М.А.Пирожков

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУРАХ В “НАЧАЛАХ” ЕВКЛИДА

“*Философия написана в величественной книге (я имею в виду Вселенную), которая постоянно открыта нашему взору, но понять ее может лишь тот, кто сначала научится постигать ее язык и толковать знаки, которыми она написана. Написана же она на языке математики, и* ***знаки ее – треугольники, круги и другие геометрические фигуры****, без которых человек не смог бы понять в ней ни единого слова; без них он был бы обречен блуждать в потемках по лабиринту “* [1].

Г. Галилей (1623 г.)

0. Трагедия открытия несоизмеримых чисел заставила греческих математиков отказаться от арифметики и алгебры в пользу геометрии. Уже в самой пифагорейской школе началось построение арифметики и алгебры на основе геометрии – так называемой геометрической алгебры (ГА), в которой для выполнения алгебраических операций использовалась геометрическая форма: ней оперировали не с числами, а с отрезками, прямоугольниками, окружностями.

Вот эту задачу и решал Евклид, создав 13 книг, описывающих геометрические фигуры (ГФ) без единой числовой привязки, только с помощью доказательных рассуждений и чертежей, так, чтобы они годились и для рациональных чисел и для несоизмеримых между собой величин.

Интересно, что “*уже софист Протагор отказался от представления, что геометрия основана на идеальных, вечных объектах. ...он утверждал, что касательная имеет с окружностью больше чем одну точку соприкосновения. Это будет верным, если иметь в виду не идеальные, а нарисованные или встречающиеся в природе линии и круги. но для Платона геометрическая фигура была не “предметом”, а “идеей”, которую можно охватить лишь мысленно. Платоновская геометрия является наукой, которой занимаются ради познания вечного бытия, а не того, что возникает и гибнет. Это убеждение в идеальном характере геометрических фигур является не просто красивой идеей Платона. По его мнению, только на этой идеальной, чисто разумной основе в математике вообще возможно получение неопровержимых результатов и убедительных доказательств*”[2].

Природа, в силу своей сложности, создает ГФ, даже такие, вроде бы простые, как треугольник, квадрат и другие в иррациональном исполнении, т.е. содержащими иррациональные отрезки. Но, как известно, абсолютно точное измерение невозможно, поэтому никакие реальные предметы не имеют точных размеров. Греческая геометрия постепенно отдалялась от опыта и ее предмет составляли уже не реальные, а идеальные фигуры. Таким образом, геометрия отделилась от действительности, ее предмет исследования становится идеальным, только мыслимым. Как пишет А.Д.Александров “*В геометрии заключается противоречие: будучи наукой об идеальных, только мыслимых, фигурах, она считалась безусловно верной для реальных форм и отношений при предельном их уточнении”* [3]. Поясним это на конкретных ГФ, представленных в “НАЧАЛАХ”.

1.1. Правильный треугольник. Начинаем с него, т.к. самое первое, в этом грандиозном трактате “НАЧАЛА”, дано посвященное треугольнику

Предложение 1. На данной ограниченной прямой построить равносторонний треугольник.

И далее начинается практическая геометрия (Рис.1, где штриховка означает иррациональный отрезок): из центра А раствором АВ описывается круг (!) (постулат 3),

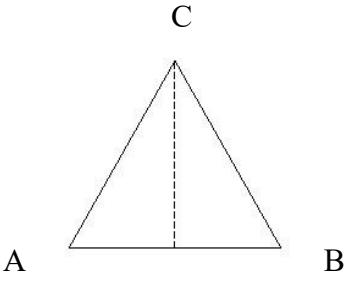


Рис.1

затем из центра В - второй и из точки С, в которой круги пересекаются, проводятся к точкам А и В соединяющие прямые СА и СВ.

При построении ГФ даже духа каких-то циркулей и линеек не выносится и не упоминается (“раствор АВ”, “соединяющие прямые”) – все идеально изящно, сугубо абстрактно и строго математично.

А дальше идет теоретическая геометрия: доказывается, что в силу таких-то и таких причин прямые (!) АВ, АС и ВС оказываются равными, а следовательно, построенный треугольник АВС равносторонний (определение 20).

Вот так, вроде бы, все красиво и аккуратно, а на самом деле одна из координат точки С является иррациональным числом, поскольку, если АВ=2, то DC = y_c = $\sqrt{3}$. Поэтому пересечение прямых в точке С является фиктивным в силу иррациональности $\sqrt{3}$ [4]. Эта точка обретет свое место лишь актуально в недоступной для нас “бесконечной” последовательности итераций, где, наконец, складывается равносторонний треугольник. Кстати, эта ситуация отмечается и ревнителями логической строгости: пусть С есть точка пересечения двух построенных окружностей. Но откуда видно, что эти две окружности пересекаются. Это не вытекает ни из каких постулатов и аксиом, а устанавливается на основании чертежа. Подтверждается замечание *Н.Г. Абеля:*

” Геометрия – это искусство хорошо рассуждать на плохо выполненных чертежах”.

