ResearchGate

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: https://www.researchgate.net/publication/378704319

P−адическая арифметика, биоморфные формы и дискретные вейвлеты Хаара

Book · February 2024

DOI: 10.38006/00187-738-7.2024.1.287

CITATIONS
0

READS
35

1 author:



Victor Ignatov
Independent Researcher
8 PUBLICATIONS **19** CITATIONS

SEE PROFILE

All content following this page was uploaded by Victor Ignatov on 04 September 2025.

The user has requested enhancement of the downloaded file.

Игнатов В.В.

$\mathfrak{P}$-адическая арифметика, биоморфные формы и дискретные вейвлеты Хаара



Новокузнецк
2024

В. В. Игнатов

Р-АДИЧЕСКАЯ АРИФМЕТИКА, БИОМОРФНЫЕ ФОРМЫ И ДИСКРЕТНЫЕ ВЕЙВЛЕТЫ ХААРА

Монография

Новокузнецк
Знание-М
2024

УДК 511(035.3)
ББК 22.131
И26

Рецензент:

Чернов И. А. – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории моделирования природно-технических систем Института прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук (ИПМИ КарНЦ РАН), г. Петрозаводск

Игнатов, Виктор Викторович.

И26 Р-адическая арифметика, биоморфные формы и дискретные вейвлеты Хаара : монография / В. В. Игнатов. – Текстовое (символьное) электронное издание. – Новокузнецк : Знание-М, 2024. – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Сист. требования : IBM PC, любой, более 1 GHz ; 512 Мб RAM ; 10 Мб HDD ; MS Windows XP и выше ; CD/DVD-ROM дисковод, мышь ; Adobe Reader 8.0 и выше. – 287 с.

ISBN 978-5-00187-738-7
DOI: 10.38006/00187-738-7.2024.1.287

Настоящая книга посвящена использованию р-адической математики и дискретных вейвлетов Хаара для описания и конструирования сложных геометрических форм, включая формы биологических объектов. В монографии содержится вводный курс р-адической арифметики и теории р-адического интегрирования, а также подробное изложение теории вейвлетов Хаара на различных абелевых группах, включая конечные абелевы группы, группу двоично рациональных правильных дробей, а также аддитивные группы кольца и поля р-адических чисел.

В книге сделан акцент на содержательной, а не на формальной стороне изложения, в частности описаны несколько содержательных интерпретаций вейвлетов Хаара и показана связь вейвлетов Хаара с процессами р-адической диффузии и формообразования. В работе вводится понятие 2-адических гештальтов, а также обсуждается вопрос создания сложных многомерных форм путем интерпретации таких гештальтов с помощью нейронных сетей.

Книга рассчитана на студентов и аспирантов математических специальностей.

УДК 511(035.3)
ББК 22.131

ISBN 978-5-00187-738-7

© Игнатов В. В., 2024
© Знание-М, 2024

Содержание

	Предисловие	5
I.	**О пяти способах реализации кольца целых p-адических чисел**	10
1.1	Позиционная система счисления и p-адические числа	12
1.2	Одномерная дискретная вселенная	19
1.3	Периодичность рациональных p-адических дробей	25
1.4	Строение группы корней из единицы в кольце $\mathbb{Z}_p$	28
1.5	p-Адическая метрика	33
1.6	Пять образов кольца целых p-адических чисел	38
1.7	Дерево целочисленных p-адических шаров	39
1.8	Компактность топологического кольца целых p-адических чисел	40
1.9	Канторово множество и 2-адические числа	44
1.10	Фрактальные кривые и p-адические числа	47
1.11	Конечное приближение p-адических чисел	50
1.12	Поле p-адических чисел	53
1.13	Строение дерева шаров поля p-адических чисел	56
1.14	Отображение поля $\mathbb{Q}_p$ на расширенное канторово множество	60
1.15	Интегрирование на кольце $\mathbb{Z}_p$	63
1.16	Интегрирование в поле $\mathbb{Q}_p$	71
1.17	Интегрируемые функции и меры на p-адических деревьях	73
II.	**Двойственность и преобразование Фурье**	76
2.1	Преобразование Фурье и таблица умножения	76
2.2	Двойственность Понтрягина	82
2.3	Преобразование Фурье на группах $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$	86
III.	**Инверсное преобразование и p-адические спектры рядов**	90
3.1	Инверсное преобразование	90
3.2	Инверсное преобразование подробно	93
3.3	Определение p-адических спектров рядов и бесконечных произведений	100
3.4	Структуры, кодирующие дихотомическое деление	105
IV.	**Разложение Фурье-Хаара на конечных абелевых группах**	110
4.1	Разложение на асимметрические функции	115
4.2	Случай циклической группы	120
4.3	Разложение на вейвлеты	125
4.4	Содержательная интерпретация разложения Хаара	132
4.5	N-мерное разложение Хаара	143
4.6	Обобщенное разложение Хаара, правило Леонардо и дерево Пифагора	146
V.	**Бесконечномерные разложения Фурье-Хаара**	154
5.1	Гармонический анализ на p-адических группах	154
5.2	2-Адическая диффузия и разложение на асимметрические функции	175
5.3	Разложение Фурье-Хаара на кольце $\mathbb{Z}_p$	195
5.4	Кратномасштабный анализ и аксиоматический подход к дискретным вейвлетам	204
5.5	Разложение по асимметрическим функциям в $\mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p)$	210

VI. Дихотомическое деление и морфогенетические поля 219
6.1 Формальная модель дихотомического деления 219
6.2 2-Адическая модель морфогенеза 221
6.3 Клеточные структуры 224
6.4 4-Адический морфогенез сферы 230
6.5 Пространственное разложение Хаара и морфогенез 233
6.6 Символизм алгебраических формул 238
6.7 Биоморфные формы и отображение рядов на фракталы 240
VII. Инварианты процессов дихотомического деления 243
7.1 2-Адические гештальты 243
7.2 2-Адические гештальты псевдослучайных последовательностей 249
7.3 2-Адические гештальты множества простых чисел 256
7.4 Интерпретация 2-адических гештальтов с помощью нейронных сетей 257
VIII. Автоморфизмы двоичного дерева и простые числа 261
8.1 Изометрии кольца целых p-адических чисел 261
8.2 Множества натуральных чисел как автоморфизмы двоичного дерева 264
8.3 Множество натуральных чисел как «лес» 265
8.4 Алгоритм вычисления обратного множества 267
8.5 Последовательности, порождаемые простыми числами 271
IX. Иррациональные числа, двоичные дроби и парадоксы бесконечного 274
Послесловие 278
Приложение А. Системы ортогональных идемпотентов 279
Приложение Б. Замечания к конструктивной теории интеграла 280
Приложение В. Соотношение между пространствами $\mathscr{L}^1$ и $\mathscr{L}^2$ 283
Список литературы 284

Предисловие

Цель настоящей книги состоит в том, чтобы применить понятия и концепции коммутативной алгебры и теории чисел, а также гармонического анализа и теории вейвлетов, для конструирования и описания биоморфных форм. Термин «биоморфная форма» вряд ли может быть предметом точного определения, а само такое определение является скорее задачей психологии зрения. Мы будем понимать под «биоморфной формой» любой геометрический объект, который вызывает отчетливые ассоциации с формой биологических организмов или их отдельных органов. Ввиду огромного разнообразия природного мира круг таких объектов оказывается достаточно широким. Поскольку все многоклеточные биологические организмы возникают из первичной клетки путем ее последовательного дихотомического деления, использование для вышеобозначенных целей 2-адической арифметики представляется вполне естественным. Настоящая книга состоит из девяти семантически связанных между собой глав, объединенных между собой идеей дихотомического деления и соответствующими ей биологическими аллюзиями. Первая глава посвящена p-адическим числам, теория которых излагается с акцентом на их геометрическом и конструктивном построении. Во второй главе дается краткий обзор преобразования Фурье и теоремы двойственности для локально компактных абелевых групп. В третьей главе мы рассматриваем инверсное преобразование, связывающее между собой p^n реципиентов и p^n каналов, по которым к этим реципиентам может из единого центра поступать субстанция, энергия или информация. В бесконечном случае данное преобразование позволяет превратить множество натуральных чисел в абелеву группу или в двоичное дерево, в результате чего у числовых рядов и последовательностей возникают p-адические спектры, представляющие собой функции, определенные на кольце целых p-адических чисел. Главы четыре и пять посвящены изложению теории вейвлетов Хаара, определенных на конечных абелевых группах, на множестве натуральных чисел, на множестве правильных p-ичных дробей и на множестве p-адических чисел. В этих главах излагается ряд простых и в большинстве своем хорошо известных математических фактов, которые, однако, даются в несколько иной смысловой интерпретации, которая более подходит для их применения в области биологии и вообще в области процессов дихотомического ветвления. В изложении сделан акцент на смысловой, а не на формально-аксиоматической стороне вопроса. Показано, что разложение на вейвлеты Хаара кодирует асимметрии в системе распространения субстанции, энергии или информации через сеть каналов, организованных в форме p-адического дерева. Данный процесс, рассматриваемый в обратном направлении, может быть интерпретирован как дискретная p-адическая диффузия. Показана связь пространственных вейвлетов Хаара с процессом морфогенеза. С целью замкнутости изложения в книге приводятся и доказываются все необходимые утверждения из области функционального и гармонического анализа. В шестой главе вводится формальная модель дихотомического деления и описываются математические структуры, которые могут быть использованы для кодировки этого процесса. В этой главе также рассматривается метод отображения числовых рядов на фракталы и вводятся понятия клеточной структуры и 2-адического морфогенеза, которые позволяют рассматривать биоморфные структуры как множества, параметризованные кольцом целых 2-адических чисел, а также позволяют провести некоторые аналогии между ростом биологических организмов и разворачиванием числовых рядов и последовательностей. Седьмая глава посвящена инвариантам процесса дихотомического деления. Такие инварианты определяются в виде

изображений (или гештальтов), последовательностей изображений или даже последовательностей знаков. Данная концепция затем применяется для анализа псевдослучайных последовательностей, порождаемых разложением в двоичную дробь иррациональных чисел, а также для характеристической функции множества простых чисел. Показано, что алгоритмы, основанные на вейвлетах Хаара, проявляют заключающиеся в указанных последовательностях биоморфные структуры. Данные числовые эксперименты позволяют вообще поставить под сомнение понятие «хаоса», поскольку они наводят на мысль о том, что внутри любого хаоса могут скрываться пронизывающие этот хаос осмысленные структуры, которые могут быть в нем обнаружены путем применения соответствующих математических методов. Восьмая глава посвящена рассмотрению связи между простыми числами и множеством автоморфизмов бесконечного планарного двоичного дерева. В ней вводится понятие симметрического простого числа и изучается статистика распределения таких чисел. Заключительная девятая глава имеет общефилософский характер и посвящена рассмотрению границ определения понятия натурального числа и некоторым парадоксам бесконечного.

Настоящая книга не содержит новых математических результатов в том смысле, в котором такие результаты понимаются в современной математике. Однако в данной книге вводятся новые математические объекты и излагаются некоторые идеи, направленные на то, чтобы произвести «смысловой сдвиг» хорошо известных математических объектов в направлении их применения для описания сложных геометрических форм, в частности форм биологических организмов. Среди этих идей можно перечислить следующие:

- Параметризация сложных геометрических форм кольцом целых p-адических чисел;
- Моделирование процесса деления клеток функциями, заданными на дереве 2-адических шаров;
- Использование комбинации евклидовой и p-адической геометрии для описания формы биологических объектов;
- Определение инвариантов процессов дихотомического деления в виде изображений, называемых «2-адическими гештальтами»;
- Интерпретация этих гештальтов с помощью нейронных сетей;
- Использование 2-адических гештальтов для генерации с помощью нейронных сетей объектов сложной формы, на основе минимальной структурной информации (примеры таких изображений помещены на обложке настоящей книги);
- Выявление биоморфных форм в псевдослучайных числовых последовательностях;
- Аналогии между разворачиванием числовых рядов и последовательностей и ростом биологических организмов;
- Порождение сложных геометрических форм путем отображения рядов и последовательностей на фракталы с последующим применением числовых преобразований Фурье и Хаара;

- Использование двух версий вейвлетов Хаара преобразующихся друг в друга с помощью инверсного преобразования;
- Использование вейвлетов Хаара для описания морфогенетических полей;
- Интерпретация вейвлетов Хаара как двух взаимно обратных процессов, соответствующих диффузии и формообразованию;
- Превращение множества натуральных чисел в абелеву группу и определение p-адических спектров рядов и последовательностей;
- Превращение множества натуральных чисел в двоичное дерево и определение симметрических простых чисел, которые сохраняют свойство простоты при автоморфизмах этого дерева, индуцированных множеством простых чисел.

Методологическими принципами, на основе которых написана эта книга, являются ***номинализм, конструктивизм и символическая предметность***. Номинализм заключается в том, что мы не стараемся изучить все свойства некоторых абстрактных объектов, заданных некоторой системой аксиом, а рассматриваем несколько конкретных и связанных между собой объектов и стараемся изучить все их основные свойства. Принцип конструктивизма заключается в том, что мы стараемся формулировать доказательства всех предложений и теорем таким образом, чтобы от них можно было непосредственно перейти к их алгоритмизации и к проверке этих положений посредством вычислений. В некоторых местах мы используем понятие актуальной бесконечности, а также пользуемся аксиомой выбора, однако делаем это в ограниченных пределах и только там, где сама формулировка предложений и используемых в этих предложения понятий неявно предполагает использование неконструктивных методов (например, в случае определения компактного топологического пространства). Символическая предметность заключается в том, что параллельно с исследованием основных объектов нашей книги, а именно кольца целых p-адических чисел и вейвлетов Хаара, мы стараемся увидеть их предметные интерпретации за пределами математики, а также стремимся в самих этих математических конструкциях увидеть символическое проявление более общих принципов, лежащих за пределами математики и относящихся к области философии.

Слова «дихотомический», «диадический» и «2-адический» используются в тексте как синонимы. Все списки нумеруются римскими цифрами. Нумерация лемм, теорем и предложений является сквозной, при этом первая цифра обозначает номер главы, а вторая обозначает номер утверждения внутри главы. Определения выделяются отдельно. Определения объектов, терминов и обозначений отмечаются знаком '$\square$'. Конец доказательств отмечается знаком '$\boxtimes$'. Мы предполагаем, что читатель знаком с базовыми концепциями коммутативной алгебры, теории чисел, топологии, теории меры, теории функций и теории деревьев.

Автор выражает благодарность своей жене Ольге за поддержку в период работы над этой книгой, а также своим детям Герману и Маргарите за участие в ее издании. Автор благодарит профессора А.Н.Абызова, который посмотрел первую главу данной книги и высказал ряд ценных замечаний.

Москва, 10 февраля 2024 г. *Автор*

Список обозначений

$\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел, не включая ноль
$\mathbb{N}_0$ - множество натуральных чисел, включая ноль
$\mathbb{Z}$ - кольцо целых чисел
$\mathbb{Z}(n)$ - абелева группа / кольцо вычетов по модулю n
$\mathbb{Z}(n)^\times$ - мультипликативная группа кольца вычетов $\mathbb{Z}(n)$
$\mathbb{U}(n)$ - мультипликативная группа корней из единицы степени n
$\mathbb{Z}(p^\infty)$ - абелева группа корней из единицы всех степеней p^n
$\mathbb{Z}_p$ - кольцо целых p-адических чисел
$\mathbb{Q}_{01}(p^n)$ - группа дробей вида k/p^n, где $0 \leqslant k < p^n$, со сложением по модулю единицы
$\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ - группа дробей вида k/p^n, где $0 \leqslant k < p^n, n \in \mathbb{N}$, со сложением по модулю единицы
$\mathbb{Q}$ - поле рациональных чисел
$\mathbb{Q}_{(p)}$ - кольцо целых по модулю p рациональных чисел
$\mathbb{Q}_{[p]}$ - кольцо p-ично рациональных чисел
$\mathbb{Q}_p$ - поле p-адических чисел
$\mathbb{R}$ - поле действительных чисел
$\mathbb{R}^+$ - множество положительных действительных чисел
$\mathbb{C}$ - поле комплексных чисел
$\mathbf{R}^\times$ - множество обратимых элементов кольца $\mathbf{R}$
$\mathbf{A}^\star$ - множество ненулевых элементов кольца или группы $\mathbf{A}$
(a) - подгруппа или идеал, порожденный элементом a;
$\mathfrak{A}^*$ - множество характеров абелевой группы $\mathfrak{A}$
$\mathrm{H}^\perp$ - аннулятор подгруппы H
$\mathfrak{B}(\mathbb{Z}_p)$ - множество p-адических шаров колец $\mathbb{Z}_p$
$\mathfrak{B}(p^n)$ - множество p-адических шаров колец $\mathbb{Z}(p^n)$
$\mathfrak{B}_+(p^n)$ - множество неодноэлементных p-адических шаров кольца $\mathbb{Z}(p^n)$
$\mathfrak{B}_k(\mathbb{Z}_p), \mathfrak{B}_k(p^n)$ - множества p-адических шаров радиуса $1/p^k$ колец $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{Z}(p^n)$
$\mathfrak{b}_k(x)$ - шар радиуса $1/p^k$ «с центром» в точке $x \in \mathbb{Z}(p^n)$
$\mathfrak{s}_k(x)$ - сфера радиуса $1/p^k$ «с центром» в точке $x \in \mathbb{Z}(p^n)$
$\mathbf{r}(\mathfrak{b})$ - радиус p-адического шара $\mathfrak{b}$
$\mathbf{F}[f]$ или $\widehat{f}$ - прямое преобразование Фурье функции f
$\overline{\mathbf{F}}[f]$ или $\widetilde{f}$ - обратное преобразование Фурье функции f
$\mathscr{F}(\mathbf{G})$ - множество комплекснозначных функций, определенных на множестве $\mathbf{G}$
$\mathscr{F}(\mathbf{G};\mathbb{V})$ - множество $\mathbb{V}$-значных функций, определенных на множестве $\mathbf{G}$
$\mathscr{F}_0(\mathbf{G};\mathbb{V})$ - подмножество финитных функций в $\mathscr{F}(\mathbf{G};\mathbb{V})$
$\mathscr{F}(p^n)$ - сокращение для $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^n);\mathbb{V})$, где $\mathbb{V} \in \{\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}\}$
$\mathbb{T}_p$ - бесконечное планарное p-адическое корневое дерево
$\mathbb{T}(p^k)$ - планарное корневое p-адическое дерево, имеющее k уровней
$\mathbb{L}(p^k)$ - множество вершин дерева $\mathbb{T}(p^n)$ или $\mathbb{T}_p$, лежащих на k-ом уровне
$\mathrm{V}(\mathbb{T})$ - множество вершин дерева $\mathbb{T}$
$\mathrm{E}(\mathbb{T})$ - - множество ребер дерева $\mathbb{T}$
$\mathbf{1}$ - единичная функция, $\mathbf{1}(x) = 1$, единичная матрица, единичный объект вообще
$\mathscr{A} \circ \mathscr{B}$ - композиция отображений
$\mathbf{1}_A$ или $\mathfrak{I}_A$ - характеристическая функция множества A

$f|A$ - ограничение функции f на подмножество A
|A| - количество элементов в множестве A
$\operatorname{supp}[f]$ - $\overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$ - носитель функции f
$\sup\{f(x) \mid x \in A\}$ - верхняя грань множества значений функции f на множестве A
(n, m) - наибольший общий делитель чисел n и m
$n|m$ - отношение n делит m для целых чисел
$\overline{z}$ - число, сопряженное с комплексным числом z
$\operatorname{Im}[\mathfrak{a}]$ - образ линейного оператора $\mathfrak{a}$
$\operatorname{Ker}[\mathfrak{a}]$ - ядро линейного оператора $\mathfrak{a}$

I. О пяти способах реализации кольца целых p-адических чисел

Данная глава представляет собой введение в p-адическую арифметику. Мы рассмотрим в ней основные арифметические и топологические свойства множества p-адических чисел, их связь с фрактальной геометрией, а также рассмотрим понятие p-адического интеграла. В этой главе речь пойдет о пяти способах реализации кольца целых p-адических чисел, где p есть некоторое простое число. Кольцо целых p-адических чисел можно определить несколькими различными способами, которые эквивалентны между собой, однако каждое из этих определений связано с различной расстановкой смысловых акцентов. Мы дадим три интерпретации p-адических чисел, связанные соответственно с измерением времени, с расширением пространства, а также с биологическим ростом и распространением информации в биоморфных системах. Эти интерпретации представляют интерес с той точки зрения, что они показывают, что вышеупомянутые три процесса в определенной степени являются метафорами друг друга.

В основе конструкции p-адических чисел лежит одно из древнейших математических открытий человечества – позиционная система счисления, изобретенная шумерами в III тысячелетии до Р.Х. Несмотря на это, p-адические числа появились в математике достаточно поздно, они были впервые введены в 1897 году Куртом Гензелем (1861-1941), исходя из аналогий между теорией чисел и алгебраической геометрией, и затем были им детально описаны в двух книгах, изданных в 1908 и 1913 годах ([39],[40]).

Если множество рациональных чисел заключает в себе идеи четырех арифметических операций, близости и линейного порядка, а множество вещественных чисел добавляет к этому идею непрерывного континуума, то система p-адических чисел включает в себя все эти идеи, добавляя к ним целый комплекс достаточно непросто увязанных друг с другом алгебраических и геометрических идей и заменяя непрерывный континуум «дискретным». Во многих современных учебниках p-адические числа определяются через процедуру пополнения поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ относительно достаточно экзотической на первый взгляд p-адической нормы, индуцирующей неархимедову метрику. При этом читателю как правило не объясняется, в чем состоит ценность такого пополнения, что из себя представляют те «дырки» в поле $\mathbb{Q}$, которые данное пополнение призвано заполнить и, вообще, почему от этих дырок необходимо избавиться. Процесс такого пополнения копирует логику пополнения поля $\mathbb{Q}$ относительно нормы, заданной обычным расстоянием. Эта логика была порождена потребностями геометрии и анализа, состоящими в необходимости вычислять длины диагоналей целочисленных прямоугольников или вычислять корни непрерывных функций, принимающих значения разного знака на концах отрезка. С первой проблемой столкнулись уже древние греки, пытавшиеся найти среди рациональных чисел квадратный корень из двух или из пяти, и что, по мнению некоторых историков, было одним из симптомов кризиса в греческой математике и породило целую серию легенд. Однако построить некоторую функцию, определенную на поле $\mathbb{Q}$, корень которой лежит в области p-адических чисел и при этом не является рациональным числом, оказывается достаточно непросто, да и потребность такая за пределами чистой теории чисел редко у кого возникает. Второй недостаток вышеупомянутого определения состоит в том,

что оно опирается на «кубическую актуальную бесконечность», поскольку предполагает, что множество p-адических чисел является континуальным множеством, каждый член которого также является континуальным множеством, элементами которого, в свою очередь, являются бесконечные счетные последовательности или множества. Несмотря на то, что в «воображариуме теории множеств» выстраивание подобного рода «матрешек» из актуальной бесконечности является делом вполне законным и даже обыденным, тем не менее у сторонников конструктивной математики, полагающих, что математика есть метод познания мира с помощью вычислений, возникают законные сомнения относительно онтологического статуса объектов, определяемых таким образом.

Однако в своей естественной интерпретации p-адическое число вовсе не является дыркой, которую почему-то необходимо заполнить, а его представление абстрактным числовым рядом выражает собой лишь формальную кодировку более содержательного математического объекта, подобно тому как десятичная дробь может выражать собой координату одномерного вектора, представляющего собой нечто большее, чем просто последовательность десятичных знаков. Подобно вещественным и комплексным числам, которым соответствуют определенные трансформации пространства в виде сдвигов, поворотов и растяжений, p-адические числа также имеет свою геометрическую реализацию, а точнее говоря, несколько таких реализаций, позволяющих на интуитивно смысловом уровне понять многие связанные с этими числами вопросы, которые в противном случае предстают перед нами как неожиданные результаты вычислительных фокусов с бесконечными рядами. Мы рассмотрим в этой книге три интерпретации p-адических чисел, связанные соответственно с измерением времени, с расширением пространства, а также с биологическим ростом и распространением информации в биоморфных системах.

Многие конструкции из классического дифференциального и интегрального исчисления или из теории уравнений в частных производных в той или иной форме переносятся в «p-адический мир», однако почти все они имеют проблемы с наличием для них референтных моделей в реальном мире. Можно записать «p-адическое уравнение Шредингера», однако гораздо труднее найти реальную квантовую частицу, поведение которой будет этому уравнению подчиняться. Здесь также можно упомянуть о работах, ставящих своей целью применить p-адическую арифметику в неорганической химии и биологии, например для описания структуры белков или структуры генетического кода ([26]). В этом направлении были достигнуты определенные результаты, которые, однако, выглядят достаточно скромными в сравнении с лежащими в основании современной технической цивилизации достижениями в области небесной механики, механики сплошных сред, электродинамики и атомной энергетики, полученными путем применения идеи вещественного числа, дифференциального и интегрального исчисления и дифференциальных уравнений.

1.1 Позиционная система счисления и p-адические числа

В основе конструкции p-адических чисел лежит одно из древнейших математических открытий человечества – позиционная система счисления, изобретенная шумерами в III тысячелетии до Р.Х. Позиционная система счисления представляет собой способ отображения линейно текущего времени на иерархическую систему циклически текущих времен. Пусть $\mathfrak{p}$ есть некоторое натуральное число большее единицы. Если мы рассмотрим условную систему измерения времени, при которой минута состоит из $\mathfrak{p}$ секунд, час состоит из $\mathfrak{p}$ минут, день состоит из $\mathfrak{p}$ часов, неделя состоит из $\mathfrak{p}$ дней, месяц состоит из $\mathfrak{p}$ недель, год состоит из $\mathfrak{p}$ месяцев и так далее до бесконечности, то в результате получится то, что называется позиционной системой счисления с основанием $\mathfrak{p}$. Если мы будем в этой системе измерять время с помощью механических часов, то нам понадобится система из нескольких зубчатых колес, каждое из которых вращается в $\mathfrak{p}$ раз медленнее предыдущего. Такие часы по сути дела и представляют собой позиционную систему счисления с основанием $\mathfrak{p}$.

Центральное место при конструировании p-адических чисел занимает числовое кольцо $\mathbb{Q}_{(p)}$, состоящее из чисел, которые Гензель называл рациональными числами целыми по модулю простого числа p.

Определение. Пусть p есть простое число. Кольцом целых по модулю p рациональных чисел $\mathbb{Q}_{(p)}$ называется кольцо рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с числом p.

Позиционная система счисления основана на характерной алгебраической конструкции, из которой вытекают все свойства p-адических чисел. Данная конструкция представляет собой бесконечную цепочку вложенных друг в друга главных идеалов кольца $\mathbb{Z}$ или кольца $\mathbb{Q}_{(p)}$ вида:

$$\cdots \subset (p^n) \subset \cdots \subset (p^3) \subset (p^2) \subset (p) \subset \mathbb{Z} \text{ или } \mathbb{Q}_{(p)}. \tag{1}$$

В случае кольца $\mathbb{Z}$ каждый идеал (p^k) состоит из чисел вида $p^k a$, а в случае кольца $\mathbb{Q}_{(p)}$ из дробей вида $p^k a/b$, где числа a и b взаимно просты с p. Идеал (p) является единственным максимальным идеалом кольца $\mathbb{Q}_{(p)}$, поэтому фактор кольцо по этому идеалу является полем (такие кольца называются локальными). Данное поле изоморфно полю $\mathbb{Z}(p)$:

$$\mathbb{Q}_{(p)}/(p) \cong \mathbb{Z}(p).$$

Сформулируем этот простой факт, как отдельную лемму.

Лемма 1.1 Фактор кольцо $\mathbb{Q}_{(p)}/(p)$ изоморфно полю вычетов $\mathbb{Z}(p)$.

Доказательство. Равенство $\mathbb{Z}/(p) = \mathbb{Z}(p)$ следует из определения поля вычетов. Покажем, что каждый элемент кольца $q \in \mathbb{Q}_{(p)}$ эквивалентен по модулю p некоторому целому числу, из чего будут следовать необходимый изоморфизм. Пусть $q = a/b$, где $(b, p) = 1$. Отсюда следует, что существуют целые числа u и v такие, что

$$bu + pv = 1, \ \rightarrow \ 1/b = u \mod (p) \ \rightarrow \ q = a/b = au \mod (p). \boxtimes$$

Данный факт позволяет определить для каждого числа $q \in \mathbb{Q}_{(p)}$ его вычет по модулю p, который является элементом поля $\mathbb{Z}(p)$. В свою очередь это дает возможность, для любого числа $q = q_0 \in \mathbb{Q}_{(p)}$, последовательно вычисляя остатки по модулю p, переходить к идеалам

все более глубокой степени вложенности в соответствии со следующей схемой разложения числа $q = q_0$ в p-ичной системе счисления:

$$\begin{aligned}
d_0 &= q_0 \mod p, \quad q_0 = q_1 \cdot p + d_0, \\
d_1 &= q_1 \mod p, \quad q_1 = q_2 \cdot p + d_1 \ \rightarrow \ q_0 = q_2 \cdot p^2 + d_1 \cdot p^1 + d_0, \\
d_2 &= q_2 \mod p, \quad q_2 = q_3 \cdot p + d_2 \ \rightarrow \ q_0 = q_3 \cdot p^3 + d_2 \cdot p^2 + d_1 \cdot p^1 + d_0, \text{ и т.д.}
\end{aligned}$$

На шаге номер k число q раскладывается в сумму двух чисел, из которых первое принадлежит идеалу (p^k), а второе является k-разрядным натуральным числом. Откуда следует, что

$$\mathbb{Q}_{(p)}/(p^k) \cong \mathbb{Z}(p^k),$$

а отображение

$$\varrho_k(q) : \mathbb{Q}_{(p)} \to \mathbb{Z}(p^k),$$
$$\varrho_k(q) = d_0 + d_1 \cdot p + d_2 \cdot p^2 + d_3 \cdot p^3 + \cdots + d_{k-1} \cdot p^{k-1},$$

является гомоморфизмом колец. Возникающая при этом последовательность цифр

$$\langle d_0, d_1, d_2, \dots \rangle,$$

являющихся вычетами по модулю p, дает нам однозначное представление числа q в позиционной системе счисления с основанием p, а само число q условно представляется бесконечным рядом

$$q = d_0 + d_1 \cdot p + d_2 \cdot p^2 + d_3 \cdot p^3 + \cdots + d_k \cdot p^k + \dots, \text{ где } 0 \leqslant d_i < p, \tag{2}$$

который, в случае натурального числа обрывается через конечное число шагов и совпадает с разложением этого числа в позиционной системе счисления с основанием p. Основная разница между разложением в p-ичной системе счисления натурального числа $n \in \mathbb{N}$ и разложением чисел в кольцах $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}_{(p)}$ состоит в том, что, если в случае натурального числа n вышеуказанная последовательность обязательно обрывается через конечное число шагов, приходя к нулю, то в случае $q \in \mathbb{Q}_{(p)} \setminus \mathbb{N}$, эта последовательность становится бесконечной, хотя ее бесконечность является условной, так как через конечное число шагов данная последовательность зацикливается, превращаясь в периодическую, что будет показано ниже. Например, легко проверить, что в кольце $\mathbb{Q}_{(2)}$ число -1 раскладывается в бесконечную последовательность единиц, то есть

$$-1 =< 1, 1, 1, \dots, 1, \cdots >, \tag{3}$$

что является следствием простого тождества:

$$-1 = (-1) \cdot 2 + 1.$$

Представление (3) только на первый взгляд может показаться необычным, на самом деле оно прекрасно отражает естественную вычислительную логику. Если мы ограничим последовательность (3) первыми n разрядами и представим ее как число m, хранящееся в некотором вычислительном устройстве, имеющем только n двоичных разрядов, записанных слева направо, то в случае прибавления к данному числу единицы произойдет перенос разрядов вправо, сопровождающийся обнулением всех значащих разрядов, затем произойдет переполнение, и на выходе мы получим ноль, что собственно и даст нам равенство

$$1 + m = 0, \text{ следовательно, } m = -1.$$

p-Адическая арифметика отражает именно такую логику вычислений при потенциальном возрастании количества значащих разрядов n до бесконечности. Выражаясь метафорически, можно сказать, что целочисленная p-адическая арифметика это арифметика натуральных чисел на n-разрядном p-ичном процессоре с переполнением ($p^n = 0$) при стремлении числа n к бесконечности.

Легко проверить, что операциям сложения и умножения в кольце $\mathbb{Q}_{(p)}$ соответствует сложение и умножение рядов с переносом разрядов вправо, в полном соответствии с тем, как складываются и умножаются числа в p-ичной системе счисления при условии их записи слева направо. Для того, чтобы в этом убедиться, нужно записать каждое из слагаемых (или сомножителей) в форме:

$$n = d_0 + d_1 \cdot p + d_2 \cdot p^2 + d_3 \cdot p^3 + \cdots + d_{k-1} \cdot p^{k-1} + q \cdot p^k,$$

где первые k коэффициентов d_m меньше p, а коэффициент q при степени p^k является рациональным числом из кольца $\mathbb{Q}_{(p)}$, а затем произвести сложение или умножение двух рядов, убедившись, что результат представляется в той же форме, а первые k коэффициентов вычисляются по правилам обычной p-ичной арифметики с переносом разрядов вправо.

Для определения целых p-адических чисел нужно сделать еще один шаг в сторону обобщения и оказаться от требования создания указанной выше последовательности путем разложения некоторого числа $n \in \mathbb{Q}_{(p)}$. Для любителей истории математики мы приведем одно из первых определений p-адических чисел из книги Курта Гензеля «Теория алгебраических чисел», которая была издана в 1908 году ([39]):

Unter einer Zahlgröße für den Bereich von p oder einer p-adischen Zahl will ich jede Reihe:

$$c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + c_3 p^3 + \cdots$$

mit modulo p reduzierten Koeffizienten, mag sie nun abbrechen oder nicht, verstehen, wenn eine Vorschrift existiert, nach welcher ihre Ziffern oder Koeffizienten soweit berechnet werden können als man nur immer will*).

Данное определение гласит: «Под числовой величиной для области p или p-адическим числом я буду понимать произвольный конечный или бесконечный ряд:

$$c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + c_3 p^3 + \ldots$$

с коэффициентами приведенными по модулю p, если существует некоторое правило, согласно которому его цифры или коэффициенты можно вычислять сколь угодно долго».

Как мы видим, данное определение несет на себе явный оттенок конструктивизма, так как оно акцентирует внимание на существовании алгоритма для вычисления коэффициентов p-адического числа. Количество определенных таким образом p-адических чисел является счетным, если мы предположим, что все упомянутые в данном определении правила могут быть описаны на языке, алфавит которого состоит из конечного множества символов. Мы сформулируем данное определение чуть более кратко.

Определение целого p-адического числа. Путь p есть простое число. Целым p-адическим числом называется бесконечный ряд вида

$$n = d_0 + d_1 \cdot p + d_2 \cdot p^2 + d_3 \cdot p^3 + \cdots + d_n \cdot p^k + \ldots, \text{ где } 0 \leqslant d_k < p, \quad d_k \in \mathbb{N}_0, \tag{4}$$

для которого определен метод вычисления коэффициентов d_k.

Относительно операций сложения и умножения с переносом разрядов вправо множество таких рядов образует коммутативное целостное кольцо с единицей, которое обозначается символом $\mathbb{Z}_p$ и называется кольцом целых p-адических чисел. Данное кольцо является расширением кольца $\mathbb{Q}_{(p)}$ и наследует от кольца $\mathbb{Q}_{(p)}$ его основные свойства в том числе свойство обладания единственной линейно упорядоченной цепочкой идеалов с максимальным идеалом, порожденным элементом p. Фактор кольца по этим идеалам изоморфны кольцам вычетов $\mathbb{Z}(p^k)$, а фактор кольца каждого идеала по предыдущему изоморфны кольцу $\mathbb{Z}(p)$.

Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму, которая подробно показывает, как устроена позиционная система счисления в кольце $\mathbb{Q}_{(p)}$, а также естественным образом подводит нас к понятию прямого проективного предела линейно упорядоченной цепочки колец, соединенных гомоморфизмами. Отображения $\{\varrho_k\}$ являются гомоморфизмами колец, которые были описаны выше.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(p^1) & \xleftarrow{i} & (p^2) & \xleftarrow{i} & (p^3) & \xleftarrow{i} & \cdots & \xleftarrow{i} & (p^k) & \xleftarrow{i} & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \\
\mathbb{Q}_{(p)} & \longleftrightarrow & \mathbb{Q}_{(p)} & \longleftrightarrow & \mathbb{Q}_{(p)} & \longleftrightarrow & \cdots & \longleftrightarrow & \mathbb{Q}_{(p)} & \longleftrightarrow & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle \varrho_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varrho_2} & & \downarrow{\scriptstyle \varrho_3} & & & & \downarrow{\scriptstyle \varrho_k} & & \\
\mathbb{Z}(p^1) & \xleftarrow{\pi_1} & \mathbb{Z}(p^2) & \xleftarrow{\pi_2} & \mathbb{Z}(p^3) & \xleftarrow{\pi_3} & \cdots & \xleftarrow{\pi_{k-1}} & \mathbb{Z}(p^k) & \xleftarrow{\pi_k} & \cdots
\end{array} \tag{5}$$

Каждый столбец этой диаграммы устанавливает следующее взаимно однозначное соответствие двух множеств:

$$\mathbb{Q}_{(p)} \simeq (p^k) \times \mathbb{Z}(p^k),$$

а движение по столбцам диаграммы слева-направо соответствует отдельным строчкам в алгоритме разложения числа в p-адическую дробь в системе счисления с основанием p. При этом каждый элемент $q \in \mathbb{Q}_{(p)}$ отображается по всех кольцах вычетов таким образом, что $\pi_k \circ \varrho_{k+1} = \varrho_k$, что означает, что при подъеме образов элемента q вверх по цепочке колец вычетов младшие разряды его представления сохраняются, а при каждом таком поднятии добавляется еще один p-ичный разряд. Поэтому множество $\{\varrho_k(q) \mid k \geqslant 1\}$ по сути дела представляет собой единую цепочку p-ичных разрядов $\pi(q)$, которая совпадает с разложением числа q в бесконечную p-адическую дробь:

$$\pi(q) = d_0 + d_1 \cdot p + d_2 \cdot p^2 + d_3 \cdot p^3 + \cdots + d_k \cdot p^k + \ldots, \text{ где } 0 \leqslant d_k < p.$$

Нижняя строка диаграммы (5) естественным образом подводит нас к понятию прямого проективного предела линейно упорядоченной цепочки колец, соединенных гомоморфизмами. Если мы выберем в каждом кольце $\mathbb{Z}(p^k)$ по одному элементу $m_k \in \mathbb{Z}(p^k)$ таким образом, что $\pi_k(m_{k+1}) = m_k$, для любого $k \geqslant 1$, то на упорядоченных цепочках таких элементов можно естественным образом задать структуру коммутативного кольца с единицей, умножая и складывая их поточечно. Далее мы покажем, что определенное таким образом кольцо изоморфно кольцу целых p-адических чисел.

Рассмотрим цепочку колец вычетов по всем степеням простого числа p, которые соединены цепочкой естественных кольцевых гомоморфизмов. Каждый гомоморфизм π_k отображает кольцо $\mathbb{Z}(p^{k+1})$ на кольцо $\mathbb{Z}(p^k)$, выделяя в числе $m \in \mathbb{Z}(p^{k+1})$ его младшие k разрядов в p-ичном представлении (легко проверить, что такое отображение сохраняет все кольцевые операции).

$$\{0\} \xleftarrow{\pi_0} \mathbb{Z}(p^1) \xleftarrow{\pi_1} \mathbb{Z}(p^2) \xleftarrow{\pi_2} \mathbb{Z}(p^3) \xleftarrow{\pi_3} \cdots \xleftarrow{\pi_{k-1}} \mathbb{Z}(p^k) \xleftarrow{\pi_k} \cdots \qquad (6)$$

□ Будем называть последовательность (6) стандартной последовательностью колец вычетов по модулю p.

Определение проективного предела. Проективным пределом системы колец (6), связанных гомоморфизмами $\{\pi_k\}$ называется совокупность всех бесконечных последовательностей вида

$$m = \langle m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k, \ldots \rangle, \qquad (7)$$

таких, что $m_k \in \mathbb{Z}(p^k)$ и $\pi_k(m_{k+1}) = m_k$. Множество таких последовательностей образует кольцо относительно операций поточечного сложения и поточечного умножения. Нулем и единицей в этом кольце являются последовательности, состоящие из одних нулей и из одних единиц соответственно.

Поскольку $\pi_k(m_{k+1}) = m_{k+1} \mod p^k = m_k$, то по мере движения по последовательности (7) слева-направо, каждое последующее число получается из предыдущего путем добавления еще одного p-адического разряда. Поэтому последовательность (7) порождает бесконечную последовательность цифр, лежащих в диапазоне от 0 до $p-1$, которую, в свою очередь, можно представить бесконечным p-адическим рядом. Таким образом, мы получаем следующую последовательность соответствий:

$$m = \langle m_1, m_2, m_3, \ldots \rangle \sim \langle d_0, d_1, d_2, \ldots \rangle \sim d_0 + d_1 \cdot p + d_2 \cdot p^2 + d_3 \cdot p^3 + \cdots = \mathfrak{i}(m).$$

Очевидно, что отображение $m \to m_k$ является гомоморфизмом колец, то есть каждое кольцо $\mathbb{Z}(p^k)$ является гомоморфным образом проективного предела указанной последовательности колец. При этом каждое число m_k, представленное своим разложением в системе счисления по модулю p, соответствует начальному отрезку p-адического разложения числа $\mathfrak{i}(m)$. Отсюда легко заключить, что $\mathfrak{i}(m \cdot n) = \mathfrak{i}(m) \cdot \mathfrak{i}(n)$. Следовательно, отображение $m \to \mathfrak{i}(m)$ является изоморфизмом колец. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Предложение 1.2 Кольцо целых p-адических чисел изоморфно проективному пределу стандартной последовательности колец вычетов по модулю p.

Данное определение очевидным образом распространяется на последовательности любых алгебраических систем, связанных цепочкой гомоморфизмов, например, абелевых групп или векторных пространств.

□ Проективный предел последовательности алгебраических систем $\{A_n\}$ обозначается символом $\varprojlim A_n$.

Таким образом, мы имеем изоморфизм: $\mathbb{Z}_p \cong \varprojlim \mathbb{Z}(p^n)$.

В книгах по алгебре почему-то никогда не упоминается тот факт, что цепочка колец (6) структурно представляет собой один из «архетипических» объектов природы и культуры, а именно дерево. Вершинами этого дерева являются элементы всех присутствующих в цепочке колец, а ребрам соответствуют пары вершин $\langle a, b\rangle$, такие, что $\pi_k(b) = a$, при некотором k. Корнем дерева является ноль, находящийся в конце цепочки. На рисунке 1.1 данное 2-адическое дерево изображено в виде круговой диаграммы, чтобы подчеркнуть соответствие его уровней кольцам $\mathbb{Z}(2^k)$. Угловая кодировка вершин этого графа имеет некоторую систему, на которой мы остановимся в последующих главах.

□ Пусть символ $\mathbb{T}_p$ обозначает бесконечное полное корневое дерево со степенью ветвления p в каждой вершине. Будем называть такое дерево полным p-адическим деревом. На этом дереве можно задать две ориентации ребер - одну из них, ведущую от корня к периферии, а другую - ведущую в обратном направлении. Будем далее называть эти ориентации прямой и обратной. Мы будем предполагать такое дерево планарным, то есть вложенным в плоскость, что позволяет, выбрав правую или левую ориентацию, однозначно проиндексировать выходящие из любой вершины ребра числами от 0 до $p - 1$.

