.02.26г

чисел есть просто сокращение одинаковых понятий в формуле равенства или неравенства при учете имеющихся аргументов. Постановка в биекцию явно разных множеств ошибка - игнорирование очевидных фактов и аргументов, подмена логических понятий.

20. Индивидуальные аксиомы бесконечности, например: $n*\infty = \infty$ и др. также не аргумент доказательства биекции бесконечных множеств, а утверждение о том, что бесконечность сама по себе единственна и не является числом (ближе к понятию переменного числа). Биекция ТМ – лишняя процедура.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Однако с дальнейшими выводами о сравнении разных бесконечных множеств, существовании несчетных множеств, трансфинитных чисел и др. можно не торопиться, т.к. есть более существенные аргументы за и против различных мнений, нежели отдельные ошибочные теоремы и упрощенный метод сравнения, который ничего не объясняет и не доказывает.

2. Во-первых, по смыслу понятия чисто семантически «несчетность» есть несчетность и ничто другое. В несчетном множестве нечего считать, да и множеством данный объект назвать сложно (пример - «немножество», т.к. элементов нет или нет способа отличать один элемент от другого). Данная область и ее объекты не дискретны и не подлежат какому – либо исчислению. Если бесконечность, которая является неопределенностью, взята по произволу как некое условное число в математической формуле, кроме той же неопределенности не может породить что - то определенное. Разумных аргументов противного фактически не приводится. Смешение двух противоречащих идей: существование кардинальных чисел после $\aleph_0$ и одновременно их отсутствие согласно традиционных понятий и аксиом математики и логики выразилось в континуум – гипотезе и различных парадоксах: Бурали – Форте и парадокс Кантора, официально разрешаемые довольно искусственным образом или вообще никак.

3. Во-вторых, без каких – либо существенных оснований и объяснений игнорируются или искажаются некоторые общепринятые понятия логики, например, понятие полноты - «все» (Вплоть до предложения запрета употребления данного понятия– Б.Рассел) Если сначала утверждается, что ряд натуральных чисел включает в себя все числа, но затем продолжается с помощью арифметических действий далее до некого аналогичного предела - «Абсолюта», то явно нарушается элементарный закон тождества. Особенно наглядно это показано в частной теореме Кантора: предлагается таблица всех чисел, затем тут же конструируется точно такое же число, которого считают отсутствующим в таблице. И вместо очевидного вывода, что таблица не верна и ее обычное представление в учебниках не содержит всех действительных чисел, объявляется о нахождении некого потустороннего числа. Как справедливо оценил этот факт Зенкин А.А. – очевидная ошибка недоказанного основания, известная логическая истина: «из ложного утверждения можно вывести что угодно».

4. Трансфинитные и кардинальные числа могут рассматриваться только как виртуальные, т.е. не существующие и не соответствующие некоторым правилам логики и математики путем их игнорирования. Причем простой логической необходимости в них нет, т.к. в бесконечности натурального ряда и множества рациональных чисел вполне могут уложиться все спирали порядковых чисел или иерархии кардинальных, имеется в виду использование гипер – действительных чисел.

5. Сложности определения последних тоже имеются, но по крайней мере очевидно, что они существуют, т.к. недоступность для человека не является аргументом их

несуществования. Гипер – действительные числа поэтому считаются условно счетными, хотя относительно конечных они являются бесконечными, т.е. фактически тоже «несчетными». Если взять n по договоренности (исходя из практических возможностей человека) в качестве максимального конечного числа, очевидно, что число 2^n уйдет в область бесконечных чисел, но по крайней мере очевидна логическая законность применения формулы и возможности ее вычисления.

6. Г. Кантор прославился утверждением актуальности бесконечных чисел, но фактически в теоремах ТМ доказывается только их потенциальность. По сути дела конструируемые множества являются потенциальными бесконечностями: кардинальные числа, порядковые. Различные идеи порождения «несчетных» чисел, например, в диагональном методе не что иное как простой факт специфического счета потенциальных чисел, которых больше n в 2^n раза и данной операции бесконечное количество раз.

