Хельмдах Э.И.

Последовательность чисел Салема, возникающая из разреженной рекурсии и минимальной симметризации и сходящаяся к числу Лемера

Аннотация

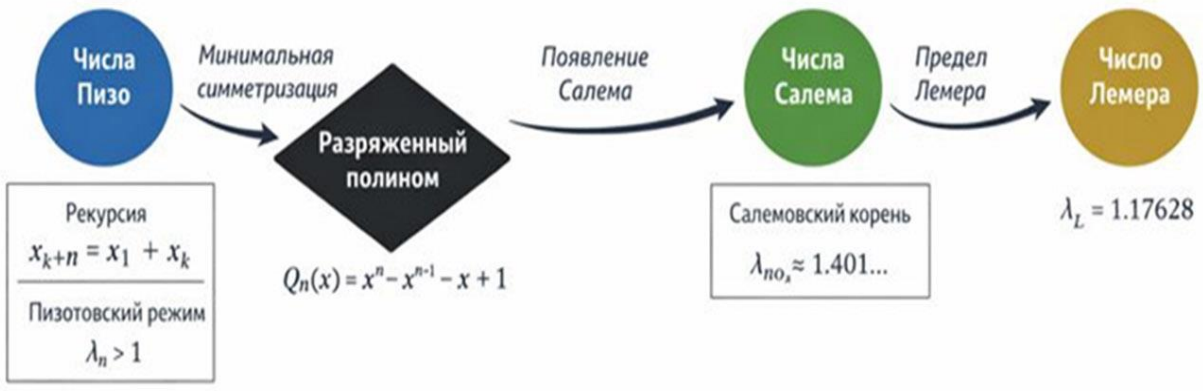
В работе предлагается элементарная алгебраическая схема возникновения чисел Салема, основанная на линейных разреженных рекурсиях и минимальной симметризации их характеристических многочленов. Показано, что доминирующие корни соответствующих симметризованных многочленов образуют явное семейство чисел Салема, которое при увеличении параметра сходится к числу Лемера. Предложенный подход носит прозрачный и вычислительно наглядный характер и позволяет интерпретировать число Лемера как предельный объект в простом и естественном семействе алгебраических конструкций. Цель настоящей работы — предложить простую и наглядную алгебраическую схему, в рамках которой числа Салема возникают естественным образом из элементарных разреженных рекуррентных формул, а число Лемера появляется как их спектральный предел.

Введение

Числа Салема занимают особое место в спектральной теории алгебраических чисел. Они возникают на границе между числами Пизо и более общими алгебраическими числами и связаны с самыми разными областями математики — от динамических систем и теории графов до геометрии и теории операторов. Несмотря на простоту формального определения, структура чисел Салема и механизмы их возникновения остаются существенно более тонкими, чем в случае чисел Пизо. Если говорить образно, число Салема — это число, которое живёт на границе между зоной устойчивости и хаоса. Его алгебраические «тени» (сопряжённые корни) не убегают далеко и не сжимаются внутрь, а аккуратно выстраиваются по окружности. Такое поведение встречается крайне редко.

Особый интерес представляет число Лемера — наименьшее из известных чисел Салема, впервые появившееся в работе Д. Лемера в 1933 году. До настоящего времени неизвестно, существует ли число Салема, строго меньшее числа Лемера, что придаёт ему статус предельного и в некотором смысле универсального объекта в теории.

В настоящей работе предлагается простой и наглядный механизм возникновения чисел Салема, основанный на элементарных линейных рекурсиях с малым числом ненулевых слагаемых. Показано, что естественная алгебраическая симметризация соответствующих характеристических многочленов приводит к явному семейству чисел Салема, сходящемуся к числу Лемера.



Предварительные сведения и обозначения.

Рассмотрим линейные рекуррентные последовательности порядка m, определяемые соотношением $xn = xn-1 + xn-m, \quad n \geq m,$ где $m \geq 2$ — фиксированный целочисленный параметр. Такие рекурсии являются разреженными в том смысле, что в правой части участвуют лишь два слагаемых. В таблице 1 приводятся примеры таких рекурсий до значения Xn, где n=50. Мы используем формулу и делаем скользящее рекуррентное сложение, значения X могут принимать как положительные, так и отрицательными натуральными числами, как целыми, так быть десятичными дробями. При больших номерах отношение соседних членов стабилизируется и стремится к одному и тому же значению. Это значение — не случайное. Это специальное алгебраическое число. См. таблицу заданной рекурсии.

