Н.Ф. Семенюта

ВЗАИМОСВЯЗЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ С ПРАВИЛАМИ КИРХГОФА И ТОЖДЕСТВАМИ КАССИНИ

В статье приведены результаты исследования электрической модели последовательности чисел Фибоначчи по правилам Кирхгофа и тождествами Кассини. Правила Кирхгофа для токов и напряжений были установлены на начальной стадии становления электротехники (1841). В статье в дополнение к правилам Кирхгофа рассмотрено правило силы электрического тока – электрической мощности и ее взаимосвязи с известным в теории чисел тождествами Кассини (1860). Показана тождественность формул мощностей потребляемых резистивными сопротивлениями лестничной электрической цепи и тождествами типа Кассини.

В целом работа носит эвристический характер и еще раз подтверждает фундаментальность лестничных электрических цепей как моделей природы, искусства, науки и техники и др.

Исходные положения

Основной математической последовательностью чисел Фибоначчи является последовательность:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12},	(1)
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144,	

которая образуется по рекуррентному соотношению:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad F_1 = 1, \;\; F_2 = 1. \tag{2}$$

Числам последовательности Фибоначчи (1) характерны следующие свойства:

- сумма первых n чисел последовательности:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1, \tag{3}$$

- сумма первых n чисел с нечетными номерами:

$$F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}, \tag{4}$$

- сумма первых n чисел с четными номерами:

$$F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1 \tag{5}$$

- сумма квадратов первых n чисел последовательности

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}. \tag{6}$$

Квадраты нечетных и четных членов последовательности (6) определяются тождеством, установленным в 1680 г. французским астроном Джованни Кассини (1625–1712), директором Парижской обсерватории:

$$F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1},$$

Тождество Кассини привлекало умы многих зарубежных и отечественных исследователей и ученых прошлых лет и наших современников [9 –16].Так, в работе М. И. Яглома (1921–1988) «Как разрезать квадрат?» приведено значение квадрата чисел Фибоначчи через суммы произведений смежных членов

$$F_1F_2 + F_2F_3 + F_3F_4 + \ldots + F_{2n\text{-}1}F_{2n} = F_{2n}^2, \quad (8)$$

$$F_1F_2 + F_2F_3 + F_3F_4 + \ldots + F_{2n}F_{2n+1} = F_{2n+1}^2 - 1. \quad (9)$$

Электрическая модель рекуррентной последовательностей чисел

Электрической моделью рекуррентной последовательности чисел является лестничная электрическая цепь, состоящая из n-го числа цепного соединения четырехполюсников с продольными и поперечными резисторами одинаковой величины $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_н$ и сопротивления нагрузки любой величины $R_7 = R_н$ (рисунок 1) [1 – 3].

В случае $n = 3$ электрическая цепь, состоит из трех четырехполюсников на резистивных сопротивлениях $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 1$ и сопротивления нагрузки $R_н = R_7 = 1$ (рисунок 1).

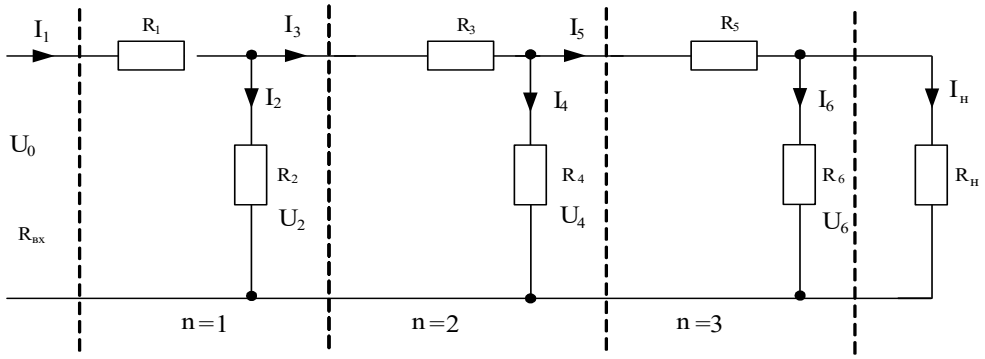

Рисунок 1 – Электрическая модель рекуррентных последовательности чисел

Токи продольных и поперечных ветвей четырехполюсников электрической модели определяются законом Ома:

$$I = \frac{U}{R},$$

где I – сила тока в цепи, Ампер; U — электрическое напряжение на участке цепи, Вольт; R – электрическое сопротивление ветви цепи, Ом.

Конкретные значения токов ветвей такой цепи ($n = 3$) при значениях резисторов $R_n = 1$ и нагрузки $R_н = R_7$ определяются по выражениям:

$$I_1 = \frac{U_0\{(R_6 + R_7)[(R_2 + R_3)(R_4+R_5) + R_4R_5] + R_6R_7(R_2+R_3+R_4)\}}{\text{Н}};$$

$$I_2 = \frac{U_0\{(R_6+R_7)[R_5(R_3+R_4) + R_3R_4] + R_6R_7(R_3+R_4)\}}{\text{Н}};$$

$$I_3 = \frac{U_0R_2[(R_4+R_5)(R_6+R_7) + R_6R_7]}{\text{Н}};$$

$$I_4 = \frac{U_0 R_2 [R_5 (R_6 + R_7) + R_6 R_7]}{\text{H}};$$

$$I_5 = \frac{U_0 R_2 R_4 (R_6 + R_7)}{\text{H}};$$

$$I_6 = \frac{U_0 R_2 R_4 R_7}{\text{H}},$$

$$I_7 = \frac{U_0 R_2 R_4 R_6}{\text{H}},$$

$$\text{H} = (R_6 + R_7)[R_1(R_2 + R_3)(R_4 + R_5) + R_2 R_3 (R_4 + R_5) + R_4 R_5 (R_1 + R_2)] +$$

$$+ R_6 R_7 (R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2].$$

Токи электрической модели последовательности чисел Фибоначчи

В электрической модели рекуррентных последовательностей чисел резисторы продольных и поперечных ветвей $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 1$ и резистор нагрузки $R_н = R_7 = 1$. При этом токи ветвей и нагрузки, равны отношениям:

$$I_1 = \frac{13U_0}{21}, \quad I_2 = \frac{8U_0}{21}, \quad I_3 = \frac{5U_0}{21}, \quad I_4 = \frac{3U_0}{21}, \quad I_5 = \frac{2U_0}{21}, \quad I_6 = \frac{1U_0}{21}, \quad I_7 = \frac{1U_0}{21},$$

$$I_1 = \frac{F_7}{F_8} U_0, \; I_2 = \frac{F_6}{F_8} U_p, \; I_3 = \frac{F_5}{F_8} U_0, \; I_4 = \frac{F_4}{F_8} U_0, \; I_5 = \frac{F_3}{F_8} U_0, \; I_2 = \frac{F_2}{F_8} U_0, \; I_1 = \frac{F_1}{F_8} U_0.$$

.

При напряжении на входе цепи $U_0 = F_8 = 21$, токи ветвей и нагрузки цепи равны числам Фибоначчи:

$$I_1 = F_7 = 13, \; I_2 = F_6 = 8, \; I_3 = F_5 = 5, \; I_4 = F_4 = 3, \quad I_5 = F_3 = 2, \quad I_6 = F_2 = 1, \quad I_7 = F_1 = 1.$$

Правила Кирхгофа – токи и напряжения электрической модели

При расчёте токов и напряжений лестничных электрических цепей применяются правила Кирхгофа для **узлов, ветвей и контуров** цепи [5]. Первое правило (правило токов) Кирхгофа для узлов цепи: ***алгебраическая ветвей цепи, сходящихся в каждом узле цепи, равна нулю*.** При этом втекающий к узлу ток принято считать положительным, а вытекающий от узла – отрицательным, т. е. алгебраическая сумма токов, втекающих к узлу цепи, равна сумме токов вытекающих от узла.