> . “Теория множеств, — писал чешский математик П.Вопенка, — усилия которой были направлены на актуализацию потенциальной бесконечности, оказалось неспособной потенциальность устранить, а только смогла переместить ее в более высокую сферу”[84].[31]

Все новые числовые системы все равно заканчиваются неким «Абсолютом» подведомственным только Богу, что выходит за пределы науки, либо необходимо самого Бога считать в качестве некого мистического множества, дополнительного к реальному.

7. Представляется, что актуальность бесконечности не является особенной проблемой и вполне объяснима начиная с общего диалектического понимания о существовании потенциальной бесконечности как процесса и актуальной субстанции чисел в этом процессе.

8. Множество всех множеств и бесконечность есть математические эквиваленты материального Мира, следовательно также существуют как любые другие абстрактные эквиваленты любых материальных предметов. Поскольку математика абстрагируется от физического понятия времени, бесконечность вполне законно можно представить как актуальную, но по своим свойствам специфическую и неопределенную величину, аналогичную переменной.

9. Числа могут рассматриваться с двух сторон: конечные с точки зрения микро – масштаба, субъективно (наблюдатель находится во множестве) как множества потенциально бесконечные согласно аксиомы непрерывности, состоящие из бесконечно малых, при переходе в макро – масштаб, с объективной точки зрения, любое число есть актуальное и определенное (конечное) С дальнейшим увеличением конечных чисел и достижении их практической недоступности также переходят в потенциально бесконечные. Но ничто не запрещает мысленное создание абстрактного (виртуального) мега – масштаба, в котором ряд всех чисел, есть завершённое и условно фиксированное единственное множество всех данных элементов как предел или «Абсолют» Г.Кантора.

10. При интерпретации бесконечности в качестве актуальной в виртуальном диапазоне масштаба «мега» возможны два варианта: либо это один из объектов аксиомы существования единицы в системе Пеано, которая равна другим в ряду натуральных чисел, либо согласно парадокса бесконечности в реальности это просто одна единственная единица, ее не с чем сравнивать, она ни к чему не соотносится кроме как к самой себе, поэтому она никак не определяется и в любой степени по правилам арифметики есть тоже только единица и ничто иное.

11. Если для создания трансфинитных чисел используется арифметическая формула $2^{\aleph_0}$ или $10^{\aleph_0}$, то сразу возникнет проблема известная с древности о несовместимости конечных

[31] Катасонов В.Н. Лестница в небо. Генезис теории множеств. 2000г.стр.18

чисел и бесконечности в общих арифметических операциях, как отмечено выше – бесконечность любое число превращает в бесконечность (или в ноль). Ситуация имеет известное естественное логическое обоснование: взаимодействие противоположностей приводит к их уничтожению.

12. Использование символа $\aleph_0$ или другого в качестве обычного числа ничем не объяснено и не доказано. Наоборот, во многих источниках вполне справедливо отмечается, что $\aleph_0$ не входит во множество натуральных чисел (не отвечает требованиям аксиом Пеано), следовательно и формула континуума $2^{\aleph_0}$, взятая по аналогии из арифметики также ничем не обоснована, т.к., если $\aleph_0$ - неопределенность, то и формулы $2^{\aleph_0}$ неизвестен результат.

13. Например, Александров П.С. прямо, без объяснений излагает:

> Обозначив (как было сделано выше) мощность счетных множеств через $\aleph_0$, мы можем сказать, что мощность множества всех последовательностей (4) есть $2^{\aleph_0}$. [Л-14 стр.33]

Т.е. величине $\aleph_0$ чисто по произволу или в качестве гипотезы придается смысл некого актуального числа аналогичному счетному, и если используется арифметическая операция вычисления другого числа, следовательно очевидно, что не все натуральные числа входят в $\aleph_0$, и в итоге имеем потенциальную бесконечность или т.н. «шкалу мощностей» Но, если $\aleph_0$ признано неким произвольным образом за определенное число, зачем изобретать какие – то особые процедуры типа «диагональной», можно как обычно прибавлять ***1*** до «новой» бесконечности и все (это тем же произвольным образом предложил Кантор в системе порядковых чисел), невзирая на всякие гипотезы – континуума, А традиционные аксиомы бесконечности просто необходимо отменить.