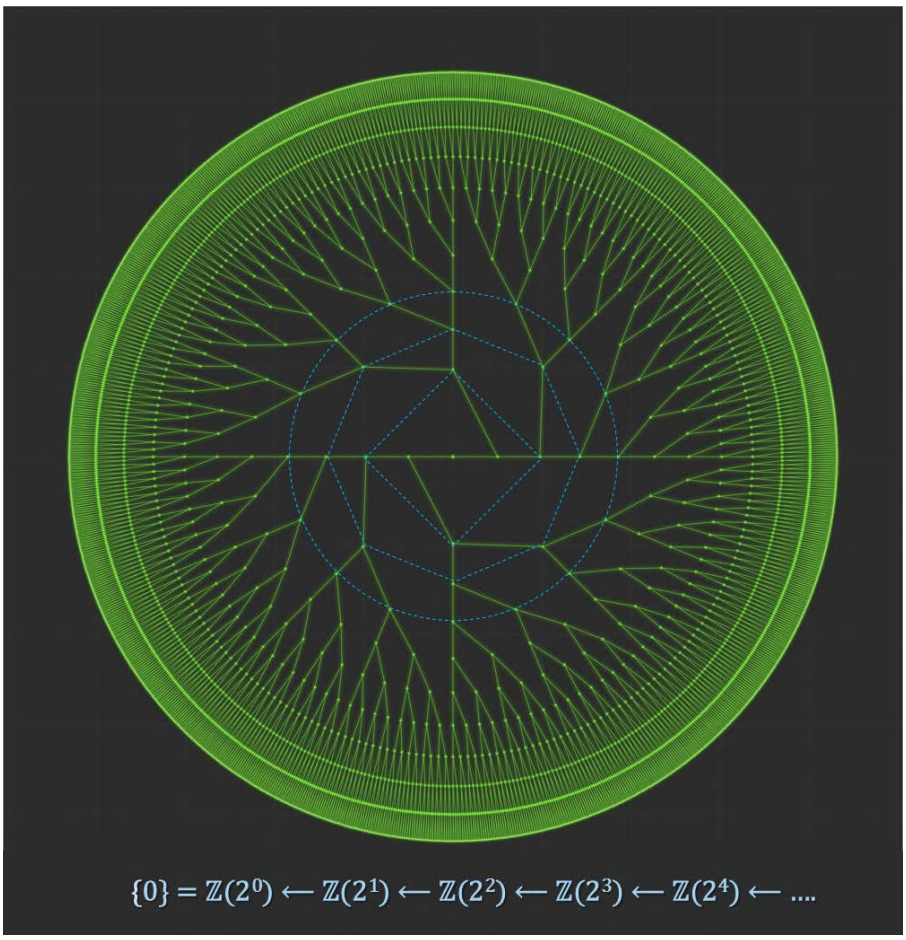


Рисунок 1.1 Представление p-адических чисел путями на планарном p-адическом дереве.

Очевидно, что элементы проективного предела стандартной цепочки гомоморфизмов колец вычетов (6) находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством всех бесконечных путей, выходящих из корня дерева $\mathbb{T}_p$. Это дает нам еще одну интерпретацию множества целых p-адических чисел.

Предложение 1.3 Множество целых p-адических чисел находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех бесконечных путей, выходящих из корня дерева $\mathbb{T}_p$.

Данная интерпретация позволяет рассматривать p-адические числа как числа, кодирующие пути распространения субстанции, энергии или информации по системе каналов, организованных в форме дерева. Это в свою очередь открывает возможности для применения p-адических чисел в биологии. Мы остановимся на этой теме более подробно в следующих главах.

Покажем, что кольцо целых p-адических чисел в своем строении повторяет основные черты кольца $\mathbb{Q}_{(p)}$ рациональных чисел, являющихся целыми по модулю p. Как было показано выше, строение кольца $\mathbb{Q}_{(p)}$ определяется его группой обратимых элементов и цепочкой идеалов, порожденных степенями элемента p. Посмотрим, как устроены обратимые элементы кольца $\mathbb{Z}_p$. Этот вопрос удобнее рассмотреть на примере реализации кольца целых p-адических чисел в виде проективного предела колец вычетов. Очевидно, что условие обратимости элемент кольца вычетов $n \in \mathbb{Z}(p^k)$ эквивалентно условию $(n, p) = 1$. Необходимым условием обратимости элемента $m \in \varprojlim \mathbb{Z}(p^n)$, является условие $(m_1, p) = 1$. Очевидно, что это условие является также достаточным, так как в этом случае условие $(m_k, p) = 1$ выполняется для всех колец цепочки и, следовательно, последовательность, составленная из обратных вычетов $\{m_k^{-1}\}$, дает нам число, обратное к m, так как умножение определяется поточечно. Поэтому элемент $u \in \mathbb{Z}_p$ является обратимым в этом кольце тогда и только тогда, когда его младший(нулевой) разряд в p-адическом представлении отличен от нуля.

□ Коммутативное кольцо называется локальным, если в нем существует единственный максимальный идеал.

Рассмотрим более подробно свойства колец $\mathbb{Q}_{(p)}$ и $\mathbb{Z}_p$. Оба эти кольца является коммутативными локальными кольцами главных идеалов без делителей нуля. В типологии коммутативных колец такие кольца следуют сразу за полями. Быть полем этим кольцам мешает единственный элемент p, который порождает единственный максимальный идеал, состоящий из всех необратимых элементов кольца.

Предложение 1.4 Пусть R есть кольцо $\mathbb{Q}_{(p)}$ или $\mathbb{Z}_p$. Кольцо R обладает следующими свойствами:

(i) каждый элементе кольца R однозначным образом представляется в виде $p^k u$, где u есть обратимый элемент кольца;
(ii) кольцо R является кольцом главных идеалов без делителей нуля;
(iii) все идеалы кольца R выстраиваются в бесконечную цепочку вида:

$$\cdots \subset (p^n) \subset \cdots \subset (p^3) \subset (p^2) \subset (p) \subset \mathrm{R};$$

(iv) для каждого идеала (p^k) фактор кольцо $\mathrm{R}/(p^k)$ изоморфно кольцу вычетов $\mathbb{Z}(p^k)$, в частности, фактор кольцо по идеалу (p) изоморфно полю $\mathbb{Z}(p)$;

(v) группа обратимых элементов U кольца R совпадает с дополнением к идеалу (p), то есть

$$\mathrm{U} = \mathrm{R} \setminus (p);$$

(vi) орбиты, возникающие при действии группы обратимых элементов U посредством мультипликативных сдвигов, совпадают с разностями двух последовательных идеалов:

$$(p^{k-1}) \setminus (p^k) = p^k\mathrm{U};$$

(vii) кольцо R, а также каждый его идеал (p^k), представляют собой объединение орбит, получающихся при действии на множестве R группы U мультипликативными сдвигами:

$$\mathrm{R} = \mathrm{U} \cup p\mathrm{U} \cup p^2\mathrm{U} \cup \cdots \cup p^k\mathrm{U} \cup \cdots \cup \{0\}, \tag{8}$$

$$(p^m) = p^m\mathrm{U} \cup p^{m+1}\mathrm{U} \cup \cdots \cup p^{m+n}\mathrm{U} \cup \cdots \cup \{0\}. \tag{9}$$

Доказательство. Мы приведем доказательство для кольца $\mathbb{Q}_{(p)}$, оставляя случай $\mathbb{Z}_p$ читателю в качестве упражнения. Изоморфизм $\mathbb{Q}_{(p)}/(p^k) = \mathbb{Z}(p^k)$ был доказан нами выше. Очевидно, что группа обратимых элементов кольца $\mathbb{Q}_{(p)}$ состоит из дробей, числитель которых не делится на p. Это в точности есть множество $\mathrm{U} = \mathbb{Q}_{(p)} \setminus (p)$. Каждый идеал $\mathrm{J} \subseteq \mathbb{Q}_{(p)}$, однозначно определяется максимальным показателем степени k, при котором $p^k \in \mathrm{J}$. Следовательно, все идеалы кольца $\mathbb{Q}_{(p)}$ выстраиваются в линейную цепочку. Множество $(p^{k-1}) \setminus (p^k)$ совпадает с множеством дробей вида $q = p^k a/b$, где $(a, p) = 1$, которое совпадает с множеством $p^k\mathrm{U}$. Из этого факта также следуют формулы разложения идеалов на орбиты, возникающие под действием группы U. ⊠

1.2 Одномерная дискретная вселенная

Еще одна интерпретация p-адических чисел связана с преобразованиями некоторого дискретного пространства. Для того что бы это показать, рассмотрим простейшую динамическую модель дискретного пространства - одномерную, дискретную, замкнутую и расширяющуюся «вселенную». Будем полагать, что такая «вселенная» рождается из некоторого первоатома, который на первом шаге порождает себе пару, а на всех последующих шагах между каждыми двумя соседними точками рождается еще одна. Процесс эволюции такой «вселенной» на первых трех шагах выглядит следующим образом:

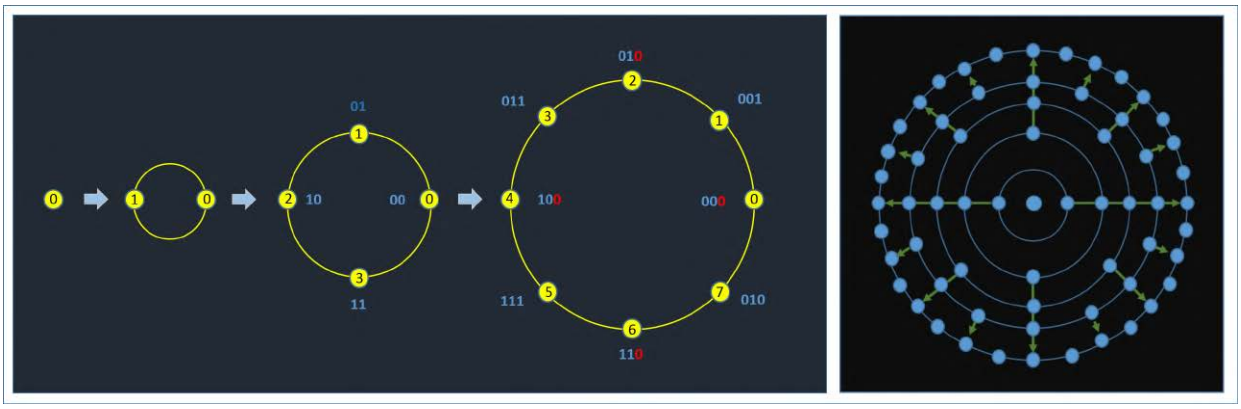


Рисунок 1.2 Эволюция «дискретной, замкнутой, одномерной и расширяющейся вселенной».

Получающиеся в процессе такой эволюции дискретные пространства с алгебраической точки зрения можно интерпретировать как группы (или как кольца вычетов) $\mathbb{Z}(2^n)$, где n есть номер шага. При этом множество точек, которые уже существуют на шаге n, входит во все последующие пространства в виде подгруппы циклической группы или в виде идеала кольца вычетов, сохраняя таким образом информацию о данной эволюции. Разность двух таких множеств на последовательно идущих шагах представляет собой слой точек возникающих на текущем шаге. С точки зрения алгебры данный слой представляет собой смежный класс по подгруппе элементов предыдущего поколения. Если сравнивать описанный процесс эволюции с эволюцией Земли, то разложение группы/кольца $\mathbb{Z}(2^n)$ на такие слои напоминает так называемую «геологическую летопись», состоящую из последовательности отложений соответствующих различным эпохам. Последний слой совпадает с множеством обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}(2^n)$.

Если повторить этот процесс «всего» 155 раз и взять за размер ячейки планковскую длину

$$\ell_P = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 1,616\ 255 \cdot 10^{-35}\text{м},$$

представляющую собой главного претендента на роль «кванта пространства», то получившаяся при этом окружность будет сравнима по размерам с орбитой планеты Земля при ее обращении вокруг Солнца ($\approx$ 940 млн. км). Поэтому сторонники конструктивной математики могут вполне законно представлять себе земную орбиту (точнее говоря линию, по которой движется планетарный центр тяжести) как циклическую группу $\mathbb{Z}(2^{155})$, то есть дискретное пространство, все ячейки которого имеют размер порядка планковской длины и пронумерованы 155-битовыми двоичными последовательностями.

Данная конструкция легко обобщается на случай любого простого числа p. С алгебраической точки зрения такая цепочка расширяющихся дискретных пространств представляет собой цепочку вложенных друг в друга конечных абелевых групп:

$$\mathbb{Z}(p^1) \xrightarrow{i_1} \mathbb{Z}(p^2) \xrightarrow{i_2} \mathbb{Z}(p^3) \xrightarrow{i_3} \cdots \xrightarrow{i_{n-1}} \mathbb{Z}(p^n) \xrightarrow{i_n} \cdots , \qquad (10)$$

где гомоморфное вложение n-ой группы в $n+1$-ую определяется формулой

$$i_n(x) = p \cdot x \mod p^{n+1}.$$

Легко проверить, что на объединении этой цепочки абелевых групп

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}(p^n) = \mathbb{Z}(p^\infty)$$

естественным образом определяется групповая операция, которая является продолжением групповых операций на отдельных подгруппах и которая превращает множество $\mathbb{Z}(p^\infty)$ в бесконечную абелеву группу, обладающую бесконечной линейной цепочкой вложенных друг в друга подгрупп.

□ В общем случае такая конструкция построения алгебраической системы из последовательности $\{\mathrm{A}_n\}$ вложенных друг в друга однотипных алгебраических систем называется ***индуктивным пределом*** данной последовательности. Индуктивный предел такой цепочки алгебраических систем обозначается символом $\varinjlim \mathrm{A}_n$.

В этих обозначениях мы имеем следующее равенство: $\mathbb{Z}(p^\infty) = \varinjlim \mathbb{Z}(p^n)$. В цепочке (10) можно заменить группы $\mathbb{Z}(p^n)$ на их изоморфные эквиваленты $\mathbb{Q}_{01}(p^n)$ или $\mathbb{U}(p^n)$, соответствующим образом переопределив вложения групп i_n.

$$\mathbb{Q}_{01}(p^1) \xrightarrow{i_1} \mathbb{Q}_{01}(p^2) \xrightarrow{i_2} \mathbb{Q}_{01}(p^3) \xrightarrow{i_3} \cdots \xrightarrow{i_{n-1}} \mathbb{Q}_{01}(p^n) \xrightarrow{i_n} \cdots , \quad (11)$$

$$\mathbb{U}(p^1) \xrightarrow{i_1} \mathbb{U}(p^2) \xrightarrow{i_2} \mathbb{U}(p^3) \xrightarrow{i_3} \cdots \xrightarrow{i_{n-1}} \mathbb{U}(p^n) \xrightarrow{i_n} \cdots , \quad (12)$$

В этом случае индуктивный предел такой цепочки реализуется как аддитивная группа $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$, состоящая из правильных p-ичных дробей, складываемых по модулю единицы или как группа $\mathbb{U}(p^\infty)$ комплексных корней из единицы степеней p^n, для всех $n \in \mathbb{N}_0$, а отображения i_n превращаются в последовательность вложений соответствующих конечных подгрупп в бесконечную группу, являющуюся их объединением.

$$\mathbb{Z}(p^\infty) = \varinjlim \mathbb{Z}(p^n), \qquad \mathbb{U}(p^\infty) = \varinjlim \mathbb{U}(p^n), \qquad \mathbb{Q}_{01}(p^\infty) = \varinjlim \mathbb{Q}_{01}(p^n).$$

Из самого способа ее построения мы видим, что абелева группа $\mathbb{Z}(p^\infty)$, а также ее изоморфные копии $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ и $\mathbb{U}(p^\infty)$ представляют собой простейшую модель «одномерного, дискретного, замкнутого и бесконечно расширяющегося пространства».

Рассмотрим отображения этого пространства в себя, которые сохраняют его структуру. Такими отображениям являются эндоморфизмы группы $\mathbb{Z}(p^\infty)$. Множество эндоморфизмов абелевой группы образует кольцо относительно операции сложения и операции композиции отображений.

□ Кольцо эндоморфизмов абелевой группы A обозначается далее символом End(A).

Предложение 1.5 Имеет место следующая последовательность изоморфизмов колец:

$$\mathbb{Z}_p \cong \mathrm{End}(\mathbb{Z}(p^\infty)) \cong \varprojlim \mathrm{End}(\mathbb{Z}(p^n)) \cong \varprojlim \mathbb{Z}(p^n).$$

Доказательство. Группа $\mathbb{Z}(p^\infty)$ содержит в себе линейную цепочку вложенных подгрупп, которые в геометрической интерпретации отражают этапы (историю) формирования этого пространства. Каждый эндоморфизм сохраняет всю историю, то есть переводит каждую из подгрупп в себя. Поскольку каждый эндоморфизм группы $\mathbb{Z}(p^n)$ однозначно ограничивается на все ее подгруппы, которые при этом образуют линейно упорядоченную цепочку, то цепочка групп (10) индуцирует соответствующую цепочку колец эндоморфизмов:

$$\mathrm{End}(\mathbb{Z}(p^1)) \xleftarrow{\pi_1} \mathrm{End}(\mathbb{Z}(p^2)) \xleftarrow{\pi_2} \mathrm{End}(\mathbb{Z}(p^3)) \xleftarrow{\pi_3} \cdots$$

$$\cdots \xleftarrow{\pi_{n-1}} \mathrm{End}(\mathbb{Z}(p^n)) \xleftarrow{\pi_n} \cdots \quad (13)$$

Поскольку каждая группа $\mathbb{Z}(p^k)$ совпадает с множеством элементов u, удовлетворяющих условию $p^k u = 0$, то каждый эндоморфизм $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}(p^\infty))$ отображает все подгруппы

$\mathbb{Z}(p^k)$ в себя и однозначно определяется последовательностью своих ограничений на эти подгруппы:

$$\phi = \langle \phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots \rangle, \text{ где } \phi_k \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}(p^k)). \tag{14}$$

Легко видеть, что кольцо $\mathrm{End}(\mathbb{Z}(p^k))$ изоморфно кольцу $\mathbb{Z}(p^k)$, так как каждый гомоморфизм циклической группы $\mathbb{Z}(p^k)$ определяется своим значением на единице и имеет вид:

$$\widehat{a} : x \to a \cdot x \mod p^k, \text{ для некоторого } a \in \mathbb{Z}(p^k).$$

Поэтому последовательности (13) соответствует последовательность чисел

$$\langle m_1, m_2, m_3, \dots \rangle, \text{ где } m_k \in \mathbb{Z}(p^k). \tag{15}$$

Для того, чтобы такая последовательность определяла собой некоторый гомоморфизм группы $\mathbb{Z}(p^\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы все диаграммы вида:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}(p^k) & \xrightarrow{i_k} & \mathbb{Z}(p^{k+1}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_k} \Big\uparrow{\scriptstyle \widehat{m}_k} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_{k+1}} \Big\uparrow{\scriptstyle \widehat{m}_{k+1}} \\ \mathbb{Z}(p^k) & \xrightarrow{i_k} & \mathbb{Z}(p^{k+1}) \end{array} \tag{16}$$

были коммутативны, что эквивалентно выполнению условия $m_k = m_{k+1} \mod p^k$. Это условие означает, что младшие k разрядов чисел m_k и m_{k+1} в p-ичном представлении совпадают, что позволяет отождествить эндоморфизмы группы $\mathbb{Z}(p^\infty)$ с элементами проективного предела стандартной цепочки гомоморфизмов колец вычетов по модулю p. Соответствие кольцевых операций легко проверяется. ⊠

Таким образом, целые p-адические числа представляют собой отображения в себя одномерного, дискретного, замкнутого и бесконечно расширяющегося пространства, которые сохраняют его структуру. Такая семантическая интерпретация роднит кольцо $\mathbb{Z}_p$ с полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, которые также можно интерпретировать как кольца геометрических преобразований соответственно прямой и плоскости.

Заметим, что описанные выше конструкции, которые мы использовали для построения кольца целых p-адических чисел нигде не использовали факт простоты числа p, за исключением доказательства того факта, что все элементы кольца $\mathbb{Z}_p$ могут быть представлены в виде $p^k \cdot u$, где элемент u является обратимым. Из существования такого представления вытекает отсутствие в кольце $\mathbb{Z}_p$ делителей нуля. Из сказанного выше следует, что кольцо целых r-адических чисел можно определить для любого натурального числа $r \geqslant 2$. Гензель первоначально определял r-адическое число именно таким обобщенным способом. Для произвольного $r \geqslant 2$ кольцо целых r-адических чисел определяется как проективный предел стандартной цепочки колец вычетов $\mathbb{Z}(r^n)$ или как кольцо эндоморфизмов группы $\mathbb{Q}_{01}(r^\infty)$. Для того, чтобы определить строение кольца $\mathbb{Z}_r$ для произвольного натурального числа $r \geqslant 2$, нам потребуется следующее простое предложение, которое, однако, имеет много следствий.

Предложение 1.6 Пусть $\mathfrak{B}$ есть конечная абелева группа порядка pq, где p и q есть взаимно простые числа, тогда

(i) Группа $\mathfrak{B}$ разлагается в прямую сумму двух своих подгрупп:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_p \oplus \mathfrak{A}_q, \quad \text{где} \quad \mathfrak{A}_p = \{b \in \mathfrak{B} \mid pb = 0\} = q\mathfrak{B} \text{ и } \mathfrak{A}_q = \{b \in \mathfrak{B} \mid qb = 0\} = p\mathfrak{B};$$

(ii) Кольцо эндоморфизмов группы $\mathfrak{B}$ изоморфно прямому произведению колец эндоморфизмов двух этих подгрупп:

$$\mathrm{End}(\mathfrak{B}) \simeq \mathrm{End}(\mathfrak{A}_p) \times \mathrm{End}(\mathfrak{A}_q).$$

Доказательство. Пункт (i). Поскольку числа p и q взаимно просты, то существуют такие u и v, что $up + vq = 1$. Отсюда следует, что для любого $b \in \mathfrak{B}$ имеет место равенство $b = upb + vqb$. Очевидно, что $upb \in \mathfrak{A}_q$ и $vqb \in \mathfrak{A}_p$. Очевидно также, что множества $\mathfrak{A}_p$ и $\mathfrak{A}_q$ являются подгруппами в $\mathfrak{B}$. При этом $\mathfrak{A}_p \bigcap \mathfrak{A}_q = \{0\}$, так как равенства $pa = qa = 0$ влекут за собой равенство $a = (up+vq)a = upa+vqa = 0$. Пункт (ii). Пусть $\phi \in \mathrm{End}(\mathfrak{B})$. Очевидно, что $\phi(\mathfrak{A}_p) \subseteq \mathfrak{A}_p$ и $\phi(\mathfrak{A}_q) \subseteq \mathfrak{A}_q$, поэтому каждый эндоморфизм ϕ группы $\mathfrak{B}$ однозначно определяется парой (ϕ_p, ϕ_q) своих ограничений на подгруппы $\mathfrak{A}_p$ и $\mathfrak{A}_q$ соответственно. Легко проверить, что отображение $\phi \to (\phi_p, \phi_q)$ является изоморфизмом колец. $\boxtimes$

Предложение 1.6 играет в p-адической арифметике роль аналогичную той, которую в классической арифметике играет теорема о разложении натурального числа на простые сомножители. Данное предложение позволяет раскладывать основные встречающиеся в p-адической арифметике алгебраические структуры на более простые компоненты, которые соответствуют простым числам.

Предложение 1.7 Если $r = pq$, где p и q есть взаимно простые натуральные числа большие единицы, то имеют место следующие изоморфизмы абелевых групп:

(i) $\mathbb{Z}(r) \simeq \mathbb{Z}(p) \oplus \mathbb{Z}(q), \quad \mathbb{Q}_{01}(r^n) = \mathbb{Q}_{01}(p^n) \oplus \mathbb{Q}_{01}(q^n), \quad \mathbb{U}(r^n) = \mathbb{U}(p^n) \oplus \mathbb{U}(q^n);$

(ii) $\mathbb{Z}(r^\infty) \simeq \mathbb{Z}(p^\infty) \oplus \mathbb{Z}(q^\infty), \quad \mathbb{U}(r^\infty) \simeq \mathbb{U}(p^\infty) \oplus \mathbb{U}(q^\infty), \quad \mathbb{Q}_{01}(r^\infty) \simeq \mathbb{Q}_{01}(p^\infty) \oplus \mathbb{Q}_{01}(q^\infty).$

Доказательство. Пункт (i). Очевидно, что $\{n \in \mathbb{Z}(r) \mid pn = 0\} = (q)$ и $\{n \in \mathbb{Z}(r) \mid qn = 0\} = (p)$. Поэтому $\mathbb{Z}(pq) = (p) \oplus (q)$. Легко проверить, что $(p) \simeq \mathbb{Z}(q)$ и $(q) \simeq \mathbb{Z}(p)$. Аналогичные утверждения для других групп доказываются аналогично, при этом в качестве образующих выбираются элементы p/r^n и q/r^n в первом случае и элементы $\exp(2\pi \cdot p/r^n)$ и $\exp(2\pi \cdot q/r^n)$ во втором. Пункт (ii). Изоморфизм $\mathbb{Q}_{01}(r^\infty) \simeq \mathbb{Q}_{01}(p^\infty) \oplus \mathbb{Q}_{01}(q^\infty)$ следует из того факта, что группа $\mathbb{Q}_{01}(r^\infty)$ является объединением своих подгрупп $\mathbb{Q}_{01}(r^n)$ для всех $n \geqslant 1$, при этом каждая из этих групп раскладывается в прямую сумму $\mathbb{Q}_{01}(r^n) \simeq \mathbb{Q}_{01}(p^n) \oplus \mathbb{Q}_{01}(q^n)$:

$$\mathbb{Q}_{01}(r^\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}_{01}(r^n),$$

$$\mathbb{Q}_{01}(r^n) = \mathbb{Q}_{01}(p^n) \oplus \mathbb{Q}_{01}(q^n), \quad \text{при любом} \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\mathbb{Q}_{01}(p^\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}_{01}(p^n), \quad \mathbb{Q}_{01}(q^\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}_{01}(q^n).$$

Отсюда следует, что $\mathbb{Q}_{01}(r^\infty) = \mathbb{Q}_{01}(p^\infty) \oplus \mathbb{Q}_{01}(q^\infty)$. Впрочем, этот изоморфизм можно доказать непосредственно, выполняя простые вычисления с дробями. Каждый элемент группы $\mathbb{Q}_{01}(r^\infty)$ имеет вид $a/(pq)^n$. Так как числа p^n и q^n взаимно просты, то $1 = up^n + vq^n$ при некоторых целых u и v. Отсюда следует, что

$$a/(pq)^n = aup^n/(pq)^n + avq^n/(pq)^n = au/q^n + av/p^n.$$

Очевидно также, что $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty) \cap \mathbb{Q}_{01}(q^\infty) = 0$, что дает нам требуемый изоморфизм. Равенство $\mathbb{U}(r^\infty) \simeq \mathbb{U}(p^\infty) \oplus \mathbb{U}(q^\infty)$ доказывается аналогично. Изоморфизм $\mathbb{Z}(r^\infty) \simeq \mathbb{Z}(p^\infty) \oplus \mathbb{Z}(q^\infty)$, следует из того, что каждая из этих групп изоморфна соответствующей группе комплексных корней из единицы. $\boxtimes$

Следующее далее предложение 1.8 утверждает, что при взаимно простых числах p и q кольцо $\mathbb{Z}_{pq}$ раскладывается в прямое произведение колец $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{Z}_q$. Доказательство этого предложение демонстрирует преимущество алгебраической трактовки целых p-адических чисел как эндоморфизмов группы $\mathbb{Z}(p^\infty)$, перед их трактовкой, основанной на разложении в p-адическую дробь. Читатель может в этом легко убедиться, попробовав доказать данное предложение, выполняя вычисления с p-адическими рядами.

Предложение 1.8 Если $r = pq$, где p и q есть взаимно простые натуральные числа большие единицы, то имеют место следующие изоморфизмы колец:

(i) $\mathrm{End}(\mathbb{Q}_{01}(r^n)) \simeq \mathbb{Z}(p^n) \times \mathbb{Z}(q^n)$;

(ii) $\mathbb{Z}_r = \mathrm{End}(\mathbb{Q}(r^\infty)) \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$;

Доказательство. Пункт (i). Очевидно, что при любом s, каждый эндоморфизм ϕ группы $\mathbb{Q}_{01}(s, n)$ определяется своим значением на образующем элементе группы и определяется числом $m \in \mathbb{Z}(s^n)$ таким, что $\phi(1/s^n) = m/s^n$. Поэтому $\mathrm{End}(\mathbb{Q}_{01}(s, n)) \simeq \mathbb{Z}(s^n)$. Из предложения 1.6 следует, что

$$\mathrm{End}(\mathbb{Q}_{01}(r^n)) = \mathrm{End}(\mathbb{Q}_{01}(p^n) \oplus \mathbb{Q}_{01}(q^n)) =$$

$$= \mathrm{End}(\mathbb{Q}_{01}(p^n)) \oplus \mathrm{End}(\mathbb{Q}_{01}(q^n)) \simeq \mathbb{Z}(p^n) \times \mathbb{Z}(q^n).$$

Пункт (ii). Согласно пункту (i) предложения 1.7 мы имеем разложение

$$\mathbb{Q}_{01}(r^\infty) \simeq \mathbb{Q}_{01}(p^\infty) \oplus \mathbb{Q}_{01}(q^\infty).$$

Поскольку числа p и q взаимно просты, а каждый из элементов подгрупп $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ и $\mathbb{Q}_{01}(q^\infty)$ имеет конечный порядок, равный некоторой степени p и q соответственно, то каждый эндоморфизм группы $\mathbb{Q}_{01}(r^\infty)$ переводит подгруппы $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ и $\mathbb{Q}_{01}(q^\infty)$ в себя. Очевидно также, что каждая пара эндоморфизмов этих подгрупп однозначно продолжается до эндоморфизма группы $\mathbb{Q}_{01}(r^\infty)$. Поэтому имеет место следующая цепочка изоморфизмов колец, которая доказывает утверждение пункта (ii):

$$\mathbb{Z}_r = \mathrm{End}(\mathbb{Q}_{01}(r^\infty)) \simeq \mathrm{End}(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty) \oplus \mathbb{Q}_{01}(q^\infty)) \simeq$$

$$\simeq \mathrm{End}(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)) \times \mathrm{End}(\mathbb{Q}_{01}(q^\infty)) = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q. \qquad \boxtimes$$

Предложение 1.9 Пусть p есть простое число, тогда для любого $n \geqslant 2$ имеет место изоморфизм колец $\mathbb{Z}_{p^n} \simeq \mathbb{Z}_p$.

Доказательство. Пусть $q = p^n$. Очевидно, что группы $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ и $\mathbb{Q}_{01}(q^\infty)$ совпадают. Поэтому мы имеем следующую цепочку изоморфизмов колец:

$$\mathbb{Z}_{p^n} = \mathrm{End}(\mathbb{Q}_{01}(q^\infty)) = \mathrm{End}(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)) = \mathbb{Z}_p.$$

Утверждение данного предложения также можно доказать, группируя p-ичные разряды в блоки по n штук и выполняя соответствующие вычисления с рядами. ⊠

Предложения 1.8 и 1.9 позволяют определить структуру кольца целых m-адических чисел для произвольного натурального числа $m \geqslant 2$ на основании разложения этого числа на простые сомножители.

$$m = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i} \quad \rightarrow \quad \mathbb{Z}_m = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{p_i}.$$

Если число m не является простым, то кольцо $\mathbb{Z}_m$ очевидно содержит делители нуля. В этом состоит основное отличие произвольных колец целых m-адических чисел от колец $\mathbb{Z}_p$, определенных для простых p. Если не оговорено противное, то, употребляя далее термин «p-адический», мы будем предполагать число p простым.

1.3 Периодичность рациональных p-адических дробей

Настоящий параграф имеет чисто технический характер. В нем мы покажем, что для любого числа $q \in \mathbb{Q}_{(p)}$ последовательность, получающаяся при разложении этого числа в p-адическую дробь, начиная с некоторого номера становится периодической, и обратно каждая такая последовательность является разложением в p-адическую дробь некоторого рационального числа, являющегося целым по модулю p. Для упрощения доказательства этого факта мы будем использовать технику разбиения p-адического разложения числа на блоки равной длины и доказанный в предыдущем параграфе изоморфизм колец $\mathbb{Z}_{p^n} \simeq \mathbb{Z}_p$.

□ Будем называть последовательность натуральных чисел ***квазипериодической***, если она становится периодической, начиная с некоторого места.

Квазипериодическую последовательность элементов кольца $\mathbb{Z}(p)$ можно представить как некоторый первоначальный блок, состоящий из m p-ичных цифр, за которым следует бесконечная последовательность одинаковых блоков длины k:

$$\underbrace{x_0x_1x_2x_3}_{m=4}\underbrace{x_5x_6x_7}_{k=3}\underbrace{x_5x_6x_7}_{3}\ldots$$

Взяв любое число n, которое больше m и делится на k (например, наименьшее общее кратное $n = \mathrm{НОК}(m,k)$), можно считать, все блоки квазипериодической последовательности имеют одинаковый размер равный n. В этом случае, сгруппировав p-ичные разряды в блоки по n элементов, любое p-адическое число $\mathfrak{a} \in \mathbb{Z}_p$ можно превратить в бесконечный ряд, составленный из степеней числа $q = p^n$ с коэффициентами принимающими значение в кольце вычетов $\mathbb{Z}(p^n)$.

$$\mathfrak{a} = a_0 + a_1p^n + a_2p^{2n} + a_3p^{3n} + \ldots + a_kp^{kn} + \ldots, \text{ где } a_n \in \mathbb{Z}(p^n). \tag{17}$$

Это можно выразить другими словами, сказав, что:

$$\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_{p^n} = \mathbb{Z}_q, \text{ при любом } n \geqslant 1.$$

Предложение 1.10 Справедливы следующие утверждения:

(i) Квазипериодические последовательности образуют подкольцо в кольце $\mathbb{Z}_p$.

(ii) Целое p-адическое число является рациональным тогда и только тогда, когда коэффициенты его p-адического разложения образуют квазипериодическую последовательность.

(iii) Отображение, $i : \mathbb{Q}_{(p)} \to \mathbb{Z}_p$, ставящее в соответствие каждому числу $q \in \mathbb{Q}_{(p)}$ его разложение в p-адическую дробь, осуществляет изоморфное отображение кольца целых по модулю p рациональных чисел на подкольцо квазипериодических последовательностей в $\mathbb{Z}_p$.

Доказательство. Из формулы суммирования p-адической геометрической прогрессии

$$1 + p^n + p^{2n} + p^{3n} + \cdots = 1/(1 - p^n)$$

следует, что любая квазипериодическая последовательность $\mathfrak{a} = \langle baaa \dots \rangle$ с размером блока равным n, рассматриваемая как p-адическое число, соответствует рациональному числу

$$\widehat{\mathfrak{a}} = b + ap^n/(1 - p^n) = (b + (a - b)p^n)/(1 - p^n) \in \mathbb{Q}_{(p)}.$$

В частности, натуральному числу n соответствует последовательность $\langle n000 \dots \rangle$. Поскольку умножение на натуральное число сводится к последовательному сложению, то доказательство обратного утверждения, состоящего в том, что любое целое по модулю p рациональное число, раскладывается в квазипериодическую p-адическую дробь сводится к доказательству следующих трех фактов, относящихся к квазипериодическим последовательностям, трактуемым как p-адические числа:

(i) сложение двух квазипериодических последовательностей дает квазипериодическую последовательность;

(ii) операция вычисления последовательности, противоположной к квазипериодической последовательности, дает квазипериодическую последовательность;

(iii) для любого взаимно простого с p натурального числа b разложение числа $1/b$ в p-адическую дробь порождает квазипериодическую последовательность.

Первые два пункта тривиальны, а третий потребует некоторых вычислений с рядами. (i) Рассмотрим операцию сложения и покажем, что сумма двух квазипериодических последовательностей $\mathfrak{a} = \langle eaaa \dots \rangle$ и $\mathfrak{b} = \langle fbbb \dots \rangle$, рассматриваемых как p-адические числа, будет квазипериодична. Для того, чтобы в этом убедиться, нужно привести размер их блоков к одинаковой длине с помощью взятия наименьшего общего кратного всех участвующих в рассмотрении блоков, а затем рассмотреть правило переноса разрядов. Пусть размер такого блока равен n, и $q = p^n$. Если обозначить сложение по модулю q символом $\oplus$, а перенос в

старший q-ичный разряд символом $\to$, то сложение чисел $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} e+f &= e\oplus f\to c\\ c+a+b &= c\oplus a\oplus b\to d_1\\ d_1+a+b &= d_1\oplus a\oplus b\to d_2\\ d_2+a+b &= d_2\oplus a\oplus b\to d_3\\ \dots &= \dots\\ d_k+a+b &= d_k\oplus a\oplus b\to d_{k+1}\\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

Покажем, что значение переноса d_k может принимать только значение от 0 до $q-1$, из чего будет следовать, что последовательность $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, начиная с некоторого места, зацикливается и становится периодической. Максимальное 2-х разрядное число в системе счисления с основанием q равно $(q-1)+(q-1)q$, а максимальный перенос при сложении трех одноразрядных чисел возникает, когда каждое из них равно $(q-1)$. Это означает, что нам нужно доказать неравенство $3(q-1)\leqslant(q-1)(1+q)$, которое очевидно выполняется для любого $q\geqslant 2$.

(ii) Если числу $\mathfrak{a}$ соответствует квазипериодическая последовательность $\langle baaa\dots\rangle$ с размером блока равным n, то числу $-\mathfrak{a}$ будет соответствовать последовательность $\langle dccc\dots\rangle$, где $d=p^n-b$ и $c=p^n-a-1$, которая очевидно является квазипериодической.

(iii) Нам осталось рассмотреть случай деления на натуральное число. Пусть b есть некоторое взаимно простое с p натуральное число, разложение которого в p-ичную дробь содержит n значащих разрядов. Покажем, что разложение числа $1/b$ в p-адическую дробь порождает квазипериодическую последовательность. Для этого сгруппируем p-ичные разряды в блоки, состоящие из n разрядов, как это было описано выше, и будем решать следующее уравнение, путем последовательного рекурсивного вычисления коэффициентов a_k:

$$b(a_0+a_1q+a_2q^2+a_3q^3+\dots)=1,\quad q=p^n.$$

Сравнение правой и левой части дает нам следующую последовательность коэффициентов, являющихся элементами кольца $\mathbb{Z}(q)=\mathbb{Z}(p^n)$:

$$ba_0=1 \mod q \Rightarrow$$

$$a_0=b^{-1} \mod q,\quad ba_0=c_0q+1,\ \text{и } c_0 \text{ переносится в старший разряд}$$

$$ba_1+c_0=0 \mod q\Rightarrow$$

$$ba_1+c_0=c_1q,\quad a_1=-b^{-1}c_0 \mod q,\ \text{и } c_1 \text{ переносится в старший разряд}$$

$$ba_2+c_1=0 \mod q\Rightarrow$$

$$ba_2+c_1=qc_2,\quad a_2=-b^{-1}c_1 \mod q \text{ и } c_2 \text{ переносится в старший разряд и т.д.}$$

Продолжая таким образом дальше, мы получаем следующую рекуррентную формулу для вычисления коэффициентов a_k и переносов в следующий разряд c_k, являющихся элементами кольца $\mathbb{Z}(p^n)$:

$$c_k=(ba_k+c_{k-1})/q,\quad a_k=-b^{-1}c_{k-1} \mod q.$$

Если мы докажем, что также как и в случае со сложением, переносы c_k осуществляются максимум на один разряд вверх, то, поскольку кольцо $\mathbb{Z}(q) = \mathbb{Z}(p^n)$ является конечным, из этого будет следовать, что рекуррентная последовательность $\langle a_k, c_k\rangle$ с какого-то момента зацикливается, то есть последовательность

$$\langle a_0, a_1, a_2, \dots\rangle,$$

является квазипериодической. Из приведенных выше формул следует, что для выполнения переноса максимум на один разряд вверх необходимо и достаточно выполнение неравенства $(q-1)^2 + (q-1) \leqslant (q-1)q$, которое на самом деле является равенством, что и завершает доказательство пункта (iii). Очевидно, что рациональное число однозначно определяется свой p-адической дробью. Поскольку кольцо $\mathbb{Q}_{(p)}$ порождается единицей с помощью операций сложения, взятия обратного и взятия противоположного числа из вышесказанного можно заключить, что подкольцо квазипериодических последовательностей является изоморфным образом кольца $\mathbb{Q}_{(p)}$ относительно операции разложения в p-адическую дробь, что и требовалось доказать. $\boxtimes$

1.4 Строение группы корней из единицы в кольце $\mathbb{Z}_p$

Перейдем теперь к естественным примерам p-адических чисел, не являющихся рациональными. Первыми содержательными примерами таких чисел являются корни из единицы в кольце $\mathbb{Z}_p$. Очевидно, что в кольце $\mathbb{Q}_{(p)}$ не существует нетривиальных корней из единицы. Для описания корней из единицы в кольце $\mathbb{Z}_p$ нам понадобится информация о строении группы обратимых элементов в кольцах $\mathbb{Z}(p^n)$. При $n = 1$, хорошо известный факт состоит в том, что мультипликативная группа поля $\mathbb{Z}(p)$ является циклической группой порядка $p-1$. Для определения строения групп обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}(p^n)$ нам потребуется следующая лемма, для доказательства которой нам придется произвести некоторые вычисления.

Лемма 1.11 Для любого натурального числа n и простого числа $p \geqslant 3$ справедливы следующие утверждения:

(i) $(1+2)^{2^n} = 1 + c \cdot 2^{n+2}$, где $(c, 2) = 1$;

(ii) $(1+p)^{p^n} = 1 + c \cdot p^{n+1}$, где $(c, p) = 1$.

Доказательство. Оба этих утверждения доказываются индукцией по показателю степени n. Рассмотрим утверждение (i). При $n = 1$ мы имеем равенство

$$(1+2)^{2^n} = (1+2)^2 = 3^2 = 9 = 1 + 8 = 1 + 2^3 = 1 + 2^{n+2},$$

которое составляет базу индукции. Предположим, что равенство (i) доказано для некоторого n. Рассмотрим выражение

$$(1+2)^{2^{n+1}} = ((1+2)^{2^n})^2 = (1 + c \cdot 2^{n+2})^2 = 1 + c \cdot 2 \cdot 2^{n+2} + c^2 \cdot 2^{4n+4} =$$

$$= 1 + c \cdot 2^{n+3} \cdot (1 + c \cdot 2^{3n+1}) = 1 + c' \cdot 2^{n+3},$$

где c и c' есть нечетные числа. Отсюда по индукции заключаем о справедливости утверждения (i). Перейдем к утверждению (ii). Положим $n = 1$, и рассмотрим выражение

$$(1+p)^p = 1 + p^2 + \sum_{k=2}^{p} C_p^k \cdot p^k = 1 + p^2 \cdot (1 + \sum_{k=2}^{p} C_p^k \cdot p^{k-2}) = 1 + c \cdot p^2.$$

Заметим, что все выражения, стоящие под знаком суммы, делятся на p, включая случай, когда $k = 2$, при котором

$$C_p^2 = \frac{p(p-1)}{2} = p \cdot \frac{(p-1)}{2} = p \cdot q.$$

Поэтому число c в приведенной выше формуле взаимно просто с p, что дает нам базу индукции. Предположим, что равенство (ii) доказано для некоторого n. Рассмотрим выражение

$$(1+p)^{p^{n+1}} = ((1+p)^{p^n})^p = (1 + c \cdot p^{n+1})^p = 1 + c \cdot p^{n+2} + \sum_{k=2}^{p} C_p^k \cdot c^k \cdot p^{k(n+1)} =$$

$$= 1 + c \cdot p^{n+2} \cdot (1 + \sum_{k=2}^{p} C_p^k \cdot c^{k-1} \cdot p^{k(n+1)-(n+2)}) = 1 + c \cdot p^{n+2} \cdot c <<= 1 + c' \cdot p^{n+2}.$$

Если $k \geqslant 2$, то $k(n+1)-(n+2) = kn-n+k-2 > 1$, и стоящее в скобках выражение представляет число $c >>$, взаимно простое с p. Число c' также взаимно просто с p как произведение двух таких чисел c и $c <<$. По индукции заключаем о справедливости леммы 1.11. $\boxtimes$

Из леммы 1.11 вытекает следующее следствие.