В соответствии с этим правилом токи узлов электрической цепи (см. рисунок 1) для случая определяются рекуррентными соотношениями:

$$I_1 = I_2 + I_3, \qquad I_3 = I_4 + I_5, \qquad I_5 = I_6 + I_7,$$

$$F_7 = F_6 + F_5, \qquad F_5 = F_4 + F_3, \qquad F_3 = F_2 + F_1,$$

и значение общего тока на входе цепи I_1 равно сумме токов продольных ветвей:

$$I_1 = I_2 + I_4 + I_6 + I_7,$$

$$I_1 = F_6 + F_4 + F_2 + F_1 = F_{2n+1}.$$

Второе правило Кирхгофа (правило напряжений*)* для ветвей каждого четырехполюсников: ***алгебраическая сумма напряжений ветвей замкнутого контура цеп равна нулю.*** При этом:

$$U_0 = U_1 + U_2, \qquad U_2 = U_3 + U_4, \qquad U_4 = U_5 + U_6,$$

$$U_0 = F_8 = F_7 + F_6, \qquad U_2 = F_6 = F_5 + F_4, \qquad U_4 = F_4 = F_3 + F_2,$$

Значение напряжения на входе цепи U_0 (напряжение всего контура цепи) равно сумме напряжений продольных резисторов и напряжения оконечного резистора нагрузки:

$$U_0 = U_1 + U_3 + U_5 + U_7,$$

$$U_0 = F_8 = F_7 + F_5 + F_3 + F_1 = F_{2n+2}$$

Из полученных результатов токов и напряжений цепи следует, что они совпадают со свойствами числа Фибоначчи (3) – (6).

.

Правило мощности электрической модели

Одним из показателей электрической цепи является такая физическая величина как **электрическая мощность –** скорость передачи или преобразования электрической энергии в другие виды энергии, например, тепловую, световую, механическую и др. Этот показатель не вошел в правила Кирхгофа и причиной этого, очевидно, было то, что во время создания правил наука еще не располагала этим показателем. Он появился только после появления приборов для измерения токов и напряжений электрических цепей. Поэтому в дополнение к рассмотренным правилам токов и напряжений Кирхгофа, рассмотрим правило мощности электрической цепи.

Мощность как величина электрической энергии, потребляемой резисторами цепи, равна произведению силы тока на напряжение и пропорциональна квадратам силы тока и напряжения:

$$P_n = I_n U_n, \qquad P_n = I_n^2 R_n, \qquad P_n = \frac{U_n^2}{\mathrm{R_n}},$$

где P – мощность, Ватт.

В нашем случае $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 1$ и $R_н = R_7 = 1$ и мощность P_n равна квадрату тока или напряжения соответствующих резисторов цепи:

$$P_n = I_n^2 = U_n^2 = F_n^2.$$

Для установления формулы потребляемой мощности резисторами электрических моделей чисел Фибоначчи используем свойства сумм и разностей произведений чисел Фибоначчи:

$$\frac{F_{n-1}F_{n+1}+F_{n-2}F_{n+2}}{2}=F_n^2, \tag{10}$$

$$\frac{F_{n-1}F_{n+1}-F_{n-2}F_{n+2}}{2}=(-1)^n, \tag{11}$$

из которых следует:

$$\frac{F_{n-1}F_{n+1}}{2}=\frac{F_{n-2}F_{n+2}}{2}+(-1)^n, \tag{12}$$

$$\frac{F_{n-2}F_{n+2}}{2}=\frac{F_{n-1}F_{n+1}}{2}-(-1)^n. \tag{13}$$

После преобразования (11), (12) с учетом (12), получим тождества:

$$\begin{aligned} F_1^2 &= F_0F_2+1 & F_2^2 &= F_1F_3-1\\ F_3^2 &= F_2F_4+1 & F_4^2 &= F_3F_5-1\\ F_5^2 &= F_4F_6+1 & F_6^2 &= F_5F_7-1\\ &\ldots\ldots & &\ldots\ldots\\ F_n^2 &= F_{n-1}F_{n+1}+1, & F_{2n}^2 &= F_{2n-1}F_{2n+1}-1, \end{aligned} \tag{14}$$