14. Во-вторых, по смыслу аксиомы индукции: «если выполняются условия для конечного участка числового ряда, то свойства чисел распространяются на все числа, в том числе бесконечные», т.е. формируется множество всех элементов с данным свойством. Исходя из логического понятия «все числа» очевидно: кроме «всего» больше ничего нет, на этом можно закончить различные гипотезы по увеличению или уменьшению числовых множеств данного рода.

15. В-третьих, если признается верной гипотеза (аксиома) бесконечной делимости конечных величин, обратная существованию экстенсивной бесконечности, то актуальность надо признать просто как факт, непосредственно наблюдаемый и постоянно используемый всеми в виде конечных чисел и геометрических отрезков:

> Исключение из этого правила составляет очевидная наблюдаемость континуального отрезка прямой линии, который по виду хотя и ограничен, но все же признается состоящим из бесконечного множества точек. Здесь к досаде противников актуальной бесконечности приходится все же признавать не только актуальную бесконечность существующей, как завершенную и обозримую цельность, но еще и в парадоксальном соседстве с ограниченностью, ярко выраженной финитностью, содержащейся, по крайней мере, в длине этого отрезка. [32]

16. Более сложен вопрос конкретного определения величины бесконечности, что признано многими математиками и самим Г.Кантором:

> Как ни различны учения этих авторов, при обсуждении вопроса о конечном и бесконечном они по существу сходятся в том, что к понятию числа принадлежит его конечность и что, с другой стороны, истинное бесконечное или абсолютное, заключающееся в боге, не допускает никакого определения.[33]

Бог, конечно, не математическая категория.

17. Исходя из подобного представления в математике давно утвердилось мнение о бесконечности как о неопределенности, что соответствует смыслу слова – отсутствие «конца», следовательно какой – либо определенной величины. Имея в виду абсолютную бесконечность

---

[32] В.М. Комаров, В.Ю. Татур, Бесконечность и гармония. (примеч.3) Стр.85

[33] Кантор Г, Труды по теории множеств. Ф. А. Медведев и П. С. Юшкевич «Наука» 1985г.стр.74

как неопределенность (аналогично см. парадокс «Всемогущего») определенность бесконечности логически не допускается согласно закона исключенного третьего.

18. Но как множество элементами которого являются разные величины, бесконечность тоже обладает отдельными свойствами величин, обычно характеризуемыми мощностью. Однако мощность бесконечного множества не является числом аналогичным конечным и имеет индивидуальные свойства, резко отличные от них, согласно традиционного набора аксиом: $\infty + n = \infty$, $n * \infty = \infty$, $\infty^n = \infty$, $2^\infty = \infty$ и т.д.

19. На практике в математике существует нескольких совместных формул, но в них тоже производится «раскрытие» бесконечностей путем сокращения. Очевидно, что если ***2*** больше ***1,*** то во множестве ***2*** в два раза больше элементов. Но путем принятых сокращений употребляют формулу «$1<2$» В основном бесконечность используется только как мета – понятие (выражения типа «$n \rightarrow \infty$»).

20. Невзирая на признание неопределенности бесконечности (п.14) Г.Кантор предложил некоторые аргументы об определении мощности множества ***A*** на примере бесконечно удаленной точки, но весьма невнятные:

> При этом оказывается, что поведение функции в окрестности бесконечно удаленной точки обнаруживает точно такие же явления, как и поведение ее в окрестности всякой другой, расположенной на конечном расстоянии точки. Отсюда следует полная правомерность того, чтобы мыслить в этом случае бесконечное как расположенное в некоторой вполне определенной точке. [34]

Определенно только одно, что точка есть в наличии, что и без этого известно, но как поведение функции определяет хотя бы ее количественное положение относительно прочих чисел совсем практически непонятно.