Предложение 1.12 Справедливы следующие утверждения:

(i) Порядок элемента 3 в группе $\mathbb{Z}(2^2)^\times$ равен 2;

(ii) При $n > 2$ порядок элемента 3 в группе $\mathbb{Z}(2^n)^\times$ равен 2^{n-2};

(iii) Если число p простое и $n > 1$, то порядок элемента $1 + p$ в группе $\mathbb{Z}(p^n)^\times$ равен p^{n-1}.

Для дальнейшего нам потребуется следующая простая лемма.

Лемма 1.13 Путь $\mathfrak{A}$ есть конечная абелева группа, заданная в мультипликативной нотации, и $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ есть две ее нетривиальные подгруппы. Тогда справедливы следующие утверждения

(i) Если порядки подгрупп $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ взаимно просты, то $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = \{\mathbf{1}\}$;

(ii) Если $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}| \cdot |\mathfrak{C}|$ и $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = \{\mathbf{1}\}$, то группа $\mathfrak{A}$ раскладывается в прямое произведение подгрупп $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}.$$

Доказательство. Пусть порядки подгрупп $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ равны соответственно n и m, где $(n, m) = 1$, и пусть $c \in \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$. Поскольку числа n и m взаимно просты, то существуют целые числа u и v такие, что $u \cdot n + v \cdot m = 1$. Тогда мы имеем следующую цепочку равенств.

$$c^n = \mathbf{1},\ c^m = \mathbf{1} \quad \rightarrow \quad \mathbf{1} = c^{nu} \cdot c^{mv} = c^{nu+mv} = c^1 = c.$$

Следовательно, $c = \mathbf{1}$ и утверждение (i) доказано. Перейдем к доказательству пункта (ii). Очевидно, что количество пар вида bc, где $b \in \mathfrak{B}$ и $c \in \mathfrak{C}$ совпадает с количеством элементов в группе $\mathfrak{A}$. Предположим, что среди множества таких пар есть такие, результаты произведения которых совпадают, то есть $b_1c_1 = b_2c_2$. Но тогда имеет место включение

$$b_1b_2^{-1} = c_2c_1^{-1} \in \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C},$$

которое по условию означает, что $b_1b_2^{-1} = c_2c_1^{-1} = \mathbf{1}$ или, что тоже самое, $b_1 = b_2, c_1 = c_2$. Следовательно, все пары дают различные произведения, количество которых совпадает с количеством элементов в группе $\mathfrak{A}$. Это факт вместе с условием $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = \{\mathbf{1}\}$ доказывает утверждение (ii). $\boxtimes$

Пусть $\mathbf{R}$ есть некоторое коммутативное кольцо с единицей, $r \in \mathbf{R}$ есть нильпотентный элемент (то есть элемент удовлетворяющий условию $r^n = 0$ при некотором $n \in \mathbb{N}$) этого кольца, и (r) – порожденный им идеал. Тождество

$$1/(1-r) = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

показывает, что элементы множества $1 + (r)$ образуют мультипликативную подгруппу в группе обратимых элементов кольца $\mathbf{R}$. В частности, с цепочкой вложенных друг в друга идеалов:

$$\mathbf{R} \supset (r) \supset (r^2) \supset (r^3) \supset \dots \supset \{0\}$$

связана цепочка мультипликативных подгрупп в $\mathbf{R}^*$:

$$\mathbf{R}^* \supset 1 + (r) \supset 1 + (r^2) \supset 1 + (r^3) \supset \dots \supset \{1\}.$$

Применив эту конструкцию к кольцу $\mathbb{Z}(p^n)$ и элементу $p \in \mathbb{Z}(p^n)$, мы получим цепочку, состоящую из n вложенных друг в друга подгрупп:

$$\mathbb{Z}(p^n)^\times \supset 1 + (p) \supset 1 + (p^2) \supset 1 + (p^3) \supset \dots \supset \{1\}.$$

Очевидно, что подгруппа $1 + (p^k)$ состоит из всех чисел, у которых младший разряд в p-ичном представлении равен 1, а разряды от второго до $(k-1)$-ого равны нулю, то есть чисел вида

$$1000 d_k d_{k+1} \dots d_{n-1}.$$

В случае кольца целых p-адических чисел аналогичная конструкция с помощью функции $x \to 1/(1+x)$ отображает последовательность идеалов (p^k), образующих вложенную последовательность окрестностей нуля, в систему мультипликативных подгрупп, образующих такую же последовательность окрестностей единицы.

Следующее предложение описывает строение группы $\mathbb{Z}(p^n)^\times$ обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}(p^n)$ при простом числе p.

Предложение 1.14 Пусть p есть простое число, и $n \geqslant 2$, тогда группа $\mathbb{Z}(p^n)^\times$ обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}(p^n)$ имеет следующее строение:

(i) При любом p группа $\mathbb{Z}(p^n)^\times$ состоит из тех и только тех элементов кольца $\mathbb{Z}(p^n)$, младший разряд которых в p-ичном представлении отличен от нуля;

(ii) Количество элементов в группе $\mathbb{Z}(p^n)^\times$ равно $p^{n-1}(p-1)$;

(iii) При $p=2$ группа $\mathbb{Z}(2^n)^\times$ является циклической, если $n=2$. Если $n>2$, то группа $\mathbb{Z}(2^n)^\times$ является прямой суммой двух циклических подгрупп порядков 2 и 2^{n-2}, которые порождаются соответственно элементами $2^{n-1}-1$ и 3, например, в случае группы $\mathbb{Z}(256)^\times$ это будут следующие числа:

$$11111110 \text{ и } 11000000;$$

(iv) При $p \geqslant 3$ группа $\mathbb{Z}(p^n)^\times$ является циклической группой порядка $p^{n-1}(p-1)$;

(v) Поскольку при $p \geqslant 3$, числа p^{n-1} и $(p-1)$ являются взаимно простыми, то группа $\mathbb{Z}(p^n)^\times$ разлагается в прямое произведение двух циклических подгрупп $\mathbb{U}(p,n)$ и $\mathbb{U}(p-1,n)$ имеющих порядки p^{n-1} и $(p-1)$ соответственно;

(vi) Группа $\mathbb{U}(p,n)$ порождается элементом $1+p$ и состоит из всех чисел, у которых младший разряд в p-ичном представлении равен 1.

(vii) Отображения $x \to x^{p^{n-1}}$ и $x \to x^{p-1}$ проецируют группу $\mathbb{Z}(p^n)^\times$ на ее подгруппы $\mathbb{U}(p-1,n)$ и $\mathbb{U}(p,n)$ соответственно:

$$\mathbb{Z}(p^n)^\times = \mathbb{U}(p,n) \oplus \mathbb{U}(p-1,n),$$

$$x \to x^{p^{n-1}} : \mathbb{Z}(p^n)^\times \to \mathbb{U}(p-1,n), \quad |\mathbb{U}(p-1,n)| = p-1,$$

$$x \to x^{p-1} : \mathbb{Z}(p^n)^\times \to \mathbb{U}(p,n), \quad |\mathbb{U}(p,n)| = p^{n-1}.$$

Доказательство. Пункт (i) и (ii). Из тождества

$$(1+r)(1-r+r^2-r^3+\dots) = 1$$

следует, что каждый элемент вида $1+p\cdot k$ является обратимым в кольце $\mathbb{Z}(p^n)$, так как элемент $p\cdot k$ является нильпотентным. Так как для любого $0 < u \leqslant p-1$ существует элемент v, лежащий в этом же диапазоне и удовлетворяющий условию $u\cdot v = 1+p\cdot w$, то оба числа u и v обратимы в кольце вычетов $\mathbb{Z}(p^n)$, так как их произведение является обратимым элементом. Отсюда следует, что обратимыми являются те и только те элементы кольца $\mathbb{Z}(p^n)$, которые имеют вид $u+p\cdot k = u\cdot(1+p\cdot k\cdot u^{-1})$. Представив такие числа в их p-ичном коде легко видеть, что количество таких элементов равно $(p-1)p^{n-1}$.

Пункт (iii). Случай $n=2$ тривиален, пусть $n>2$. Рассмотрим две циклические подгруппы в $\mathbb{Z}(2^n)^\times$, порождаемые элементами 3 и $b=2^{n-1}-1$. Из предложения 1.12 (i) следует, что порядок элемента 3 равен 2^{n-2}. Порядок элемента b равен двум, так как

$$(2^{n-1}-1)^2 = 2^{2n-2} - 2^n + 1 = 1 \mod (2^n).$$

Покажем, что пересечение групп $\langle 3\rangle \cup \langle b\rangle$ равно одноэлементной подгруппе $\{\mathbf{1}\}$. Согласно предложению 1.12 порядок элемента 3 равен степени двойки, поэтому все элементы подгруппы $\langle 3\rangle$ также имеют порядок, равный степени двойки, и по этой причине не могут принадлежать подгруппе $\langle b\rangle$, порожденной элементом нечетного порядка, равного 2^n-1.

Следовательно подгруппы $\langle 3\rangle$ и $\langle 2^{n-1}-1\rangle$ пересекаются по единичной подгруппе. Произведение мощностей этих групп равно мощности группы $\mathbb{Z}(2^n)^\times$. Согласно лемме 1.13 (ii) получаем разложение группы $\mathbb{Z}(2^n)^\times$ в произведение двух циклических групп:

$$\mathbb{Z}(2^n)^\times = \langle 3\rangle \times \langle 2^{n-1}-1\rangle.$$

Пункты (iv-vi). Из предложения 1.12 (iii) следует, что порядок элемента $1+p$ в группе $\mathbb{Z}(p^n)^\times$ равен p^{n-1}. Если мы найдем в этой группе элемент порядка $p-1$, то из леммы 1.13 будет следовать, что группа $\mathbb{Z}(p^n)^\times$ раскладывается в прямое произведение двух циклических подгрупп порядков p^{n-1} и $p-1$ соответственно. Покажем, что в качестве такого элемента можно взять элемент $b = g^{\,p^{n-1}}$, где g есть любой элемент, который при гомоморфизме колец $\phi : \mathbb{Z}(p^n) \to \mathbb{Z}(p)$ отображается в образующий элемент мультипликативной группы поля $\mathbb{Z}(p)$. Очевидно, что $b^{p-1} = 1$. Если $\widehat{g}$ есть образующий элемент группы $\mathbb{Z}(p)^\times$, то таковыми также будут все элементы вида $\widehat{g}^{\,m}$, где $(m, p-1) = 1$, в частности образующим будет элемент $\widehat{g}^{\,p^{n-1}}$, являющийся образом элемента b при гомоморфизме ϕ. Отсюда следует, что $b^m \neq 1$, если $0 < m < p-1$, следовательно элемент b имеет порядок $p-1$ и согласно лемме 1.13 имеет место разложение группы $\mathbb{Z}(p^n)^\times$ в прямое произведение групп:

$$\mathbb{Z}(p^n)^\times = \langle 1+p\rangle \times \langle b\rangle = \mathbb{U}(p,n) \oplus \mathbb{U}(p-1,n).$$

При этом группа $\mathbb{Z}(p^n)^\times$ будет циклической, так как она является прямым произведением двух циклических групп взаимно простых порядков.

Пункт (vii) легко доказывается, исходя из общих свойств конечных абелевых групп. ⊠

Поскольку каждое кольцо $\mathbb{Z}(p^n)$ является гомоморфным образом кольца $\mathbb{Z}_p$, то каждый корень из единицы имеет порядок, делящий порядок группы $\mathbb{Z}(p^n)^\times$ при любом n. Очевидно, что наибольшим общим делителем порядков групп $\mathbb{Z}(p^n)^\times$ является число $(p-1)$. Отсюда следует, что при $p \geqslant 3$ группа корней кольца $\mathbb{Z}_p$ содержит не более $p-1$ элементов. На самом деле эта оценка является точной и имеет место следующее утверждение:

Предложение 1.15 При $p \geqslant 3$ справедливы следующие утверждения:

(i) Группа корней из единицы кольца $\mathbb{Z}_p$ состоит в точности из $p-1$ элементов;

(ii) В каждом кольце $\mathbb{Z}(p^n)$ существует ровно одна мультипликативная подгруппа порядка $p-1$, этой подгруппой является группа $\mathbb{U}(p-1,n)$;

(iii) Отображения π_n в стандартной цепочке колец вычетов осуществляют изоморфное отображение последовательности групп $\mathbb{U}(p-1,n) = \mathbb{U}(p',n)$ друг на друга:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{U}(p',1) & \xleftarrow{\pi_1} & \mathbb{U}(p',2) & \xleftarrow{\pi_2} & \mathbb{U}(p',3) & \xleftarrow{\pi_3} & \cdots & \xleftarrow{\pi_{n-1}} & \mathbb{U}(p',n) & \xleftarrow{\pi_n} & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \\
\mathbb{Z}(p^1) & \xleftarrow{\pi_1} & \mathbb{Z}(p^2) & \xleftarrow{\pi_2} & \mathbb{Z}(p^3) & \xleftarrow{\pi_3} & \cdots & \xleftarrow{\pi_{n-1}} & \mathbb{Z}(p^n) & \xleftarrow{\pi_n} & \cdots
\end{array} \tag{18}$$

(iv) Каждый корень из единицы кольца $\mathbb{Z}_p$ получается с помощью следующей процедуры: берется один из $p-1$ элементов e_1 группы $\mathbb{U}(p-1,1)$, являющейся группой обратимых

элементов поля $\mathbb{Z}(p)$, который затем поднимается вверх по цепочке (18) с помощью изоморфизмов $\pi_n(e_{n+1}) = e_n$. Полученная при этом последовательность

$$e = \langle e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n, \ldots \rangle, \text{ где } e_n \in \mathbb{U}(p-1, n) \text{ и } \pi_n(e_{n+1}) = e_n$$

однозначно определяет целое p-адическое число. Каждый последующий подъем вверх по цепочке (18) вычисляет следующий по старшинству p-ичный разряд числа e, при этом все младшие разряды сохраняются неизменными;

(v) Полученное при этом p-адическое число не является рациональным;

(vi) В последовательности $e = \langle e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n, \ldots \rangle$ нет нулей.

Доказательство. Доказательство этого утверждения мы оставляем читателю. ⊠

1.5 p-Адическая метрика

□ Метрическим пространством называется множество M с заданной на нем функцией расстояния $d : M \times M \to \mathbb{R}$ между его элементами, которая удовлетворяет следующим трем аксиомам:

(i) $d(x, x) = 0$;
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
(iii) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (неравенство треугольника).

Среди метрических пространств выделяется подкласс ультраметрических пространств, для которых выполняется более жесткая форма неравенства треугольника:

(iv) $d(x, z) \leqslant \max(d(x, y), d(y, z))$.

Пусть p есть некоторое натуральное число, не обязательно простое. Рассмотрим множество $\mathbb{Z}(p^n)$ как множество n-разрядных p-ичных слов, записанных слева направо в порядке возрастания разрядов. Пусть $w_1, w_2 \in \mathbb{Z}(p^n)$, определим расстояние между этими словами следующим образом:

$$d_p(w_1, w_2) = 1/p^k,$$

где k есть максимальное число начальных p-ичных разрядов, которые у этих двух слов совпадают. Данное определение выглядит вполне естественно: чем больше начальных разрядов в двух словах совпадает, то ближе эти слова по метрике d_p. Будем называть эту метрику p-адической. p-Адической метрике можно также дать арифметическую интерпретацию. Совпадение двух n-разрядных p-ичных слов в первых k разрядах эквивалентно условию $w_1 - w_2 = p^k u$, где u есть такой элемент кольца $\mathbb{Z}(p^n)$, что $u \bmod p \neq 0$. Поэтому

$$d_p(w_1, w_2) = 1/p^k, \quad \text{где} \quad w_1 - w_2 = p^k u,\ u \in \mathbb{Z}(p^n)^\times \text{ то есть } u \bmod p \neq 0.$$

Данное расстояние можно выразить через квазинорму, которая для числа $m \in \mathbb{Z}(p^n)$, представленного в виде $m = p^k \cdot u$, где $u \bmod p \neq 0$, определяется как

$$\|m\| = \|p^k \cdot u\| = 1/p^k.$$

Квазинорма нуля полагается равной нулю. Данная квазинорма не является нормой, поскольку $\|p\| \cdot \|p^{n-1}\| = \|p^n\| = \|0\| = 0$. Данная квазинорма удовлетворяет условию

$$\|x + y\| \leqslant \max(\|x\|, \|y\|),$$

что очевидно следует из следующих равенств

$$x + y = p^k u + p^l v = \begin{cases} p^m w, \text{ где } m \geqslant \min(k, l), w \bmod p \neq 0, \text{ если } x + y \neq 0, \\ 0, \text{ если } x + y = 0. \end{cases}$$

Метрика d_p выражается через эту квазинорму следующим образом $d_p(x, y) = \|x - y\|$.

Предложение 1.16 Пусть p есть натуральное число, большее единицы. Множество $\mathbb{Z}(p^n)$ с определенной на нем метрикой d_p является ультраметрическим пространством.

Доказательство. Выполнение условий (i) и (ii) очевидно. Докажем «неравенство треугольника».

$$d_p(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leqslant$$

$$\leqslant \max(\|(x - y)\|, \|(y - z)\|) = \max(d_p(x, y), d_p(y, z)). \quad \boxtimes$$

Рассмотрим еще один подход к обоснованию p-адической метрики. Формальный ряд, фигурирующий в определении (4) p-адического числа, наводит на мысль о том, что на кольце p-адических чисел можно определить метрику, при которой о сходимости таких рядов можно говорить не только в формальном, но и в содержательном аспекте. Рассмотрим некоторые наводящие соображения. Пусть R есть кольцо $\mathbb{Q}_{(p)}$ или $\mathbb{Z}_p$. Если мы попробуем схематически отобразить соотношение между идеалами этого кольца на некоторой диаграмме, то вполне естественно будет сделать это так, как это показано на рисунке 1.3, где идеалы изображаются вложенными друг в друга кругами, а разность между двумя последовательно идущими идеалами изображается кольцом, которое кроме того является орбитой относительно действия группы обратимых элементов кольца. Данные круги выглядят как система окрестностей нуля, находящегося в центре этой системы концентрических окружностей. Если отобразить эту диаграмму в пространстве, то место кругов займут шары, а место колец сферические слои. Данная диаграмма наводит нас на мысль о том, что на кольце R можно задать метрику, которая является отражением этой геометрической конструкции, при этом расстояние некоторой сферы от нуля должно быть обратно пропорционально ее радиусу. В данном случае геометрическая интуиция нас не обманывает. На кольце R действительно можно ввести естественную метрику, которая превращает кольцо R в метрическое пространство, обладающее целым рядом замечательных метрических и топологических свойств. Эта метрика определяется через p-адическую норму.

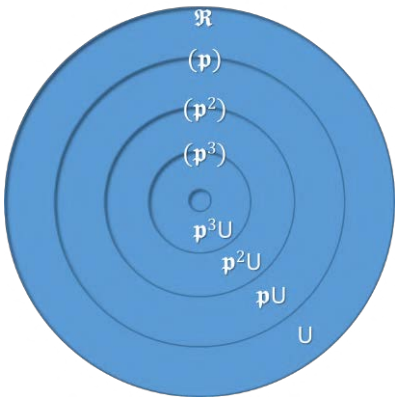


Рисунок 1.3

Определение p-адической нормы. Пусть кольцо R есть одно из колец $\mathbb{Q}_{(p)}$ или $\mathbb{Z}_p$, и x есть ненулевой элемент этого кольца, представленный в виде $x = p^k \cdot u$, где u есть

обратимый элемент кольца R. p-Адической нормой числа x называется величина $1/p^k$:

$$\|x\| = 1/p^k.$$

Норма нуля полагается равной нулю. Легко видеть, что каждый ненулевой элемент кольца R однозначно представляется в виде $p^k \cdot u$, поэтому данное определение нормы является корректным. p-Адическая норма обладает следующими легко проверяемыми свойствами:

(i) $\|1\| = 1$;
(ii) $\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$;
(iii) $\|x + y\| \leqslant \max(\|x\|, \|y\|)$.

Так же как и в конечном случае справедливость условия (iii) следует из соотношения

$$x + y = p^k u + p^l v = \begin{cases} p^m w, \text{ где } m \geqslant \min(k, l), w \in \mathrm{R}^\times, \text{ если } x + y \neq 0, \\ 0, \text{ если } x + y = 0. \end{cases}$$

Кольцо с заданной на нем нормой, удовлетворяющей условиям (i)-(iii) называется неархимедовым нормированным кольцом. Свойство (iii) является отражением того очевидного факта, что для любых двух главных идеалов, порожденных элементами x и y, один обязательно целиком лежит в другом, поэтому сумма этих двух идеалов совпадает с большим из них. Вследствие этого сложение любого элемента кольца с самим собой n раз в зависимости от делимости числа n на p или сохраняет, или уменьшает порядок малости этого элемента. Данное свойство получило название «неархимедовость», поскольку противоположное свойство, характерное для вещественных величин, было сформулировано Архимедом в форме постулата в введении к его книге «Квадратура параболы».

Соотношения (i)-(iii) позволяют ввести на множествах R и $\mathrm{R} \times \mathrm{R}$ метрики по принципу:

$$d_1(x, y) = \|x - y\|, \quad d_2(\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle) = \max(\|x_1 - x_2\|, \|y_1 - y_2\|).$$

Выполнение аксиом ультраметрического пространства легко проверяется. Близость двух p-адических чисел в p-адической метрике означает совпадение некоторого количества младших разрядов при разложении этих чисел в p-адическую дробь. Равенство p-адического расстояния между двумя числами величине $1/p^k$ означает совпадение в точности k младших разрядов этих чисел. Чем больше младших разрядов у двух чисел совпадает, тем ближе эти числа друг к другу в p-адической метрике. Если интерпретировать p-адические числа как бесконечные пути по полному p-ичному дереву, то близость двух путей будет означать совпадение их начальных отрезков. Чем больше начальный отрезок, на котором два пути совпадают, тем ближе они друг к другу в p-адической метрике, что вполне соответствует интуитивному представлению о близости таких объектов. Это принципиально отличает p-адическую метрику от евклидовой, в которой близость чисел определяется на основе совпадения старших разрядов.

p-Адическая норма позволяет естественным образом определить p-адические сферы $\mathfrak{s}_k(x)$ и p-адические шары $\mathfrak{b}_k(x)$ с центром некоторой фиксированной точке $x \in \mathrm{R}$.

$$\mathfrak{s}_k(x) = \{z \mid \|z - x\| = 1/p^k\}, \quad \mathfrak{b}_k(x) = \{z \mid \|z - x\| \leqslant 1/p^k\}.$$

Очевидно, что

$$\mathfrak{s}_k(x) = \mathfrak{b}_k(x) \setminus \mathfrak{b}_{k+1}(x), \quad \mathfrak{b}_k(x) \setminus \{0\} = \bigcup_{k \leqslant m} \mathfrak{s}_m(x).$$

p-Адический шар радиуса $1/p^k$ с центром в точке x совпадает с множеством $x + (p^k)$. Очевидно, что такой шар однозначно определяется первыми k цифрами числа x, поэтому существует взаимно однозначное соответствие между p-адическими шарами и конечными последовательностями элементов поля $\mathbb{Z}(p)$. Мы далее рассмотрим этот вопрос более подробно. В дальнейшем для краткости мы часто будем опускать прилагательное «p-адический» и говорить просто о шарах и сферах. Подобно тому как в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, где сферы с центром в нуле являются орбитами группы вращений, а все остальные сферы получаются из них аддитивными сдвигами, в кольце R сферы с центром в нуле представляют собой орбиты группы обратимых элементов, а все остальные получаются из них аддитивными сдвигами. Хотя слово «с центром в нуле» применительно к p-адическому случаю имеет характер некоторой условности, поскольку в p-адической метрике каждая точка, лежащая внутри шара, является его центром, что вытекает из следующих неравенств:

$$\|x_0 - x_1\| \leqslant d \to \{\|z - x_0\| \leqslant d \leftrightarrow \|z - x_1\| \leqslant d\}.$$

Посмотрим, как выглядит в p-адической метрике понятие сходимости. Легко видеть, что сходимость последовательности p-адических чисел означает стабилизацию, начиная с некоторого номера, любой последовательности начальных разрядов тех чисел, которые составляют эту последовательность. Другими словами, последовательность целых p-адических чисел $\{x_n\}$ является сходящейся в p-адической метрике к числу y, если для любого $N > 0$ найдется такой номер m, начиная с которого первые N разрядов всех членов последовательности x_n, совпадают с первыми N разрядами числа y.

Легко проверить, что в p-адической метрике операции сложения и умножения являются непрерывными. Действительно, если две пары чисел $\langle x_1, y_1\rangle$ и $\langle x_2, y_2\rangle$ совпадают по младшим k разрядам, то, очевидно, по этим разрядам будут совпадать их суммы, а также их произведения, что означает непрерывность данных операций. Непрерывность операции деления следует из непрерывности операции $x \to x^{-1}$ для обратимых элементов кольца. Действительно, для любых двух обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}_p$ справедливо равенство

$$u^{-1} - v^{-1} = (v - u) \cdot u^{-1} \cdot v^{-1}.$$

Отсюда следует равенство

$$\|u^{-1} - v^{-1}\| = \|v - u\|\|u^{-1}\|\|v^{-1}\|.$$

Поскольку $\|u^{-1}\| = \|v^{-1}\| = 1$, это дает нам равенство

$$\|u^{-1} - v^{-1}\| = \|u - v\|,$$

из которого следует непрерывность операции взятия обратного элемента. Непрерывность всех арифметических операций означает, что кольца $\mathbb{Q}_{(p)}$ и $\mathbb{Z}_p$ являются топологическими кольцами. Перейдем к описанию топологических и метрических свойств колец $\mathbb{Q}_{(p)}$ или $\mathbb{Z}_p$.

Предложение 1.17 Пусть R есть кольцо $\mathbb{Q}_{(p)}$ или $\mathbb{Z}_p$, на котором задана p-адическая метрика и определена топология, которую эта метрика индуцирует. Справедливы следующие утверждения:

(i) идеалы кольца R являются шарами, при этом $(p^k) = \mathfrak{b}_k(0)$;

(ii) кольцо R являются шаром единичного радиуса $\mathfrak{b}_0(0)$;

(iii) цепочка идеалов кольца R представляет собой систему открытых окрестностей нуля;

(iv) разности между двумя последовательно идущими идеалами являются сферами

$$\mathfrak{s}_k(0) = \mathfrak{b}_k(0) \setminus \mathfrak{b}_{k+1}(0);$$

(v) внешняя сфера $\mathfrak{s}_0(0)$ совпадает с группой обратимых элементов кольца;

(vi) сферы $\mathfrak{s}_k(0)$ являются орбитами, возникающими при действии группы обратимых элементов кольца мультипликативными сдвигами;

(vii) операции сложения, умножения и деления являются в этой метрике непрерывными, при этом аддитивные сдвиги и умножения на обратимый элемент кольца представляют собой изометрические отображения;

(viii) каждый шар является одновременно замкнутым и открытым множеством;

(ix) каждая точка, лежащая внутри шара является его центом;

(x) сложение любого элемента кольца с самом собой n раз, в зависимости от делимости числа n на p, соответственно или уменьшает, или сохраняет порядок его малости (неархимедовость).

Доказательство. Доказательства всех этих утверждений являются достаточно простыми, и мы оставляем их читателю в качестве упражнения. Остановимся только на пунктах (viii) и (ix). Очевидно, что каждое из следующих трех множеств является замкнутым: сфера, конечное объединение сфер, шар. Каждый шар с центром в нуле получается исключением из множества R конечного количества сфер с центром в нуле. Следовательно, он является открытым множеством, так как его дополнение замкнуто. Все остальные шары получаются из шаров с центром в нуле путем аддитивных сдвигов, являющихся изометрическими изображениями. Поэтому все шары одновременно являются открытыми и замкнутыми множествами. ⊠

Предложение 1.18 Метрическое пространство $\mathbb{Z}_p$ является полным. Множество $\mathbb{Q}_{(p)}$ целых по модулю p чисел является всюду плотным в $\mathbb{Z}_p$, поэтому кольцо $\mathbb{Z}_p$ является пополнением кольца $\mathbb{Q}_{(p)}$ по p-адической норме.

Доказательство. Пусть x_n есть фундаментальная последовательность p-адических чисел. Как мы видели выше, фундаментальность последовательности p-адических чисел означает стабилизацию, начиная с некоторого номера, любой последовательности начальных разрядов тех чисел, которые составляют эту последовательность. Последовательно объединяя последовательности тех разрядов, на которых произошла стабилизация, мы получаем в

итоге последовательность цифр, определяющую p-адическое число, которое является пределом исходной последовательности. Очевидно, что всюду плотным в $\mathbb{Z}_p$ является не только множество $\mathbb{Q}_{(p)}$, но и множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, так как для любого $k \in \mathbb{N}$ и для каждого целого p-адического числа можно подобрать натуральное число, совпадающее с данным p-адическим числом по k младшим разрядам. Из этого факта следует вторая часть данного предложения. ⊠

p-Адическая метрика обобщается на случай произвольного кольца целых m-адических чисел. Если, например, $m = pq$, где числа p и q простые, то m-адическую метрику можно определить через m-адическую норму по полной аналогии с p-адической, а можно определить ее через метрики d_p и d_q:

$$d_{pq}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_p(x_1, y_1), d_q(x_2, y_2)).$$

В смысле топологии результат при этом получается один и тот же. Нетрудно доказать, что относительно данной метрики пространство $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_{pq}$ является полным. Данное утверждение очевидным образом распространяется на случай произвольного натурального числа $m \geqslant 2$.

1.6 Пять образов кольца целых p-адических чисел

Суммируя сказанное в предыдущих параграфах, мы приходим к следующему предложению, с которого мы начали изложение и которое описывает пять реализаций кольца целых p-адических чисел.

Предложение 1.19 Пусть p есть простое число. Существует пять эквивалентных между собой реализаций кольца целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$:

(i) Кольцо эндоморфизмов «бесконечного p^n-угольника», то есть мультипликативной группы $\mathbb{U}(p^\infty)$ комплексных корней из единицы всех степеней числа p или изоморфной ей группы $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ всех p-ично рациональных чисел из полуоткрытого интервала [0,1) с операцией сложения по модулю единицы;

(ii) Проективный предел линейной цепочки колец вычетов по модулю всех степеней числа p:

$$\mathbb{Z}(p^1) \xleftarrow{\pi_1} \mathbb{Z}(p^2) \xleftarrow{\pi_2} \mathbb{Z}(p^3) \xleftarrow{\pi_3} \cdots \xleftarrow{\pi_{n-1}} \mathbb{Z}(p^n) \xleftarrow{\pi_n} \cdots ;$$

(iii) Кольцо бесконечных p-ичных последовательностей или p-ичных степенных рядов вида $\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$ с естественными операциями сложения и умножения в p-ичной системе счисления с переносом разрядов вправо;

(iv) Множество всех выходящих из корня бесконечных путей в полном p-ичном дереве $\mathbb{T}_p$ с операциями сложения и умножения путей как указано в пункте (iii);

(v) Пополнение нормированного кольца $\mathbb{Q}_{(p)}$ относительно p-адической нормы.

Доказательство. Доказательство данного предложения следует из изложенных выше рассуждений. ⊠

1.7 Дерево целочисленных p-адических шаров

Этот параграф посвящен описанию объекта, который является очень важным для всех содержательных интерпретаций кольца p-адических чисел.

Пусть p есть простое число, и $\mathfrak{P}$ есть алфавит, состоящий из множества цифр

$$\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$$

или из произвольных p знаков, индексированных этими цифрами. Пусть $\mathfrak{W}(p)$ обозначает множество всех конечных слов в алфавите $\mathfrak{P}$, включая пустое слово. На множестве слов $\mathfrak{W}(p)$ существует естественное отношение частичного порядка, при котором отношение $u \preccurlyeq v$ между словами u и v означает, что слово u входит в слово v в качестве его начальной части, то есть $v = uw$. Очевидно, что множество слов $\mathfrak{W}(p)$ с введенным на нем таким образом порядком образует полное корневое p-адическое дерево, вершинами которого являются все слова, а ребрам соответствую пары соседних слов, то есть пары слов вида $\langle u, uq\rangle$, где u есть произвольное слово, а q произвольный символ алфавита $\mathfrak{P}$. Корнем данного дерева является пустое слово.

□ Для того, чтобы не усложнять обозначений, мы будем обозначать данное дерево тем же символом $\mathfrak{W}(p)$, которым обозначается множество слов в алфавите, индексированном элементами поля $\mathbb{Z}(p)$.

Аналогичным образом, полное корневое p-адическое дерево образуют p-адические шары. Каждый p-адический шар $\mathfrak{b}$ радиуса $1/p^k$ является объединением p шаров меньшего радиуса равного $1/p^{k+1}$. Мы будем называть эти шары дочерними шарами шара $\mathfrak{b}$. Вершинами дерева p-адических шаров являются все такие шары, а ребрами дерева являются пары шаров, связанных отношением родитель-потомок. Таким образом, каждая вершина $\mathfrak{b}$ дерева шаров связана p ребрами с вершинами, которые соответствуют дочерним шарам шара $\mathfrak{b}$.

□ Будем обозначать как множество шаров, так и соответствующее ему дерево символом $\mathfrak{B}(\mathbb{Z}_p)$. Подмножество шаров радиуса $1/p^k$, образующих k-ый уровень этого дерева, будем обозначать символом $\mathfrak{B}_k(\mathbb{Z}_p)$.

Между двумя описанными выше структурами существует тесная связь. Для того чтобы это показать, рассмотрим соответствие между словами в алфавите $\mathfrak{P}$ и p-адическими шарами. Каждому слову $w = d_0 d_1 d_2 \ldots d_{k-1}$ соответствует натуральное число

$$\mathfrak{n}(w) = \sum_{i=0}^{k-1} d_i p^i,$$

а также p-адический шар $\mathfrak{b}(w)$, состоящий из всех p-адических чисел, отстоящих от числа $\mathfrak{n}(w)$ на расстояние, не превышающее $1/p^k$. Очевидно, что этот шар совпадает с множеством

$$\sum_{i=0}^{k-1} d_i p^i + (p^k) = \mathfrak{b}(w),$$

которое состоит из p-адических чисел, задаваемых маской $\langle d_0, d_1, d_2, \ldots d_{k-1}, *\rangle$, где символ звездочки означает произвольное продолжение последовательности.

Предложение 1.20 Справедливы следующие утверждения:

(i) Соответствие $w \leftrightarrow \mathfrak{b}(w)$ является взаимно однозначным соответствием между множеством слов $\mathfrak{W}(p)$ и множеством p-адических шаров $\mathfrak{B}(\mathbb{Z}_p)$;

(ii) Включение шаров $\mathfrak{b}(u) \subseteq \mathfrak{b}(v)$ равносильно отношению $v \preccurlyeq u$ между соответствующими словами;

(iii) Отображение $w \to \mathfrak{b}(w)$ является изоморфизмом деревьев $\mathfrak{W}(p)$ и $\mathfrak{B}(\mathbb{Z}_p)$, а также является антиизоморфизмом соответствующих частично упорядоченных множеств.

Доказательство. Доказательство данного утверждения достаточно очевидно и вытекает из того факта, что p-адический шар радиуса $1/p^k$ с центром в точке x совпадает с множеством $x + (p^k)$ и однозначно определяется первыми k цифрами числа x. ⊠

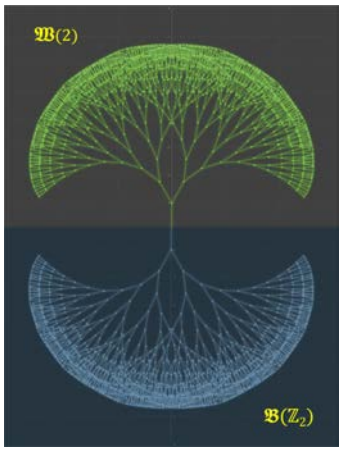


Рисунок 1.4

Данное простое утверждение влечет за собой нетривиальные следствия. Соответствие между словами и p-адическими шарами позволяет применять p-адические числа в различных задачах, связанных к построением классификаторов и рубрикаторов. Предположим, что некоторый объект описывается парой $\langle w, \alpha \rangle$, где w есть слово в алфавите $\mathfrak{P}$, α есть числовой атрибут объекта. Данной паре соответствует функция из множества $\mathscr{F}(\mathbb{Z}_2; \mathbb{R})$, представляющая собой характеристическую функцию шара $\mathfrak{b}(w)$, умноженную на число α. Эта функция в определенном смысле эквивалентна паре $\langle w, \alpha \rangle$, однако представляет собой гораздо более сложный объект, который может быть предметом спектрального анализа, разложения на вейвлеты и других операций, применимых к функциям. Мы приведем соответствующие примеры в главе IV, в которой пойдет речь о биологической интерпретации дискретных вейвлетов Хаара.

1.8 Компактность топологического кольца целых p-адических чисел

Перейдем к доказательству компактности кольца целых p-адических чисел в p-адической топологии. Мы приведем два доказательства этого факта. Первое доказательство будет основано на теореме о предельной точке, а второе, которое является более простым, на свойствах дерева p-адических шаров и интерпретации p-адических чисел как путей, проходящих по этому дереву. Для первого доказательства мы воспользуемся следующей теоремой, которая представляет собой некоторую комбинацию теоремы Больцано-Вейерштрасса о предельной точке и леммы Гейне-Бореля о конечном покрытии:

Теорема 1.21 Метрическое пространство $\mathscr{M}$ со счетной базой открытых окрестностей является компактным тогда и только тогда, когда каждая бесконечная последовательность его элементов имеет хотя бы одну предельную точку.

Доказательство. Условие счетности базы открытых окрестностей нужно нам для того, чтобы работать только со счетными покрытиями. Предположим, что мы имеем покрытие

метрического пространства $\mathscr{M}$ счетным семейством открытых множеств $\mathscr{A}_n$:

$$\mathscr{M} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n.$$

Построим семейство замкнутых множеств

$$\mathscr{M} = \mathscr{M}_1 \supseteq \mathscr{M}_2 \supseteq \mathscr{M}_3 \supseteq \cdots \supseteq \mathscr{M}_n \supseteq \ldots \tag{19}$$

по принципу

$$\mathscr{M}_{n+1} = \mathscr{M}_n \setminus \mathscr{A}_n.$$

Очевидно, что

$$\mathscr{M} = \bigcup_{n=1}^{k} \mathscr{A}_n \cup \mathscr{M}_{k+1}.$$

Поэтому, если одно из множеств $\mathscr{M}_k$ является пустым, то цепочка (19) обрывается, и мы получаем покрытие пространства $\mathscr{M}$ конечным набором открытых множеств. Предположим, что $\mathscr{M}_k \neq \emptyset$ при любом k. Выберем (пользуясь аксиомой выбора) по одному элементу x_k из каждого множества $\mathscr{M}_k$. По условию последовательность $\{x_k\}$ имеет некоторую предельную точку x, которая должна принадлежать одному из множеств покрытия $\mathscr{A}_m$. Однако $\mathscr{A}_m \cap \mathscr{M}_{m+1} = \emptyset$, в то время как все члены последовательности x_k принадлежат множеству $\mathscr{M}_{m+1}$, начиная с номера $m+1$. Поэтому точка x, будучи предельной точкой последовательность $\{x_k\}$, также должна принадлежать множеству $\mathscr{M}_{m+1}$ в силу его замкнутости. Таким образом, $x \in \mathscr{A}_m \cap \mathscr{M}_{m+1}$, что противоречит пустоте этого множества. Полученное противоречие доказывает первую часть теоремы. Обратно, предположим, что у нас есть бесконечная последовательность $\{x_k\}$ элементов пространства $\mathscr{M}$ и, что из любого покрытия пространства $\mathscr{M}$ семейством открытых множеств можно выбрать конечное подпокрытие. Подмножество метрического пространства является замкнутым, тогда и только тогда, когда оно содержит в себе все свои предельные точки. Предположим, что у последовательности $\{x_k\}$ нет предельных точек, тогда множество $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{M}$, состоящее из все точек этой последовательности, является замкнутым. Покроем каждую точку x_n нашей последовательности открытой окрестностью $\mathscr{A}_n$, содержащей x_n в качестве единственной точки из множества $\mathscr{X}$. Это возможно в силу того, что последовательность $\{x_k\}$ не имеет предельных точек. Выбрав из покрытия $\{\mathscr{A}_n\}$ множества $\mathscr{X}$ конечное подпокрытие, мы приходим к выводу, что множество $\mathscr{X}$ конечно. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. ⊠

Теорема 1.22 Кольцо целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$ является компактным топологическим пространством относительно топологии, индуцированной p-адической нормой.

Доказательство 1. Пусть G есть некоторое бесконечное подмножество в $\mathbb{Z}_p$ и пусть $\varrho_k : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}(p)$ есть отображение, которое проецирует множество $\mathbb{Z}_p$ на его k-ый разрядный срез. Покажем, что множество G имеет в $\mathbb{Z}_p$ хотя бы одну предельную точку. Для этого построим стабилизирующуюся последовательность бесконечных подмножеств G:

$$G \supseteq G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_n \supseteq \ldots, \tag{20}$$

где под стабилизацией будем понимать свойство этой последовательности, состоящее в том, что любые два числа $q, q' \in G_n$ совпадают во всех своих разрядах от нулевого до

n-ого включительно. Пересечение такой последовательности множеств очевидно не пусто и состоит из единственной последовательности p-ичных разрядов, первые n из которых определяются множеством G_n. Этот единственный элемент, принадлежащий к пересечению всех множеств G_n, будет очевидным образом предельной точкой множества G. Для простоты мы далее рассмотрим случай, когда $p = 2$. Случай произвольного p доказывается аналогично. Последовательность множеств $\{G_n\}$ будем строить рекурсивно. Для начала рассмотрим множества $\varrho_0^{-1}(0) \cap G$ и $\varrho_0^{-1}(1) \cap G$, то есть подмножества, состоящие их тех элементов G, которые имеют нулевой разряд равным 0 и 1 соответственно. Очевидно, что хотя бы одно из этих двух множеств является бесконечным. Назовем его G_0. Если множество G_n определено, то пусть G_{n+1} будет его подмножеством, состоящее из элементов того двух его подмножества $\varrho_{n+1}^{-1}(0) \cap G_n$ и $\varrho_{n+1}^{-1}(1) \cap G_n$, которое является бесконечным (если бесконечны оба, то выбираем первое). Продолжая таким образом дальше, мы очевидно получим требуемую последовательность (20), а вместе с ней и доказательство компактности кольца целых p-адических чисел. $\boxtimes$

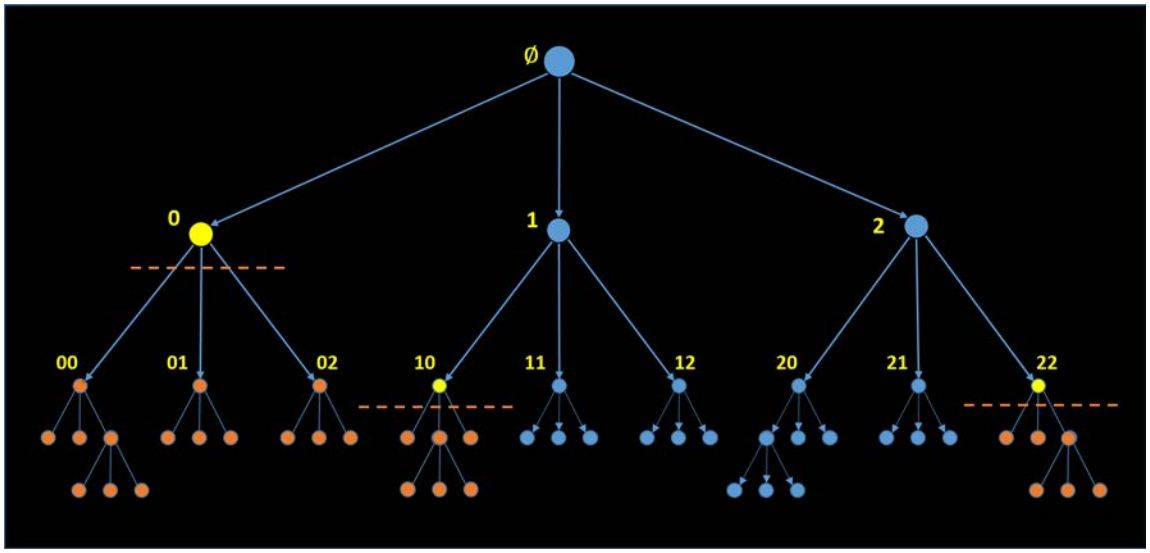


Рисунок 1.5 Доказательство компактности топологического пространства $\mathbb{Z}_p$.