После преобразования (11), (12) с учетом (13), получим следующие тождества:

$$\begin{aligned} F_1^2 &= F_{-1}F_3-1, & F_2^2 &= F_0F_4+1,\\ F_3^2 &= F_1F_5-1, & F_4^2 &= F_2F_6+1,\\ F_5^2 &= F_3F_7-1, & F_6^2 &= F_4F_8+1,\\ &\ldots\ldots & &\ldots\ldots\\ F_n^2 &= F_{n-2}F_{n+2}-1, & F_{2n}^2 &= F_{2n-2}F_{2n+2}+1, \end{aligned} \tag{15}$$

Из полученных результатов следует, что потребляемые мощности резистивных сопротивлений электрической модели последовательности чисел Фибоначчи определяются двумя характерными тождествами, первое из которых известно как тождество Кассини (11), вторые – получено впервые (15).

Этот результат можно оценивать по-разному, но бесспорным является факт: этот математический результат долгие годы оставался «тайной» для математиков, которые соприкасались с последовательностями Фибоначчи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье, после многих лет развития электротехники, впервые установлено практическое приложение тождеств типа Кассини – потребляемая мощность ветвей лестничных электрических цепей. В этом, несомненно, эвристический результат проведенного исследования.

Полученный результат также может быть расширен и на другие рекуррентные последовательности рекуррентных чисел и любые значения нагрузок, но это будет выполнено в будущих работах. Здесь только обратим внимание на следующую особенность лестничной цепи представленной на рисунке 1: из схемы электрической модели последовательности чисел Фибоначчи можно выделить два канонические структуры четырехполюсников в электрической связи: Т-образная (резисторы которых соединены «звездой» и П-образная (резисторы которых соединены «треугольником»).

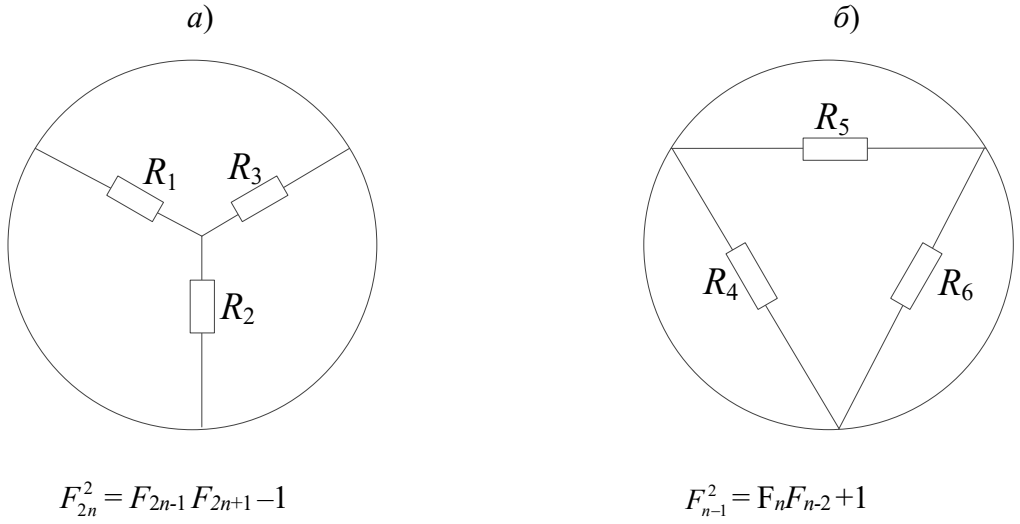

Рисунок 2 – Структуры четырехполюсников электрической модели последовательности чисел Фибоначчи: *а*) Т-образная «звезда», *б*) П-образный «треугольник»

В цепях электрической передачи большой мощности Т-образную структуру принято называть «треугольником», П-образную – «звездой». Между параметрами «треугольника» и «звезды» существует математическая взаимосвязь, которая позволяет строить эквивалентные по электрическим параметрам схемы [5].