21. Или крайне сомнительная «логика» образования порядковых чисел более ω, при которой вариант ($1 + \omega$) не допускается, но ($\omega + 1$) возможен, также без вразумительных объяснений почему. Хотя известная спираль порядковых чисел считается почти канонической во множестве учебников также без особых разъяснений, почему для порядковых чисел это разрешено, для кардинальных нет. Если к неопределенной величине ω прибавили ***1,*** то от этого бесконечное множество (или его мощность) не стало в количественном отношении сколь - либо более определенным.

23. Необходимо уточнить: действительные числа делятся на конструктивные (КДЧ) и виртуальные, особенно это касается иррациональных и мнимых чисел, натуральные и рациональные вполне могут быть счетными. При делении порядковых чисел на диапазоны порядковых типов, данная спираль включает только счетные, дискретные числа и образует общий счетный ряд вполне аналогичный натуральному.

24. Если число ***A*** имеется в виду как множество (или мощность) потенциально бесконечное, то есть возможность неограниченного увеличения: из ***A*** порождается множество 2^A как арифметическая функция ***A,*** имеем $2^A > A$, тоже самое что: $A^2 > A$ или: $2A > A$. Числа понимаются как аналогичные конечным, продолжаемые бесконечно чисто теоретически по индукции, согласно принципа переноса для гипер-действительных чисел, причем увеличивается как ***A*** так и соответственно 2^A, в принципе это процесс субъективно не имеющий финала с постоянным соотношением аргумента и функции, что вполне описывается обычными числами. И весь процесс умещается в обычный натуральный ряд или во множество рациональных чисел. Для чего тогда нужны трансфинитные числа?

25. Или проще, если в качестве аксиомы множество ***A*** принято за актуальное бесконечное число, то применяя правила обычной арифметики для конечных чисел известно, что: $A^2 > A$, и можно по индукции формулу пролонгировать на бесконечные множества.

---

[34] Кантор Г. Труды по теории множеств. Ф. А. Медведев и П. С. Юшкевич «Наука» 1985г.стр.65

26. Но непонятно в чем принципиальная разница между формулами A^2 и 2^A, например - данной ситуации с парадоксом Галилея. Если A – одно число, то функция 2^A также порождает одно число – прямая биекция.

Если A – множество (мощность), то безусловно $2^A > A$, как и в парадоксе Галилея.

27. В многих вариантах теоремы Кантора собственно понятие бесконечности или формула 2^A вообще не используются, применяются термины «любое» множество или «всякое», что не доказано, применяются слишком разные объекты с весьма разными свойствами. То, что для конечных чисел очевидно как факт, для практически бесконечных, гипер-чисел под вопросом, для абсолютно бесконечных неприемлемо.

28. В теории множеств известно:

> Теорема 2. (в) Объединение конечного или счётного числа конечных или счётных множеств конечно или счётно.[35]

Т.е., если принять A за гипотетическое число, то $A * A = B$ – счетно, далее продолжая $B * B$ и т.д. получим A^A– счетно, тем более 2^A, следовательно простым счетом множеств (дискретными шагами) ничего кроме счетного множество нельзя получить.

29. Чисто логически следует, что самореферентные отрицательные суждения приводят к положительному выводу, например, парадокс бесконечности – множество всех бесконечных элементов можно рассматривать как конечное по закону отрицания отрицания. Но на положительные (утвердительные) суждения этот закон не распространяется, если установлено, что положительное суждение положительно, то оно остается положительным в итоге по правилу поглощения. Т.е. нет логических оснований превращения положительного счетного множества в отрицательное несчетное.

30. И второй не решенный вопрос, из области континуум – гипотезы: чем принципиально отличается $\aleph_0$ от других кардинальных чисел? Если $\aleph_0$ – мощность счетного множества и число 2 возводится в степень счетного числа $\aleph_0$, то как возникают несчетные числа? Главное условие счетности множества – его дискретность, если множество $A = \aleph_0$ дискретно, то 2^A тоже дискретно, т.е., что может помешать с помощью натурального ряда сосчитать множество 2^A? Вывод с использованием биекции: $A = 2^A$– ничто.