В наших же условиях, построение это происходит приближенно, с погрешностями, которые невозможно устранить и приходиться довольствоваться “кривотреугольником”. Таким образом, “НАЧАЛА” описывают ГФ, существующие лишь мысленно, абстрактно, идеально. И к таким ГФ в актуальном пределе приближаются предложенные приближенные построения.

Альтернативный подход состоит в аппроксимации правильного треугольника пифагоровыми треугольниками [5]. Вместо треугольника ACD, искаженного иррациональной стороной CD, находится пифагоров треугольник с рациональными размерами. Для этого возьмем пифагоров треугольник с катетами m и n и гипотенузой 2m+1 и, после составления уравнения связи, вычислим искомые m и n. Одним из решений является пара: m = 4541160, n = 7865521, следовательно, пифагоров треугольник имеет вид (4541160; 7865521; 9082321). Тогда, после нормировки получается треугольник со сторонами (1/2; 7865521 / 9082320; 9082321 / 9082320) или в десятичных дробях (0.5; 0.8660255; 1.0000001). Соединяя эти два треугольника, получаем искомый (1; 1.0000001; 1.0000001). Увеличивая значения m и n, получаем треугольники с любой степенью точности приближения.

1.2. Золотой треугольник. Это треугольник (Рис.2) является составной частью пятиугольника.

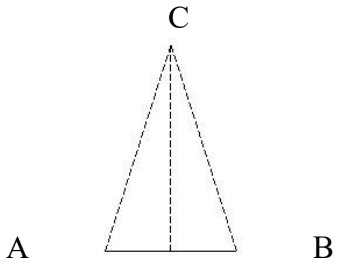


Рис.2

Как и в п.1.1, можно аппроксимировать и Золотой треугольник с высотой CD = $\sqrt{(5+2\sqrt{5})}$ = 3.077…, стороны которого равны соответственно (2; $\sqrt{5}$ +1; $\sqrt{5}$ +1), что в десятичном приближении соответствует (2; 3.236…; 3.236…). Разделив его по высоте CD пополам, будем аппроксимировать одну из половин пифагоровыми треугольниками вида (1; k; n). После составления уравнения взаимозависимости параметров, получаем числовые значения сторон пифагорова треугольника от простейшего (1; 35/12; 37/12) или в десятичных дробях (1; 2.916; 3.083) до более точного (1; 176/57; 185/57), что соответствует (1; 3.087; 3.245). После соединения треугольников в одно целое получаем приближение к золотому треугольнику (2; 3.245; 3.245).

Вот эта цепь все более улучшающихся приближений пифагоровых треугольников и ведет к истинным ГФ.

2. Квадрат. Переходим к одной из наиболее необычных фигур в смысле реальности построения: кажется, что может быть проще построения квадрата. Вот как это делается в “НАЧАЛАХ” (Книга 1):

Предложение 46. (Следующее предложение - доказательство теоремы Пифагора) **На данной прямой надстроить квадрат.**

Откладывается к прямой AB от точки A под прямым углом (предложение 11) AD равный AB (предложение 2) (Рис.3), затем через точку D параллельно AB проводится DE (предложение 31) , и, наконец, через точку B параллельно A D проводится BE (предложение 31).

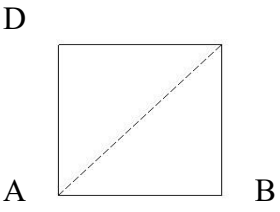


Рис.3

После построения сначала устанавливается, что ADEB есть параллелограмм, а потом доказывается, что он равносторонний и прямоугольный, т.е. квадрат.

Можно представить с какой точностью строятся перпендикуляры и откладываются отрезки, но оказывается, для греческих математиков, не это самое главное. Вот объяснение Платона в «Государстве»:

«Разве ты не знаешь, что, хотя они и используют видимые формы и рассуждают о них, мыслят они не о самих формах, а об идеалах, с которыми не имеют сходства; не о фигурах, которые они чертят, а об абсолютном квадрате, и абсолютном диаметре… и что в действительности геометры стремятся постичь то, что открыто лишь мысленному взору?»

Но геометрия, хоть и отделенная от арифметики и алгебры, должна оставаться точной наукой. А здесь неточность создает диагональ AE квадрата. Прообразом этого

квадрата является равнобедренный, да еще и “прямоугольный” треугольник, чего на самом деле не бывает [5] в силу **невозможности существования конструкция из трех отрезков, когда длина одного из них находится в бесконечно изменяющемся детерминированном процессе постоянного приближения к значению, обозначенному “**√2**“, и никогда его не достигающего** (актуально не в счет-это для высшего разума, а не для конкретной математики). Невероятно, но эту проблему обсуждал еще Демокрит: “ ***…квадрат с равными сторонами существует лишь в мнении людей, в действительности же всякий квадрат является прямоугольником,*** *у которого основание отличается от высоты на такую малую величину, которая не воспринимается нашим зрением и осязанием. Действительно, не существует таких пифагоровых троек, в которых одно катетное число равно другому, и поэтому в обычном равно-равном квадрате диагональ не может быть соизмерима со стороной* “ [6].