Здесь возникает также вопрос: если Кассини, как великий французский астроном, получил тождество из анализа движения небесных тел, то тогда может быть и движение небесных тел связанно с правилами движения электрического тока в лестничных электрических цепях? Требуется исследование.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Семенюта, Н.Ф. Свойства рекуррентных последовательностей, используемых для анализа электрических цепей / Н.Ф. Семенюта // Автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте: Гомель: БелИИЖТ, 1971. Вып. 95. – С. 28–32.

2 Семенюта, Н. Ф. Моделирование линий с распределенными параметрами рекуррентными числами / Н.Ф. Семенюта // Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение: материалы межгосуд. науч. конф. – Минск: БГУ, 1996. – С. 123–124.

3 Семенюта, Н. Ф. Электрическая модель «Золотого сечения». Проблеми гармонії, симетрії і золотого перетину в природі, науці та мистецтві: зб. наук. пр. ВДАУ. – Винница: ВДАУ, 2003. – Вып.15. – С. 330–335.

4 Яглом, М.И. Как разрезать квадрат? (Математическая библиотека) / М.И. Яглом. – М.: Наука, 1968. – 87 с.

5 Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи / Л.А. Бессонов.— М.: Высшая школа, 1984. — 559 с.

6 Каллер, М.Я Теория электрических цепей / М. Я. Каллер. – М.: Трансжелдориздат. 1956. – 212 с.

7 Зевеке, Г.В. Основы теории цепей / Г.В. Зевеко, П.А. Ионкин. – М.: Госэнергоиздат. 1955. –216 с.

8 Стахов, А. П. Формула Кассини // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.12542, 01.11.2005. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320030.htm.

9 Стахов, А. П. Обобщенная формула Кассини: сколько существует целочисленных рекуррентных последовательностей, которые удовлетворяют этой формуле? // «Академия Тринитаризма», М.: Эл № 77-6567, публ. публ.23932, 08.11.2017

10 Владимиров, В. Л. Обобщение формулы Кассини на любую последовательность второго порядка с унифицированными начальными условиями // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17413, 10.04. 2012 /02332/012a/ 02322015.htm.

11 Василенко С. А. К обобщению тождества Кассини // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17463, 16.05. 2012. – http://www/trinitas.ru/rus/doc/. 23932, 08.11.2017. doc/02332/012a/02322015.htm.

12 Ткаченко, И. С. Обобщение идеи тождеств Кассини и Каталана для функций гиперболического типа // «Академия Тринитаризма», М.,Эл № 77-6567, публ.23983, 22.11.2017.

13 Мартыненко, Г. Я. Обобщение формулы Кассини для последовательностей Фибоначчи и Люка // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 15160, 14.03. 2009. – http: // www.trinitas.ru/rus /

14 Семенюта, Н. Ф. Обобщенные последовательности рекуррентных чисел и приведенные тождества Кассини // Междисциплинарные исследования в науке и образовании. – 2013. № 2Kg; URL: www.es.rae.ru/mino /164-1327 (22.10.2013).

15 Семенюта, Н. Ф. Связь параметров лестничных электрических цепей с матрицами чисел Фибоначчи и соотношением Кассини // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17969, 03.04.2013.

16 Семенюта, Н. Ф**.** Еще немного о соотношении Кассини // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.18105, 16.07.2013.