31. Но на практике все сложнее, известно, что имеется существенный аргумент против: недоступность (или вообще отсутствие) первого элемента и последнего бесконечного множества, а также и большинства промежуточных одновременно (гипер-действительные числа).

Это результат отсутствия четкого определения некоторых чисел, например, иррациональных, мнимых. Хотя в ТМ есть теоретически доказанные общие теоремы о существовании первого элемента и упорядочивании любого множества.

> Теорема 24 (Цермело). Всякое множество может быть вполне упорядочено.
> Доказательство этой теоремы существенно использует аксиому выбора и вызывало большие нарекания своей неконструктивностью. На счётных множествах полный порядок указать легко (перенеся с N). Но уже на множестве действительных чисел никакого конкретного полного порядка указать не удаётся, и доказав (с помощью аксиомы выбора) его существование, мы так и не можем себе этот порядок представить.[36]

32. Другой тоже практический вопрос: в чем заключается критерий заполнения бесконечными числами множества с получением актуального числа?

Есть еще формальное определение бесконечного числа:

---

[35] Начала теории множеств Н.К.Верещагин, А.Шень. М 12г.стр.13

[36] Начала теории множеств Н.К.Верещагин,А.Шень. М 12г.стр.65

Пусть G — линейно упорядоченная группа a и b — положительные элементы. Элемент a называется **бесконечно малым** по отношению к элементу b (а b — **бесконечно большим** по отношению к a), если для любого натурального n имеет место неравенство $\underbrace{(a + a + ... + a)}_{n} < b$ [37] (ВП)

Но явно необходимый критерий здесь не указан. На основании практики остается предположить, что число n определяется только физическими или техническими возможностями самого человека. Числа разделяются на конструктивные $< b$ и более b, называются гипер – действительными.

33. Формула 2^A имеет одно отличие от прочих – в известных числовых системах это булеан (или множество – степень), количество комбинаций (перестановок, отображений) элементов одного множества на другое. В традиционной арифметике, в принятой системе исчисления – количество различных чисел (обычно 2 или 10) на множество позиций исчисления. Аргумент таков, что если найдено число не входящее в A, но входящее в булеан, то это нечто сверх всех «счетных» чисел и назвали «несчетным». Но аргумент весьма странен (как и в частной теореме Кантора новорожденный «диагональный аргумент»), если в булеане получена новая комбинация чисел и даже комбинация в следующем булеане от первого булеана, это все равно просто новое число совершенно аналогичное предыдущим, т.е. булеан тоже состоит из счетных чисел – потенциальная бесконечность бесконечна.

30. Кроме выше изложенных аргументов не приводится ни каких объяснений о том, что предлагаемая ступенчатая формула булеана от бесконечного счетного множества единственно возможная форма комбинаций, исчерпывает все числа и нет других вариантов комбинаций, условий и схем конструкции множеств другого типа и других чисел.

31. Даже если допустить, что в понятие булеана включены все мыслимые комбинации известных и вновь изобретаемых чисел, то можно конечно изобразить потенциальную шкалу по тому же общему принципу построения гипотетического булеана – B^{b***} но определять ее арифметической формулой 2^A или 2^{A***} без учета структуры нового множества явно будет неверно. Различать числа в таком обобщенном булеане будет еще сложнее.

32. Практически, при выполнении необходимых требований ко множествам и элементам: дискретность, индивидуальность элементов, учитывая доказанные теоремы о возможности упорядочивания любых множеств и наличия первого элемента, ничто не препятствует считать все бесконечности счетными, кроме одного аргумента – практической и теоретической недоступности числа. Но, если алгебраические числа считаются также счетными, то формулы также можно считать косвенными факторами счета чисел.

33. Следует отметить, что и в самой теории решения некоторых вопросов нельзя назвать достаточно удовлетворительными, особенно это касается математических сингулярностей, переходов или взаимоотношений противоположностей и некоторые другие вопросы.