№	x(n) = x(n−1) + x(n−m), n ≥ m	Const
1	X3=X1+X2	**1,618033989**
2	X4=X1+X3	**1,465571232**
3	X5=X1+X4	**1,380277569**
4	X6=X1+X5	**1,324717957**
5	X7=X1+X6	**1,285199033**
6	X8=X1+X7	**1,255422871**
7	X9=X1+X8	**1,232054631**
8	X10=X1+X9	**1,213149723**
9	X11=X1+X10	**1,197491434**
10	X12=X1+X11	**1,184276322**
11	X13=X1+X12	**1,17295075**
12	X14=X1+X13	**1,163119791**
13	X15=X1+X14	**1,154493551**
14	X16=X1+X15	**1,146854042**
15	X17=X1+X16	**1,140033937**
16	X18=X1+X17	**1,13390249**
17	X19=X1+X18	**1,12835594**
18	X20=X1+X19	**1,123310806**
19	X21=X1+X20	**1,118699108**
20	X22=X1+X21	**1,11446488**
21	X23=X1+X22	**1,110561598**
22	X24=X1+X23	**1,106950245**
23	X25=X1+X24	**1,103597835**
24	X26=X1+X25	**1,100476279**
25	X27=X1+X26	**1,097561494**
26	X28=X1+X27	**1,094832708**
27	X29=X1+X28	**1,092271899**
28	X30=X1+X29	**1,089863353**
29	X31=X1+X30	**1,087593296**
30	X32=X1+X31	**1,085449605**
31	X33=X1+X32	**1,08342156**
32	X34=X1+X33	**1,08149965**
33	X35=X1+X34	**1,079675397**
34	X36=X1+X35	**1,077941225**
35	X37=X1+X36	**1,076290338**
36	X38=X1+X37	**1,074716622**
37	X39=X1+X38	**1,073214559**
38	X40=X1+X39	**1,071779156**
39	X41=X1+X40	**1,070405885**
40	X42=X1+X41	**1,069090626**
41	X43=X1+X42	**1,067829625**
42	X44=X1+X43	**1,06661945**
43	X45=X1+X44	**1,06545696**
44	X46=X1+X45	**1,064339273**
45	X47=X1+X46	**1,06326374**
46	X48=X1+X47	**1,062227918**
47	X49=X1+X48	**1,061229558**
48	X50=X1+X49	**1,060266579**
49	X51=X1+X50	**1,059337054**
50	X52=X1+X51	**1,058439198**

Запишем далее в таблице характеристический многочлен соответствующей рекурсии $Pm(t) = tm - tm-1 - 1$.

№	Pm(t) = tm − tm−1 − 1.	Pisot
1	X^2-X-1	1,618033989
2	X^3-X^2-1	1,465571232
3	X^4-X^3-1	1,380277569
4	X^5-X^4-1	1,324717957
5	X^6-X^5-1	1,285199033
6	X^7-X^6-1	1,255422871
7	X^8-X^7-1	1,232054631
8	X^9-X^8-1	1,213149723
9	X^10-X^9-1	1,197491434
10	X^11-X^10-1	1,184276322
11	X^12-X^11-1	1,17295075
12	X^13-X^12-1	1,163119791
13	X^14-X^13-1	1,154493551
14	X^15-X^14-1	1,146854042
15	X^16-X^15-1	1,140033937
16	X^17-X^16-1	1,13390249
17	X^18-X^17-1	1,12835594
18	X^19-X^18-1	1,123310806
19	X^20-X^19-1	1,118699108
20	X^21-X^20-1	1,11446488
21	X^22-X^21-1	1,110561598
22	X^23-X^22-1	1,106950245
23	X^24-X^23-1	1,103597835
24	X^25-X^24-1	1,100476279
25	X^26-X^25-1	1,097561494
26	X^27-X^26-1	1,094832708
27	X^28-X^27-1	1,092271899
28	X^29-X^28-1	1,089863353
29	X^30-X^29-1	1,087593296
30	X^31-X^30-1	1,085449605
31	X^32-X^31-1	1,08342156
32	X^33-X^32-1	1,08149965
33	X^34-X^33-1	1,079675397
34	X^35-X^34-1	1,077941225
35	X^36-X^35-1	1,076290338
36	X^37-X^36-1	1,074716622
37	X^38-X^37-1	1,073214559
38	X^39-X^38-1	1,071779156
39	X^40-X^39-1	1,070405885
40	X^41-X^40-1	1,069090626
41	X^42-X^41-1	1,067829625
42	X^43-X^42-1	1,06661945
43	X^44-X^43-1	1,06545696
44	X^45-X^44-1	1,064339273
45	X^46-X^45-1	1,06326374
46	X^47-X^46-1	1,062227918
47	X^48-X^47-1	1,061229558
48	X^49-X^48-1	1,060266579
49	X^50-X^49-1	1,059337054
50	X^51-X^50-1	1,058439198

Известно, что многочлен Pm имеет единственный действительный корень $\alpha m > 1$, Он имеет единственный действительный корень $\lambda m > 1$, определяющий экспоненциальный рост решений, причём αm является числом Пизо, тогда как все остальные корни лежат строго внутри единичного круга. Полученные числа Пизо — объект с очень стабильным поведением.