Вот поэтому, приведем пример квазиквадрата, а именно прямоугольника, аппроксимирующего квадрат, для чего вначале построим пифагоров треугольник с почти равными катетами (m, m+1, n). После составления соответствующих уравнений связи параметров m и n, вычисляются сами эти значения от простейшего (3; 4; 5) до более точных (119; 120; 169), (23660; 23661; 33461), (803760; 803761; 1136689) и т.д. Последняя тройка после нормировки имеет вид (1; 1.000001; 1.414214) и это, естественно, не самое лучшее приближение. Точность приближения предполагает неограниченное увеличение. Совместив пару пифагоровых треугольников, приведенных в последнем случае, получаем приближение квадрата в виде прямоугольника со сторонами 1 и 1.000001.

Таким образом, **истинный квадрат, как и правильный треугольник выше, являются лишь предельной формой аппроксимирующих их фигур**.

Любопытные рассуждения о сущности квадрата читаем в [7]: “ *Пропорции архитектурных сооружений типа 1: √2 и им подобные легко объяснить ссылкой на прямоугольники и квадраты – простейшие ГФ, взятые в основу архитектурных построений. Но как объяснить применение пропорции 20 :21? … почему зодчие древнего мира предпочли правильному квадрату со сторонами 1 : 1 слегка искаженный со сторонами 1 : 1.05? Может быть, им не понравился правильный квадрат по его эстетическим критериям? Такой квадрат они могли посчитать “мертвым”, лишенным динамики и предпочли ему неправильный, слегка искаженный, но “живой”. Ведь к подобной идее пришли их коллеги по профессии спустя тысячелетия, а новое, как известно, это хорошо забытое старое*”.

3. Двойной квадрат. Им является прямоугольник ABCD со сторонами AC = 1, AB = 2 и диагональю BC = √5= 2.236… (Рис.4), являющийся как бы обобщением квадрата и

A B



C D

Рис.4

допускающим такое же исследование своей природы. Поэтому рассмотрим треугольник ABC, имеющий вид (1; 2; √5) и построим для него аппроксимирующую модель как пифагоров треугольник (m; 2m+1; n). После вычисления параметров m; n находим и сами треугольники в пределах от (136; 273; 305), что соответствует (1; 2.007;

2.242), до, например, (14142232; 28284465; 31622993) или (1; 2.0000002; 2.2360682) После совмещения треугольников получаем прямоугольник со сторонами 1 и 2.0000002.

Любопытное замечание относительно треугольника АВС сделано в книге [8]: *“Хорошо известный в древнем мире простой прямоугольный треугольник с отношением катетов 1:2 мог послужить основой для открытия теоремы Пифагора, Золотого сечения и, наконец, несоизмеримых отрезков – трех великих математических открытий, приписываемых Пифагору”.*

Множество остальных ГФ, имеющих быть в учебниках геометрии, могут рассматриваться с тех же позиций. Получается, что все ГФ в геометрии вопреки, казалось бы, статичности существования, являются динамическими фигурами в смысле подвижности составляющих их отрезков.

Вот еще, что можно добавить к обсуждаемому вопросу [9]:

“Сами геометрические построения являются, по определению, схематическим, а потому идеализированным отображением предметов и тел реального мира. Описание производится путем перенесения качественного отображения тел на абстрактные понятия «точки», «прямой», «плоскости», «угла» и т.д. Данные понятия, заменяя естественные тела, с ними никоим образом не связаны и являются внешним признаком их существования. Особо отметим, что понятия эти не возникают при абстрагировании от реальных объектов, а определяются аксиомами вне прямой связи с реальным пространством или телами. Это самая важная особенность геометрии, как, по-видимому, и всей математики”.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галилео Галилей, Пробирных дел мастер, М., 1987.
2. Зеннхаузер В., Платон и математика, СПб, 2016.
3. Александров А.Д., Избранные труды. Педагогические статьи разных лет, СПб, 2016.
4. О возможности построения отрезков иррациональной длины // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.29608, 30.07.2025.
5. А существует ли прямоугольный треугольник со сторонами 1, 1,√2 // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.29213, 11.11.2024.
6. Маковельский А.О., Древнегреческие атомисты, Баку, 1946.
7. Васютинский Н. Золотая пропорция, М., 1990.
8. Стахов А. и др., Код да Винчи и ряды Фибоначчи, М., 2006.
9. Черняев А.Ф., Основы русской геометрии, М., 2004.