Приведем еще одно, более наглядное доказательство компактности кольца $\mathbb{Z}_p$.

Доказательство 2. Пусть дано некоторое бесконечное покрытие $\mathfrak{C}$ множества $\mathbb{Z}_p$ открытыми подмножествами, которые можно без ограничения общности считать p-адическими шарами. Будем интерпретировать множество всех шаров $\mathbb{Z}_p$ как бесконечное полное p-ичное дерево, тогда множество $\mathbb{Z}_p$ можно представить как множество всех бесконечных путей, проходящих по этому дереву и выходящих из его корня (или из вершины, если рисовать дерево сверху вниз). Тот факт, что $\mathfrak{C}$ покрывает $\mathbb{Z}_p$ означает, что каждый путь-число проходит через один из шаров, принадлежащих покрытию $\mathfrak{C}$. Докажем, что из такого покрытия всегда можно выбрать конечное подпокрытие. Для этого будем идти по дереву сверху вниз, проходя его слой за слоем и отрезая от него те ветви, которые вырастают из улов-шаров, принадлежащих покрытию $\mathfrak{C}$. При этом сами эти шары будем оставлять на месте. Данная процедура схематически показана на рисунке 1.5. Шары покрытия выделены желтым цветом, отсекаемые ветви - оранжевым, а линия отсечения показана пунктиром.

Очевидно, что в результате такой процедуры возможно два исхода. В первом случае на каком-то шаге этот процесс закончится и у нас останется конечное дерево, терминальные вершины которого будут соответствовать конечному набору шаров, покрывающих множество $\mathbb{Z}_p$. В противном случае этот процесс будет продолжаться бесконечно, и у нас возникнет бесконечное дерево, состоящее из желтых и синих шаров, через которое проходит хотя бы один бесконечный путь γ. По условию, этот путь должен проходить через некоторый шар $\mathfrak{b}$, принадлежащий к покрытию $\mathfrak{C}$ и находящийся на некотором уровне n. Однако в этом случае, когда мы проходили по уровню номер n или одному из уровней с номером $m < n$, мы должны были отбросить все вершины дерева, через которые проходит путь γ и которые лежат ниже вершины $\mathfrak{b}$. Данное противоречие доказывает невозможность второго варианта и завершает доказательство. $\boxtimes$

Предложение 1.22 обобщается на случай произвольного числа $m \geqslant 2$. Легко доказать, что для любого такого числа кольцо целых m-адических чисел $\mathbb{Z}_m$ является компактным топологическим пространством относительно топологии, индуцированной m-адической нормой/метрикой. Метод, который мы использовали для доказательства теоремы о компактности, может быть использован для доказательства другого интересного утверждения, характеризующего строение открытых множеств кольца $\mathbb{Z}_p$.

Предложение 1.23 Каждое открытое множество в топологическом пространстве $\mathbb{Z}_p$ является объединением конечного или счетного количества непересекающихся шаров.

Доказательство. Пусть дано открытое множество $\mathfrak{O} \subseteq \mathbb{Z}_p$, представленное в виде объединения $\mathfrak{C}$ множества p-адических шаров, которые можно без ограничения общности считать различными. Будем интерпретировать множество всех шаров $\mathbb{Z}_p$ как бесконечное полное p-ичное дерево, тогда множество $\mathbb{Z}_p$ можно представить как множество всех бесконечных путей, проходящих по этому дереву и выходящих из его корня (или из вершины, если рисовать дерево сверху вниз). Тот факт, что $\mathfrak{C}$ покрывает множество $\mathfrak{O}$ означает, что каждый путь/число $\gamma \in \mathfrak{O}$ проходит через один из шаров, принадлежащих покрытию $\mathfrak{C}$. Докажем, что из такого покрытия всегда можно выбрать подпокрытие, состоящее из непересекающихся шаров. Для этого будем идти по дереву сверху вниз, проходя его слой за слоем и отрезая от него те ветви, которые вырастают из вершин/шаров, принадлежащих покрытию $\mathfrak{C}$. При этом сами эти шары будем оставлять на месте и включать в новое покрытие $\mathfrak{C}'$. Данная процедура схематически показана на рисунке 1.5. Шары покрытия выделены желтым цветом, отсекаемые ветви - оранжевым, а линия отсечения показана пунктиром. Каждый шар $\mathfrak{b}$ покрытия $\mathfrak{C}$ принадлежит некоторому уровню дерева с номером k. Шары, лежащие на одном уровне, не пересекаются. Когда мы дойдем до уровня k, то для каждого шара $\mathfrak{b}$, лежащего на этом уровне, существует только три возможности: (i) шар $\mathfrak{b}$ не принадлежит к покрытию $\mathfrak{C}$; (ii) шар $\mathfrak{b}$ был удален на одном из предыдущих шагов; (iii) шар $\mathfrak{b}$ не был удален ни на одном из предыдущих шагов и поэтому включается в покрытие $\mathfrak{C}'$. Покажем, что покрытие $\mathfrak{C}'$, возникающее после выполнения бесконечного количества шагов, дает нам требуемый результат. Очевидно, что покрытие $\mathfrak{C}'$ состоит из конечного или из счетного множества непересекающихся шаров. Для любого пути/числа $\gamma \in \mathfrak{O}$ существует единственный содержащий его шар максимального радиуса, который очевидно входит в покрытие $\mathfrak{C}'$. Отсюда следует, что объединение конечного или счетного множества непересекающихся шаров, входящих в покрытие $\mathfrak{C}'$, совпадает с множеством $\mathfrak{O}$. $\boxtimes$

Данное предложение позволяет интерпретировать строение открытых и замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{Z}_p$ в терминах слов из множества $\mathfrak{W}(p)$. Будем говорить, что подмножество слов $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{W}(p)$ состоит из несравнимых слов, если ни одно из слов этого множества не является начальным отрезком другого слова из этого множества. Будем отождествлять целые p-адические числа и бесконечные пути, проходящие по дереву $\mathfrak{W}(p)$ и исходящие из его корня. Бесконечное p-адическое слово, соответствующее p-адическому числу γ, будем обозначать символом γ^*.

Предложение 1.24 Справедливы следующие утверждения:

(i) Каждое открытое множество $\mathfrak{O} \subseteq \mathbb{Z}_p$ однозначно характеризуется конечным или счетным множеством несравнимых между собой слов $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{W}(p)$ и состоит из множества всех чисел/путей γ, содержащих одно из слов $v \in \mathfrak{V}$ в качестве своего начального отрезка, то есть

$$\mathfrak{O} = \{\gamma \in \mathbb{Z}_p \mid v \preccurlyeq \gamma^*, \text{ для некоторого } v \in \mathfrak{V}\};$$

(ii) Каждое замкнутое множество $\mathfrak{C} \subseteq \mathbb{Z}_p$ однозначно характеризуется конечным или счетным множеством несравнимых между собой слов $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{W}(p)$ и состоит из множества всех чисел/путей γ, которые не содержат ни одно из слов $v \in \mathfrak{V}$ в качестве своего начального отрезка, то есть

$$\mathfrak{C} = \{\gamma \in \mathbb{Z}_p \mid v \not\preccurlyeq \gamma^*, \text{ для любого } v \in \mathfrak{V}\}.$$

1.9 Канторово множество и 2-адические числа

Данное множество, получившее название «канторово» и ставшее впоследствии столь знаменитым, было мимоходом упомянуто в подстрочном примечании в большой статье Георга Кантора (1845-1918) под названием «Ueber unendliche, lineare Puncktmannichfaltigkeiten» (О бесконечных, линейных точечных многообразиях), изданной в 1883 году и посвященной обсуждению философских вопросов обращения с бесконечностью и кардинальной арифметике ([22]). В статье, изданной в 1875 году, это множество также рассматривал британский геометр H.J.S.Smith. С историей развития идей, связанных с этим множеством, можно ознакомиться в работе ([27]). Канторово множество получается из отрезка [0,1] путем рекурсивно применяемой к нему процедуры выбрасывания открытого с обеих сторон интервала, составляющего среднюю треть каждого отрезка, как показано на следующем рисунке.

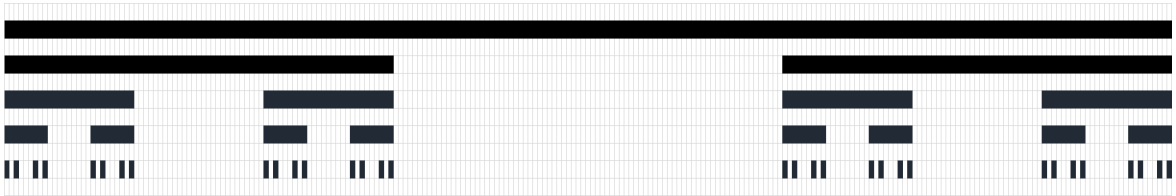


Рисунок 1.6 Поэтапное построение канторова множества.

Полученное в бесконечном пределе множество оказывается замкнутым, так как оно получается исключением из замкнутого множества [0,1] счетного набора открытых подмножеств. Канторово множество представляет собой пример гомеоморфного вложения множества $\mathbb{Z}_2$ в отрезок [0,1] множества вещественных чисел. При этом элементы множества $\mathbb{Z}_2$ представляются бесконечными путями, проходящими по 2-адическому дереву $\mathbb{T}_2$ и исходящи-

ми из его корня. На каждом уровне/шаге бесконечный путь γ, проходящий по дереву, выбирает один из двух отрезков канторова множества и таким образом осуществляет «маршрутизацию» к некоторой потенциально бесконечной точке $\mathfrak{r}(\gamma) \in [0,1]$. Если ввести функцию $\tau : \mathbb{Z}(2) \to \mathbb{Z}(3)$, положив $\tau(0) = 0$, и $\tau(1) = 2$, то указанное отображение задается следующим образом:

$$\gamma = \sum_{i=0}^{\infty} d_i 2^i \to \mathfrak{r}(\gamma) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau(d_i)/3^{i+1}.$$

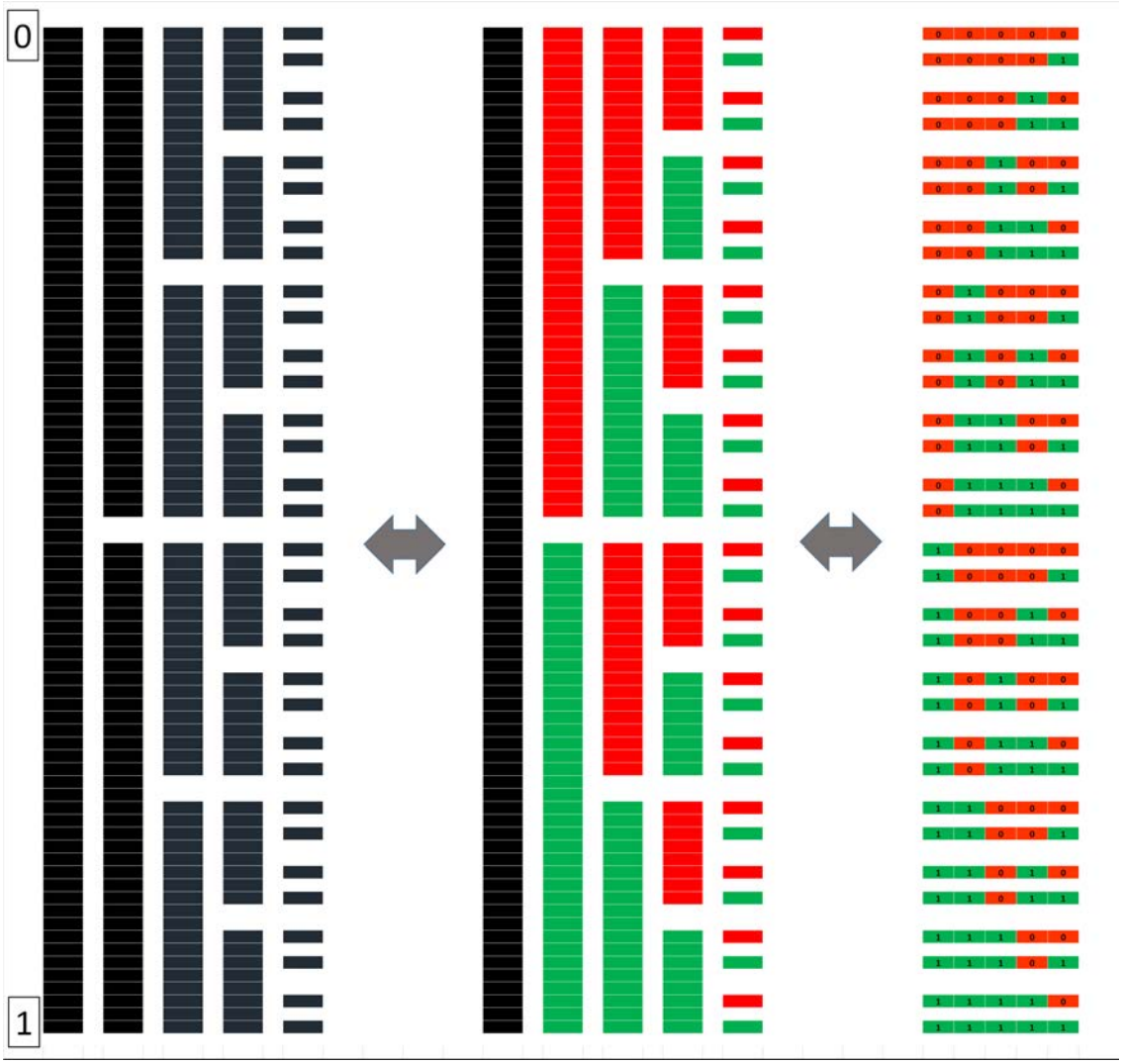


Рисунок 1.7 Соответствие между множеством Кантора, 2-адическим деревом $\mathbb{T}_2$ и элементами кольца $\mathbb{Z}_2$.

Предложение 1.25 Отображение $\gamma \to \mathfrak{r}(\gamma)$ задает гомеоморфное вложение топологического пространства $\mathbb{Z}_2$ в отрезок $[0,1]$ вещественной прямой.

Доказательство. Очевидно, что отображение $\mathfrak{r}$ инъективно. Исходя из определения отображения $\mathfrak{r}$ видно, что если два целых 2-адических числа/пути совпадают в первых k разрядах, то их образы попадают в один отрезок, длина которого равна $1/3^k$. Поэтому отображение $\mathfrak{r}$ удовлетворяет условию

$$|\mathfrak{r}(\gamma_1) - \mathfrak{r}(\gamma_2)| < 1/3^k, \quad \text{где} \quad k = -\log_2(\|\gamma_1 - \gamma_2\|_2).$$

Из этого условия очевидно следует непрерывность отображения $\mathfrak{r}$. Очевидно, что обратное отображение $\mathfrak{r}^{-1}$ также является непрерывным. $\boxtimes$

Заметим, что при отображении $\mathfrak{r}$ лексикографический порядок, определенный на путях, представляемых как бесконечные слова в двухбуквенном алфавите $\{0,\ 1\}$, соответствует естественному порядку вещественных чисел из отрезка [0,1]. (Напомним, что при интерпретации p-адических чисел, как бесконечных путей, степенных рядов или бесконечных последовательностей, порядок старшинства разрядов следует слева направо, а не справа налево, как при обычной записи чисел в позиционной системе исчисления). Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно перевернуть рисунок 1.6 на девяносто градусов, разметить левые и правые ветви двоичного дерева разными цветами и нанести на них маркировку в виде двоичного кода, как это показано на рисунке 1.7 (с целью экономии пространства канторово множество подвергнуто сжатию и представлено схематически). С точки зрения топологии и общей логики построения этого множества не существенно, что выбрасывается именно одна треть, важно только то, что на каждом шаге из каждого отрезка выбрасывается открытое подмножество, делящее этот отрезок на две связные части, и чтобы максимальный размер остающихся на каждом шаге сегментов стремился к нулю. Отметим, что множества, которые получаются на k-ом шаге данного построения, в точности соответствуют 2-адическим шарам радиуса $1/2^k$ (точнее говоря, 2-адическим шаром оказывается то подмножество $\mathbb{Z}_2$, которое попадает в соответствующий сегмент). Поэтому данная процедура иллюстрирует рекурсивное разбиение единичного 2-адического шара на шары меньшего радиуса и показывает фрактальный характер 2-ичной системы счисления, если под фрактальностью понимать рекурсивное самоподобие, то есть воспроизведение некоторой структурой одного и того же строения на каждом своем иерархическом уровне.

Очевидно, что описанную выше конструкцию вложения пространства $\mathbb{Z}_2$ в отрезок $[0,1]$ можно обобщить на случай произвольного (и даже не обязательно простого) числа p. Для этого нужно взять обобщенный вариант канторова множества, который получается делением отрезка $[0,1]$ на $q = 2p-1$ равных частей с последующим выбрасыванием идущих через один средних отрезков в количестве $p-1$. Функция τ определяется как $\tau(n) = 2n$. Соответствующая функция $\mathfrak{r}_p(\gamma)$ будет выглядеть так

$$\gamma = \sum_{i=0}^{\infty} d_i p^i \to \mathfrak{r}_p(\gamma) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau(d_i)/q^{i+1}.$$

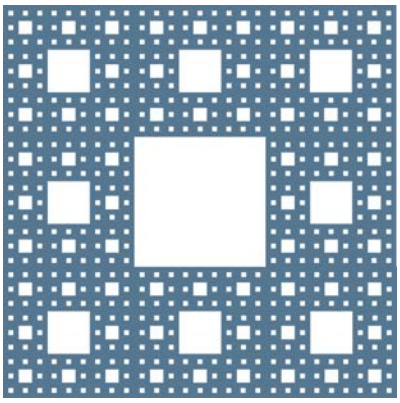


Рисунок 1.8

Более того, использованный Кантором метод построения «канторова множества» можно обобщить на другие фигуры, а также на большее количество измерений. Двумерным обобщением множества Кантора является так называемый ковер Серпинского, получаемый из единичного квадрата рекурсивным исключением его средней части так, как это показано на рисунке 1.8. При этом исключаемое на каждом шаге множество представляет собой внутренность квадрата, сторона которого в три раза меньше стороны исходного квадрата. Множество, получаемое после выполнения бесконечного количества таких операций, является замкнутым, так как

оно получается из замкнутого множества исключением из него открытого подмножества. Ковер Серпинского $\mathfrak{S}$ является непрерывным образом некоторого кольца целых m-адических чисел, хотя в отличие от канторова множества это отображение не является взаимно однозначным. В данном случае число m равно восьми и определяется количеством дочерних квадратов на первом шаге разбиения. Чтобы построить данное непрерывное отображение $\phi : \mathbb{Z}_8 \to \mathfrak{S}$, элементы кольца $\mathbb{Z}_8$ можно представлять себе бесконечными путями, исходящими из корня бесконечного 8-ричного дерева $\mathbb{T}_8$. Последовательность ребер дерева $\mathbb{T}_8$, через которые проходит путь $\gamma \in \mathbb{Z}_8$ соответствует последовательность восьмеричных цифр в разложении числа γ, при этом k-ая цифра соответствует выбору одного из восьми дочерних квадратов на $k+1$ шаге выполнения алгоритма, который создает ковер Серпинского. Таким образом, каждый путь $\gamma \in \mathbb{Z}_8$ однозначно маршрутизируется к некоторой точке $\phi(\gamma) \in \mathfrak{S}$. Из самого способа определения отображения ϕ очевидно, что образ каждого 8-адического шара радиуса $1/8^k$ попадает внутрь квадрата, длина стороны которого равна $1/3^k$, из чего очевидно следует непрерывность отображения ϕ. Аналогичное отображение легко построить для треугольника Серпинского, который также как и квадрат получается в результате рекурсивного исключения из середины равностороннего треугольника внутренней части его в три раза уменьшенной копии. Данная конструкция легко распространяется на случай больших размерностей.

1.10 Фрактальные кривые и p-адические числа

Многие хорошо известные фрактальные кривые естественным образом описываются на языке p-адических чисел. Подобно тому как сегмент гладкой n-мерной кривой можно определить как образ, возникающий при таком отображении в евклидово пространство отрезка $[0, 1]$, которое может быть реализовано с помощью n гладких функций, фрактальные кривые в n-мерном пространстве возникают как образы непрерывного отображения в это пространство некоторого кольца целых r-адических чисел. Перед тем как рассмотреть один типовой пример, связанный с так называемой кривой Коха, введем несколько необходимых определений.

□ Пусть символ $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_r; \mathbb{C})$ обозначает кольцо всех непрерывных комплекснозначных функций, определенных на топологическом кольце $\mathbb{Z}_r$. На функциональном пространстве $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_r; \mathbb{C})$ определена естественная норма

$$\|f\|_0 = \max\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{Z}_r\}.$$

Поскольку образ компактного множества при его отображении в евклидово пространство является компактным подмножеством последнего, то максимум непрерывного отображения f всегда достигается, и данное определение нормы является корректным. Легко проверить, что функция $\|*\|_0$ является нормой, поэтому кольцо функций $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_r; \mathbb{C})$, снабженное нормой $\| * \|_0$, представляет собой нормированное кольцо. Большинство определений и доказательств из курса математического и функционального анализа, которые относятся к пространствам непрерывных вещественных или комплекснозначных функций, определенных на компактном подмножестве евклидова пространства, почти без изменений переносятся на p-адический случай. В целях замкнутости изложения мы докажем здесь только одно предложение.

Предложение 1.26 Кольцо $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_r;\mathbb{C})$ является полным метрическим пространством относительно нормы $\|*\|_0$.

Доказательство. Пусть дана фундаментальная последовательность функций $\{f_n\}$, принадлежащих пространству $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_r;\mathbb{C})$. Очевидно, что для любого $x \in \mathbb{Z}_r$ последовательность комплексных чисел $f_n(x)$ также является фундаментальной и поэтому сходится к некоторому числу $f(x) \in \mathbb{C}$. Покажем, что функция f непрерывна в любой точке $y \in \mathbb{Z}_r$. Выберем произвольное вещественно число $\varepsilon > 0$. Поскольку последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна, то существует число N такое, что $\|f_m - f_n\|_0 < \varepsilon/2$ при любых $n, m \geqslant N$. Поскольку функция f_N непрерывна, существует такая окрестность U_ε точки y, в любой точке z который выполняется неравенство $|f_N(z) - f_N(y)| < \varepsilon/2$. Отсюда следует, что для любой точки $z \in U_\varepsilon$ и для любого $m \geqslant N$ справедливо неравенство $\|f_m(y) - f_m(z)\|_0 < \varepsilon$, из которого следует неравенство $\|f(y) - f(z)\|_0 < \varepsilon$, которое в силу произвольно выбора числа ε и точки y доказывает непрерывность функции f. $\boxtimes$

Рассмотрим множество, состоящее из p комплексных чисел, по модулю меньших единицы и в сумме дающих единицу:

$$z_0 + z_1 + \cdots + z_{p-1} = 1, \quad |z_i| < 1. \tag{21}$$

Очевидно, что для любого натурального числа n и любого комплексного числа v имеет место равенство

$$v \cdot (z_0 + z_1 + \cdots + z_{p-1})^n = v \cdot \sum_{J \in \mathbb{Z}(p^n)} z_J = v. \tag{22}$$

В данной формуле мультииндекс J, представленный n-разрядным числом $\langle i_0, i_1, \ldots i_{n-1}\rangle$, соответствует произведению $z_J = z_{i_0} z_{i_1} \ldots z_{i_{n-1}}$. Легко видеть, что каждое такое произведение умноженное на число v соответствует одному из звеньев ломаной линии, построенной на векторе v и имеющей p^n звеньев. При этом все выражение (22) соответствует всей ломанной линии, коды звеньев которой следуют в лексикографическом порядке, как это показано на рисунке 1.9 на примере фрактальной кривой, известной как кривая Коха. Обозначив $f_n(J) = v \cdot z_{i_0} z_{i_1} \ldots z_{i_{n-1}}$, мы получаем функцию $f_n : \mathbb{Z}(p^n) \to \mathbb{C}$. На множестве $\mathbb{Z}(p^n)$ естественным образом задан линейный лексикографический порядок, при котором каждое число $m \in \mathbb{Z}(p^n)$, определенное своим разрядным представлением, рассматривается как n-буквенное слово заданное в алфавите $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. Поэтому для функций f_n естественным образом определена операция суммирования:

$$\sigma(f_n)(m) = \sum_{x \leqslant m} f_n(x).$$

Очевидно, что значения функции $\sigma(f_n)(m)$ соответствуют вершинам ломанной линии, полученной на n-шаге описываемого алгоритма. Так как каждое кольцо $\mathbb{Z}(p^n)$ является гомоморфным образом кольца $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел, то все функции $\sigma(f_n)(m)$ поднимаются до комплекснозначных функций, определенных на кольце $\mathbb{Z}_p$. Покажем, что при выполнении условий (21) последовательность функций $\sigma(f_n)$ равномерно сходится к некоторой непрерывной функции $\sigma : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$, образ которой $\sigma(\mathbb{Z}_p)$ является фрактальной кривой на комплексной плоскости.

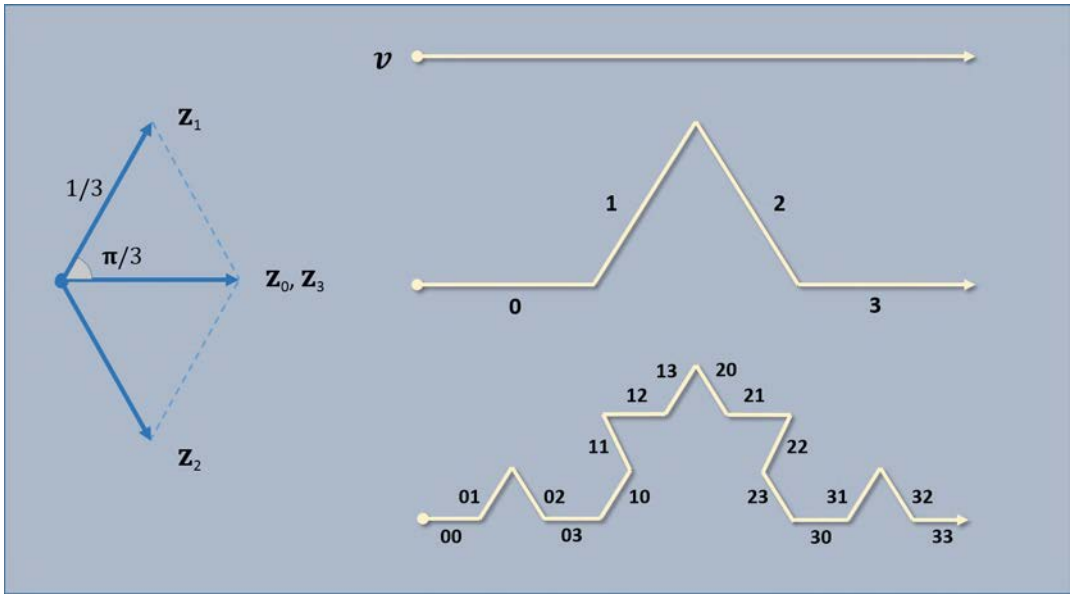


Рисунок 1.9 Кривая Коха как отображение $\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{C}$. Звено ломанной линии с индексом $\langle i_n i_m \rangle$ соответствует комплексному числу $v \cdot z_n z_m$.

Если l есть некоторый прямолинейный отрезок приближения к кривой Коха длины L, то очевидно, что при очередной трансформации $l \to l'$ этого сегмента кривая l' попадет внутрь круга радиуса $(1/2)\cdot L$ с центром в середине сегмента l. Построив аналогичный круг вчетверо меньшего радиуса вокруг каждого из четырех сегментов ломанной l', мы можем заключить, что ломанная l' будет лежать в круге радиуса $(1/2)\cdot L + (1/2)\cdot(L/4)$ с центром в середине отрезка l. Продолжая таким образом далее, мы можем заключить, что все последующие ломанные, которые получаются из сегмента l в результате его последовательной трансформации, попадают в круг, радиус которого получается суммированием геометрической прогрессии и равен величине

$$L\cdot\frac{1}{2}+\frac{L}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{L}{16}\cdot\frac{1}{2}+\cdots=\frac{L}{2}\cdot\frac{4}{3}=L\cdot\frac{2}{3}.$$

Если мы теперь предположим, что L это длина исходного сегмента, из которого получается кривая Коха, то из предыдущих рассуждений и из способа построения этой кривой следует, что образ каждого 4-адического шара, радиус которого равен $1/4^k$, лежит внутри круга радиуса $(L/4^k)\cdot(2/3)$. Поэтому последовательность функций $\sigma(f_n)$ является фундаментальной в функциональном пространстве $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_4;\mathbb{C})$ непрерывных комплекснозначных функций, определенных на кольце $\mathbb{Z}_4$. Поскольку это пространство является полным, предел функциональной последовательности $\sigma(f_n)$ дает нам непрерывную функцию, которая параметризует фрактальную кривую Коха на комплексной плоскости. Очевидно, что «длина» этой кривой равна бесконечности, так как длины приближающихся к ней ломанных $\sigma(f_n)$ возрастают в геометрической прогрессии со знаменателем большим единицы (что с очевидностью следует из условия (21) и неравенства треугольника).

Описанную выше конструкцию можно также использовать, предполагая, что z_i и v являются кватернионами. Кватернионы единичной нормы, взятые с точностью до знака, можно отождествить с группой $\mathbb{SO}(3)$ ортогональных матриц с определителем равным единице.

Зафиксировав в трехмерном пространстве некоторое твердое тело с выделенной точкой или декартову систему координат (что эквивалентно), мы можем отождествить группу $\mathbb{SO}(3)$ со множеством всех возможных положений данного тела, при которых данная точка остается зафиксированной. Любой кватернион можно представить в виде $a \cdot u$, где $|u| = 1$ и $a \in \mathbb{R}$ и интерпретировать как комбинацию ортогонального преобразования и растяжения. Если в качестве твердого тела взять цилиндр высоты h и связать с ним декартову систему координат, то выражение

$$v \cdot z_J = v \cdot z_{i_0} z_{i_1} \dots z_{i_{n-1}}$$

можно интерпретировать как результат действия последовательности преобразований z_i на цилиндр v. Поскольку каждое преобразование z_i представляет собой комбинацию ортогонального преобразования и растяжения, то результат действия этих преобразований на цилиндр также представляет собой цилиндр, а суммирование таких мономов можно интерпретировать как соединение отдельных цилиндров между собой. Поэтому выражение $v \cdot (z_0 + z_1 + \dots + z_{p-1})^n$ можно интерпретировать как «цилиндрическую ломанную линию», состоящую из p^n цилиндрических звеньев, соединенных между собой.

1.11 Конечное приближение p-адических чисел

В предыдущих параграфах мы рассматривали цепочки абелевых групп и колец вычетов, связанных между собой естественными вложениями и естественными гоморфизмами, которые показаны на диаграмме ниже. В случае конечности этих цепочек они допускают простую геометрическую интерпретацию, на которой мы остановимся более подробно, так как она нам потребуется в четвертой главе для построения дискретных вейвлетов Хаара. Каждый из объектов, присутствующих в этих цепочках, можно представить себе в виде многоугольника, поэтому цепочки (23) и (24) представляют собой два различных взгляда на бесконечную последовательность вложенных друг в друга правильных p^n-угольников.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\{1\} & \xrightarrow{i_0} & \mathbb{U}(p^1) & \xrightarrow{i_1} & \mathbb{U}(p^2) & \xrightarrow{i_2} & \mathbb{U}(p^3) & \xrightarrow{i_3} & \cdots \subset \mathbb{U}(p^\infty) & & \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\
\{0\} & \xrightarrow{i_0} & \mathbb{Q}_{01}(p^1) & \xrightarrow{i_1} & \mathbb{Q}_{01}(p^2) & \xrightarrow{i_2} & \mathbb{Q}_{01}(p^3) & \xrightarrow{i_3} & \cdots \subset \mathbb{Q}_{01}(p^\infty) & & (23) \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\
\{0\} & \xrightarrow{i_0} & \mathbb{Z}(p^1) & \xrightarrow{i_1} & \mathbb{Z}(p^2) & \xrightarrow{i_2} & \mathbb{Z}(p^3) & \xrightarrow{i_3} & \cdots \subset \mathbb{Z}(p^\infty) & &
\end{array}$$

$$\{0\} \xleftarrow{\pi_0} \mathbb{Z}(p^1) \xleftarrow{\pi_1} \mathbb{Z}(p^2) \xleftarrow{\pi_2} \cdots \xleftarrow{\pi_{n-1}} \mathbb{Z}(p^n) \xleftarrow{\pi_n} \cdots \xleftarrow{\{\rho_k\}} \mathbb{Z}_p \qquad (24)$$

Каждую из алгебраических структур, стоящих по столбцам, можно интерпретировать как правильный n-угольник, вписанный в единичную окружность. Каждая из этих цепочек многоугольников представляет собой показанную на рисунке 1.10 модель одномерного, дискретного, замкнутого и постоянно расширяющего пространства. На каждом этапе такого расширения количество точек пространства увеличивается в p раз. При этом число 2 имеет выделенный характер, заключающийся в том, что дихотомическое деление и дихотомическое порождение оказываются тесно связаны между собой. При $p = 2$ формирование

цепочек (23) и (24) можно представить как последовательное деление отрезка пополам, а также как показанный на рисунке 1.10 процесс, при котором каждая вершина предыдущего поколения порождает из себя две вершины следующего поколения, что с самого начала наводит на биологические аллюзии. Цепочка (23) дает нам представление группы $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ в виде объединения вложенных друг в друга циклических групп. Цепочка (24) представляет собой соответствующую последовательность колец $\mathbb{Z}(p^n)$, интерпретируемых как кольца эндоморфизмов соответствующих групп $\mathbb{Q}_{01}(p^n)$. Проективный предел этой последовательности колец дает кольцо $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел являющееся кольцом эндоморфизмов группы $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$. Отображения i_n является отображениями вложения абелевых групп, а отображения π_n являются гомоморфизмами колец.

Существуют четыре языка, на которых можно говорить о последовательности объектов (23) и (24) (перечислены в порядке их исторического возникновения): (1) язык геометрии; (2) язык алгебры; (3) язык теории деревьев и (4) язык p-адической арифметики. В конечном случае все эти четыре языка эквивалентны между собой и относительно легко транслируются друг в друга. В некоторых случаях язык геометрии дает определенные преимущества в плане визуализации объектов, однако он быстро теряет это преимущество в случае возрастания размера объектов n и становится практически бесполезным при $n \to \infty$.

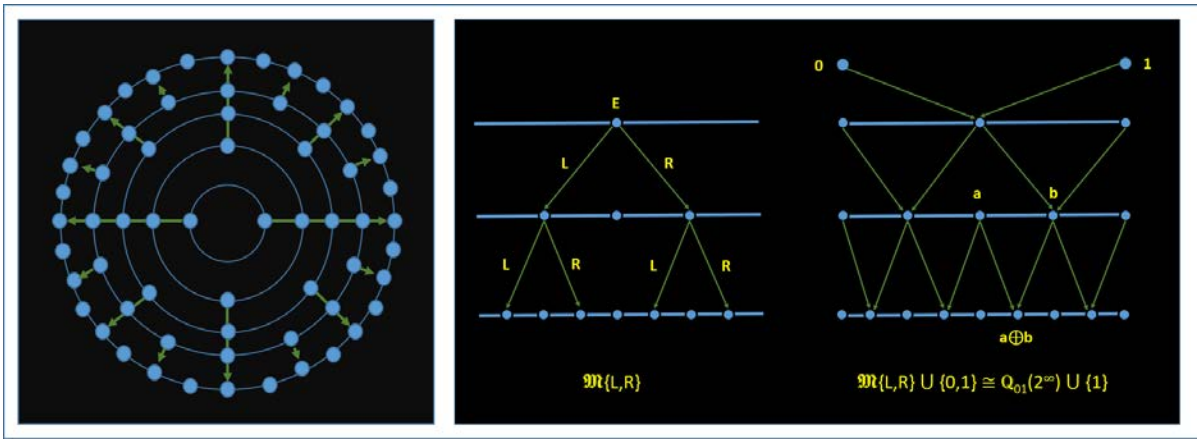


Рисунок 1.10 Слева: модель одномерного, дискретного, замкнутого и постоянно расширяющего пространства. Справа: два взгляда на дихотомическое деление отрезка.

В определенном смысле p-адическая арифметика и алгебра представляют собой другие языки, на которых можно говорить о правильных p^k-угольниках. Группу $\mathbb{U}(p^n)$ комплексных корней из единицы степени p^n очевидно можно представить как p^n-угольник, вписанный в единичную окружность. В этом смысле p-адические шары в $\mathbb{Z}(p^n)$ представляют собой правильные p^k-угольники в $\mathbb{U}(p^n)$ или то же самое, что смежные классы по различным подгруппам $\mathbb{U}(p^k) \subseteq \mathbb{U}(p^n)$. Эти классы получаются путем поворота на угол $2\pi/k$ подгруппы $\mathbb{U}(p^k)$, представляющей собой правильный p^k-угольник, проходящий через единицу. Радиус соответствующего p-адического шара однозначно определяется индексом соответствующей подгруппы, а дискретное преобразование Фурье отображает функции, принимающие постоянное значение на каждом p^k-угольнике в функции, носитель которых лежит внутри подгруппы $\mathbb{U}(p^k)$, представляющей собой сферическую окрестность единицы в форме p-адического шара радиуса $1/p^{n-k}$.

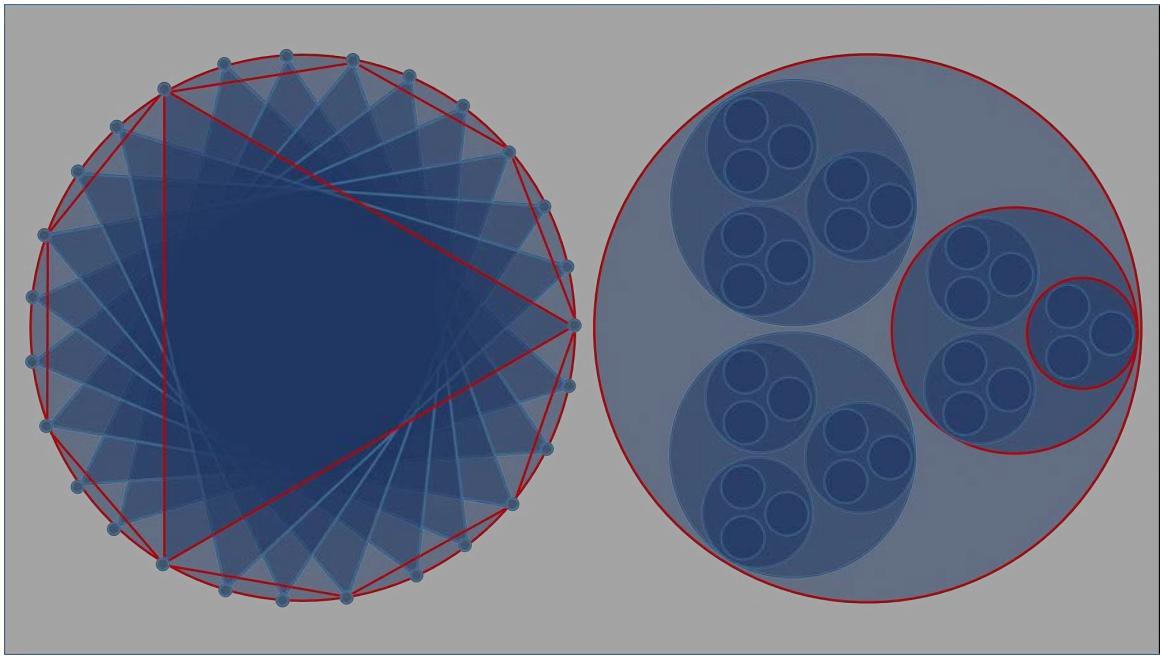


Рисунок 1.11 Различные формы визуализации p-адических объектов соответствуют различным языкам для их описания.

Последовательность (24) представляет собой полное p-ичное дерево, ребра которого состоят из пар вычетов $\langle a, b\rangle$ таких, что $\pi_n(b) = a$. Такое дерево можно сформировать из правильных p^k-угольников с помощью поворотов на углы кратные $2\pi/p^k$. Опишем этот процесс более подробно в случае, когда $p = 2$. Эта конструкция понадобится нам далее в главе IV для описания дискретных вейвлетов Хаара. Каждая группа $\mathbb{Z}(2^n) \cong \mathbb{U}(2^n)$ действует сама на себе поворотами на углы кратные $2\pi/2^n$. В теории дихотомического деления центральное место занимает поворот e на угол π, представляющий собой корень квадратный из тождественного отображения. Этот поворот объединяет точки многоугольника $\mathbb{Z}(2^n)$ в пары $\langle a, b\rangle$ таким образом, что $e(a) = b$ и $e(b) = a$. При этом точки a и b являются концами диаметра единичной окружности, в которую вписан многоугольник $\mathbb{Z}(2^n)$. Отображение $e_1 = e^{1/2}$, представляющее собой поворот на угол $\pi/2$, действует на диаметрах, аналогичным образом переставляя их между собой и объединяя в правильные четырехугольники. Аналогичным образом отображение $e_2 = e^{1/4}$, представляющее собой поворот на угол $\pi/4$, действует на правильных четырехугольниках, объединяя их в правильные восьмиугольники. Действуя далее таким образом мы получаем иерархию орбит, индуцированных отображениями $e_k = e^{1/2^k}$, которые действуют на множествах правильных 2^k-угольников поворотами на угол $\pi/2^k$, при этом $0 \leqslant k < n$. Нетрудно видеть, что при $k > 1$ каждый правильный 2^k-угольник представляет собой одновременно 2-адический шар радиуса $1/2^{n-k}$ и смежный класс по подгруппе $\mathbb{U}(2^{n-k})$. Каждое отображение e_k переставляет все шары радиуса $1/2^{n-k}$ между собой, объединяя их при этом в пары, подобно тому как это делает поворот на угол π с элементами группы $\mathbb{U}(2^n)$. Такие пары состоят из шаров, объединение которых является шаром вдвое большего радиуса. Будем называть такие шары сопряженными. Совокупность всех организованных таким образом шаров/многоугольников составляет дерево, алгебраическим описанием которого является последовательность (24). Описанный выше процесс схематически показан на рисунке 1.12.