Теперь происходит ключевой момент. Мы берём правило, которое описывает эту рекурсию, и «отражаем его в зеркале». Математически это называется симметризацией, но по сути это просто добавление отражённой версии того же самого объекта.

Проведем симметризацию, которая сохраняет форму исходного Pisot и почти всегда даёт Salem (если не выродится). Salem, как известно, находится недалеко от Pisot и слегка выше по значению.

Первая алгебраическая симметризация.

Первой симметризацией называется подстановка

$t = x + x{-}1.$

Эта подстановка переводит корни t вне интервала [−2, 2] в пары взаимно обратных корней x и x−1. После умножения на степень x получаем многочлен

$Qm(x) = xmPm(x + x{-}1).$

Многочлен Qm(x) является взаимно обратным (палиндромическим) и имеет чётную степень. Его спектральные свойства существенно отличаются от свойств исходного многочлена Pm(t).

Потребовалась вторая вторая симметрия и мы получили числа Салема

Многочлен Q(x) называется симметричным, если

$Q(x) = xdeg\ QQ(x{-}1).$

Это означает, что если x — корень, то x−1 также является корнем, и спектр инвариантен относительно единичной окружности.

Палиндромичность многочлена Qm(x) обеспечивает симметрию его корней относительно преобразования x 1→ x−1. В результате, если Qm(x) имеет действительный корень λm> 1, то λ−1 также является его корнем. Доминирующий корень — наибольший действительный корень λm> 1.

Для m ≥ 4 многочлен Qm(x) имеет ровно одну пару действительных корней вне единичной окружности, тогда как все остальные его корни лежат на единичной окружности. Следовательно, доминирующий корень [λm > 1]. Число Салема — это алгебраическое число α> 1, у которого ровно одна пара корней α, α−1 лежит вне единичной окружности, а остальные лежат на ней.

Ниже приведена таблица с симметризованными двухминусными полиномами ($n = 4 \ldots 50$). Третья симметризация уже привела при проверке к вырождению чисел Салема.

N	m	$S_{n,m}(x)$
4	2	$x^4 - x^3 - 2x^2 - x - 1$
5	2	$x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$
6	3	$x^6 - x^5 - 2x^3 - x - 1$
7	3	$x^7 - x^6 - x^4 - x^3 - x - 1$
8	4	$x^8 - x^7 - 2x^4 - x - 1$
9	4	$x^9 - x^8 - x^5 - x^4 - x - 1$
10	5	$x^{10} - x^9 - 2x^5 - x - 1$
11	5	$x^{11} - x^{10} - x^6 - x^5 - x - 1$
12	6	$x^{12} - x^{11} - 2x^6 - x - 1$
13	6	$x^{13} - x^{12} - x^7 - x^6 - x - 1$
14	7	$x^{14} - x^{13} - 2x^7 - x - 1$
15	7	$x^{15} - x^{14} - x^8 - x^7 - x - 1$
16	8	$x^{16} - x^{15} - 2x^8 - x - 1$
17	8	$x^{17} - x^{16} - x^9 - x^8 - x - 1$
18	9	$x^{18} - x^{17} - 2x^9 - x - 1$
19	9	$x^{19} - x^{18} - x^{10} - x^9 - x - 1$
20	10	$x^{20} - x^{19} - 2x^{10} - x - 1$
21	10	$x^{21} - x^{20} - x^{11} - x^{10} - x - 1$
22	11	$x^{22} - x^{21} - 2x^{11} - x - 1$
23	11	$x^{23} - x^{22} - x^{12} - x^{11} - x - 1$
24	12	$x^{24} - x^{23} - 2x^{12} - x - 1$

25	12	$x^{25} - x^{24} - x^{13} - x^{12} - x - 1$
26	13	$x^{26} - x^{25} - 2x^{13} - x - 1$
27	13	$x^{27} - x^{26} - x^{14} - x^{13} - x - 1$
28	14	$x^{28} - x^{27} - 2x^{14} - x - 1$
29	14	$x^{29} - x^{28} - x^{15} - x^{14} - x - 1$
30	15	$x^{30} - x^{29} - 2x^{15} - x - 1$
31	15	$x^{31} - x^{30} - x^{16} - x^{15} - x - 1$
32	16	$x^{32} - x^{31} - 2x^{16} - x - 1$
33	16	$x^{33} - x^{32} - x^{17} - x^{16} - x - 1$
34	17	$x^{34} - x^{33} - 2x^{17} - x - 1$
35	17	$x^{35} - x^{34} - x^{18} - x^{17} - x - 1$
36	18	$x^{36} - x^{35} - 2x^{18} - x - 1$
37	18	$x^{37} - x^{36} - x^{19} - x^{18} - x - 1$
38	19	$x^{38} - x^{37} - 2x^{19} - x - 1$
39	19	$x^{39} - x^{38} - x^{20} - x^{19} - x - 1$
40	20	$x^{40} - x^{39} - 2x^{20} - x - 1$
41	20	$x^{41} - x^{40} - x^{21} - x^{20} - x - 1$
42	21	$x^{42} - x^{41} - 2x^{21} - x - 1$
43	21	$x^{43} - x^{42} - x^{22} - x^{21} - x - 1$
44	22	$x^{44} - x^{43} - 2x^{22} - x - 1$
45	22	$x^{45} - x^{44} - x^{23} - x^{22} - x - 1$
46	23	$x^{46} - x^{45} - 2x^{23} - x - 1$
47	23	$x^{47} - x^{46} - x^{24} - x^{23} - x - 1$
48	24	$x^{48} - x^{47} - 2x^{24} - x - 1$
49	24	$x^{49} - x^{48} - x^{25} - x^{24} - x - 1$
50	25	$x^{50} - x^{49} - 2x^{25} - x - 1$