34. Из элементов и подмножеств натуральных чисел могут быть составлены различные комбинации множеств других специфических чисел. Факторами появления чисел другого рода является в ряду чисел не достижение как предела согласно арифметической формулы 2^A (или другой), а появление новых операций, отношений, алгоритмов, программ. При этом возникают числа: дробные (интенсивная бесконечность) иррациональные, мнимые числа, комплексные и т.д. виртуальные относительно исходных. Но при некорректном абстрагировании от качества разных рядов чисел, получается иллюзия внезапного парадоксального увеличения мощности, в том числе названными трансфинитными, «шкалы мощностей» (экстенсивная бесконечность)

[37] https://ru.wikipedia.org/wiki/Аксиома_Архимеда

35. Эти множества образуют просто разные по качеству абстрактные бесконечности. Если данные системы имеют некоторые аналоги в действительности или применяются в качестве модели для исчисления некоторых специфических объектов на практике, то получают соответствующее оправдание. Как известно кардинальные числа кроме собственной теории особого применения не получили, поскольку это просто числа дублирующие действительные.

36. Учитывая, что теорема Кантора не может быть аргументом существования несчетной бесконечности отличной от счетной, следует считать любую числовую бесконечность счетной (в частности по Дедекинду), если ее элементы дискретны. Если нет, то нечего считать, это монолитный предмет, он единственен и в качестве множества не годится, его невозможно оценить ни числом, ни индукцией, остается только измерять его или аналогичные модели в геометрии различными способами.

37. В итоге, формально все бесконечные множества (или их мощности) количественно равны или не равны не потому, что существует какая – то необычная критическая формула вроде 2^{A} или любая другая, и не по причине применения упрощенной биекции ТМ, а потому, что бесконечность сама по себе имеет такие свойства: неограниченность, неопределенность величины и соответственно поглощения всех элементов, либо абсолютная как эквивалент в арифметике единственного множества всех множеств, либо относительная, величины которой могут быть различимы в зависимости от заложенных исходных данных и параметров элементов и конкретного множества - парадокс бесконечности, см. [Л-4].

Литература

1. Дискретная математика. Элементы теории множеств. Л.Шаповалова, В.Серегина. Уч.пособие. Зерноград 14г
2. Математический анализ. Ч.1 Зорич В.А. М изд. ЦНМО 2012г
3. Логика и Алгоритмы Факультет математики ВШЭ, 1-й курс, осень 2013 г. Л.Д. Беклемишев
4. Диалектика логических парадоксов. Коротких В.Ф.17.04.22г. dzen.ru›Общественный центр информации› (или trinitas.ru›rus/doc/0016/001h/4982-kr.pdf)
5. Начала теории множеств. Н.К.Верещагин, А.Шень М. Изд. МЦНМО 2012г
6. Наивная теория множеств и решение парадокса Кантор. Проза.ру *Никита Попов 2 2014г.* https://proza.ru/2014/03/11/2162
7. Математическая логика. А.Н.Колмогоров, А.Г.Драгалин. МГУ 2006г.
8. Основания теории множеств Френкель А.А. Бар-Хиллел И. Изд. «Мир» М 1966г
9. Инфинитезимальный анализ. Гордон Е.И, Кусраев А.Г, Кутателадзе С.С. Новосибирск 2006г
10. Гармоническая арифметика. Гл.2 Петросян В.К. М 1997г
11. Элементы теории множеств и математической логики. Л.Ю. Белова, Ю.А. Белов. Ярославль.12г
12. Основы дискретной математики ч.1 Кривцова И.Е, Лебедев И.С…Ун-т ИТМО С-П 2016г.
13. Введение в теорию множеств. Ануфриенко.С.А.Екатеринбург.1998г.
14. Введение в теорию множеств и топологию. Александров П.С. М.1977г.
15. Кантор Г. Труды по теории множеств. Ф.А.Медведев, П.С.Юшкевич «Наука» 1985г
16. Студопедия.Нет. Гл.V.Теория кардинальных чисел studopedia.net›3_41472_glava-V-teoriya…chisel.html

Коротких В.Ф. *17.10.2026г.*