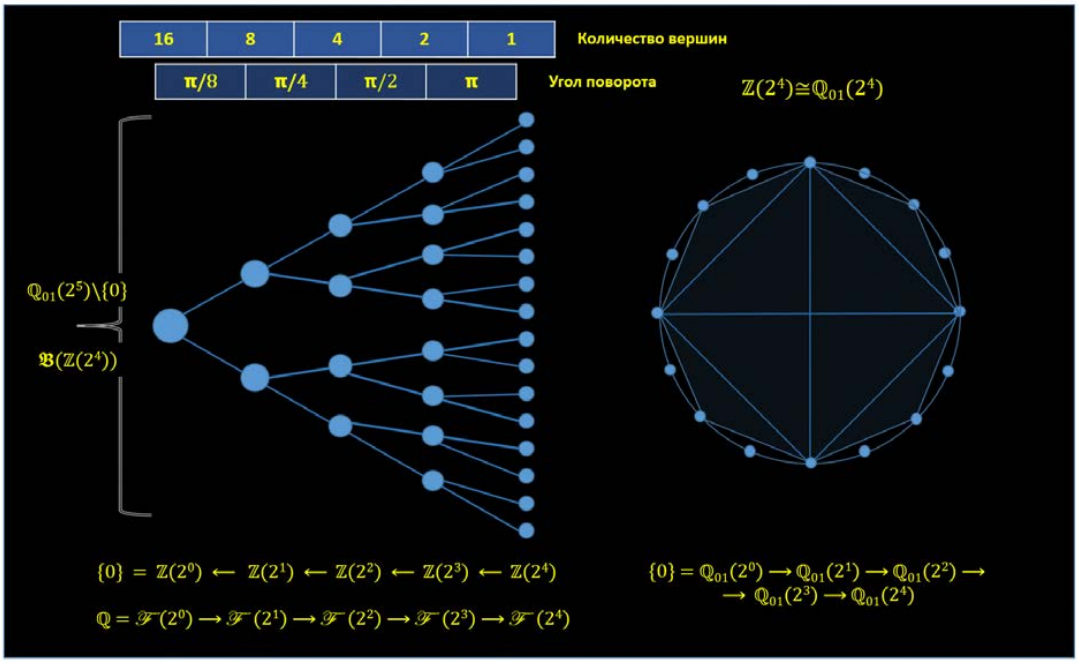


Рисунок 1.12 Построение двоичного дерева путем рекурсивной факторизации группы $\mathbb{Z}(2^4)$.

1.12 Поле p-адических чисел

Имея в своем распоряжении описанный в предыдущих параграфах инструментарий, предназначенный для работы с коммутативным целостным кольцом $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел, мы можем теперь легко распространить его на поле частных этого этого кольца, которое называется полем p-адических чисел. Поскольку в кольце $\mathbb{Z}_p$ все необратимые элементы образуют идеал, порожденный элементом p, и имеют вид

$$p^k \cdot (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n + \dots), \quad \text{где} \quad k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant a_n < p, \ a_0 \neq 0,$$

то очевидно, что элементы поля частных кольца $\mathbb{Z}_p$ имеют такой же вид, только показатель степени k может теперь принимать любое целое, в том числе и отрицательное, значение, а любой ненулевой элемент кольца частных можно представить в виде формального p-адического ряда вида

$$\xi = \sum_{k \leqslant n} a_n p^n = p^k \cdot (a_k + a_{k+1} p + a_{k+2} p^2 + \cdots + a_{k+n} p^n + \dots),$$

$$k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant a_n < p, \quad a_k \neq 0. \tag{25}$$

Нетрудно проверить, что множество таких формальных рядов образует коммутативное кольцо относительно операций сложения и умножения рядов с переносом разрядов вправо. Поскольку каждый элемент в этом кольце обратим, данное кольцо является полем, которое обозначается символом $\mathbb{Q}_p$. Это поле называется полем p-адических чисел. p-Адическая норма, определенная на кольце целых p-адических чисел, естественным образом продолжается на поле $\mathbb{Q}_p$ по принципу

$$\|\xi\| = 1/p^k,$$

где k есть показатель степени в множителе p^k, который фигурирует в стандартном представлении (25) ненулевого числа ξ в форме p-адического ряда. Норма нуля полагается равной нулю. p-Адическая норма превращает множество $\mathbb{Q}_p$ в нормированное поле и определяет на этом множестве p-адическую метрику. Эта метрика задает на множестве $\mathbb{Q}_p$ топологию, в которой открытыми множествами, также как и в случае кольца $\mathbb{Z}_p$, являются счетные объединения непересекающихся p-адических шаров. В отличие от топологического пространства $\mathbb{Z}_p$ пространство $\mathbb{Q}_p$ не является компактным, однако для него выполняется более слабое условие локальной компактности.

□ Топологическое пространство называется локально компактным, если каждая его точка имеет компактную окрестность.

Теорема 1.27 Множество $\mathbb{Q}_p$ формальных степенных рядов с коэффициентами из множества $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ и операцией сложения и умножения рядов с переносом разрядов вправо и с p-адической нормой образует ультраметрическое нормированное поле, которое удовлетворяет следующим условиям

(i) Операции сложения, умножения и деления, определенные для элементов поля $\mathbb{Q}_p$, является непрерывными функциями относительно p-адической метрики;

(ii) Поле $\mathbb{Q}_p$ является локально компактным топологическим пространством относительно топологии, индуцированной p-адической метрикой;

(iii) Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является всюду плотным в $\mathbb{Q}_p$, поэтому поле $\mathbb{Q}_p$ является пополнением поля $\mathbb{Q}$ относительно p-адической нормы/метрики.

Доказательство. Справедливость для поля $\mathbb{Q}_p$ ультраметрического неравенства треугольника вытекает из следующей формулы

$$x + y = p^k u + p^l v = \begin{cases} p^m w, \text{ где } m \geqslant \min(k, l), w \in \mathbb{Z}_p^\times, \text{ если } x + y \neq 0, \\ 0, \text{ если } x + y = 0. \end{cases}$$

Пункт (i). Докажем непрерывность операции умножения в произвольно выбранной точке (x_0, y_0).

$$\|x_1 y_1 - x_0 y_0\| = \|x_1 y_1 - x_0 y_1 + x_0 y_1 - x_0 y_0\| \leqslant \max(\|y_1\|\|x_1 - x_0\|, \|x_0\|\|y_1 - y_0\|) \leqslant$$

$$\leqslant \max(\|y_1\|, \|x_0\|)\max(\|x_1 - x_0\|, \|y_1 - y_0\|).$$

Ограничив сверху норму элементов $x0$ и $y1$, и устремляя к нулю норму разностей $x1 - x0$ и $y1 - y0$, правую величину данного неравенство можно сделать сколь угодно малой, что доказывает непрерывность функции p-адического умножения. Непрерывность функции p-адического сложения очевидно следует из неравенства

$$\|x_1 + y_1 - x_0 - y_0\| \leqslant \max(\|x_1 - x_0\|, \|y_1 - y_0\|).$$

Докажем непрерывность функции взятия обратного элемента. Для этого покажем, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится по p-адической метрике к некоторому ненулевому элементу $x \in \mathbb{Q}_p$, то последовательность $\{1/x_n\}$ сходится к элементу $1/x$. Пусть $x = p^k \cdot u$, где $u \in \mathbb{Z}_p^\times$. Поскольку сходимость по p-адической метрике означает совпадение младших

разрядов чисел, то начиная с некоторого номера все члены последовательности $\{x_n\}$ будут иметь вид $x_n = p^k \cdot u_n$, где $u_n \in \mathbb{Z}_p^\times$. При этом последовательность u_n будет сходиться к числу u, что дает нам следующие соотношения

$$x_n^{-1} = p^{-k} \cdot u_n^{-1}, \quad \|x_n^{-1} - x^{-1}\| = p^k \|u_n^{-1} - u^{-1}\| = p^k \|u_n - u\|.$$

Поскольку последовательность u_n сходится к u, из этого следует, что x_n^{-1} сходится к x^{-1}.

Пункт(ii). Очевидно, что поле $\mathbb{Q}_p$ является объединением бесконечной в обе стороны цепочки своих подмножеств вида:

$$\cdots \subset p^3\mathbb{Z}_p \subset p^2\mathbb{Z}_p \subset p^1\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_p \subset p^{-1}\mathbb{Z}_p \subset p^{-2}\mathbb{Z}_p \subset p^{-3}\mathbb{Z}_p \subset \ldots.$$

Каждое множество $p^k\mathbb{Z}_p$ получается из множества целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$ путем его умножения на элемент p^k. Очевидно, что такое отображения является изометричным, то есть сохраняет расстояние между числами. Поскольку множество $\mathbb{Z}_p$ является компактным метрическим пространством, то таковым является изометричное ему множество $p^k\mathbb{Z}_p$. Поскольку каждый элемент поля $\mathbb{Q}_p$ лежит в одном из множеств $p^k\mathbb{Z}_p$, то из этого следует, что пространство $\mathbb{Q}_p$ локально компактно в p-адической метрике.

Пункт (iii). Так же как и в случае кольца целых p-адических чисел фундаментальность последовательности p-адических чисел относительно p-адической метрики означает, что для любого $k \in \mathbb{N}$, существует такое число $m \in \mathbb{N}$, начиная с которого значения всех младших разрядов до k-ого включительно для всех членов последовательности совпадают. Наращивая последовательность совпадающих разрядов вправо, мы получаем в пределе p-адическое число, к которому сходится данная фундаментальная последовательность. Отсюда следует, что метрическое пространство $\mathbb{Q}_p$ является полным. Покажем, что множество $\mathbb{Q}$ является в нем всюду плотным. Поскольку близость элементов поля $\mathbb{Q}_p$ определяется совпадением младших разрядов в их p-адическом разложении, то очевидно, что для любого p-адического числа ξ и любого натурального числа k можно подобрать p-адическое число q такое, что соответствующий ему p-адический ряд будет совпадать с p-адическим рядом числа ξ во всех младших разрядах до k-ого включительно и содержать нули во всех остальных разрядах. Очевидно, что такое число является рациональным, откуда следует справедливость утверждения пункта (iii). ⊠

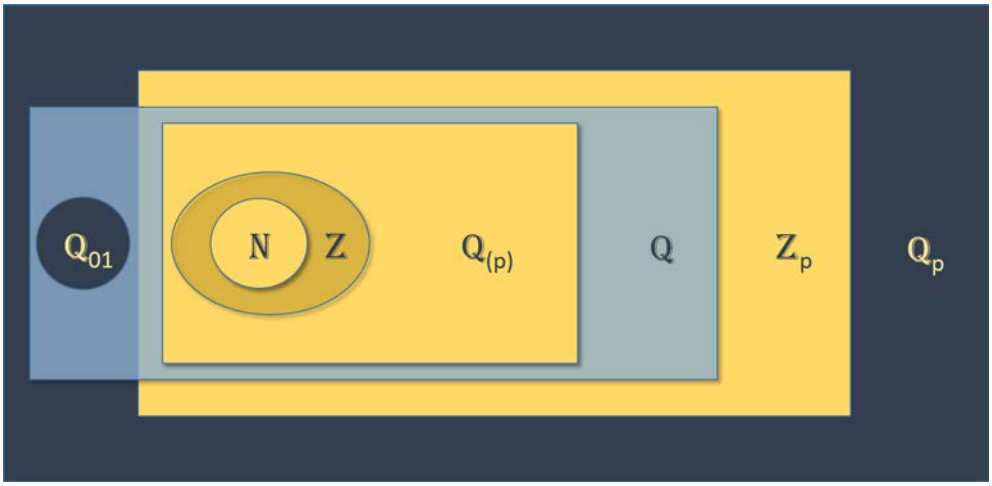


Рисунок 1.13 Строение поля p-адических чисел.

Резюмируя сказанное выше, можно сказать, что поле p-адических чисел включает в себя несколько компонент, имеющих различный смысл, однако объединенных в рамках одной алгебраической конструкции. Символ $\mathbb{Q}_{01}$ на диаграмме 1.13 обозначает множество p-ично рациональных чисел из отрезка $[0,1)$. Разложение этих чисел в p-адическую дробь содержит только отрицательные степени числа p.

1.13 Строение дерева шаров поля p-адических чисел

Как было показано выше, кольцо $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел можно интерпретировать как множество всех бесконечных путей, проходящих по бесконечному p-ичному корневому дереву и выходящих из его корня. Данное дерево можно интерпретировать как дерево p-адических шаров, в корне которого находится единичный шар, совпадающий с кольцом $\mathbb{Z}_p$. Добавление к кольцу $\mathbb{Z}_p$ отрицательных степеней числа p приводит к тому, что под единичным шаром $\mathbb{Z}_p$ находится шар $p^{-1}\mathbb{Z}_p$, радиус которого равен p, и который является объединением непересекающихся единичных шаров в количестве p штук:

$$\frac{1}{p}\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p + (\frac{1}{p} + \mathbb{Z}_p) + (\frac{2}{p} + \mathbb{Z}_p) + \cdots + (\frac{p-1}{p} + \mathbb{Z}_p).$$

Шар $p^{-1}\mathbb{Z}_p$, в свою очередь, лежит внутри шара $p^{-2}\mathbb{Z}_p$, который имеет радиус равный p^2 и является объединением p шаров вида $kp^{-2} + p^{-1}\mathbb{Z}_p$, где $0 \leqslant k < p$. Продолжая дальше аналогичным образом, мы получим бесконечно растущее вверх дерево, каждая вершина которого имеет над собой ровно p дочерних вершин. Данное дерево показано на рисунке 1.15 для случаев, когда $p = 2$ и $p = 3$. Так же как и в кольце $\mathbb{Z}_p$ каждый p-адический шар в поле $\mathbb{Q}_p$ определяется своим радиусом $1/p^{k+n}$ и начальным отрезком из n p-ичных знаков в разложении любого из центров этого шара в p-адический ряд:

$$\xi = \sum_{k \leqslant m} a_m p^m = p^k \cdot \underbrace{(a_k + a_{k+1}p + a_{k+2}p^2 + \cdots + a_{k+n-1}p^{n-1}}_{n} + \dots),$$

$$k, m \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant a_m < p, \quad a_k \neq 0. \tag{26}$$

Легко видеть, что для любых двух p-адических чисел ξ_1, ξ_2, представленных в виде (26), имеет место соотношение $\xi_1 - \xi_2 = p^{k+n}u$, где $u \in \mathbb{Z}_p$, поэтому $\|\xi_1 - \xi_2\| \leqslant 1/p^{k+n}$. Число n в приведенной выше формуле может быть равно нулю, в этом случае данная формула описывает шар $p^k\mathbb{Z}_p$. Выражение (26) можно записать в виде

$$\xi = p^{k+n}(\frac{a_k}{p^n} + \frac{a_{k+1}}{p^{n-1}} + \frac{a_{k+2}}{p^{n-2}} + \cdots + \frac{a_{k+n-1}}{p} + z) = p^m(q + z),$$

где $q \in \mathbb{Q}_{01}(p^n)$ и $z \in \mathbb{Z}_p$. Из этой формулы видно, что любой p-адический шар $\mathfrak{b}$ радиуса p^{-m} может быть получен из единичного шара с центром в нуле (то есть из шара $\mathbb{Z}_p$) путем сдвига последнего на элемент $q \in \mathbb{Q}_{01}(p^n)$ с последующим умножением на p^m:

$$\mathfrak{b} = p^m(q + \mathbb{Z}_p).$$

Обратная операция $\mathbb{Z}_p = p^{-m}\mathfrak{b} - q$, позволяет преобразовать любой p-адический шар $\mathfrak{b}$ в единичный шар с центром в нуле. Таким образом, мы видим, что каждый p-адический шар однозначно характеризуется двумя параметрами:

(i) последовательностью p-ичных разрядов некоторого числа $q \in \mathbb{Q}_{01}(p^n)$, которая играет роль маски, определяющей последовательность разрядов, которые являются общими для всех чисел, принадлежащих данному шару;

(ii) целочисленным показателем степени m, который определяет радиус этого шара, равный $1/p^m$, и который задает младший разряд из числа тех разрядов, значения которых для чисел из данного шара могут принимать любые значения от 0 до $p-1$.

Таким образом, все шары, радиус которых меньше или равен единице, имеют индекс m больший или равный нулю, а все шары, радиус которых больше единицы, имеют отрицательный индекс m. Количество $\mathfrak{d}(q)$ значащих разрядов числа q, показатель k в формуле (26) и показатель m связаны соотношением $k + \mathfrak{d}(q) = m$.

□ Обозначим символом $\mathbb{Q}_{[p]}$ множество p-ично рациональных чисел, то есть чисел вида n/p^m, где $n, m \in \mathbb{Z}$.

Поскольку каждую пару $\langle n, q\rangle$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ можно отождествить с p-ично рациональным числом из интервала $[n, n+1)$, то описанное выше соответствие дает нам следующее отождествление:

$$\mathfrak{B}(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}_{01}(p^\infty) \simeq \mathbb{Q}_{[p]}.$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Предложение 1.28 Существует каноническое взаимно однозначное соответствие между множеством p-адических шаров поля $\mathbb{Q}_p$ и множеством p-ично рациональных чисел $\mathbb{Q}_{[p]}$. При этом соответствии множеству p-адических шаров радиуса $1/p^n$ соответствует множество p-ично рациональных чисел из полуоткрытого интервала $[n, n+1)$.

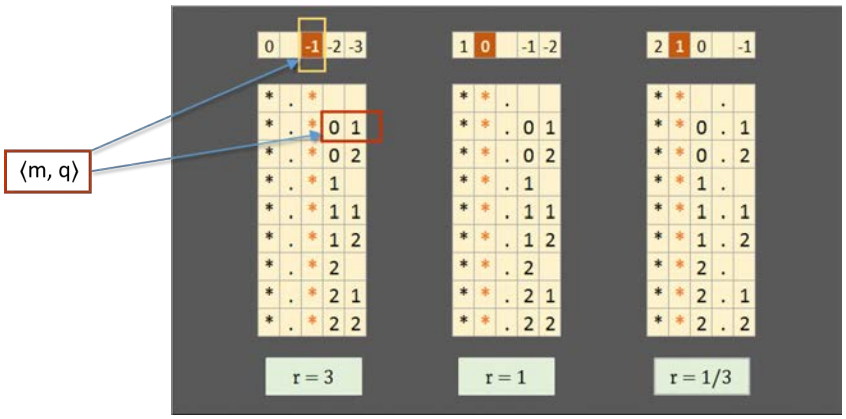


Рисунок 1.14 Пример кодировки 3-адических шаров.

Указанное соответствие иллюстрирует таблица, показанная на рисунке 1.14, в которой приведена кодировка 3-адических шаров поля $\mathbb{Q}_3$, радиус которых лежит в диапазоне от $1/3$ до 3, а маска q является не более чем двухразрядным числом. Для удобства идентификации этой маски с соответствующим 3-ично рациональным числом p-адические числа записаны с формате убывания разрядов слева направо, как это принято при написании вещественных чисел в разрядном представлении. Точка является разделителем положительных и отрицательных разрядов. Знак * означает, что в данном разряде может стоять любая цифра. Младший среди таких разрядов определяет радиус соответствующего шара и выделен цветом.

Также как и в случае целых p-адических чисел множество шаров поля $\mathbb{Q}_p$ можно представить в виде дерева. Примеры этих деревьев показаны на рисунке 1.15 для случая, когда $p = 2$, и $p = 3$ соответственно. В отличие от дерева целочисленных шаров, данное дерево не является корневым. Если шару $\mathfrak{b}$ соответствует пара $\langle m, q \rangle$, то целому числу $m \in \mathbb{Z}$ соответствует уровень дерева (или радиус соответствующего шара), на котором располагается данный шар, а p-ичному числу $q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ соответствует двоичный путь, соединяющий данный шар с вершиной дерева, лежащей на наклонной прямой. При этом порядок движения от этой вершины до вершины, лежащей на наклонной прямой, соответствует возрастающему порядку разрядов в а p-ичном представлении числа q.

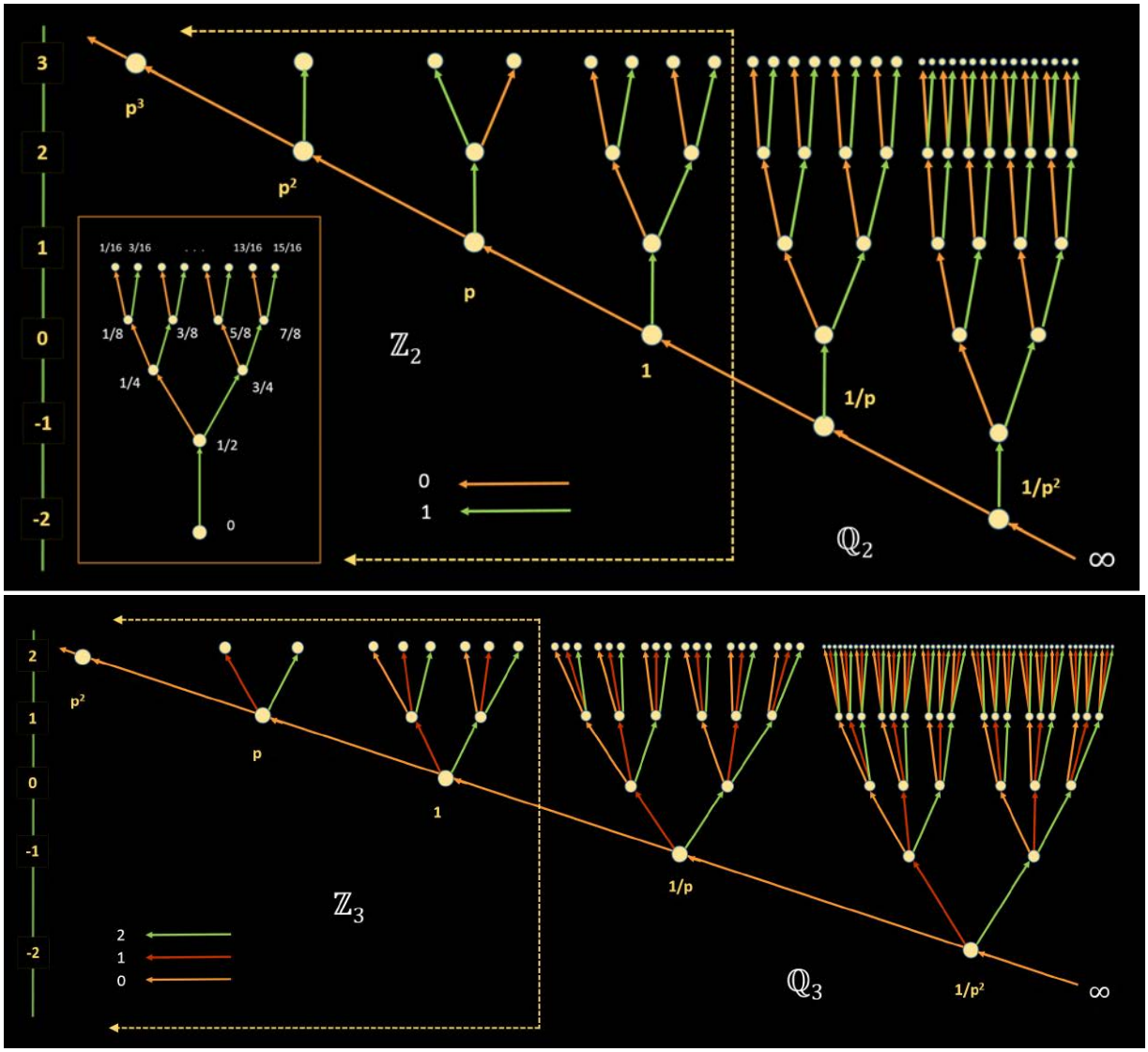


Рисунок 1.15 Строение дерева шаров полей $\mathbb{Q}_2$ и $\mathbb{Q}_3$. Символ $1/p^n$ обозначает шар $(1/p^n) \cdot \mathbb{Z}_p$.

Поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ является полем частных кольца $\mathbb{Z}_p$ и также может быть реализовано как множество бесконечных p-адических рядов или бесконечных путей, проходящих по бесконечному p-ичному дереву. Рассмотрим примеры таких деревьев, изображенные на рисунке 1.15.

Каждому p-адическому числу ξ вида

$$\xi = \sum_{k \leqslant n} a_n p^n, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad a_k \neq 0$$

соответствует бесконечный путь, идущий из точки ∞ и отклоняющийся от наклонной прямой в вершине p^k. Бесконечный путь, проходящий через все вершины, лежащие на наклонной прямой, соответствует нулю. Каждой вершине данного дерева соответствует некоторый p-адический шар, состоящий из всех путей, проходящих через эту вершину. Интерпретация p-адических чисел как путей позволяет установить на множестве p-адических чисел линейный порядок. Очевидно, что любые два пути γ_1 и γ_2, идущие по дереву p-адических шаров из бесконечности в бесконечность, в какой-то момент расходятся и один из них, начиная с этого момента, располагается справа от другого. Пусть это будет второй путь, тогда положим $\gamma_1 < \gamma_2$. Очевидно, что таким образом на множестве всех путей задается отношение линейного порядка, при котором целые числа всегда меньше нецелых, а ноль является наименьшим числом среди всех целых чисел. При интерпретации p-адических чисел как бесконечных путей, проходящих по дереву p-адических шаров, естественную визуальную интерпретацию также получают p-адические сферы с центром в нуле. Нетрудно видеть, что в этом случае сфера радиуса p^n с центром в нуле представляет собой множество всех путей, которые отклоняются от вершины, лежащей на наклонной линии и принадлежащей уровню с номером $-n$. Эта вершина соответствует p-адическому шару с центром в нуле, имеющему радиус p^n. Пример, соответствующий случаю $p = 3$ и $n = 1$, показан на рисунке 1.16.

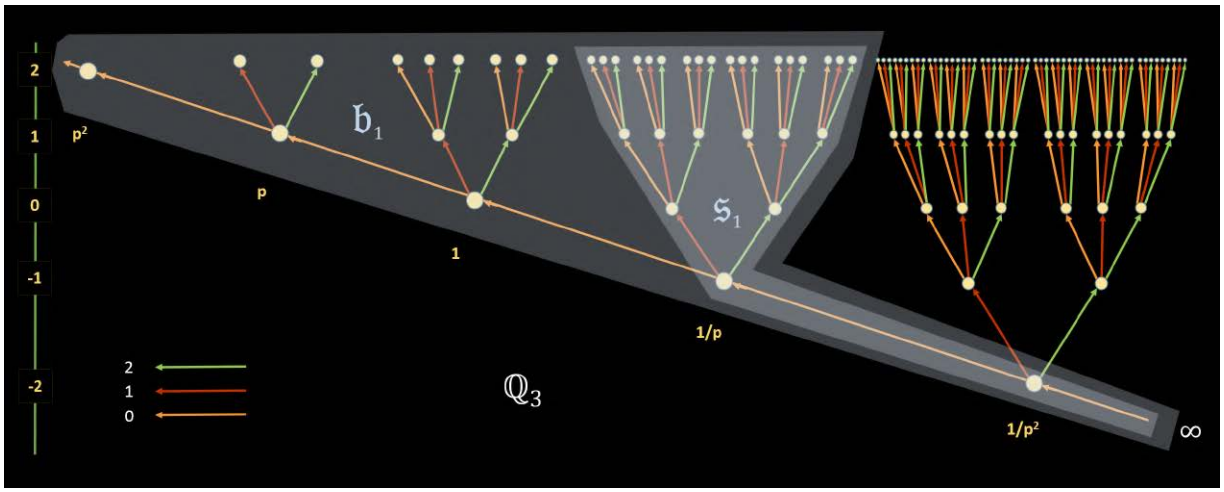


Рисунок 1.16 Соответствие между p-адическими сферами и шарами с центром в нуле и бесконечными путями, проходящими по дереву p-адических шаров. Показаны сфера и шар поля $\mathbb{Q}_3$ с центром в нуле и с радиусом равным 3.

Таким образом, множество p-адических сфер с центром в нуле находится во взаимно однозначном соответствии с множеством деревьев, вырастающих из вершин, расположенных на наклонной прямой, а p-адический шар представляет собой множество всех бесконечных путей, проходящих по дереву шаров через вершину, соответствующую данному шару.

1.14 Отображение поля $\mathbb{Q}_p$ на расширенное канторово множество

В параграфе 1.9 мы установили гомеоморфизм между топологическим пространством $\mathbb{Z}_p$ и канторовым множеством $\mathfrak{C}_p$ порядка p. В этом разделе мы покажем, что данный гомеоморфизм может быть продолжен до гомеоморфизма, отображающего локально компактное пространство $\mathbb{Q}_p$ на замкнутое подмножество $\overline{\mathfrak{C}_p}$ нулевой меры в $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, которое мы назовем обобщенным множеством Кантора порядка p. Для построения такого гомеоморфизма мы используем описанную выше интерпретацию p-адических чисел как путей, проходящих по дереву p-адических шаров. Поскольку множество целых p-адических чисел представляет собой шар единичного радиуса, то множество $\mathbb{Q}_p$ можно представить как единичный p-адический шар, окруженный бесконечной последовательностью концентрических p-адических сфер бесконечно возрастающего целочисленного радиуса. Поскольку для единичного шара требуемое отображение уже существует, то для построения его расширения нам необходимо построить аналогичное отображение для каждой p-адической сферы с центром в нуле. Из рисунка 1.16 видно, что при интерпретации множеств p-адических чисел как совокупностей путей, проходящих по дереву шаров, различие между шаром и сферой состоит в степени ветвления соответствующего им дерева в вершине, которая лежит на наклонной линии и является той вершиной, начиная с которой соответствующие пути от этой линии отклоняются. При этом степень ветвления для сферы равна $p-1$, а для она шара равна p. Это дает нам указание на то, как должны выглядеть те подмножества в $\mathbb{R}^+$, на которые мы будем отображать p-адические сферы.

Рассмотрим подмножество вещественных чисел, являющееся объединением непересекающихся отрезков вида $[2n, 2n+1]$, где $n \in \mathbb{N}$ и $n > 1$. Отрезок [0,1] мы зарезервируем для канторова множества. Построим модифицированное канторово множество $\mathfrak{C}'_{p,n}$ следующим образом:

(i) на первом шаге отрезок $[2n, 2n+1]$ делится на $2p-3$ равных частей, из которых внутренности каждого из $p-2$ четных отрезков исключаются, о оставшиеся $p-1$ замкнутых отрезков подаются на второй шаг алгоритма, который рекурсивно выполняет с ними действие, описанное в пункте (ii);

(ii) каждый из замкнутых отрезков, возникающих после первого шага и далее, делится на $2p-1$ равных частей, из которых внутренности каждого из $p-1$ четных отрезков исключаются, а оставшиеся p замкнутых отрезков подаются на следующий шаг алгоритма.

В результате выполнения бесконечного количества шагов мы получим замкнутое фрактальное множество $\mathfrak{C}'_{p,n}$ нулевой меры, которое можно назвать модифицированным множеством Кантора. Пример такого множества для случая, когда $p = 3$, показан на рисунке 1.17.

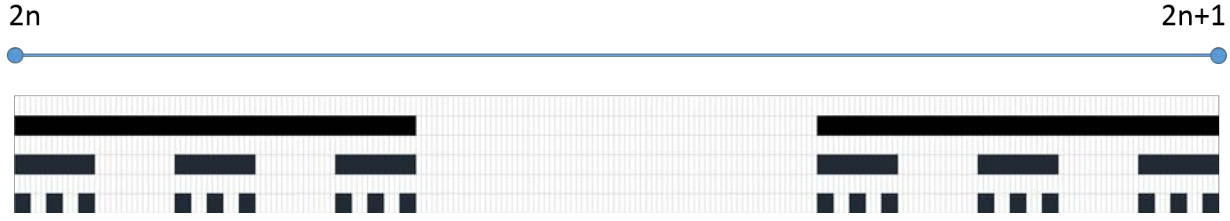


Рисунок 1.17 Модифицированное множества Кантора $\mathfrak{C}'_{3,n}$.

Определим далее расширенное множество Кантора следующим образом:

$$\overline{\mathfrak{C}_p} = \mathfrak{C}_p \cup \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}'_{p,n} \Big).$$

Множество $\overline{\mathfrak{C}_p}$ является замкнутым фрактальным подмножеством меры ноль в множестве неотрицательных вещественных чисел. Отобразим множество $\mathbb{Q}_p$ на это множество описанным ниже способом. Представим множество $\mathbb{Q}_p$ в виде объединения возрастающей цепочки p-адических шаров с центром в нуле и радиусами $1/p^n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Эти шары в точности соответствуют множеству шаров, которые на рисунке 1.15 расположены на наклонной прямой. Пронумеруем уровни дерева в соответствие с показателем степени при числе p, который соответствует шару $(1/p^n) \cdot \mathbb{Z}_p$, лежащему на наклонной прямой. Нумерация уровней дерева показана на рисунке 1.16 слева. Каждый бесконечный путь по дереву шаров проходит через единственный шар, лежащий на уровне n, при этом коэффициент при степени $1/p^n$ соответствует маркировке ребра, которое исходит из вершины, соответствующей данному шару, а последовательность p-адических цифр в записи данного числа в точности соответствует последовательности ребер, маркированных цифрами от 0 до $p-1$. Рассмотрим произвольное число $\gamma \in \mathbb{Q}_p$, интерпретируя его как путь, проходящий по дереву шаров. Пусть первый шар $\mathfrak{b}$, начиная с которого данный путь отклоняется от наклонной прямой, лежит на уровне n и имеет радиус $1/p^n$. Если $n \geqslant 0$, то число γ принадлежит множеству $\mathbb{Z}_p$ и отображается на канторово множество $\mathfrak{C}_p$ с помощью отображения $\mathfrak{r}_p$, описанного в параграфе 1.9. Если $n < 0$ то путь γ отображается в отрезок $[-2n, -2n+1]$. Поскольку путь γ отклоняется от наклонной линии, начиная с уровня n, то $\gamma[n] \neq 0$. Поэтому пути γ соответствует один из $p-1$ отрезков первого уровня, на которые разбивается отрезок $[-2n, -2n+1]$. Переходя далее с следующей значащей цифре $\gamma[n+1]$, которая может принимать значение от 0 до $p-1$, мы выбираем один из дочерних отрезков следующего уровня, количество которых уже равно p. Далее процесс продолжается рекурсивно. В результате выполнения бесконечного количества шагов путь γ однозначно маршрутизируется к некоторой точке $\mathfrak{r}[\gamma] \in \mathbb{R}^+$, которая является пересечением бесконечной последовательности вложенных отрезков, длина которых стремится к нулю. Отображение

$$\mathfrak{r}_p : \mathbb{Q}_p \to \overline{\mathfrak{C}_p}$$

задает взаимно однозначное отображение множества p-адических чисел на расширенное канторово множество. Поскольку длины вложенных отрезков, используемых при построении расширенного канторова множества, стремятся к нулю, а близкие в p-адической метрике пути, начиная с некоторого момента, попадают в один такой отрезок, то из этого следует, что отображение $\mathfrak{r}_p$ является непрерывным.

Существует еще одна связанная с деревом p-адических шаров закономерность, на которую имеет смысл обратить внимание. Все шары фиксированного радиуса располагаются на фиксированном уровне дерева шаров и могут быть пронумерованы натуральными числами, начиная с нуля. Поскольку каждый шар имеет числовой код вида (m, q), где $q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$, то естественным образом возникает отображение:

$$\mathfrak{q} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Q}_{01}(p^\infty),$$

$$n \to \mathfrak{q}(n).$$

Это отображение является одинаковым для всех уровней дерева p-адических шаров. Таблица начального сегмента отображения $\mathfrak{q}$ для случая $p = 3$ показана на рисунке 1.18.

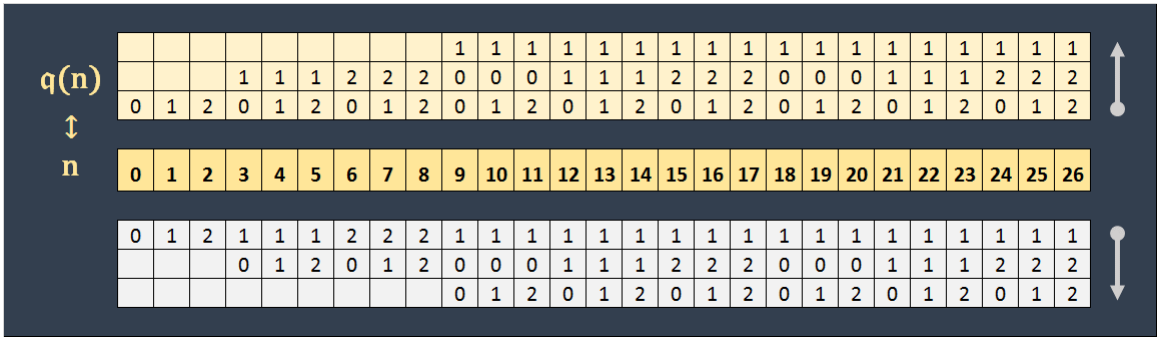


Рисунок 1.18 Таблица отображения $n \to \mathfrak{q}(n)$ при $p = 3$. Порядок убывания разрядов показан стрелкой.

Если представить число n в p-ичном коде, то нетрудно заметить закономерность, которая существует между представлением чисел n и $\mathfrak{q}(n)$, заданными в p-ичном коде. Отображение $n \to \mathfrak{q}(n)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ путем инверсии строки, являющейся p-ичным представлением числа n, и интерпретации данной строки как p-ичного представления правильной p-ичной дроби. Мы подробно рассмотрим это отображение в третьей главе. Отметим также связь, которая существует между деревом p-адических шаров и регулярными деревьями.

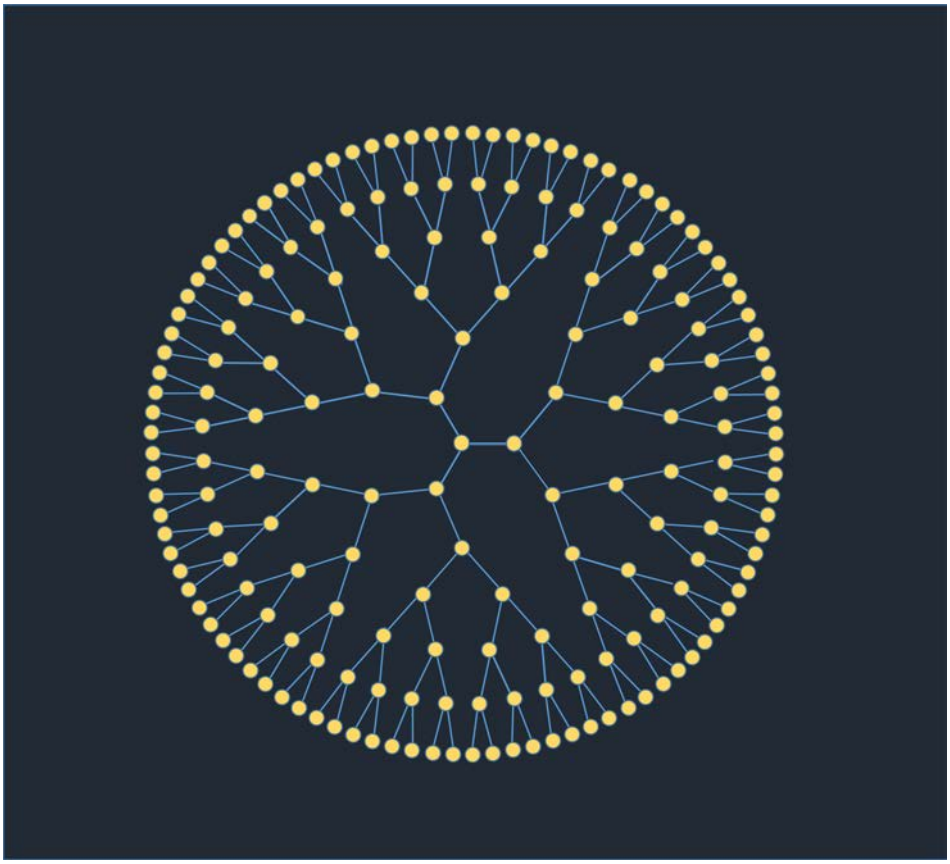


Рисунок 1.19 Фрагмент бесконечного регулярного дерева степени 3.

□ Степенью вершины неориентированного графа называется количество вершин, инцидентных данной. Неориентированный граф называется регулярным графом степени k, если каждая из его вершин имеет степень k.

Нетрудно видеть, что если абстрагироваться от ориентации ребер дерева p-адических шаров поля $\mathbb{Q}_p$, то это дерево представляет собой бесконечное регулярное дерево степени $p+1$. Фрагмент такого дерева показан на рисунке 1.19.

Поскольку множество вершин дерева p-адических шаров находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\mathbb{Q}_{[p]}$ p-ично рациональных чисел, то мы попутно доказали следующее утверждение.

Предложение 1.29 На множестве p-ично рациональных чисел можно задать структуру бесконечного регулярного дерева степени $p+1$.

В заключение этого параграфа о p-адических числах отметим, что множество p-адических чисел действительно несет в себе некоторую загадку. История о целых p-адических числах это история о позиционной системе счисления с простым основанием, о группе $\mathbb{Z}(p^\infty)$, представляющей собой бесконечный p^n-угольник, являющийся простейшей моделью бесконечно делимого, дискретного и замкнутого пространства, и о кольце $\mathbb{Q}_{(p)}$ целых по модулю p рациональных чисел, задающих гомоморфизмы этой группы в себя. Именно от кольца $\mathbb{Q}_{(p)}$ кольцо целых p-адических чисел наследует все свои основные структурные свойства, за исключением полноты. Поле p-адических чисел получается из кольца целых p-адических чисел как его поле дробей, по полной аналогии с тем, как поле рациональных чисел получается из кольца целых чисел. Загадка, однако, заключается в том, что если кольцо целых p-адических чисел имеет понятную геометрическую операцию, то для добавленных к нему p-адических дробей геометрическая, физическая или какая-либо другая неформальная интерпретация автору этих строк неизвестна, за исключением интерпретации в виде бесконечных путей ведущих из бесконечности в бесконечность по дереву изоморфному дереву p-адических шаров.

1.15 Интегрирование на группах $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$

В этом параграфе мы рассмотрим теорию интегрирования функций, определенных на кольце $\mathbb{Z}_p$.

□ В последующих формулах обозначение $\mathscr{F}(\mathbf{G};\mathbb{C})$ сокращается до $\mathscr{F}(\mathbf{G})$. Если не оговорено противное, то все рассматриваемые функции предполагаются комплекснозначными.

Отношение двойственности (23)-(24), существующие между абелевыми группами $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ и $\mathbb{Z}_p$, на котором мы подробно остановимся в следующей главе, переносится на отношение между пространствами функций, которые определены на этих группах. Отображения i_n и π_n в цепочках групп (23)-(24) индуцируют соответствующие отображения пространств функций, множество значений которых может быть любым числовым кольцом $\mathbb{V}$:

$$\mathscr{F}(\mathbb{Q}_{01}(p)) \xrightarrow{\widehat{i}_1} \mathscr{F}(\mathbb{Q}_{01}(p^2)) \xrightarrow{\widehat{i}_2} \mathscr{F}(\mathbb{Q}_{01}(p^3)) \xrightarrow{\widehat{i}_3} \cdots \xrightarrow{\widehat{j}_k} \mathscr{F}_0(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty);\mathbb{V}) \ . \tag{27}$$

$$\widehat{i_n} : \mathscr{F}(\mathbb{Q}_{01}(p^n)) \to \mathscr{F}(\mathbb{Q}_{01}(p^{n+1})).$$

$$\widehat{i_n}[f](x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{Q}_{01}(p^n), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p)) \xrightarrow{\widehat{\pi}_1} \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^2)) \xrightarrow{\widehat{\pi}_2} \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^3)) \xrightarrow{\widehat{\pi}_3} \cdots \xrightarrow{\widehat{\varrho}_k} \mathscr{F}_0(\mathbb{Z}_p; \mathbb{V}) \ . \tag{28}$$

$$\widehat{\pi_n} : \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^n)) \to \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^{n+1})), \quad \widehat{\pi_n}[f](x) = f(\pi_n(x)).$$

В случае реализации циклических групп/колец вычетов правильными многоугольниками, вписанными в единичную окружность, отображение $\widehat{\pi_n}$ реализует пространство $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^n))$ как множество функций из пространства $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^{n+1}))$, которые инвариантны относительно поворотов на угол $2\pi/p$, то есть принимают постоянное значение на каждом правильном p-угольнике, принадлежащим $\mathbb{Z}(p^{n+1})$. Пространства $\mathscr{F}_0(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty); \mathbb{V})$ и $\mathscr{F}_0(\mathbb{Z}(p^\infty); \mathbb{V})$, являющиеся индуктивным пределом этих цепочек и состоят из финитных функций, на описании которых мы остановимся далее. Последовательность вложений функциональных пространств (28) позволяет относительно просто построить теорию интегрирования на кольце $\mathbb{Z}_p$. В отличие от теории интегрирования на вещественной прямой, которая в общем случае требует построение теории меры и существенно опирается на многократное использование актуальной бесконечности, теория p-адического интегрирования на кольце $\mathbb{Z}_p$ является конструктивной и отличается простотой и изяществом. Она получается предельным переходом из теории суммирования функций, определенных на конечных p-адических деревьях и не требует сложных и многоступенчатых построений, характерных для теории интеграла Лебега на вещественной прямой. Данный переход осуществляется с помощью понятия финитной функции. Основным объектом для построения теории меры, необходимой для p-адического интегрирования, является дерево шаров $\mathfrak{B}(\mathbb{Z}_p)$.