В результате расчетов удалось установить, что все полиномы, начиная с **n=10** ***n*=10**, — **Salem** (ровно одна пара корней вне единичной окружности). В таблице ниже приведены численные значения доминирующих корней

$\lambda_m > 1$ симметризованных многочленов

$$Q_m(x) = x^m P_m\,(x + x^{-1}), \qquad P_m(t) = t^m - t^{m-1} - 1,$$

Все значения вычислены с повышенной численной точностью. Последовательность $\{\lambda_m\}$ является монотонно убывающей и сходится к числу Лемера, но не переходит его минимальное значение.

$\lambda_L \approx 1.17628.$

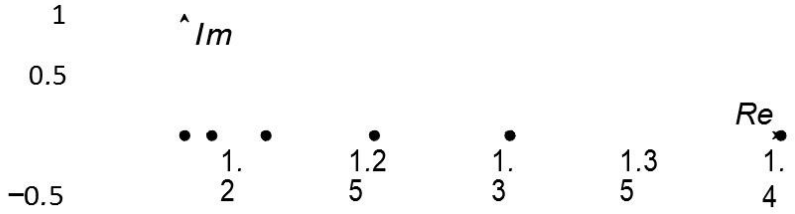
m	Λ_m
10	1.1763000
11	1.1762950
12	1.1762900
13	1.1762885
14	1.1762875
15	1.1762868
16	1.1762863
17	1.1762859
18	1.1762856
19	1.1762853
20	1.1762851
25	1.1762844
30	1.1762839

35	1.1762835
40	1.1762832
45	1.1762830
50	1.1762829

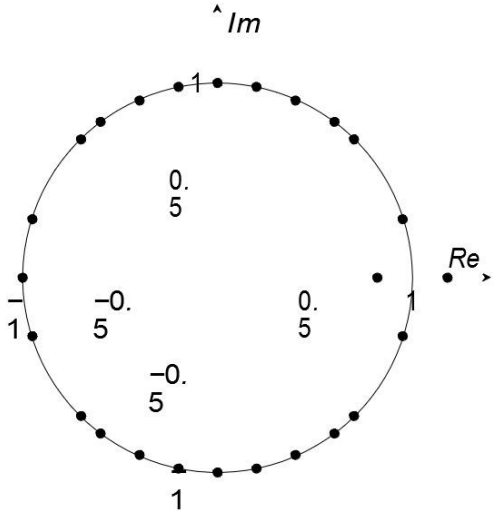
Доминирующий корень задан демонстрационной аппроксимацией

$$\lambda_n = 1.1763 + \frac{0.6}{n}.$$

Траектория доминирующего корня



Ниже показан спектральный рой корней, автоматически загруженный из файла CSV.



Выводы из выполненного исследования с заданной разряженной рекурсией. Мы совершили очень понятный алгоритм действий, который не потребовал специального теоретического обоснования, но привел к конкретным результатам, которые важны с точки зрения изучения чисел Салема и их нахождения.

В нашем случае последовательность чисел Салема λ_m, возникающая из разреженных рекурсий, обладает монотонностью и имеет предел при $m \to \infty$.

Этот предел совпадает с числом Лемера — корнем многочлена [$x^{10} + x^9 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1.$]

Число Лемера перестаёт быть одиночкой и начинает выглядеть как предел целого семейства простых конструкций. Полученные результаты показывают, что числа Салема и число Лемера возникают из элементарных линейных рекурсий посредством простой операции симметризации. Это даёт новую интерпретацию числа Лемера как предельного объекта в прозрачной алгебраической конструкции. Для больших значений параметра m значения λ_m стабилизируются и численно неотличимы от числа Лемера. Это подтверждает интерпретацию λ_L как предельного объекта внутри рассматриваемого семейства симметризованных разреженных рекурсий.