□ Мера, заданная на коммутативной топологической группе и инвариантная относительно сдвигов, называется мерой Хаара в честь Альфреда Хаара (1985-1933), который в 1933 году доказал существование такой меры для произвольной локально компактной и метризуемой топологической группы со счетной базой окрестностей единицы ([34]).

В общем случае существует три возможных подхода к построению теории интегрирования на множестве $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел:

(i) Реплицирование теории интеграла Лебега, при котором в качестве элементарных множеств используются p-адические шары;

(ii) Использование теоремы Хаара о существование меры Хаара на любой локально компактной группе. Следует отметить, что доказательство данной теоремы достаточно сложно, занимает от четырех до пяти страниц неочевидных рассуждений и в силу своей общности является неконструктивным, так как опирается на аксиому выбора и различные неконструктивные процедуры;

(iii) Ограничение класса измеримых множеств до некоторого класса интуитивно понятных множеств, интегрирование по которым имеет очевидный «физический смысл» с последующим непрерывным продолжением функционала интегрирования на более общие классы множеств и функций.

В этой книге мы пойдем по третьему пути.

Определение p-адической меры. Мера каждого шара $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}(\mathbb{Z}_p)$ полагается равной его радиусу $\mathbf{r}(\mathfrak{b})$. В силу того, что каждый p-адический шар является объединением p непересекающихся дочерних шаров, радиус которых в p раз меньше, функция

$$\mu : \mathfrak{B}(\mathbb{Z}_p) \to \mathbb{R}, \quad \mu(\mathfrak{b}) = \mathbf{r}(\mathfrak{b}),$$

является положительной аддитивной функцией на дереве шаров $\mathfrak{B}(\mathbb{Z}_p)$ и может быть интерпретирована как мера.

Данная мера очевидным образом продолжается на все открытие множества, которые согласно предложению 1.23 представляют собой конечные или счетные объединения непересекающихся шаров. Поскольку мера самого кольца $\mathbb{Z}_p$ равна единице, а замкнутые множества по определению являются дополнением открытых, то мера μ продолжается за замкнутые множества по правилу $\mu(A) = 1 - \mu(B)$, где A есть замкнутое множество, а B есть его открытое дополнение. Поскольку аддитивные сдвиги являются изометрическими отображениями пространства $\mathbb{Z}_p$ в себя, они преобразуют шары в шары с сохранением их радиуса. Поэтому мера μ является инвариантной относительно сдвигов, то есть $\mu(A + x) = \mu(A)$, для любого измеримого множества A и любого $x \in \mathbb{Z}_p$. Далее мера μ может быть продолжена на σ-алгебру подмножеств $\mathbb{Z}_p$, порожденную открытыми множествами посредством взятия операций дополнения и счетного пересечения. Однако в этом нет необходимости, так как определение меры μ на шарах является достаточным для интегрирования финитных функций, а интегралы от функций из более широких классов, могут быть получены из интегралов финитных функций с помощью предельного перехода, который является эквивалентом интегрирования по Риману или по Лебегу. Для того, чтобы это показать, введем необходимые определения.

□ Функция, определенная на некотором топологическом пространства, называется локально постоянной, если у любой точки существует окрестность, в которой эта функция принимает постоянное значение.

□ Будем называть функцию $f \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p)$ финитной ранга k, если она принимает постоянные значения на p-адических шарах радиуса $1/p^k$. Будем называть функцию f финитной, если она является финитной функцией некоторого конечного ранга k.

Очевидно, что функция $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$ является финитной, тогда и только тогда , когда она удовлетворяет одному из трех эквивалентных условий:

(i) функция f локально постоянна;
(ii) функция f непрерывна и принимает конечное число значений;
(iii) функция f инвариантна относительно сдвигов на элементы $x \in (p^k)$ для некоторого k.

Эквивалентность пунктов (i) и (ii) очевидно следует из компактности метрического пространства $\mathbb{Z}_p$. Пункт (iii) вытекает из инвариантности шаров радиуса $1/p^k$ относительно сдвигов на элементы $x \in (p^k)$.

Поскольку p-адические шары радиуса $1/p^k$ совпадают со смежными классами по идеалу (p^k), то финитные функции ранга k и только они пропускаются через фактор кольцо по этому идеалу:

$$\mathbb{Z}_p \xrightarrow{\varrho_k} \mathbb{Z}_p/(p^k) \simeq \mathbb{Z}(p^k) \xrightarrow{\widehat{f}} \mathbb{C} \ .$$

Поэтому множество финитных функций ранга k можно отождествить с множеством функций $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^k))$. Чтобы не усложнять систему обозначений, мы будем обозначать эти два множества одним знаком $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^k))$ и трактовать этот знак в зависимости от контекста.

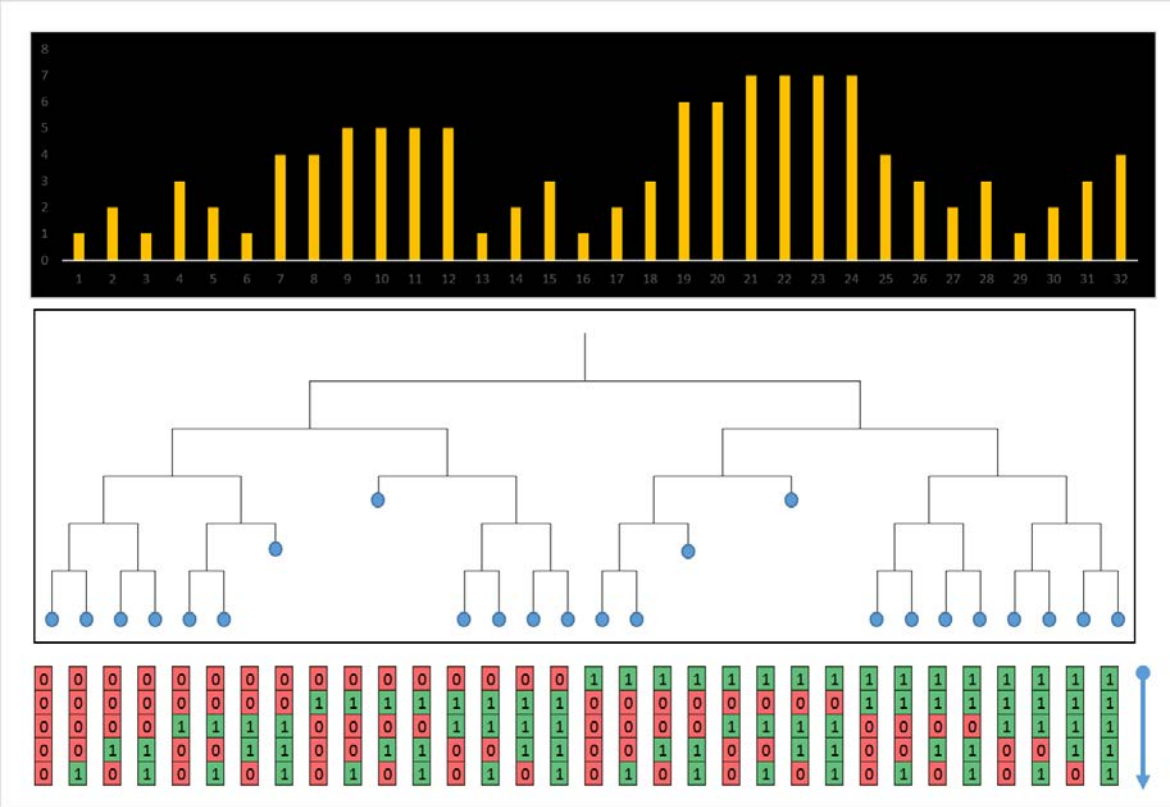


Рисунок 1.20 Пример графика финитной функции. Элементы кольца $\mathbb{Z}(2^5)$ заданы в лексикографическом порядке. Порядок разрядов задан сверху вниз. Множества уровней показаны агрегировано.

Очевидно, что суммирование значений финитной функции ранга k на шарах радиуса $1/p^k$, взятых с весовым коэффициентом равным $1/p^k$, является эквивалентом ее интегрирования по мере μ. Поэтому интегрирование финитных функций по мере μ осуществляется с помощью их суммирования с соответствующими весовыми коэффициентами. Данная процедура является полным аналогом вычисления конечных сумм Римана.

На конечномерных функциональных пространствах $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^k))$ естественным образом определяется эрмитово скалярное произведение и соответствующие нормы $\|*\|_0$, $\|*\|_1, \|*\|_2$ (см. ниже). Данное скалярное произведения превращает каждое пространство $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^k))$ в комплексное евклидово пространство. Данные нормы и скалярное произведение естественным образом распространяются на пространство всех финитных функций, определенных на метрическом пространстве $\mathbb{Z}_p$. Функционал интегрирования также естественным образом распространяется на подпространство финитных функций, так как оно является объединением подпространств финитных функций всех конечных рангов, на каждом из которых

этот функционал определен. Независимость этого определения от ранга функции легко проверяется.

$$\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{Z}_p} f\cdot\overline{g}\;d\mu = 1/(p^k)\sum_{n=i}^{p^k-1} f(i)\cdot\overline{g}(i), \tag{29}$$

$$\|f\|_0 = \max|f(i)|,\quad i\in\mathbb{Z}(p^k), \tag{30}$$

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{Z}_p}|f|\,d\mu = 1/(p^k)\sum_{i=0}^{p^k-1}|f(i)|, \tag{31}$$

$$\|f\|_2 = (\int_{\mathbb{Z}_p}|f|^2 d\mu)^{1/2} = [1/(p^k)\sum_{i=0}^{p^k-1}|f(i)|^2]^{1/2}. \tag{32}$$

□ Сходимость по нормам $\|*\|_{0,1,2}$ называется соответственно равномерной сходимостью, сходимостью в среднем и сходимостью в среднем квадратичном.

Все вышеперечисленные факты можно объединить в следующем предложении.

Предложение 1.30 Справедливы следующие утверждения:

(i) Стандартная цепочка гомоморфизмов колец вычетов:

$$\mathbb{Z}(p^1) \xleftarrow{\pi_1} \mathbb{Z}(p^2) \xleftarrow{\pi_2} \mathbb{Z}(p^3) \xleftarrow{\pi_3} \cdots \xleftarrow{\varrho_k} \mathbb{Z}_p \tag{33}$$

индуцирует следующую цепочку комплексных евклидовых пространств финитных функций конечного ранга и их унитарных вложений друг в друга:

$$\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p)) \xrightarrow{\widehat{\pi}_1} \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^2)) \xrightarrow{\widehat{\pi}_2} \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^3)) \xrightarrow{\widehat{\pi}_3} \cdots \xrightarrow{\widehat{\varrho}_k} \mathscr{F}_0(\mathbb{Z}_p;\mathbb{C})\ . \tag{34}$$

$$\widehat{\pi_n}:\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^n))\to\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^{n+1})),\quad \widehat{\pi_n}[f](x)=f(\pi_n(x)).$$

(ii) Нормы $\|*\|_0 - \|*\|_1 - \|*\|_2$, а также скалярное произведение $\langle *,*\rangle$, естественным образом распространяются с подпространств финитных функций конечных рангов на все пространство финитных функций;

(iii) Функционал интегрирования естественным образом распространяется с подпространств финитных функций конечных рангов на все пространство $\mathscr{F}_0(\mathbb{Z}_p;\mathbb{C})$;

(iv) Индуктивный предел данной последовательности комплексных евклидовых пространств совпадает с комплексным евклидовым пространством $\mathscr{F}_0(\mathbb{Z}_p;\mathbb{C})$ финитных функций, определенных на пространстве $\mathbb{Z}_p$;

(v) При замене поля $\mathbb{C}$ на одно из полей $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$ пункты (i)-(ii) сохраняют справедливость с соответствующей заменой терминов.

□ Обозначим символом $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_p;\mathbb{C})$ множество непрерывных комплекснозначных функций, определенных на топологическом кольце $\mathbb{Z}_p$.

Предложение 1.31 Каждая непрерывная функция $f\in\mathscr{C}(\mathbb{Z}_p;\mathbb{C})$ является пределом равномерно сходящейся последовательности финитных функций.

Доказательство. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Поскольку функция f непрерывна, то у любой точки $x \in \mathbb{Z}_p$ существует шаровая окрестность $\mathfrak{b}$, на которой колебание функции f, то есть максимальное расстояние между ее значениями в любых двух точках, принадлежащих окрестности $\mathfrak{b}$, не превышает величины ε. Будем двигаться по дереву шаров $\mathfrak{B}(\mathbb{Z}_p)$ от его корня к периферии, отбирая только те шары, на которых колебание функции f не превышает величины ε. В силу сказанного выше множество таких шаров образует покрытие пространства $\mathbb{Z}_p$. Вследствие компактности пространства $\mathbb{Z}_p$ из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Так как любые два шара или не пересекаются, или один из них лежит внутри другого, то из этого покрытия можно выбрать подпокрытие $\mathfrak{C}$, состоящее из непересекающихся шаров. Выберем в каждом шаре $\mathfrak{b} \in \mathfrak{C}$ точку $x \in \mathfrak{b}$ и зафиксируем значение $y(\mathfrak{b}) = f(x)$. Затем определим финитную функцию g_ε следующим образом:

$$g_\varepsilon(z) = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{C}} \mathbf{1}_{\mathfrak{b}}(z) \cdot y(\mathfrak{b}),$$

где $\mathbf{1}_{\mathfrak{b}}$ есть характеристическая функция шара $\mathfrak{b}$. Легко убедиться, что $\|g_\varepsilon - f\|_0 \leqslant \varepsilon$. Очевидно, что последовательность финитных функций $g_{1/n}$ будет сходиться к функции f по норме $\| * \|_0$ $\boxtimes$.

Определение интеграла. Поскольку функционал интегрирования является непрерывным на множестве финитных функций относительно нормы $\| * \|_0$, то интеграл на пространстве непрерывных функций можно определить следующим образом:

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f \; d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{Z}_p} g_n \; d\mu,$$

где $\{g_n\}$ есть последовательность финитных функций, равномерно сходящаяся к функции f. Независимость значения интеграла от выбора этой последовательности легко проверяется. Данный предельный переход эквивалентен определению интегрирования по Риману.

Так же как и в случае функций, определенных на отрезке вещественной прямой, для кольца $\mathbb{Z}_p$ определяются гильбертовы пространства абсолютно и квадратично интегрируемых функций $\mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p; \mathbb{C})$ и $\mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p; \mathbb{C})$. Существует два возможных подхода к определению этих пространств. Первый подход в точности воспроизводит теорию интеграла Лебега на вещественной прямой, в этом случае данные пространства определяются как классы эквивалентности суммируемых по модулю (или с квадратом) функций, определенных с точностью до множества меры ноль (см.[11], главы V,VII). При втором подходе указанные пространства определяются как пополнения пространства непрерывных функции $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_p; \mathbb{C})$ соответственно по норме $\| * \|_1$ и по норме $\| * \|_2$. Эти пополнения определяются как классы эквивалентности фундаментальных последовательностей, состоящих из непрерывных функций. Таким образом,

(i) Замыкание/пополнение пространства $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_p; \mathbb{C})$ по норме $\| * \|_1$ дает нам пространство суммируемых функций $\mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p; \mathbb{C})$.

(ii) Замыкание/пополнение пространства $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_p; \mathbb{C})$ по норме $\| * \|_2$ дает нам пространство квадратично суммируемых функций $\mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p; \mathbb{C})$.

Поскольку, согласно предложению 1.31, множество финитных функций является всюду плотным подмножеством пространства $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_p)$ относительно нормы $\| * \|_0$, а эта норма

является в случае кольца $\mathbb{Z}_p$ более сильной, чем нормы $\| * \|_{1,2}$, то из этого следует, что пространства $\mathscr{L}^{1,2}(\mathbb{Z}_p)$ можно с равным успехом определить как пополнения пространства финитных функций $\mathscr{F}_0(\mathbb{Z}_p)$ относительно норм $\| * \|_{1,2}$.

Отметим, что, строго говоря, пространства $\mathscr{L}^{1,2}(\mathbb{Z}_p;\mathbb{C})$ не являются пространствами функций в собственном смысле этого слова, а представляют собой классы эквивалентности суммируемых функций или классы эквивалентности фундаментальных последовательностей, состоящих из непрерывных (или из финитных) функций. Содержательная интерпретация этих пространств в области явлений пространственно-временного мира обсуждается более подробно в Приложении Б.

Неравенство Коши-Буняковского.

Неравенство Коши-Буняковского является формулировкой на языке аналитической геометрии очевидного факта, состоящего в том, что кратчайшим расстоянием между двумя точками является длина соединяющего эти точки отрезка. Это утверждение эквивалентно неравенству треугольника (Начала Евклида, Книга I, Положение 20), которое в свою очередь эквивалентно неравенству $|\cos(\alpha)| \leqslant 1$, справедливому для любого угла α. На языке аналитической геометрии это неравенство записывается в виде:

$$(x,y)^2 \leqslant (x,x)\cdot(y,y),$$

и называется неравенством Коши-Буняковского. Данное неравенство выполняется в любом вещественном или комплексном евклидовом пространстве и может быть также интерпретировано как утверждение о том, что дискриминант квадратного уравнения

$$0 \leqslant (x-\lambda y, x-\lambda y) = (y,y)\lambda^2 - 2(x,y)\lambda + (x,x)$$

меньше или равен нулю. В функциональных пространствах, в которых скалярное произведение задается интегралом, неравенство Коши-Буняковского принимает вид

$$\Big(\int_A f\overline{g}\ d\mu\Big)^2 \leqslant \int_A f^2 d\mu \cdot \int_A g^2 d\mu,$$

где A есть произвольное измеримое множество, а f и g произвольные квадратично интегрируемые на множестве A функции. Частным случаем этого неравенства, который получается в предположении конечности меры множества A и равенства функции g единице, является неравенство

$$\Big(\int_A f\ d\mu\Big)^2 \leqslant \int_A f^2 d\mu \cdot \mu(A). \tag{35}$$

Из этого неравенства в частности следует, что $\mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p) \subset \mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p)$, так как любая последовательность непрерывных функций $\{\phi_k\}$, являющаяся фундаментальной по норме $\| * \|_2$ также является фундаментальной по норме $\| * \|_1$, что следует из неравенства

$$\Big(\int_{\mathbb{Z}_p} |\phi_n - \phi_m|\ d\mu\Big)^2 \leqslant \int_{\mathbb{Z}_p} (\phi_n - \phi_m)^2 d\mu. \tag{36}$$

Нам осталось распространить по непрерывности функционал интегрирования с пространства непрерывных функций на пополнение этого пространства по нормам $\|*\|_{1,2}$. Поскольку

норма является непрерывной функцией и удовлетворяет условию

$$|\|f_1\| - \|f_2\|| \leqslant \|f_1 - f_2\|,$$

то функционалы интегрирования $f \to \int |f|\, d\mu$ и $f \to \int f^2\, d\mu$ естественным образом продолжаются по непрерывности соответственно на пространства $\mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p)$ и $\mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p)$. Функционал $\int f\, d\mu$ также определен в $\mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p)$, поскольку с каждой фундаментальной по норме $\| * \|_1$ последовательностью непрерывных функций $\{f_n\}$ связана последовательность их интегралов $\{\int f_n\, d\mu\}$, которая также является фундаментальной, что вытекает из следующего неравенства:

$$|\int f_n\, d\mu - \int f_m\, d\mu| \leqslant \int |f_n - f_m| d\mu.$$

Мы продолжим рассмотрение процесса интегрирования на кольце $\mathbb{Z}_2$ в главах II и V.

Интегрирование на группе $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$

Функционал интегрирования также определяется для функций, определенных на дискретной абелевой группе $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$. В этом случае интегрирование очевидно сводится к обычному суммированию рядов. По аналогии с финитными функциями, определенными на кольце целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$ можно определить понятие финитных функций, определенных на группе $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$. Как мы далее покажем, эти два класса функций связаны между собой отношением двойственности, которое в пределе переходит в двойственность между группами $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$.

□ Будем называть функцию $g \in \mathscr{F}(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty))$ финитной ранга k, если ее носитель принадлежит подгруппе $\mathbb{Q}_{01}(p^k)$. Будем называть функцию g финитной, если она является финитной для некоторого конечного ранга k. Множеством функций $\mathscr{F}(\mathbb{Q}_{01}(p^k))$ можно отождествить с множеством финитных функций ранга k. Также как и в предыдущем случае, мы будем обозначать эти два множества одним знаком и трактовать его в зависимости от контекста.

Стандартная цепочка вложений групп p-ичных дробей индуцирует цепочку (28) вложений соответствующих колец функций. Индуктивный предел этой цепочки совпадает с кольцом $\mathscr{F}_0(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty))$ финитных функций, определенных на группе $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$. На множестве комплекснозначных финитных функций $\mathscr{F}_0(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty); \mathbb{C})$ естественным образом определяется линейная функция суммирования, аналогичная функции интегрирования на кольце $\mathbb{Z}_p$. На этом пространстве естественным образом определяется эрмитово скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle = \sum_{q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)} f \cdot \overline{g}\ (q),$$

которое определяет соответствующую норму

$$\|f\|_2 = [\sum_{q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)} |f(q)|^2]^{1/2},$$

и задает на линейном пространстве $\mathscr{F}_0(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty))$ структуру комплексного евклидова пространства. На функциональном пространстве $\mathscr{F}_0(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty); \mathbb{C})$ также определена норма

$$\|f\|_1 = \sum_{q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)} |f(q)|.$$

Замыкание пространства $\mathscr{F}_0(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty);\mathbb{C})$ по норме $\|*\|_1$ дает нам полное нормированное пространство $\mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty);\mathbb{C})$ абсолютно сходящихся рядов, определенных на группе $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$.

Замыкание пространства $\mathscr{F}_0(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty);\mathbb{C})$ по норме $\|*\|_2$ дает нам гильбертово пространство $\mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty);\mathbb{C})$ квадратично суммируемых функций/последовательностей, определенных на группе $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$.

Легко показать, что для группы $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ имеет место обратное включение

$$\mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)) \subset \mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)).$$

Пусть $\{f_q\} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty))$. Из абсолютной сходимости ряда $\sum f_q$ вытекает, что последовательность $\{|f_q|\}$ ограничена некоторой константой $\mathfrak{c}$. В этом случае:

$$|f_q/\mathfrak{c}| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad |f_q^2/\mathfrak{c}| < |f_q| \quad \text{для любого } q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty).$$

Отсюда следует, что ряд $\sum |f_q^2/\mathfrak{c}|$ сходится, так как он мажорируется сходящимся рядом $\sum |f_q|$. Поскольку $|f_q^2| = \mathfrak{c} \cdot |f_q^2/\mathfrak{c}|$, то ряд $\sum |f_q^2|$ также сходится.

1.16 Интегрирование в поле $\mathbb{Q}_p$

Также как и в случае кольца $\mathbb{Z}_p$ в основе теории интегрирования функций, определенных на поле $\mathbb{Q}_p$, лежит понятие финитной функции. Поскольку поле $\mathbb{Q}_p$ является некомпактным топологическим пространством, то введенное ранее понятие финитной функции нуждается в модификации.

□ Будем называть функцию $f \in \mathscr{F}(\mathbb{Q}_p)$ финитной ранга k, если она имеет компактный носитель и принимает постоянные значения на p-адических шарах радиуса $1/p^k$. Будем называть функцию f финитной, если она является финитной функцией некоторого конечного ранга k. Будем обозначать множество финитных функций символом $\mathscr{C}_0(\mathbb{Q}_p)$.

Очевидно, что функция $f \in \mathscr{F}(\mathbb{Q}_p)$ является финитной, тогда и только тогда, когда она имеет компактный носитель и удовлетворяет одному из трех эквивалентных условий:

(i) функция f локально постоянна;

(ii) функция f непрерывна и принимает конечное число значений;

(iii) функция f инвариантна относительно сдвигов на элементы $x \in (p^k)$ для некоторого k.

Теория интегрирования функций, определенных на поле p-адических чисел, в общих чертах повторяет теорию интегрирования на кольце $\mathbb{Z}_p$:

(i) мера p-адических шаров полагается равной их радиусу;

(ii) с множества шаров эта мера продолжается до инвариантной относительно сдвигов меры Хаара, определенной для всех измеримых подмножеств в $\mathbb{Q}_p$;

(iii) интеграл от финитной функции определяется как сумма ее значений, умноженных на весовые коэффициенты, равные мере соответствующих множеств уровня, каждое из которых представляет собой объединение конечного множества непересекающихся шаров;

(iv) далее функционал интегрирования распространяется на интегрируемые непрерывные функции с компактным носителем, являющиеся пределом равномерно сходящихся последовательностей финитных функций;

(v) далее функционал интегрирования с помощью предельного перехода по области интегрирования распространяется на интегрируемые непрерывные функции;

(vi) с множества интегрируемых непрерывных функций функционал интегрирования распространяется на пространства $\mathscr{L}^{1,2}(\mathbb{Q}_p)$, определяемые как пополнения пространства интегрируемых непрерывных функций относительно норм $\| * \|_{1,2}$.

В силу некомпактности топологического пространства $\mathbb{Q}_p$ реализация программы, намеченной в пунктах (i)-(vi), имеет несколько существенных отличий от теории интегрирования для кольца $\mathbb{Z}_p$: (1) не всякая функция, являющаяся пределом равномерно сходящейся последовательности финитных функций оказывается интегрируемой; (2) не всякая непрерывная функция является ограниченной и соответственно интегрируемой; (3) пространство $\mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_p)$ не является подпространством в $\mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_p)$ (см. Приложение B) и т.д.

Для того, чтобы свести интегрирование в поле $\mathbb{Q}_p$ к интегрированию функций, определенных на его компактных подмножествах, представим поле $\mathbb{Q}_p$ как объединение возрастающей цепочки p-адических шаров с центром в нуле:

$$\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{b}_2 \subset \ldots, \qquad \mathbb{Q}_p = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{b}_n, \quad \mathfrak{b}_n = \mathbb{Z}_p/p^n. \tag{37}$$

□ Пусть f есть непрерывная комплекснозначная функция, определенная на множестве p-адических чисел. Определим интеграл от функции f следующим образом:

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p} f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathfrak{b}_n} f\, d\mu.$$

Говоря другими словами, функция f является интегрируемой, если указанный выше предел существует. Функция f называется абсолютно интегрируемой/квадратично интегрируемой, если интегрируемыми являются соответственно функции $|f|$ и f^2.

Поскольку интеграл аддитивен по области интегрирования, то можно показать, что в случае абсолютно/квадратично интегрируемых функций значение интеграла не зависит от способа представления множества $\mathbb{Q}_p$ в виде объединения возрастающей цепочки его измеримых ограниченных подмножеств. В случае неабсолютно интегрируемой функции это не так, и значение интеграла зависит от порядка интегрирования, что делает эту ситуацию аналогичной ситуации с абсолютно и неабсолютно сходящимися числовыми рядами.

Пространства абсолютно/квадратично интегрируемых непрерывных функций являются неполными нормированными векторными пространствами относительно норм $\| * \|_{1,2}$. Их пополнение относительно указанных норм дает нам соответственно полные пространства $\mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_p)$ и $\mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_p)$. Элементами этих пространств являются классы эквивалентных фундаментальных последовательностей непрерывных абсолютно/квадратично интегрируемых

комплекснозначных функций. Поскольку норма является непрерывной функцией и удовлетворяет условию

$$|\|f_1\| - \|f_2\|| \leqslant \|f_1 - f_2\|,$$

то функционалы интегрирования $f \to \int |f|\, d\mu$ и $f \to \int f^2\, d\mu$ естественным образом продолжаются по непрерывности соответственно на пространства $\mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_p)$ и $\mathscr{Q}^2(\mathbb{Z}_p)$. Функционал $\int f\, d\mu$ также определен в $\mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_p)$, поскольку с каждой фундаментальной по норме $\|*\|_1$ последовательностью непрерывных функций $\{f_n\}$ связана последовательность их интегралов $\{\int f_n\, d\mu\}$, которая также является фундаментальной, что вытекает из следующего неравенства:

$$|\int f_n\, d\mu - \int f_m\, d\mu| \leqslant \int |f_n - f_m| d\mu.$$

В заключение этого параграфа докажем один простой факт, который понадобится нам в дальнейшем.

Предложение 1.32 Множество $\mathscr{C}_0(\mathbb{Q}_p)$ финитных функций всюду плотно в пространствах $\mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_p)$ и $\mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_p)$.

Доказательство. Приведем доказательство для случая пространства $\mathscr{L}^1$. Случай $\mathscr{L}^2$ доказывается аналогично. Пусть функция f принадлежит к пространству $\mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_p)$ и пусть ε есть произвольно малое вещественное число. Согласно определению интеграла $\int |f|\, d\mu$ его значение можно с точностью до $\varepsilon/3$ приблизить значением интеграла $\int |g|\, d\mu$ от некоторой непрерывной функции g. Согласно определению интеграла $\int |g|\, d\mu$ его можно с точностью до $\varepsilon/3$ приблизить значением интеграла от функции $|g|$ по некоторому p-адическому шару $\mathfrak{b}$. Пространство $\mathscr{C}(\mathfrak{b})$ изометрично пространству $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_p)$, каждую функцию которого, согласно предложению 1.31, можно сколько угодно близко приблизить по равномерной норме финитной функцией h. Следовательно это также верно для пространства $\mathscr{C}(\mathfrak{b})$ и для ограничения функции $|g|$ на множество $\mathfrak{b}$. Поскольку на множестве конечной меры норма $\|*\|_1$ является непрерывной функцией относительно нормы $\|*\|_0$, то точность такого приближение можно также сделать равной $\varepsilon/3$. Сложив вместе все эти три приближения, мы получим требуемое приближение функции f финитной функцией h с точность до ε, что и требовалось доказать. $\boxtimes$

1.17 Интегрируемые функции и меры на p-адических деревьях

В этом параграфе мы покажем, что более сложное понятие функции, абсолютно или квадратично интегрируемой на множестве $\mathbb{Z}_p$, определяемое через классы эквивалентности фундаментальных последовательностей непрерывных функций или через классы эквивалентности измеримых функций, может быть в определенной степени сведено к более простому и конструктивному понятию аддитивной и непрерывной функции, определенной на p-адическом дереве.

$\square$ Пусть $\mathbb{T}_p$ есть бесконечное корневое p-адическое дерево, которое мы будем предполагать планарным и отождествленным с деревом p-адических шаров кольца $\mathbb{Z}_p$. Будем называть функцию $f : \mathrm{V}(\mathbb{T}_p) \to \mathbb{R}$, определенную на множестве вершин этого дерева, аддитивной, если значение этой функции в каждой вершине дерева равно сумме ее значений в дочерних вершинах.

□ Будем называть вещественную меру, определенную на кольце $\mathbb{Z}_p$, невырожденной, если мера любого p-адического шара не равна нулю.

□ Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим оператор усреднения $\mathfrak{av}_n$, отображающий множество невырожденных мер, определенных на кольце $\mathbb{Z}_p$, в подпространство финитных функций пространства $\mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p;\mathbb{R})$:

$$x \in \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} \in \mathfrak{B}_n(\mathbb{Z}_p),$$
$$\mathfrak{av}_n[\mu](x) = \frac{1}{\mu(\mathfrak{b})} \cdot \int\limits_{\mathfrak{b}} d\mu.$$

□ Будем называть вещественную невырожденную меру μ, определенную на кольце $\mathbb{Z}_p$, непрерывной, если последовательность $\mathfrak{av}_n[\mu]$ является фундаментальной в пространстве $\mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p)$. Пусть символ $\mathscr{M}(\mathbb{Z}_p)$ обозначает множество всех вещественных невырожденных и непрерывных мер, определенных на кольце $\mathbb{Z}_p$.

□ Пусть $f : \mathrm{V}(\mathbb{T}_p) \to \mathbb{R}^+$ есть положительная аддитивная функция, определенная на множестве вершин планарного дерева $\mathbb{T}_p$. Поскольку дерево $\mathbb{T}_p$ можно отождествить с деревом $\mathfrak{B}(\mathbb{Z}_p)$ p-адических шаров кольца целых p-адических чисел, то каждая такая функция может быть однозначным образом продолжена до невырожденной вещественной меры, определенной на этом кольце. Из этого следует, что для всех таких функций определено действие операторов усреднения, а также определяемое через эти операторы понятие непрерывности. Обозначим символом $\mathscr{M}(\mathbb{T}_p;\mathbb{R}^+)$ множество вещественных положительных функций, которые определены на множестве вершин дерева $\mathbb{T}_p$ и обладают свойствами аддитивности и непрерывности.

Предложение 1.33 Существует взаимно однозначное соответствие между следующими тремя множествами:

(i) множество $\mathscr{M}(\mathbb{Z}_p)$ невырожденных непрерывных мер, определенных на кольце $\mathbb{Z}_p$;

(ii) множество $\mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p;\mathbb{R}^+)$ интегрируемых положительных вещественных функций, определенных на кольце $\mathbb{Z}_p$;

(iii) множество аддитивных и непрерывных функций $\mathscr{M}(\mathbb{T}_p;\mathbb{R}^+)$, отображающих множество вершины дерева $\mathbb{T}_p$ в множество $\mathbb{R}^+$ положительных вещественных чисел.

Доказательство. (i)↔(ii) С каждой мерой $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{Z}_p)$ связана фундаментальная последовательность финитных функций $\{\mathfrak{av}_n[\mu]\}$, которую можно интерпретировать как элемент множества $\mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p;\mathbb{R}^+)$. Обратно, с каждой функцией $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p;\mathbb{R}^+)$ связана невырожденная мера $\mu[f]$, значение которой на измеримом подмножестве $A \subseteq \mathbb{Z}_p$ равно $\int_A d\mu$. Эти два отображения являются взаимно обратными, откуда следует их взаимная однозначность. (i)↔(iii) Каждой непрерывной мере $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{Z}_p)$ можно поставить в соответствие аддитивную и непрерывную функцию $f[\mu] : \mathfrak{B}(\mathbb{Z}_p) \to \mathbb{R}^+$, определенную на множестве p-адических шаров и на каждом шаре принимающую значение, равное его мере. В силу изоморфизма $\mathfrak{B}(\mathbb{Z}_p) \simeq \mathbb{T}_p$ данная функция переносится на дерево $\mathbb{T}_p$, преобразуясь при этом в функцию из множества $\mathscr{M}(\mathbb{T}_p;\mathbb{R}^+)$. Обратно, каждая такая функция однозначно переносится с дерева p-адических шаров на дерево $\mathbb{T}_p$ и однозначно продолжается до невырожденной меры в

соответствие со стандартной процедурой продолжения меры с элементарных множеств на борелевскую сигма-алгебру всех измеримых множеств в $\mathbb{Z}_p$. (см.[11], гл.V) $\boxtimes$

Заметим, что множества $\mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p;\mathbb{R}^+)$ и $\mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p;\mathbb{R}^+)$ отображаются друг в друга с помощью взаимно обратных операций извлечения корня и возведения в квадрат, поэтому предложение, аналогичное предложению 1.33, справедливо также для квадратично суммируемых мер на кольце $\mathbb{Z}_p$, квадратично интегрируемых на кольце $\mathbb{Z}_p$ функций и квадратично аддитивных функций, определенных на дереве $\mathbb{T}_p$. Забегая вперед, отметим, что каждое из этих множеств находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех деревьев Пифагора, которые мы рассмотрим далее в параграфе 4.6, и которые представляют собой двумерную визуализацию указанных мер.

Предложение 1.33 показывает, что функции из классов $\mathscr{L}^1$ и $\mathscr{L}^2$ представляют собой не столько функции, определенные на множестве $\mathbb{Z}_p$, сколько функции определенные на множестве всех p-адических шаров или на множестве всех измеримых подмножеств в $\mathbb{Z}_p$. Этот вопрос обсуждается более подробно в приложении Б.

II. Двойственность и преобразование Фурье

2.1 Преобразование Фурье и таблица умножения

Преобразование Фурье в его различных формах и вариантах является одним из наиболее продуктивных и семантически насыщенных алгоритмов современной математики: теория дифференциальных уравнений, теория вероятностей, обработка сигналов и изображений, теория функций, теория модулярных форм, теория чисел и криптография - вот далеко не полный список областей, в которых преобразование Фурье находит себе применение. Отметим, что при желании зачатки Фурье анализа можно увидеть уже в система мира Птоломея, в который сложные траектории движения планет на небесном своде рассматривались как комбинации двух круговых движений, порождаемых деферентами и эпициклами. Историю преобразования Фурье (или рядов Фурье, как частного случая) принято отсчитывать от 21 декабря 1807 года, когда Жан-Батист Жозеф Фурье (1768-1830) представил на заседании Парижской академии наук свой доклад «О распространении тепла в твердом теле», в котором изложил метод построения решения уравнения теплопроводности путем разложения этого решения в ряд. В 1822 году вышла книга Фурье «Аналитическая теория теплоты», в которой он изложил метод решения линейных уравнений в частных производных путем представления их в форме тригонометрических рядов ([28]). Историки науки утверждают, что метод эквивалентный быстрому преобразованию Фурье приблизительно в то же время использовал Карл Фридрих Гаусс (1777-1855)([37]). Тому, кто захочет проверить справедливость этого утверждения, предстоит вникнуть в несколько десятков страниц, заполненных сложными тригонометрическими выкладками и комментариями к ним, написанными на латыни. Прекрасное изложение истории зарождения гармонического анализа и его влияния на формирование фундаментального для математики понятия «функции» можно найти в статье Н.Н.Лузина (1983-1950) под название «Функция»([12], том III]).

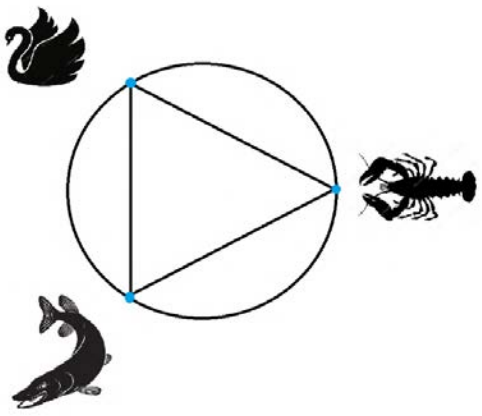


Рисунок 2.1 «Теорема Крылова» о лебеде, раке и щуке. Равенство нулю суммы геометрической прогрессии комплексных корней 3-ей степени из единицы.

Фундаментальный факт, на котором почему-то не акцентируют внимание, состоит в том, что таблица умножения по модулю $\mathfrak{n}$ имеет самое непосредственное отношение к преобразованию Фурье и к понятию ортогональности. Это связано с тем, что как строки, так и столбцы этой таблицы представляют собой арифметические прогрессии, а поточечная сумма по модулю $\mathfrak{n}$ любых двух строк этой таблицы, совпадает с другой ее строкой, и также является арифметической прогрессией. Формула Эйлера $k \to \exp(\pm 2\pi i \cdot k/\mathfrak{n})$ преобразует эти арифметические прогрессии в геометрические, которые состоят из комплексных корней из единицы, то есть из точек, совпадающих с вершинами правильных $\mathfrak{n}$-угольников, вписан-

ных в единичную окружность. Из формулы суммирования геометрической прогрессии

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{\mathfrak{n}-1} = \frac{q^{\mathfrak{n}} - 1}{q - 1}$$

следует, что сумма любых таких прогрессий равна нулю, о чем также повествует знаменитая басня Ивана Андреевича Крылова (1769-1844) о лебеде, раке и щуке, которую можно интерпретировать как равенство нулю суммы геометрической прогрессии, составленной из всех комплексных корней 3-ей степени из единицы.

Если мы обозначим $\xi = \exp(-2\pi i/\mathfrak{n})$, то таблица умножения, перенесенная в комплексную плоскость с помощью функции:

$$\langle k, l \rangle \ \rightarrow \ k \cdot l \ \rightarrow \xi^{k \cdot l} = \exp(-\frac{2\pi i}{\mathfrak{n}} \cdot k \cdot l),$$

принимает вид некоторой матрицы, которая называется матрицей дискретного преобразования Фурье (все арифметические операции выполняются по модулю $\mathfrak{n}$). Мы приведем эту матрицу для случая $\mathfrak{n} = 5$, а также отобразим ее ниже с помощью цветового форматирования для случая $\mathfrak{n} = 4$.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 & \xi^4 \\ 1 & \xi^2 & \xi^4 & \xi^1 & \xi^3 \\ 1 & \xi^3 & \xi^1 & \xi^4 & \xi^2 \\ 1 & \xi^4 & \xi^3 & \xi^2 & \xi^1 \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Учитывая, что преобразование Фурье лежит в основе трансформации светового пучка с помощью линзы, разновидностью которой является хрусталик человеческого глаза, можно сказать, что ***человек видит мир «через таблицу умножения»***. И это вовсе не будет критикой идеологии меркантилизма, а всего лишь констатацией научного факта, - констатацией, которая должна приятно звучать для ушей алгебраистов и специалистов по теории чисел.

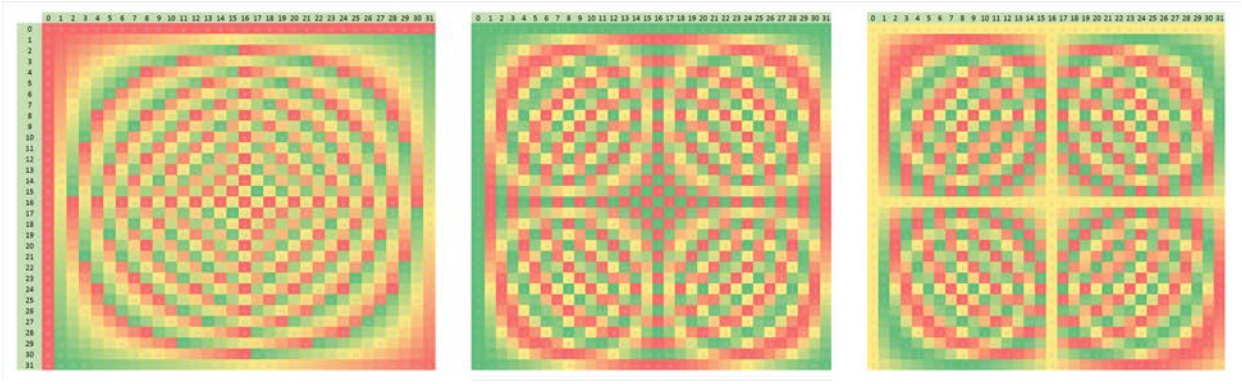


Рисунок 2.2 На рисунке с использованием цветового форматирования изображены слева на право: (i) таблица умножения к кольце вычетов $\mathbb{Z}(32)$; (ii) действительная часть матрицы ДПФ 32x32; (c) мнимая часть матрицы ДПФ 32x32.

В силу сказанного выше строки и столбцы матрицы $\mathbf{F}$ представляют собой геометрические прогрессии, составленные из корней из единицы степени $\mathfrak{n}$. Поточечное умножение $a \cdot \overline{b}$ двух таких различающихся прогрессий, также дает геометрическую прогрессию, поэтому матрица $\mathbf{F}$ является унитарной с точностью до множителя $1/\sqrt{\mathfrak{n}}$:

$$\mathbf{F} \cdot \overline{\mathbf{F}} = \mathfrak{n} \cdot \mathbf{E},$$

$$\overline{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{F}}^T.$$

Матрица $\mathbf{F}$ удовлетворяет также следующим равенствам (показан случай $\mathfrak{n} = 5$):

$$\mathbf{F}^2 = \mathfrak{n} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^4 = \mathfrak{n}^2 \cdot \mathbf{E}.$$

Строки и столбцы матрицы $\mathbf{F}$ имеют другую интересную интерпретацию, связанную с распространением волн в дискретном пространстве. Как мы уже говорили, циклическую группу $\mathbb{Z}(\mathfrak{n})$ (а также ее изоморфные копии $\mathbb{U}(\mathfrak{n})$ и $\mathbb{Q}_{01}(\mathfrak{n})$) можно рассматривать как дискретное замкнутое одномерное пространство. При такой интерпретации комплекснозначные функции, определенные на этой группе, приобретают характер волн, распространяющихся в этом пространстве. Длительная дискуссия о волновой или корпускулярной природе света, которая велась в научном мире, начиная с XVII века, и завершилась созданием в XX веке квантовой механики и квантовой электродинамики, находит свое отражение в дуализме, который существует между элементами группы $\mathbb{Z}(\mathfrak{n})$ и комплексными волнами на этой группе, отражающими в себе ее структуру, то есть обладающих свойствами $\chi(k+l) = \chi(k) \cdot \chi(l)$. Такие функции называются характерами этой группы. Каждому элементу $k \in \mathbb{Z}(\mathfrak{n})$ соответствует дельта функция δ_k, принимающая на этом элементе значение единица и обращающаяся в нуль в других точках, а также гармоническая волна вида $\chi_k : x \to \exp(2\pi i \cdot k \cdot x/\mathfrak{n})$.

□ Отображения $\chi_k : x \to \exp(2\pi i \cdot k \cdot x/\mathfrak{n})$ называются характерами группы $\mathbb{Z}(\mathfrak{n})$. В общем случае характерами абелевой группы $\mathfrak{A}$ называются гомоморфизмы этой группы в мультипликативную групп $\mathbb{U}$ комплексных чисел, по модулю равных единице.

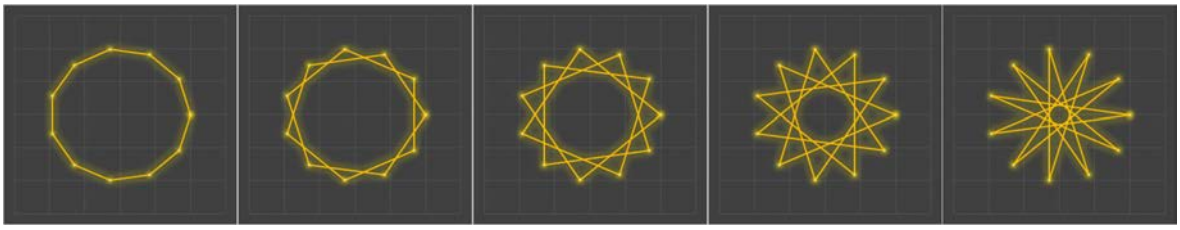


Рисунок 2.3 Образы первых 5 неединичных характеров циклической группы $\mathbb{Z}(11)$, перечисленных слева направо.

Между волнами/характерами и точками/дельта функциями существует естественное отношение дуализма или двойственности. Использование этого дуализма, а также его многочисленных обобщений и следствий, представляет собой основное содержание Фурье анализа.

Симметричная матрица Фурье $\mathbf{F}$ представляет собой полную таблицу характеров группы $\mathbb{Z}(\mathfrak{n})$, последовательно записанных как по стокам, так и по столбцам матрицы. Каждый характер в определенной последовательности обходит вершины правильного многоугольника $\mathbb{U}(\mathfrak{n})$, как это показано на рисунке 2.3.

Матрица $\mathbf{F}$ и ее обратная матрица $\mathbf{F}^{-1} = (1/\mathfrak{n}) \cdot \overline{\mathbf{F}}$ задают два унитарных (с точностью до множителя) отображения, действующих на множестве $\mathfrak{n}$-мерных комплексных векторов или на множестве комплекснозначных функций, определенных на группе $\mathbb{Z}(\mathfrak{n})$.

$$\mathrm{v} = \mathbf{F} \cdot \mathrm{a}, \quad \mathrm{a} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathrm{v}.$$

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 & \xi^4 \\ 1 & \xi^2 & \xi^4 & \xi^1 & \xi^3 \\ 1 & \xi^3 & \xi^1 & \xi^4 & \xi^2 \\ 1 & \xi^4 & \xi^3 & \xi^2 & \xi^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \xi^4 & \xi^3 & \xi^2 & \xi^1 \\ 1 & \xi^3 & \xi^1 & \xi^4 & \xi^2 \\ 1 & \xi^2 & \xi^4 & \xi^1 & \xi^3 \\ 1 & \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 & \xi^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

$$\mathbf{F}_{kl} = \xi^{k \cdot l}, \quad \mathbf{F}^{-1}_{kl} = \frac{1}{\mathfrak{n}} \xi^{\mathfrak{n} - k \cdot l}. \tag{40}$$

Замена переменной $\exp(-2\pi i/\mathfrak{n}) = \xi \to 1/\xi = \exp(2\pi i/\mathfrak{n})$ с точностью до множителя переводит матрицы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}^{-1}$ друг в друга. Как правило, прямое преобразование Фурье определяют исходя из того, что $\xi = \exp(-2\pi i/\mathfrak{n})$. Выбор знака минус объясняется ниже в параграфе 2.2. При этом имеют место следующие соотношения между дельта функциями и гармоническими волнами/характерами, определенными на группе $\mathbb{Z}(\mathfrak{n})$:

$$\delta_k * \delta_l = \delta_{k+l}, \quad \overline{\chi_k} \cdot \overline{\chi_l} = \overline{\chi}_{k+l}, \tag{41}$$

$$\overline{\chi}_k = \chi_{\mathfrak{n}-k}, \tag{42}$$

$$\mathbf{F}[\delta_k] = \chi_k, \quad \mathbf{F}[\chi_k] = \mathfrak{n}\delta_k. \tag{43}$$

В этих формулах все арифметические операции с индексами выполняются по модулю $\mathfrak{n}$. Для того чтобы превратить данное преобразование в унитарное относительно стандартной эрмитовой метрики, нужно умножить характеры на величину $1/\sqrt{\mathfrak{n}}$ и в формулах (39) использовать этот нормировочный коэффициент в обоих преобразованиях.

$$\mathbf{F} : \mathscr{F}(\mathbb{Z}(\mathfrak{n})) \longleftrightarrow \mathscr{F}(\mathbb{Z}(\mathfrak{n})) : \frac{1}{\mathfrak{n}} \cdot \overline{\mathbf{F}} \ , \ \delta_k \longleftrightarrow \chi_k \ , \ \chi_k \longleftrightarrow \mathfrak{n} \cdot \delta_k \ .$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{n}}} \cdot \mathbf{F} : \mathscr{F}(\mathbb{U}(\mathfrak{n})) \longleftrightarrow \mathscr{F}(\mathbb{U}(\mathfrak{n})) : \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{n}}} \cdot \overline{\mathbf{F}} \ , \ \sqrt{\mathfrak{n}} \cdot \delta_k \longleftrightarrow \chi_k \ , \ \chi_k \longleftrightarrow \sqrt{\mathfrak{n}} \cdot \delta_k \ .$$

Наиболее прозрачный смысл преобразование Фурье приобретает, если отождествить векторы a и v соответственно с коэффициентами и со значениями комплексных многочленов степени не выше $\mathfrak{n} - 1$, определенных в вершинах правильного многоугольника $\mathbb{U}(\mathfrak{n})$, вписанного в единичную окружность. Множество таких многочленов представляет собой фактор кольцо кольца многочленов $\mathbb{C}[z]/(z^{\mathfrak{n}} - 1)$, так как многоугольник $\mathbb{U}(\mathfrak{n})$ является циклической группой порядка $\mathfrak{n}$. Данное множество представляет собой очень интересную алгебраическую структуру, так как на нем определены две кольцевые операции умножения:

(1) поточечное умножение, при котором многочлены рассматриваются как функции, определенные в вершинах многоугольника; (2) операция умножения многочленов с учетом соотношения $x^{\mathfrak{n}} = 1$, которая представляет собой циклическую свертку последовательностей их коэффициентов. Очевидно, что формула прямого преобразования Фурье (39) представляет собой вычисление значений многочлена

$$p(x) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{\mathfrak{n}-1} z^{\mathfrak{n}-1}$$

в вершинах правильного многоугольника $\mathbb{U}(\mathfrak{n})$, вписанного в единичный круг, в то время как формула обратного преобразования Фурье, представляет собой частный случай интерполяционной формулы Лагранжа, которая дает метод восстановления коэффициентов многочлена степени не выше $\mathfrak{n}-1$ по его значениям в $\mathfrak{n}$ точках на комплексной плоскости, расположенных в вершинах правильного $\mathfrak{n}$-угольника, вписанного в единичную окружность. Таким образом, в комплексном случае то, что обычно называется дискретным «преобразованием» Фурье, на самом деле представляет собой два различных представления одного и того же объекта, а именно функции $f \in \mathscr{F}(\mathbb{U}(\mathfrak{n}))$ в двух различных структурах. В первом случае функция f представляется набором своих значений в вершинах правильного многоугольника $\mathbb{U}(\mathfrak{n})$, а во втором случае набором коэффициентов соответствующего многочлена $f(z) = \sum_k a_k z^k$. Прямое и обратное преобразование Фурье задают изоморфизмы двух алгебр, при которых поточечное умножение переходит в циклическую свертку и обратно. Каждая из этих алгебр изоморфна прямому произведению $\mathfrak{n}$ экземпляров поля комплексных чисел и представляет собой кольцо факторизованных многочленов, в котором операции поточечного умножения и свертки сливаются в одну и туже операцию, просто в первом случае она применяется к значениям многочлена, а во втором к его коэффициентам. Переход от одного набора значений к другому осуществляется с помощью прямого и обратного преобразования Фурье. Данное преобразование представляет собой частный случай интерполяционной формулы Лагранжа, которая, в свою очередь, является частным случаем китайской теоремы об остатках, описывающей разложение фактор кольца целостного кольца главных идеалов в прямое произведение конечного числа полей. Интерполяционная формула Лагранжа позволяет восстановить многочлен степени не выше $\mathfrak{n}-1$ по его значениям в $\mathfrak{n}$ различных точках.

Предложение 2.1 (Интерполяционная формула Лагранжа) Для любого множества из $\mathfrak{n}$ различных точек комплексной плоскости $\{a_0, a_1, a_2, \ldots.., a_{\mathfrak{n}-1}\}$ и любого набора из $\mathfrak{n}$ комплексных чисел $\{z_0, z_1, z_2, \ldots.., z_{\mathfrak{n}-1}\}$ существует единственный многочлен $f \in \mathbb{C}[z]$ степени не выше $\mathfrak{n}-1$ такой, что $f(a_k) = z_k$ для любого $0 \leqslant k < \mathfrak{n}$. Данный многочлен определяется интерполяционной формулой Лагранжа:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\mathfrak{n}-1} z_i \prod_{j \neq i} (z - a_i)/(a_j - a_i).$$

Предложение 2.2 (теорема о циклической свертке). Прямое преобразование Фурье задает изоморфизм между кольцом факторизованных многочленов $\mathbb{C}[z]/(z^{\mathfrak{n}}-1)$ и кольцом $\mathscr{F}(\mathbb{U}(\mathfrak{n}))$ функций, определенных в вершинах правильного многоугольника $\mathbb{U}(\mathfrak{n})$. Данное кольцо изоморфно прямому произведению $\mathfrak{n}$ экземпляров поля комплексных чисел:

$$\mathbf{F} : \mathbb{C}[z]/(z^{\mathfrak{n}}-1) \to \mathscr{F}(\mathbb{U}(\mathfrak{n})) \cong \underbrace{\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}}_{\mathfrak{n}}. \tag{44}$$

Предложение 2.3 Обратное преобразование Фурье

$$\mathbf{F}^{-1} : \underbrace{\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}}_{\mathfrak{n}} \cong \mathscr{F}(\mathbb{U}(\mathfrak{n})) \to \mathbb{C}[z]/(z^{\mathfrak{n}} - 1),$$

эквивалентно применению к вектору $\langle v_0, v_1, \ldots, v_{\mathfrak{n}-1} \rangle \in \mathscr{F}(\mathbb{U}(\mathfrak{n}))$ и к правильному многоугольнику $\mathbb{U}(\mathfrak{n})$ интерполяционной формуле Лагранжа, позволяющей восстановить коэффициенты многочлена степени не выше $\mathfrak{n} - 1$ по его значениям в $\mathfrak{n}$ различных точках комплексной плоскости.

Доказательство. Из теории коммутативных колец известно, что каждое разложения коммутативного кольца в прямую сумму своих подколец эквивалентно наличию в этом кольце некоторой системы ортогональных идемпотентов в сумме дающих единицу (см. Приложени А). Система ортогональных идемпотентов, соответствующая разложению в прямое произведение полей (44), определяется интерполяционными формулами Лагранжа:

$$e_j(z) = \prod_{i \neq j} (z - \xi_i)/(\xi_j - \xi_i),$$

$$e_i(z) * e_j(z) = \delta_{ij}, \text{ и } \sum_i e_i(z) = 1.$$

Дальнейшее доказательство данных предложений мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Описанная выше интерпретация преобразования Фурье интересна еще тем, что позволяет в одномерном и дискретном варианте «тривиализировать» (точнее сделать очевидной) известную теорему о свертке, которая утверждает, что преобразование Фурье переводит свертку двух функций в их поточечное произведение и обратно. Этот факт играет большую роль сразу в нескольких разделах математики, включая дифференциальные уравнения, теорию вероятности и обработку сигналов. Сама по себе операция свертки имеет важную физическую интерпретацию, связанную с принципом Гюйгенса, который утверждает (говоря несколько неформально), что фронт волнового процесса (то есть множество точек в которых волна имеет одинаковую фазу) на каждом последующем шаге можно получить из предыдущего, если во всех его точках инициировать малую элементарную волну, а затем сложить эти волны между собой. Эта операция по сути дела представляет собой свертку вида

$$W(n+1, x) = \sum_y W(n, y) \cdot w(x - y),$$

где $w(x)$ есть элементарное волновое колебание, а $W(n+1, x)$ и $W(n, x)$ состояния волнового процесса в два последующих дискретных момента времени.

В теории обработки сигналов переход от функции $f \in \mathscr{F}(\mathbb{U}(\mathfrak{n}))$ к ее образу в кольце $\mathbb{C}[z]/(z^{\mathfrak{n}} - 1)$ получил название z-преобразования. z-Преобразование оказывается очень полезным для проектирования линейных фильтров и определения их свойств. Как мы видим, z-преобразование делает очевидной теорему о свертке, так как оно превращает прямое и обратное преобразование Фурье в переход от набора значений многочлена степени $\mathfrak{n}$ в вершинах правильного многоугольника к набору его коэффициентов и обратно. Многие теоремы о рядах и интегралах Фурье, в том числе и наиболее неожиданные из них (как,

например, формула/теорема суммирования Пуассона о равенстве суммы в целочисленных точках значений гладкой и быстро убывающей в обе стороны комплекснозначной функции и аналогичной суммы для ее интегрального преобразования Фурье) могут быть получены из дискретного преобразования Фурье путем предельного перехода с соответствующим разбиением пространственной и частотной областей. Например, заменив функции, определенные на дискретной группе $\mathbb{Z}(\mathfrak{n})$, их аналитическими эквивалентами, определенными на окружности единичного радиуса $\mathbb{S}^1$, а сумму интегралом Римана, мы получим взаимную ортогональность функций вида $\phi_n(x) = \exp(2\pi i n x)$, являющихся собственными функциями оператора циклического сдвига и характерами топологической группы $\mathbb{S}^1$, и вытекающую из этой ортогональности теорию рядов Фурье. Описанное в этом параграфе дискретное преобразования Фурье является реализацией более общей конструкции, в основе которой также лежит некоторая таблица умножения, но в данном случае умножаются элементы двух различных абелевых групп, а результатом этого умножения является комплексное число по модулю равное единице. Мы рассмотрим эту конструкцию в следующем параграфе.

2.2 Двойственность Понтрягина

Теория локально компактных абелевых групп была разработана в 30-ые годы прошлого века советским математиком Л.С.Понтрягиным (1908-1988) и была им изложена в ряде статей и в фундаментальной книге «Непрерывные группы»([15]). Одним из основных результатов этой теории было доказательство теоремы двойственности, которая определяет соотношение между локально компактной абелевой группой и группой ее характеров. В настоящей главе мы детально рассмотрим один частный случай двойственности, который имеет непосредственное отношение к теории p-адических чисел. Перед тем как перейти к описанию этой конструкции, дадим насколько определений.

Определение. Группа $\mathfrak{A}$ с заданной на ней топологией называется топологической группой, если групповая операция, а также операция взятия обратного/противоположного элемента являются непрерывными относительно данной топологии. Топологическая группа называется локально компактной, если у ее нейтрального элемента существует компактная окрестность.

Определение характеров. Пусть $\mathfrak{A}$ есть локально компактная абелева группа. Характером группы $\mathfrak{A}$ называется непрерывный гомоморфизм $f : \mathfrak{A} \to \mathbb{U}$ данной группу в мультипликативную группу комплексных чисел, по модулю равных единице. Множество характеров группы $\mathfrak{A}$ обозначается символом $\mathfrak{A}^*$. Умножение характеров друг на друга превращает множество $\mathfrak{A}^*$ в абелеву группу. На множестве $\mathfrak{A}^*$ естественным образом задается топология, определяемая окрестностями единицы вида (K, ε), состоящими их характеров, отображающих компактные подмножества $K \subseteq \mathfrak{A}$ в замкнутые ε-окрестности единицы в группе $\mathbb{U}$ (см.[15], глава 6).

Если $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{C}^* \cong \mathfrak{A}^* \oplus \mathfrak{B}^*$, что следует из того факте, что каждый характер группы $\mathfrak{C}$ однозначно определяется своими ограничениями на подгруппы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Очевидно, что для циклической группы имеет место изоморфизм $\mathbb{Z}(\mathfrak{n})^* \cong \mathbb{Z}(\mathfrak{n})$. Поскольку конечная абелева группа является прямой суммой циклических групп, из этих соотношений следует, что если группа $\mathfrak{A}$ конечна, то $\mathfrak{A}^* \cong \mathfrak{A}$. В случае абстрактных конечных групп между группами $\mathfrak{A}$ и

$\mathfrak{A}^*$ нет канонического взаимно однозначного соответствия, и данное соответствие зависит от выбора образующих элементов. В случае конкретных конечных групп типа $\mathbb{Z}(\mathfrak{n})$, $\mathbb{U}(\mathfrak{n})$ и $\mathbb{Q}_{01}(\mathfrak{n})$, а также их производных, которые только и рассматриваются в настоящей книге, такое соответствие всегда существует. Например, в случае группы $\mathbb{Z}(\mathfrak{n})$ такое соответствие задается отображением $k \to \chi_k$, описанным в предыдущем параграфе. Отображение

$$\langle *, * \rangle : \mathfrak{A}^* \times \mathfrak{A} \to \mathbb{U}, \quad \langle a^*, a \rangle = a^*(a),$$

рассматриваемое по одной координате при фиксированной другой, является гоморфизмом групп. Этот факт позволяет интерпретировать каждую из групп $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^*$ как множество характеров другой. Данное соотношение является частным случаем более общей конструкции, которая позволяет определить отношение двойственности для локально компактных абелевых групп.

□ Будем называть отображение $\phi : \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathbb{U}$ прямого произведение двух абелевых групп $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в мультипликативную группу комплексных единиц $\mathbb{U}$ билинейным, если ограничения этого отображения на каждую из координат $\phi(a, *)$ и $\phi(*, b)$ являются гомоморфизмами абелевых групп. Далее будем обозначать такие отображения символом $\langle a, b \rangle = \phi(a, b)$ по аналогии со скалярным произведением в теории векторных пространств.

Источником большинства билинейных отображений являются таблицы умножения различного вида. Примером такого рода является билинейное отображение:

$$\mathbb{Q}_{01}(p^n) \times \mathbb{Z}(p^n) \to \mathbb{U}(p^n) \subset \mathbb{U}, \tag{45}$$

$$\langle \frac{k}{p^n}, l \rangle \to \exp(\frac{2\pi i \cdot k \cdot l}{p^n}), \tag{46}$$

матрица которого совпадает с матрицей дискретного преобразования Фурье. Все три группы, входящие в отображение (45), является изоморфными, поэтому их можно заменить одну на другую, внеся соответствующие изменения в формулу отображения. Например, вариант

$$\mathbb{Z}(p^n) \times \mathbb{Z}(p^n) \to \mathbb{Z}(p^n), \quad \langle k, l \rangle \to k \cdot l \bmod p^n,$$

лучше подходит для демонстрации аналогии с таблицей умножения, а вариант

$$\mathbb{Q}_{01}(p^n) \times \mathbb{Z}(p^n) \to \mathbb{Q}_{01}(p^n), \quad \langle k/p^n, l \rangle \to (k \cdot l/p^n) \bmod 1,$$

показывает, что все эндоморфизмы группы $\mathbb{Q}_{01}(p^n)$ представляют собой умножение на число $l \in \mathbb{Z}(p^n)$ и кольцо эндоморфизмов абелевой группы $\mathbb{Q}_{01}(p^n)$ изоморфно кольцу вычетов $\mathbb{Z}(p^n)$. Отображение (45) показывает, что между абелевыми группами $\mathbb{Q}_{01}(p^n)$ и $\mathbb{Z}(p^n)$ существует отношение двойственности, аналогичное тому, которое имеет место между векторным пространством и пространством определенных на нем линейных форм. Данное соотношение двойственности переносится из области абелевых групп в область определенных на этих группах функций и принимает вид одного из самых фундаментальных преобразований математики - преобразования Фурье.

□ Две топологические абелевы группы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называются *двойственными* друг другу относительно билинейного отображения:

$$\langle *, * \rangle : \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \to \mathbb{U} \subset \mathbb{C},$$

если отображения $a \to \langle a, * \rangle$ и $b \to \langle *, b \rangle$ являются изоморфизмами топологических групп $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}^*$ и $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A}^*$ соответственно.

Теорема двойственности Понтрягина (см. [15], Глава 6, §37) утверждает, что каждая локально компактная абелева группа $\mathfrak{A}$ является двойственной со своей группой характеров $\mathfrak{A}^*$ относительно билинейного отображение $\langle a, a^* \rangle = a^*(a)$. Из этой теоремы следует, что любой из упомянутых в определении двойственности изоморфизмов, является следствием другого.

Соотношения (45) и (46) показывают, что группы $\mathbb{Q}_{01}(p^n)$ и $\mathbb{Z}(p^n)$ связаны между собой отношением двойственности. Наша основная задача в этом параграфе будет состоять в том, чтобы доказать двойственность группы $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ и аддитивной группы целых p-адических чисел. В основе этой двойственности также лежит операция умножения вида:

$$q = \sum_{k=0}^{n} q_k/p^k, \quad z = \sum_{k=0}^{\infty} z_k p^k$$

$$\langle q, z \rangle \to z(q) = \{z \cdot q\}.$$

где $\{*\}$ есть дробная часть p-адического числа, а операция $z(q)$ означает применение к элементу q соответствующего эндоморфизма группы $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$, который представлен p-адическим числом z. Данную операцию можно интерпретировать как перемножение двух указанных выше p-адических чисел с последующим отбрасыванием всех членов, соответствующих неотрицательным степеням p, то есть с последующим взятием дробной части и с использованием изоморфизма групп $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty) \simeq \mathbb{U}(p^\infty)$.

Для доказательства указанной выше двойственности изучим строение замкнутых подгрупп аддитивной группы $\mathbb{Z}_p$. Очевидно, что идеалы (p^k), будучи шарами, образуют цепочку вложенных друг в друга замкнутых подгрупп аддитивной группы $\mathbb{Z}_p$. Покажем, что в аддитивной группе $\mathbb{Z}_p$ нет других замкнутых подгрупп.

Лемма 2.4 Каждая замкнутая в p-адической топологии подгруппа аддитивной группы $\mathbb{Z}_p$ совпадает с одним из идеалов (p^k).

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ есть аддитивная подгруппа в $\mathbb{Z}_p$, замкнутая в p-адической топологии. Покажем, что принадлежность $p^k \cdot u \in \mathfrak{A}$, где u есть обратимый элемент кольца $\mathbb{Z}_p$, влечет за собой включение $(p^k) \subseteq \mathfrak{A}$. Из этого будет следовать, что $\mathfrak{A}$ совпадает с идеалом (p^k), где k есть минимальный показатель степени, при котором в подгруппе $\mathfrak{A}$ существует элемент вида $p^k \cdot u$, где $u \in \mathbb{U}$. Пусть $p^k \cdot u \in \mathfrak{A}$ и $u \in \mathbb{U}$. Поскольку $u \in \mathbb{U}$, то для любого $n > k$ найдется натуральное число v_n такое, что $u \cdot v_n = 1 \mod p^n$. Следовательно, $p^k \cdot u \cdot v_n = p^k \mod p^n$. Данное условие означает, что $\|p^k \cdot u \cdot v_n - p^k\| < 1/p^n$. Отсюда можно заключить, что последовательность $\{p^k \cdot u \cdot v_n\}$ сходится к числу p^k в p-адической метрике. В силу замкнутости подгруппы $\mathfrak{A}$ это означает, что $p^k \in \mathfrak{A}$. Это в свою очередь влечет принадлежность $n \cdot p^k \in \mathfrak{A}$, для любого натурального n. Поскольку множество элементов $\{n \cdot p^k\}$ всюду плотно в множестве (p^k), из этого следует включение $(p^k) \subseteq \mathfrak{A}$, что и требовалось доказать. $\boxtimes$

Предложение 2.5 Аддитивные топологические абелевы группы $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ и $\mathbb{Z}_p$, где группа $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ рассматривается с дискретной топологией, а группа $\mathbb{Z}_p$ с p-адической топологией, являются двойственными друг к другу относительно отображения:

$$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Q}_{01}(p^\infty) \to \mathbb{U}, \tag{47}$$
$$\langle q, z\rangle \to \exp(2\pi i \cdot \{z \cdot q\}).$$

Доказательство. Нетривиальная часть доказательства данного предложения сводится к доказательству того, что каждый характер группы $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ имеет вид $\langle z, *\rangle$ для некоторого $z \in \mathbb{Z}_p$, и каждый характер группы $\mathbb{Z}_p$ имеет вид $\langle *, q\rangle$ для некоторого $q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$. Рассмотрим следующую диаграмму гомоморфизмов абелевых групп:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{Q}_{01}(p^1) & \xrightarrow{i_1} & \mathbb{Q}_{01}(p^2) & \xrightarrow{i_2} & \mathbb{Q}_{01}(p^3) & \xrightarrow{i_3} & \cdots & \xrightarrow{i_k} & \mathbb{Q}_{01}(p^\infty) & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{U} \\
\times\downarrow\uparrow & & \times\downarrow\uparrow & & \times\downarrow\uparrow & & & & \times\downarrow\uparrow & & =\downarrow\uparrow \\
\mathbb{Z}(p^1) & \xleftarrow{\pi_1} & \mathbb{Z}(p^2) & \xleftarrow{\pi_2} & \mathbb{Z}(p^3) & \xleftarrow{\pi_3} & \cdots & \xleftarrow{\varrho_k} & \mathbb{Z}_p & \xrightarrow[\chi^*]{} & \mathbb{U}
\end{array} \tag{48}$$

Цепочка вложений групп (48) индуцирует обратную цепочку отображений групп характеров

$$\widehat{\pi}_k : \mathbb{Q}^*_{01}(p^{k+1}) \to \mathbb{Q}^*_{01}(p^k), \quad \widehat{\pi}_k(\psi) = \psi \circ i_k, \quad \psi \in \mathbb{Q}^*_{01}(p^{k+1}).$$

Пусть χ есть некоторый характер абелевой группы $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$. Рассмотрим его ограничения на конечные циклические подгруппы $\mathbb{Q}_{01}(p^k)$. Каждое такое ограничение имеет вид

$$\widehat{n}_k(a/p^k) = \exp(2\pi i \cdot n_k \cdot a/p^k), \quad n_k \in \mathbb{Z}(p^k).$$

Кроме того имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Q}_{01}(p^k) & \xrightarrow{i_k} & \mathbb{Q}_{01}(p^{k+1}) & \xrightarrow{i} & \mathbb{Q}_{01}(p^\infty) \\
& {\scriptstyle \widehat{n}_k}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \widehat{n}_{k+1}} & \swarrow{\scriptstyle \chi} & \\
& & \mathbb{U} & &
\end{array}$$

Условие $\widehat{n}_{k+1} \circ i_k = \widehat{n}_k$ эквивалентно условиям

$$(n_{k+1} - n_k) \cdot \frac{a}{p^k} = 0 \bmod 1, \quad \leftrightarrow \quad n_{k+1} - n_k = 0 \bmod p^k,$$

которые показывают, что $\pi_k(n_{k+1}) = n_k$, и что последовательность $\{n_k\}$ определяет некоторое p-адическое число $z \in \mathbb{Z}_p$, которое соответствует характеру χ. Легко проверить, что имеет место соотношение

$$\chi(q) = \exp(2\pi i \cdot \{q \cdot z\}) = \langle q, z\rangle.$$

Пусть χ есть некоторый непрерывный характер абелевой группы $\mathbb{Z}_p$. Его ядро является замкнутой подгруппой в $\mathbb{Z}_p$ и согласно лемме 2.4 совпадает с одним из идеалов/подгрупп (p^k). Это означает, что характер χ пропускается через группу $\mathbb{Z}(p^k)$ в цепочке (48), то есть $\chi = \chi_k \circ \varrho_k$.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z}_p & \xrightarrow{\varrho_k} & \mathbb{Z}(p^k) & \xleftrightarrow{\times} & \mathbb{Q}_{01}(p^k) \\
& {\scriptstyle \chi}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \chi_k} & \swarrow{\scriptstyle \langle *, q\rangle} & \\
& & \mathbb{U} & &
\end{array}$$

Поэтому для любого элемента $z \in \mathbb{Z}_p$ справедливы следующие соотношения, в которых число $\varrho_k(z)$ можно одновременно трактовать как элемент кольца вычетов $\mathbb{Z}(p^k)$ и как начальный отрезок p-адического разложения числа z, включающий его младшие k разрядов:

$$z = \varrho_k(z) + h, \quad h \in (p^k),$$

$$\chi(z) = \chi_k(\varrho_k(z)) = \langle \varrho_k(z), q \rangle, \quad q \in \mathbb{Q}_{01}(p^k),$$

$$\langle z, q \rangle = \langle \varrho_k(z) + h, q \rangle = \langle \varrho_k(z), q \rangle \cdot \langle h, q \rangle = \langle \varrho_k(z), q \rangle,$$

так как $\langle h, q \rangle = 1$. Следовательно, $\chi(z) = \langle z, q \rangle \boxtimes$.

Изложенная выше теория двойственности позволяет внести полную ясность в вопрос о нормировочных коэффициентах в формулах для дискретного преобразования Фурье и привязать два возможных случая такого нормирования к двумя таблицами умножения (49,50), в которых участвуют группы $\mathbb{Q}_{01}(p^n)$ и $\mathbb{Z}(p^n)$, связанные отношением двойственности. На функциональных пространствах $\mathscr{F}(\mathbb{Q}_{01}(p^n))$ и $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^n))$ определены соответственно две нормы

$$\|x\|_2 = (\sum_{i=0}^{p^n-1} x_i^2)^{1/2} \qquad \|x\|_2' = \frac{1}{\sqrt{p^n}} (\sum_{i=0}^{p^n-1} x_i^2)^{1/2} = (\int x(i)^2 d\mu)^{1/2}.$$

Каждая из этих норм может быть интерпретирована в духе замены суммы на интеграл по конечному множеству, мера одной точки которого равна единице, в случае группы $\mathbb{Q}_{01}(p^n)$, и равна $1/p^n$ в случае группы $\mathbb{Z}(p^n)$. В соответствие с этим возникают два способа нормирования преобразования Фурье, которые показаны ниже. В первом случае это преобразование является сохраняющим норму изоморфизмом двух комплексных евклидовых пространств, а во втором - просто унитарным оператором:

$$\mathbb{Q}_{01}(p^n) \times \mathbb{Z}(p^n) \to \mathbb{U},$$

$$\langle k/p^n, l \rangle \to \exp(-2\pi i \cdot k \cdot l/p^n). \tag{49}$$

$$\mathbf{F} : \langle \mathbb{Q}_{01}(p^n), \| * \|_2 \rangle \quad \rightleftarrows \quad \langle \mathbb{Z}(p^n), \| * \|_2' \rangle : (1/p^n) \cdot \overline{\mathbf{F}}.$$

$$\mathbb{Z}(p^n) \times \mathbb{Z}(p^n) \to \mathbb{U},$$

$$\langle k, l \rangle \to \exp(-2\pi i \cdot k \cdot l/p^n). \tag{50}$$

$$\sqrt{1/p^n} \cdot \mathbf{F} : \langle \mathbb{Z}(p^n), \| * \|_2' \rangle \quad \rightleftarrows \quad \langle \mathbb{Z}(p^n), \| * \|_2' \rangle : \sqrt{1/p^n} \cdot \overline{\mathbf{F}}.$$

Очевидно, что число p^n в этих формулах можно заменить на любое натуральное число $m \geqslant 2$. Перейдем к рассмотрению преобразования Фурье на бесконечных группах $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$.

2.3 Преобразование Фурье на группах $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$

Определение преобразования Фурье. Рассмотрим две функции f и g, определенные на двойственных друг другу группах $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$:

$$f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}, \quad g : \mathbb{Q}_{01}(p^\infty) \to \mathbb{C}.$$

Прямое и обратное преобразование Фурье функций, определенных на этих группах определяется следующим образом:

$$\mathbf{F}_{\mathfrak{z}}[f](q) = \int_{\mathbb{Z}_p} \overline{\langle q, z\rangle} f(z) d\mu, \quad \mathbf{F}_{\mathfrak{q}}[g](z) = \sum_q \overline{\langle z, q\rangle} g(q). \tag{51}$$

$$\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{z}}[f](q) = \int_{\mathbb{Z}_p} \langle q, z\rangle f(z) d\mu, \quad \overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{q}}[g](z) = \sum_q \langle z, q\rangle g(q). \tag{52}$$

Операция комплексного сопряжения в формулах (51) соответствует выбору знака минус в формуле для переменной ξ в матрице (38) прямого дискретного преобразования Фурье. Знак минус выбирается для того, чтобы прямое преобразование Фурье переводило характеры в дельта функции с теми же индексами. В случае знака плюс это условие не выполняется. При подходящем определении классов функций, на которых действуют эти преобразования, между ними имеют место следующие соотношения:

$$\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{z}} \circ \mathbf{F}_{\mathfrak{q}} = \mathbf{F}_{\mathfrak{z}} \circ \overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{q}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{q}}, \qquad \overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{q}} \circ \mathbf{F}_{\mathfrak{z}} = \mathbf{F}_{\mathfrak{q}} \circ \overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{z}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{z}}.$$

$$\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{q}}[f] = \overline{\mathbf{F}_{\mathfrak{q}}[\overline{f}]}, \qquad \overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{z}}[f] = \overline{\mathbf{F}_{\mathfrak{z}}[\overline{f}]}.$$

Для того, чтобы корректно определить указанные преобразования, нужно определить функциональные пространства, для которых данные преобразования имеют смысл. Для этого рассмотрим следующую цепочку функциональных пространств, состоящих из комплекснозначных функций, определенных на группе $\mathbb{Z}_p$:

$$\langle\text{финитные функции}\rangle \to \langle\text{непрерывные функции}\rangle \to$$

$$\to \langle\text{квадратично интегрируемые функции}\rangle \to \langle\text{абсолютно интегрируемые функции}\rangle,$$

$$\mathscr{C}_0(\mathbb{Z}_p;\mathbb{C}) \ \to \ \mathscr{C}(\mathbb{Z}_p;\mathbb{C}) \ \to \ \mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p;\mathbb{C}) \ \to \ \mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p;\mathbb{C}).$$

Необходимо определить, какими свойствами должны обладать функции f и g, чтобы формулы преобразования Фурье имели для них смысл. Применительно к функции g этот вопрос сводится к суммированию рядов. Формула для функции f требует применения теории интегрирования на кольце $\mathbb{Z}_p$, которую мы описали в предыдущей главе. Также как и в случае теории интегрирования мы построим преобразования Фурье с помощью предельного перехода и с помощью финитных функций и покажем, что пары операторов $\{\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{q}}, \mathbf{F}_{\mathfrak{z}}\}$ и $\{\mathbf{F}_{\mathfrak{q}}, \overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{z}}\}$ являются парами взаимно обратных унитарных операторов, отображающих гильбертовы пространства $\mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty))$ и $\mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p)$ друг в друга. Как мы видели выше, стандартная цепочка гомоморфизмов колец вычетов индуцирует цепочку вложений соответствующих колец функций. Индуктивный предел этой цепочки совпадает с кольцом финитных функций, определенных на кольце $\mathbb{Z}_p$. Аналогичным образом стандартная цепочка вложений абелевых групп p-ично рациональных чисел индуцирует цепочку вложений функциональных пространств, состоящих из определенных на этих группах функций. Индуктивный предел этой цепочки совпадает с кольцом финитных функций, определенных на группе $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$. Преобразования Фурье определяются с помощью этих двух цепочек посредством двух предельных переходов, как это описано в следующем предложении.

Предложение 2.6 Рассмотрим следующие цепочки комплексных евклидовых пространств финитных функций:

$$\mathscr{F}(\mathbb{Q}_{01}(p^1)) \xrightarrow{j_1} \mathscr{F}(\mathbb{Q}_{01}(p^2)) \xrightarrow{j_2} \mathscr{F}(\mathbb{Q}_{01}(p^3)) \xrightarrow{j_3} \cdots \xrightarrow{j_k} \mathscr{F}_0(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)) \tag{53}$$

и

$$\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^1)) \xrightarrow{i_1} \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^2)) \xrightarrow{i_2} \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^3)) \xrightarrow{i_3} \cdots \xrightarrow{i_k} \mathscr{F}_0(\mathbb{Z}_p) \ , \tag{54}$$

где на всех пространствах задано эрмитово скалярное произведение, а на пространстве $\mathbb{Z}_p$ задана p-адическая мера. Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) Пары операторов Фурье $\{\mathbf{F}_\mathfrak{q}, \overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{z}\}$ и $\{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{q}, \mathbf{F}_\mathfrak{z}\}$, определенных на подпространствах финитных функций, образуют две пары взаимно обратных унитарных операторов, отображающих пространства финитных функций $\mathscr{F}(\mathbb{Q}_{01}(p^k))$ и $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^k))$ друг в друга;

(ii) При отождествлении пространств финитных функций $\mathscr{F}(\mathbb{Q}_{01}(p^k))$ и $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^k))$ с пространствами функций, определенных на соответствующих конечных абелевых группах, пары операторов $\{\mathbf{F}_\mathfrak{q}, \overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{z}\}$ и $\{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{q}, \mathbf{F}_\mathfrak{z}\}$ превращаются в операторы прямого и обратного дискретного преобразования Фурье (ДПФ) с нормировочными коэффициентами соответственно 1 и $1/p^k$ соответственно;

(iii) Множество функций δ_q, где $q \in \mathbb{Q}_{01}(p^k)$ является ортонормированным базисом пространства $\mathscr{F}(\mathbb{Q}_{01}(p^k))$;

(iv) Множество функций $\chi_q = \langle q, * \rangle$, где $q \in \mathbb{Q}_{01}(p^k)$ является ортонормированным базисом пространства $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^k))$;

(v) Имеют место следующие соотношения:

$$\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{q}[\delta_q] = \chi_q = \langle q, * \rangle, \quad \mathbf{F}_\mathfrak{z}[\chi_q] = \delta_q;$$

(vi) Пары операторов Фурье $\{\mathbf{F}_\mathfrak{q}, \overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{z}\}$ и $\{\overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{q}, \mathbf{F}_\mathfrak{z}\}$ естественным образом продолжаются с подпространств финитных функций ранга $k \in \mathbb{N}$ на пространства финитных функций $\mathscr{F}_0(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty))$ и $\mathscr{F}_0(\mathbb{Z}_p)$.

(vii) С функциональных пространств финитных функций $\mathscr{F}_0(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty))$ и $\mathscr{F}_0(\mathbb{Z}_p)$ операторы Фурье естественным образом продолжаются на функциональные пространства $\mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty))$ и $\mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p)$ квадратично интегрируемых функций, которые являются пополнением/замыканием пространств финитных функций относительно нормы $\|*\|_2$.

(viii) Имеют место следующие коммутативные диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathscr{F}(\mathbb{Q}_{01}(p^1)) & \xrightarrow{j_1} & \mathscr{F}(\mathbb{Q}_{01}(p^2)) & \xrightarrow{j_2} & \mathscr{F}(\mathbb{Q}_{01}(p^3)) & \xrightarrow{j_3} & \cdots & \xrightarrow{j_k} & \mathscr{F}_0(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)) \\
\mathbf{F}_\mathfrak{z} \big\uparrow \overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{q} & & \mathbf{F}_\mathfrak{z} \big\uparrow \overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{q} & & \mathbf{F}_\mathfrak{z} \big\uparrow \overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{q} & & & & \mathbf{F}_\mathfrak{z} \big\uparrow \overline{\mathbf{F}}_\mathfrak{q} \\
\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^1)) & \xrightarrow{i_1} & \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^2)) & \xrightarrow{i_2} & \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^3)) & \xrightarrow{i_3} & \cdots & \xrightarrow{i_k} & \mathscr{F}_0(\mathbb{Z}_p)
\end{array} \ , \tag{55}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}_0(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)) & \xrightarrow{\ i\ } & \mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)) \\ \mathbf{F}_{\mathfrak{z}} \updownarrow \overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{q}} & & \mathbf{F}_{\mathfrak{z}} \updownarrow \overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{q}} \\ \mathscr{F}_0(\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\ i\ } & \mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p) \end{array}, \tag{56}$$

на которых $\mathbf{F}_{\mathfrak{z}}$ и $\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{q}}$ представляют собой пары взаимно обратных унитарных операторов, действующих в гильбертовых пространствах.

$$\mathbf{F}_{\mathfrak{z}} \circ \overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{q}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{q}}, \quad \overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{q}} \circ \mathbf{F}_{\mathfrak{z}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{z}}.$$

(ix) Аналогичные коммутативные диаграммы имеют место для пары операторов $\{\mathbf{F}_{\mathfrak{q}}, \overline{\mathbf{F}_{\mathfrak{z}}}\}$.

Доказательство. Первые четыре пунктов данного предложения вытекают из свойств дискретного преобразования Фурье, определенного для функций, заданных на взаимно дуальных группах $\mathbb{Q}_{01}(p^n)$ и $\mathbb{Z}(p^n)$. Пункт (v) проверяется непосредственным вычислением:

$$\mathbf{F}_{\mathfrak{z}}[\chi_q](r) = \int_{\mathbb{Z}_p} \overline{\langle r, z\rangle}\chi_q(z)dz = \int_{\mathbb{Z}_p} \overline{\langle r, z\rangle}\langle q, z\rangle dz = \int_{\mathbb{Z}_p} \langle q - r, z\rangle dz = \delta_q(r).$$

$$\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{q}}[\delta_q](z) = \sum_{r\in\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)} \langle z, r\rangle\delta_q(r) = \langle z, q\rangle = \langle q, z\rangle = \chi_q(z).$$

С пространств функций, определенных на этих группах, преобразования $\mathbf{F}_{\mathfrak{q}}$ и $\mathbf{F}_{\mathfrak{z}}$, а также их обратные преобразования, продолжаются до унитарных операторов, действующих на пространствах финитных функций $\mathscr{F}_0(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty))$ и $\mathscr{F}_0(\mathbb{Z}_p)$. С пространств финитных функций преобразования Фурье по непрерывности распространяются на пространства $\mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty))$ и $\mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p)$, которые являются их замыканиями. ⊠

III. Инверсное преобразование и p-адические спектры рядов

3.1 Инверсное преобразование

На каждом корневом дереве можно задать две противоположные ориентации ребер, одна из них направлена от корня дерева к его вершинам, а вторая, наоборот, от вершин к корню. Если рассматривать конечное дерево как некоторую систему каналов, по которым происходит распространение субстанции, энергии или информации, то этим двум ориентациям соответствует два противоположных направления от корня/центра к периферии и обратно. Далее мы покажем, что асимметрии в этом распределении кодируются дискретными вейвлетами Хаара, при этом оба эти процесса метафорически могут быть интерпретированы как диффузия. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

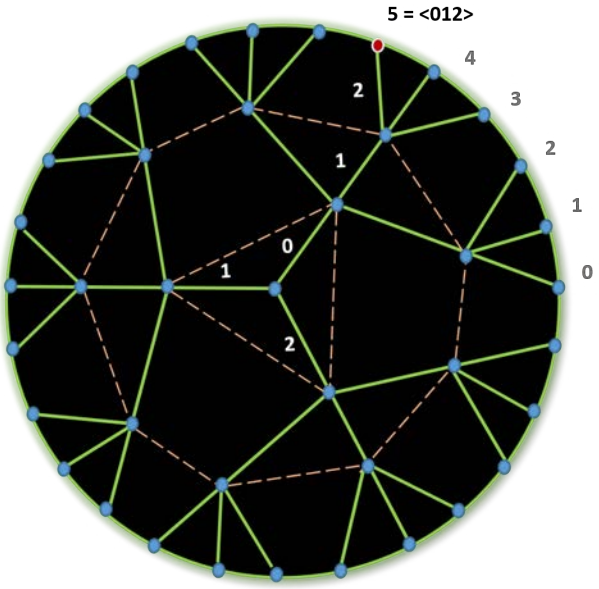


Рисунок 3.1 Схема триадического деления. Инверсное отображение: число $21 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 9$, заданное в троичном представлении, преобразуется в число $5 = 0 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1$.

Многие биологические процессы представляют собой доставку некоторой субстанции конечному числу реципиентов через коммуникационную сеть каналов, организованную в виде дерева. Предположим, что максимальная степень ветвления этого дерева равна p, а максимальное количество уровней равно $L + 1$. Тогда максимальное количество путей по такому дереву равно максимальному количеству реципиентов и равно p^L. Каждый такой путь может быть закодирован последовательностью $\langle a_0, a_2, \ldots, a_{L-1} \rangle$, состоящей из L элементов кольца вычетов $\mathbb{Z}(p)$, которую можно интерпретировать как p-адическое число $a = \sum_{i=0}^{L-1} a_i p^i$. Таким образом, p-адическая арифметика позволяет интерпретировать пути распространения субстанции, энергии или информации внутри биологического организма как числа. При этом близость путей (то есть их совпадение в начальных разрядах) соответствует близости чисел в p-адической метрике. В отличие от обычного представления натурального числа в позиционной системе счисления, где младший разряд выражает собой наименьшие изменения количества, в p-адической арифметике младший разряд представляет собой наивысший уровень иерархии, а порядок разрядов отражает близость к источнику

распределения. При этом возникает задача такой кодировки множества реципиентов, при которой пространственная близость реципиентов соответствовала бы близости ведущих к ним путей. Эта задача решается инверсным отображением **Inv**, которое меняет порядок разрядов в представлении числа на противоположный по принципу

$$\mathbf{Inv} : \mathbb{Z}(p^L) \to \mathbb{Z}(p^L),$$

$$\langle a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{L-1} \rangle \to \langle a_{L-1}, a_{L-2}, \ldots, a_1, a_0 \rangle.$$

В более общем случае это отображение известно как ***Monna mapping***([51]). При фиксированном L инверсное отображение хорошо иллюстрируется показанной на рисунке 3.1 круговой диаграммой, на которой натуральные числа, являющиеся кодами реципиентов, последовательно наносятся на круг, а дерево, по которому происходит распространение субстанции, энергии или информации помещается в его середине.

Инверсное отображение имеет одно важное свойство, состоящее в том, что оно отображает друг в друга p-адические шары (= смежные классы по всем циклическим подгруппам = правильные многоугольники) и последовательно идущие блоки чисел, состоящие из p^k элементов. Мы покажем это ниже для общего случая смешанной позиционной системы.

Естественным обобщение позиционной системы счисления является позиционная система счисления со смешанным основанием. Такая система задается последовательностью из n натуральных чисел больших единицы:

$$\mathfrak{P} = \{\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}\}.$$

В такой позиционной системе каждое натуральное число $m < \mathfrak{q} = \prod_{i=0}^{n-1} \mathfrak{p}_i$ однозначно представляется в виде:

$$m = m_0 + m_1 \cdot \mathfrak{p}_0 + m_2 \cdot \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_0 + \cdots + m_{n-1} \cdot \mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_{n-2}, \quad \text{где} \quad m_i < \mathfrak{p}_i.$$

и однозначно определяется последовательностью своих разрядов

$$m = \{m_0, m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}\},$$

алгоритм вычисления которых совпадает с алгоритмом вычисления разрядов числа в обычной позиционной системе счисления. На нулевом шаге алгоритма число m записывается в регистр r, а затем последовательно n раз выполняется операция $m_i = r \mod \mathfrak{p}_i,\ r = r/\mathfrak{p}_i$. С числами, заданными своим поразрядным представлением в смешанной позиционной системе счисления, можно совершать операции сложения и вычитания с переносом в старший разряд по полной аналогии с тем, как эти операции выполняются в p-адической арифметике. Также как и в случае позиционной системы счисления с основанием p, существует инверсное соотношение

$$m = \langle m_0, m_1, m_2, \ldots, m_{n-1} \rangle \to \langle m_{n-1}, \ldots, m_2, m_1, m_0 \rangle = \mathbf{Inv}(m)$$

между разрядным представлением числа m, которое интерпретируется, как номер вершины правильного $\mathfrak{n}$-угольника, вписанного в единичную окружность, и кодировкой пути на $n+1$-уровневом корневом дереве, который ведет из корня дерева к соответствующей вершине многоугольника. Детали этого соответствия показаны на рисунке 3.1. Многоугольник

выбран для удобства визуализации, а также для представления внутренних симметрий группы $\mathbb{Z}(\mathfrak{q})$ поворотами на углы кратные $2\pi/d$, где d есть некоторый делитель числа $\mathfrak{n}$.

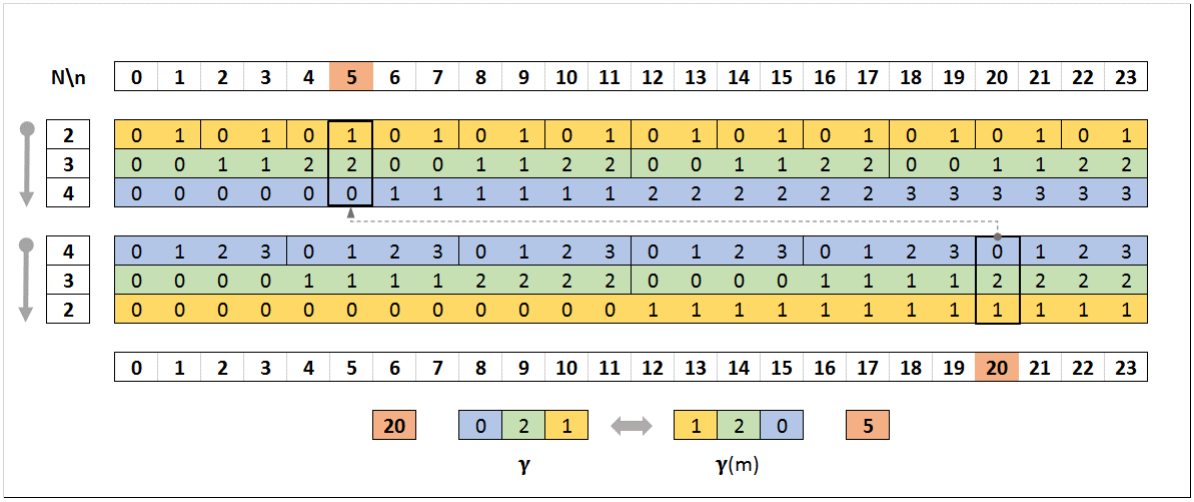


Рисунок 3.2 Таблица инверсного отображения для последовательности $\mathfrak{P} = \{2, 3, 4\}$. Пути $\gamma = 20$, соответствует число $\gamma(m) = 5$.

Также как и в p-адическом случае, отображение $\mathbf{Inv}(m)$ преобразует блоки последовательно идущих чисел в смежные классы по соответствующим подгруппам. Для доказательства этого рассмотрим разрядное представление чисел из интервала $[0, \mathfrak{n})$. С помощью операции вычитания легко проверить, что блоки чисел, у которых совпадают старшие k разрядов, в инверсном представлении соответствуют смежным классам по подгруппе, элементы которой в инверсном разрядном представлении задаются следующей маской, где знак $*$ обозначает произвольную цифру:

$$\underbrace{00\ldots00}_{k}\underbrace{**\cdots*}_{n-k}.$$

Рассмотрим последовательность циклических подгрупп $\overline{\mathfrak{K}}_m$ группы $\mathbb{Z}(\mathfrak{q})$, заданную посредством порождающих элементов и соответствующих масок в разрядном представлении:

$$\begin{aligned}
\{0**\cdots**\} &= (\mathfrak{p}_0) = \overline{\mathfrak{K}}_1,\\
\{00*\cdots**\} &= (\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_1) = \overline{\mathfrak{K}}_2,\\
&\cdots\\
\{000\ \ldots\ 0*\} &= (\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_1\ldots\mathfrak{p}_{n-2}) = \overline{\mathfrak{K}}_{n-1}.
\end{aligned}$$

Цепочке подгрупп

$$\{0\} \subset \overline{\mathfrak{K}}_{n-1} \subset \overline{\mathfrak{K}}_{n-2} \subset \ldots \subset \overline{\mathfrak{K}}_2 \subset \overline{\mathfrak{K}}_1 \subset \mathbb{Z}(\mathfrak{q})$$

соответствует цепочка фактор групп:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{Z}(\mathfrak{q}) & \to & \mathbb{Z}(\mathfrak{q})/\overline{\mathfrak{K}}_{n-1} & \to & \mathbb{Z}(\mathfrak{q})/\overline{\mathfrak{K}}_{n-2} & \to & \ldots & \to & \mathbb{Z}(\mathfrak{q})/\overline{\mathfrak{K}}_2 & \to & \mathbb{Z}(\mathfrak{q})/\overline{\mathfrak{K}}_1 & \to & \{0\}\\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\overline{\mathfrak{K}}_{n-1} & & \overline{\mathfrak{K}}_{n-2}/\overline{\mathfrak{K}}_{n-1} & & \overline{\mathfrak{K}}_{n-3}/\overline{\mathfrak{K}}_{n-2} & & \ldots & & \overline{\mathfrak{K}}_1/\overline{\mathfrak{K}}_2 & & \mathbb{Z}(\mathfrak{q})/\overline{\mathfrak{K}}_1 & & .\\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\
\mathbb{Z}(\mathfrak{p}_{n-1}) & & \mathbb{Z}(\mathfrak{p}_{n-2}) & & \mathbb{Z}(\mathfrak{p}_{n-3}) & & \ldots & & \mathbb{Z}(\mathfrak{p}_1) & & \mathbb{Z}(\mathfrak{p}_0) & &
\end{array} \tag{57}$$

Легко видеть, что на основании цепочки (57) можно построить коневое дерево аналогичное тому, которое показано на рисунке 3.1. Вершинами этого дерева являются элементы всех групп $\mathbb{Z}(\mathfrak{q})/\overline{\mathfrak{K}}_i$ цепочки (57), а ребра представляют собой пары элементов $\langle a, b\rangle$, таких, что $\pi(a) = b$, где π есть гомоморфизм, связывающий две соседние группы цепочки (57). Все ребра этого дерева естественным образом кодируются элементами групп $\mathbb{Z}(\mathfrak{p}_i)$. Терминальные вершины дерева, соответствуют элементам группы $\mathbb{Z}(\mathfrak{q})$, а кодировка путей идущих из корня этого дерева к его терминальным вершинам соответствует представлению номера соответствующей вершины в смешанной позиционной системе счисления $\mathfrak{N}$. Элементы групп $\mathbb{Z}(\mathfrak{q})/\overline{\mathfrak{K}}_i$ можно рассматривать как смежные классы группы $\mathbb{Z}(\mathfrak{q})$, поэтому можно считать, что элементами данного дерева являются подмножества этой группы. В случае позиционной системы счисления с основанием p группы $\overline{\mathfrak{K}}_i$ соответствуют p-адическим шарам, содержащим ноль. Смежные классы по группе $\overline{\mathfrak{K}}_i$ представляют собой p-адические шары радиуса $1/p^i$, а дерево описанное выше, является деревом p-адических шаров кольца $\mathbb{Z}(p^n)$.

Инверсное преобразование и p-адическая метрика

В параграфе 1.5 мы определили на кольце множестве $\mathbb{Z}(p^n)$ p-адическую метрику, в которой расстояние между элементами этого кольца определяется совпадением их младших разрядов в системе счисления по основанию p, а p-адические шары совпадают со смежными классами по идеалам, порожденным степенями элемента p. Аналогичную метрику на множестве $\mathbb{Z}(p^n)$ можно определить на основании совпадения старших разрядов. В этой метрике расстояние между элементами $x, y \in \mathbb{Z}(p^n)$ полагается равным $1/p^k$, где k есть количество совпадающих старших разрядов при представлении чисел x и y в позиционной системе счисления с основанием p. В данной метрике шарами радиуса $1/p^k$ являются блоки, состоящие из последовательно идущих p^{n-k} чисел при условии, что первый (или нулевой) блок начинается с нуля. Будем называть такую метрику ***блочно p-адической***. Поскольку инверсное преобразование переводит смежные классы по идеалу (p^k) в последовательно идущие блоки, состоящие из p^k элементов, то оно является изометрией двух метрических пространств, полученных путем определения на множестве $\mathbb{Z}(p^n)$ блочно p-адической и p-адической метрик. В отличие от p-адической метрики, арифметические операции по которой «непрерывны», блочная p-адическая метрика этим свойством не обладает, однако дерево p-адических блоков изоморфно дереву p-адических шаров. Изоморфизм между этими деревьями устанавливается инверсным преобразованием.

3.2 Инверсное преобразование подробно

В этом параграфе мы подробно рассмотрим четыре эквивалентных способа определения инверсного преобразования и «превращения» множества натуральных чисел в абелеву группу, изоморфную бесконечной группе всех комплексных корней из единицы степеней p^n, где p есть натуральное число большее единицы. Эти четыре способа дают дополнительную мотивировку осмысленности такого преобразования. Для простоты рассмотрим случай, когда p равно 2. Общий случай рассматривается аналогично.

Способ 1. Остывающая броуновская частица, двигающаяся в одну сторону.

Рассмотрим гипотетическую «одномерную остывающую броуновскую частицу», которая первоначально находится в начале координат, начинает свое движение в момент времени

ноль, и на шаге n с вероятностью $1/2$ остается на месте или с вероятностью $1/2$ перемещается вправо на расстояние равное $1/2^n$. Очевидно, что за бесконечное время все возможные состояния такой частицы составят множество $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty)$ всех двоично рациональных дробей из полуоткрытого интервала $[0,\ 1)$. При этом представление натурального числа n в позиционной системе счисления дает нам конечную строку нулей и единиц, которая, читаемая в порядке от младшего разряда к старшему, определяет последовательность событий, в которой 0 соответствует пребыванию нашей частицы на месте, а 1 в n-ом разряде определяет ее смещение вправо на расстояние $1/2^{n+1}$. Отображение $n \to q(n)$, где $q(n)$ есть финальное положение частицы дает нам требуемое взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty)$.

Способ 2. Раскрытие бесконечных произведений.

Рассмотрим (не обязательно сходящееся) бесконечное произведение вида

$$\mathscr{A} \simeq \prod_{i=0}^{\infty}(1 + a_i)$$

Символом $\mathscr{A}$ будем обозначать такое произведение как объект, а не как результат его вычисления. Так как каждый член такого произведения содержит два слагаемых 1 и a_i, то «полное раскрытие» такого произведения дает нам континуальное множество путей, проходящих по полному планарному двоичному дереву, где на каждом шаге единица или элемент a_i соответствуют одному из ребер двоичного дерева, выходящих из соответствующей вершины. Далее мы будем предполагать, что единице соответствует левое ребро. Каждый такой путь имеет свой вес, получаемый произведением всех единиц или чисел a_i, через которые данный путь «проходит». Так как бесконечное произведение понимается как предел конечного, то его значение совпадает с суммой весов только тех путей, которые содержат конечное число множителей вида a_i, что позволяет нам раскрыть такое произведение и представить его в виде бесконечной суммы следующего вида, проиндексированной счетным множеством мультииндексов J:

$$\mathscr{A} : \prod_{i=0}^{\infty}(1 + a_i) = 1 + \sum_{J} a_J \quad \{J \mid J = (i_0, i_1, \ldots, i_k) \text{ таких, что } i_0 < i_1 < \cdots < i_k \text{ и } k > 0\}.$$

При желании, можно убрать из выражения справа 1 и считать, что ей соответствует случай $k = 0$. Все слагаемые такой бесконечной суммы очевидным образом соответствуют множеству путей, проходящих по полному двоичному дереву и только конечное число раз проходящих через ребра вида a_i. Все такие пути отображаются на вершины планарного двоичного дерева, при этом каждой вершине можно приписать определенный вес, полученный перемножением весов всех ребер, по которым проходит путь, ведущий в данную вершину. Маркировка вершин двоичного дерева в случае раскрытия произведения вида:

$$(1 + a_0)(1 + a_1)(1 + a_2)$$

показана на рисунке 3.3 ниже, синие ребра соответствуют 1, а оранжевые - элементам a_i. Очевидно, что описанный процесс обхода и маркировки вершин двоичного дерева находится во взаимно однозначном соответствии с движением остывающей броуновской частицы, с которого мы начали этот параграф. При этом умножению на единицу соответствует

нахождение частицы на месте, а умножению на a_i соответствует ее сдвиг на $1/2^n$. Данное соответствие иллюстрирует диаграмма на рисунке 3.3. Указанное соответствие позволяет установить взаимно однозначное соответствие между множеством мультииндексов J в бесконечной сумме

$$\mathscr{A} \simeq \prod_{i=0}^{\infty}(1+a_i) = 1 + \sum_J a_J$$

и множеством $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty)$ двоично рациональных чисел из полуоткрытого интервала $[0,\ 1)$.

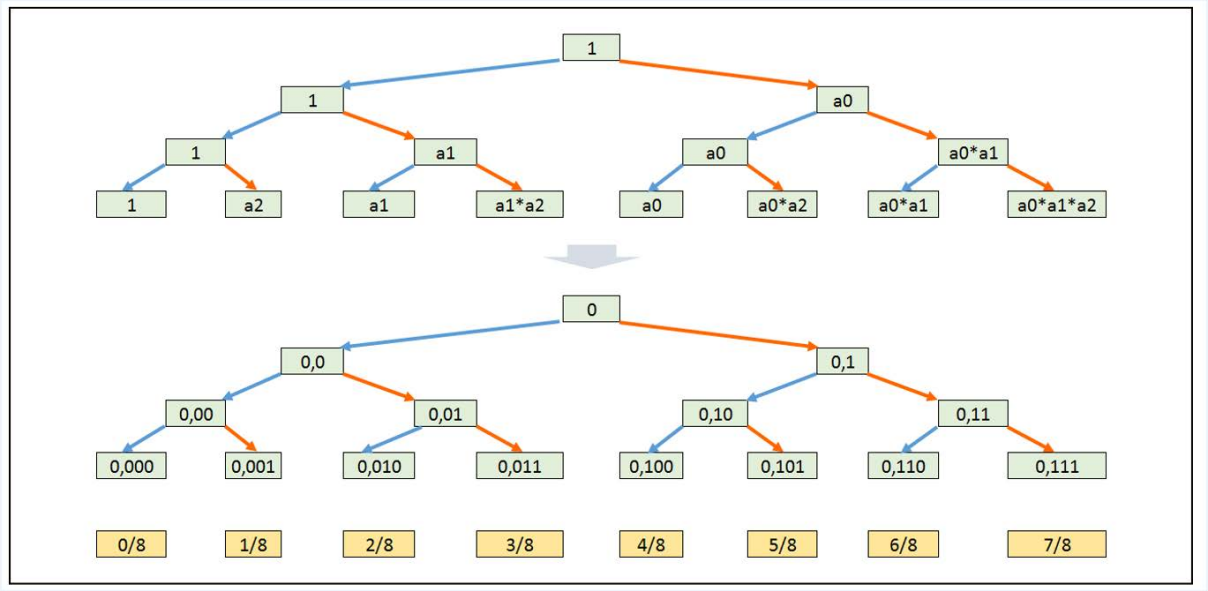


Рисунок 3.3 Соответствие между раскрытием бесконечного произведения и движением «остывающей броуновской частицы». Элементы группы $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty)$ указаны в двоичной кодировке.

Поскольку множество двоично рациональных чисел из интервала [0,1) является абелевой группой относительно сложения по модулю 1, и $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty) \cong \mathbb{Z}(2^\infty)$, то указанное соответствие позволяет связать с каждым бесконечным произведением $\mathscr{A}$ некоторую функцию

$$\mathscr{A}^* : \mathbb{Z}(2^\infty) \to \mathbb{C},$$

заданную на абелевой группе $\mathbb{Z}(2^\infty)$. Очевидно, что такой же результат можно получить, составив для бесконечного произведения $\mathscr{A}$ следующую производящую функцию в форме бесконечного произведения:

$$\mathscr{A}[X] = (1 + a_0 X^{1/2})(1 + a_1 X^{1/4})(1 + a_2 X^{1/8})(1 + a_3 X^{1/16}) \ldots$$

«Раскрыв» такое произведение, и взяв только его конечные члены, мы получим ряд вида $\Sigma a_q x^q$, где индекс q пробегает группу $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty)$ двоично рациональных чисел из полуоткрытого интервала $[0,\ 1)$ с операцией сложения по модулю 1 в качестве групповой операции, что легко усмотреть из того факта, что любое такое число можно получить путем сложения отрицательных степеней 2 (двоичное разложение числа). Отображение $q \longrightarrow a_q$ дает нам искомую функцию. Значение исходного бесконечного произведения получается суммированием указанного ряда при $x = 1$. Описанное в предыдущем пункте взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty)$ позволяет перенести

эту функцию на множество натуральных чисел $\mathbb{N}_0$. Описанная выше конструкция легко обобщается на любые произведения вида:

$$\mathscr{A} \simeq \prod_{i=0}^{\infty}(1 + a_{i0} + a_{i1} + \cdots + a_{i\mathfrak{n}-1})$$

В случае таких произведений речь пойдет о полном $(\mathfrak{n}+1)$-ичном дереве, и каждому такому произведению будет соответствовать функция определенная на абелевой группе $\mathbb{Z}((\mathfrak{n}+1)^\infty)$. Например, в случае $p = 3$, такому произведению будет соответствовать следующая производящая функция:

$$\mathscr{A}[X] = (1 + a_{00}X^{1/3} + a_{01}X^{2/3})(1 + a_{10}X^{1/9} + a_{11}X^{2/9})(1 + a_{20}X^{1/27} + a_{21}X^{2/27})\ldots.$$

Способ 3. Использование позиционной системы счисления.

Рассмотрим следующие символические тождества:

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^4)(1+q^8)\cdots = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

$$(1+q^{1/2})(1+q^{1/4})(1+q^{1/8})(1+q^{1/16})\cdots = \sum_{u\in\mathbb{Q}_{01}(2^\infty)} q^u.$$

Данные тождества есть ни что иное, как символическое представление в виде двух бесконечных произведений позиционной системы счисления с основанием 2. Выбирая из скобок слева переменную q в степени различных степеней 2, мы можем составить из них любой показатель степени, с которым q входит в правую часть, и обратно, каждый из членов бесконечной суммы справа может быть однозначно получен таким образом. Каждое из стоящих слева бесконечных произведений при своем раскрытии отображается на бесконечное корневое двоичное дерево $\mathbb{T}_2$, как было показано при описании способа 2. При этом мономы вида q^n отображаются на вершины этого дерева, а пути по дереву, исходящие из его корня, отражают логику разворачивания каждого их этих двух бесконечных произведений. Соответствие $(1+q^{2^n}) \sim (1+q^{2^{-(n+1)}})$ позволяет установить взаимно однозначное соответствие между мономами указанных двух произведений, которые отображаются на одну и ту же вершину дерева $\mathbb{T}_2$. Это соответствие дает нам взаимно однозначное отображение

$$u : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Q}_{01}(2^\infty), \qquad n \to u(n),$$

результат действия которого изображен на диаграмме, показанной на рисунке 3.4.

Данная конструкция легко обобщается на случай произвольного числа p. Например, в случае $p = 3$ нужно использовать следующие символические тождества, соответствующие представлению рациональных чисел в позиционной системе счисления с основанием 3:

$$(1+q+q^2)(1+q^3+q^6)(1+q^9+q^{18})\cdots = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + \ldots.$$

$$(1+q^{1/3}+q^{2/3})(1+q^{1/9}+q^{2/9})(1+q^{1/27}+q^{2/27})\cdots = \sum_{u\in\mathbb{Q}_{01}(3^\infty)} q^u.$$

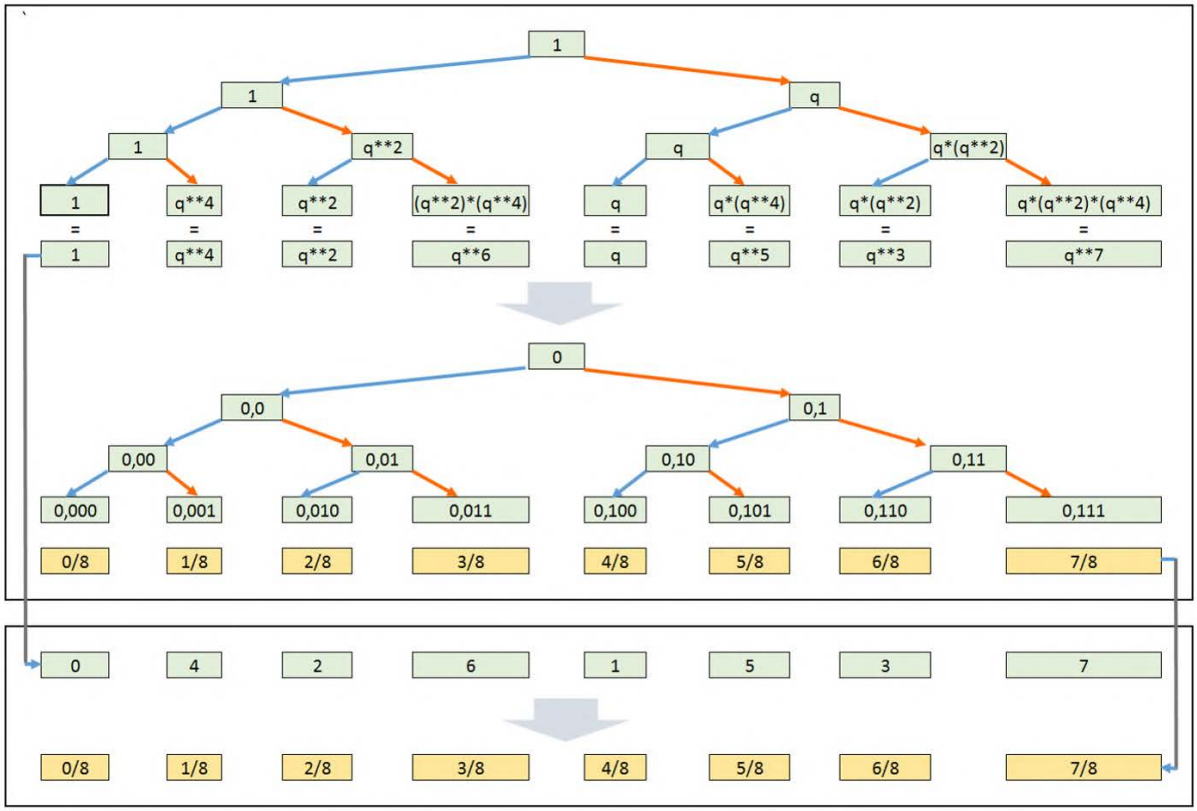


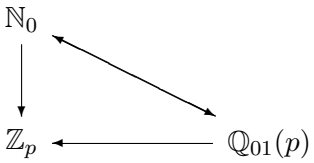
Рисунок 3.4 Соответствие между способами 2 и 3 при $p = 2$. Символ ** обозначает возведение в степень.

Способ 4. Инверсия разрядов.

Еще один способ определения данного отображения дает естественное вложение множеств $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ и $\mathbb{N}_0$ в кольцо целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$. Множество $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ правильных p-ичных положительных дробей можно вложить в кольцо $\mathbb{Z}_p$ путем продолжения естественного отображения

$$1/p^n \to p^{n-1}$$

$$a_0p^{-1} + a_1p^{-2} + a_2p^{-3} + a_3p^{-4} + a_4p^{-5}\ldots \quad \Rightarrow \quad a_0 + a_1p^1 + a_2p^2 + a_3p^3 + a_4p^4 + \ldots$$



При этом вложении происходит естественное отождествления множеств $\mathbb{Q}_{01}(p)$ и $\mathbb{N}_0$, которое можно описать следующим образом:

Определение инверсного преобразования. Каждому натуральному числу n, имеющему в p-ичной системе счисления k разрядов, ставится в соответствие p-ично рациональное число вида x/p^k, принадлежащее полуоткрытому интервалу [0,1), полученное инверсией (то есть записью в обратном порядке) всех его p-ичных разрядов, начиная с младшего и кончая старшим значащим разрядом:

$$n = d_{k-1}d_{k-2}\ldots d_2d_1d_0 \to \mathbf{Inv}[n] = 0.d_0d_1d_2\ldots d_{k-2}d_{k-1}.$$

Это отображение задает взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел $\mathbb{N}_0$ и множеством p-ично рациональных чисел из полуоткрытого интервала [0,1). Поскольку последнее множество является абелевой группой относительно сложения по модулю 1, то вышеуказанное соответствие переносит структуру абелевой группы на множество натуральных чисел $\mathbb{N}_0$.

Поскольку группа правильных двоичных дробей изоморфна группе всех комплексных корней из 1 степени p^n, где n – любое натуральное число, то можно сказать, что множество натуральных чисел взаимно однозначно отображается на множество p-ично рациональных точек единичной окружности, то есть на множество комплексных чисел вида $\exp(2\pi qi/p^n)$.

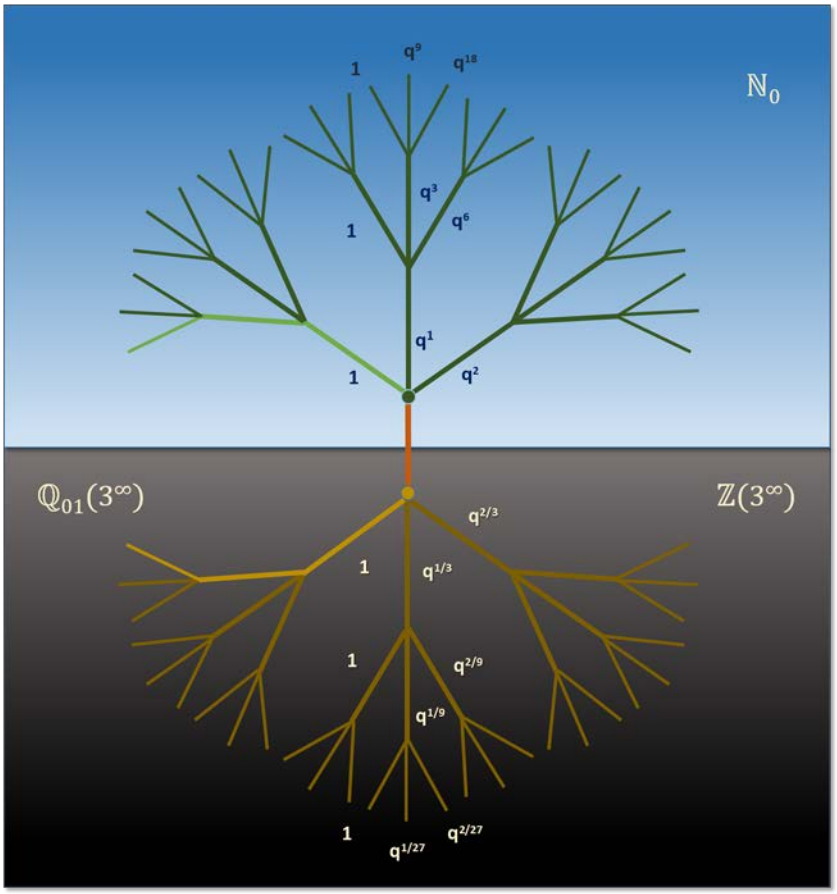


Рисунок 3.5 Соответствие $\mathbb{N}_0 \leftrightarrow \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ при $p = 3$, как соответствие между путями, проходящими по двум троичным деревьям.

Аналогичное соответствие можно определить для позиционной системы счисления с любым основанием q. При этом множество натуральных чисел отобразится на множество правильных дробей вида r/q^n, где r и q не обязательно взаимно простые числа. Таким образом, мы получаем следующую последовательность взаимно однозначных соответствий, в которой символ $\mathbb{N}(k)$ обозначает множество натуральных чисел $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$:

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
\mathbb{N}_0: & \{0\} & \subset & \mathbb{N}(p) & \subset & \mathbb{N}(p^2) & \subset & \mathbb{N}(p^3) & \subset & \ldots & \subset & \mathbb{N}(p^n) & \subset & \ldots \\
\updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & & & \updownarrow & & \\
\mathbb{Z}(p^\infty): & \{0\} & \subset & \mathbb{Z}(p^1) & \subset & \mathbb{Z}(p^2) & \subset & \mathbb{Z}(p^3) & \subset & \ldots & \subset & \mathbb{Z}(p^n) & \subset & \ldots,
\end{array}$$

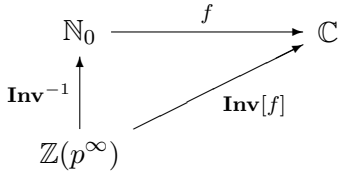
которые задаются инверсным отображением

$$\mathbf{Inv}:\ \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}(p^\infty) \simeq \mathbb{Q}_{01}(p^\infty).$$

Благодаря взаимно однозначному соответствию **Inv** между множествами $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{Z}(p^\infty)$, любые математические объекты, индексированные натуральными числами, можно рассматривать как функции на абелевой группе $\mathbb{Z}(p^\infty)$. К числу таких объектов могут относится подмножества множества натуральных чисел, числовые последовательности и ряды, а также функциональные ряды и ряды операторов. Бесконечные подмножества натурального ряда можно отождествить с их характеристическими функциями, что позволяет рассматривать их совместно с рядами и последовательностями.

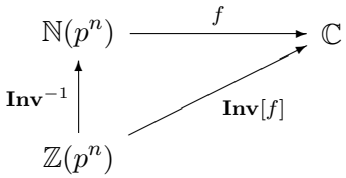
Говоря далее о рядах, мы будем отождествлять ряд $\mathscr{A} \simeq \Sigma a_n$ и соответствующую ему функцию $\mathscr{A}:\ \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$. Отображение инверсии естественным образом порождает взаимно однозначное соответствие между множествами комплекснозначных функций, определенных на множествах $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{Z}(p^\infty)$, которое мы будем также обозначать буквой **Inv** и называть оператором инверсии или инверсным преобразованием:

$$\mathbf{Inv}:\ \mathscr{F}(\mathbb{N}_0) \to \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^\infty)),$$



Мы также будем рассматривать конечный вариант данной конструкции, полученный ограничением инверсного преобразования на первые p^n натуральных чисел, начиная с нуля. В этом случае мы имеем:

$$\mathbf{Inv}:\ \mathscr{F}(\mathbb{N}(p^n)) \to \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^n)),$$



Определение функционального инверсного преобразования. Пусть $\mathscr{A} \simeq \Sigma a_n$ есть некоторый ряд. Будем называть функцию $\mathbf{Inv}[\mathscr{A}] \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^\infty))$ инверсным преобразованием ряда $\mathscr{A}$. Аналогично, будем называть инверсным преобразования бесконечного произведения $\mathscr{A} = \Pi_i(1 + a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{i(p-1)})$ функцию $\mathbf{Inv}[\mathscr{A}] \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^\infty))$, полученную описанным выше способом раскрытия бесконечных произведений. В случае необходимости их различения будем говорить об аддитивном и мультипликативном инверсных преобразованиях. Конечное инверсное преобразование зависит от числа p и от того отрезка ряда $\mathscr{A}$ (или последовательности) в количестве из p^n элементов, к которому оно применяется. В том случае, когда нужно будет акцентировать на этом внимание, мы будем использовать обозначение $\mathbf{Inv}[\mathscr{A}(p^n)]$, имея в виду, что $\mathbf{Inv}[\mathscr{A}(p^n)] \in \mathscr{F}(\mathbb{N}(p^n))$.

Если снабдить абелеву группу $\mathbb{Z}(p^\infty)$ единичной дискретной мерой, то становится возможным говорить о принадлежности функций $\mathbf{Inv}[\mathscr{A}] \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^\infty))$ к одному из классов $\mathscr{L}^{1,2}(\mathbb{Z}(p^\infty))$, а также применять к этим функциям преобразование Фурье.

Конструкция инверсного преобразования при всей ее математической тривиальности имеет некоторые следствия. Первым из этих следствий является наличие у бесконечных сходящихся рядов и бесконечных сходящихся произведений p-адических спектров. Данные спектры представляют собой непрерывные отображения кольца $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел в комплексную плоскость или в евклидово пространство в том случае, если исходный ряд является векторным. Данные спектры при определенных условиях можно рассматривать как p-адический аналог гладких поверхностей в евклидовом пространстве.

3.3 Определение p-адических спектров рядов и бесконечных произведений

Далее, если не оговорено противное, мы будем предполагать, что p есть некоторое простое число. Группу $\mathbb{Z}(p^\infty)$ будем рассматривать как топологическую абелеву группу с дискретной топологией. Как было показано выше, группой характеров этой группы является локально компактная группа целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$. Группа $\mathbb{Z}(p^\infty)$ естественным образом вкладывается в комплексную плоскость в виде множества вершин всех правильных p^n–угольников, вписанных в единичную окружность, а кольцо целых p-адических естественным образом отождествляется с кольцом всех эндоморфизмов группы $\mathbb{Z}(p^\infty)$.

В соответствии с ранее сказанным каждому ряду $\mathscr{A} = \Sigma a_n$ можно поставить в соответствие функцию, полученную его инверсным преобразованием

$$f = \mathbf{Inv}[\mathscr{A}] : \mathbb{Z}(p^\infty) \to \mathbb{C}.$$

Если данный ряд абсолютно сходится, то можно определить его спектр или преобразование Фурье, которое является непрерывной функцией на локально компактном кольце целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$. Расходимость ряда $\mathscr{A} = \Sigma a_n$ можно интерпретировать как неинтегрируемость ассоциированной с ним функции $f = \mathbf{Inv}[\mathscr{A}]$ на группе $\mathbb{Z}(p^\infty)$, снабженной дискретной единичной мерой, однако это не мешает нам рассматривать последовательность $\mathbf{Inv}[\mathscr{A}(p^n)]$ инверсных преобразований от частичных сумм первых p^n членов ряда и изучать предел их Фурье спектров $\mathbf{F}[\mathbf{Inv}[\mathscr{A}(p^n)]]$ при $n \to \infty$. Изучение таких спектров показывает, что даже для расходящегося ряда предел спектров его частичных сумм, может быть функцией, принадлежащей к классам $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_p \backslash \{0\})$ или $\mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p)$, то есть непрерывной функцией на единичном p-адическом шаре с выколотым нулем или квадратично интегрируемой функцией на единичном p-адическом шаре.

Определение p-адического спектра. Преобразования Фурье (если оно определено) инверсного преобразования $\mathbf{F}[\mathbf{Inv}[\mathscr{A}]]$ сходящегося или расходящегося ряда $\mathscr{A} \simeq \Sigma a_n$, бесконечного произведения $\mathscr{A} \simeq \Pi(1 + a_n)$, или характеристической функции некоторого подмножества $\mathscr{A}$ натуральных чисел, интерпретируемой как расходящийся ряд, будет далее называться p-адическим спектром соответствующего ряда, последовательности, множества или бесконечного произведения $\mathscr{A}$. p-Адический спектр объекта $\mathscr{A}$, является комплекснозначной функцией, определенной на локально компактом кольце $\mathbb{Z}_p$, и далее обозначается $\mathrm{Spec}(\mathscr{A}, p^\infty)$ или сокращенно $\mathrm{Spec}[\mathscr{A}]$. Спектр, вычисленный для первых p^n членов ряда $\mathscr{A}$ и являющийся функцией из множества $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^n))$, будет обозначаться $\mathrm{Spec}(\mathscr{A}, p^n)$.

Таким образом, мы имеем следующую последовательность соответствий:

$$\Sigma a_n \leftrightarrow \mathscr{A} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C} \quad \to \quad \mathbf{Inv}[\mathscr{A}] : \mathbb{Z}(p^\infty) \to \mathbb{C} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{F}[\mathbf{Inv}[\mathscr{A}]] = \mathrm{Spec}(\mathscr{A}, p^\infty) : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C},$$

$$\mathscr{F}(\mathbb{N}_0) \xrightarrow{\mathbf{Inv}} \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^\infty)) \xrightarrow{\mathbf{F}} \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p)$$

$$\mathscr{F}(\mathbb{N}(p^n)) \xrightarrow{\mathbf{Inv}_n} \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^n)) \xrightarrow{\mathbf{F}_n} \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^n))$$

При такой интерпретации абсолютно сходящиеся ряды (или бесконечные произведения) превращаются в интегрируемые по функции, определенные на абелевой группе $\mathbb{Z}(p^\infty)$, снабженной дискретной топологией, а их спектры – в непрерывные функции на компактной абелевой группе $\mathbb{Z}_p$. Для расходящихся рядов картина выглядит сложнее. Интерес также представляет строение образа кольца $\mathbb{Z}_p$ при отображении

$$\mathrm{Spec}(A, p^\infty) : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Мы будем анализировать образ и структуру спектра, как подмножества комплексной плоскости, и пытаться перенести эту структуру на исходную последовательность или ряд. Таким образом расходимость ряда может означать обращение его спектра в бесконечность только в точке 0, являющейся условным «центром» единичного p-адического шара, а может приводить к спектрам, принадлежащим множеству $\mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p)$ и имеющим сколь угодно сложную структуру точек разрыва.

Определение. Образ кольца $\mathbb{Z}_p$ при отображении $\mathrm{Spec}(A, p^\infty) : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$, будем называть ***образом p-адического спектра*** и обозначать это множество символом $\mathrm{Im}[\mathrm{Spec}(A, p^\infty)]$. Результат применения к этому множеству отображения $z \to 1/z$ будем называть ***обратным образом p-адического спектра*** и будем обозначать символом $\mathrm{Im}[\mathrm{Spec}_R(A, p^\infty)]$.

Поскольку с топологической точки зрения $\mathbb{Z}_p$ гомеоморфно канторовому множеству, то в случае непрерывности и иньективности спектра, его образ представляет собой гомеоморфное вложение канторова множества в комплексную плоскость. В соответствии с теоремой об обращении преобразования Фурье, перенос перечисленных выше объектов в p-адическую область имеет ряд следствий, вызванных фрактальной структурой кольца $\mathbb{Z}_p$ и возможностью перенести эту фрактальную структуру на исходный ряд или на функцию, которую этот ряд представляет. В результате инверсного преобразования каждый объект, получающийся полным или частичным суммированием ряда, приобретает сложную внутреннюю фрактальную структуру, отражающую структуру кольца $\mathbb{Z}_p$. Данная процедура также имеет следствия для рядов и произведений, зависящих от комплексного параметра s, так как она позволяет расширить область определения заданных такими рядами и произведениями функций, внеся в нее дополнительное p-адическое измерение (что будет более детально показано далее). Описанный метод вычисления p-адических спектров комплексных рядов $\mathscr{A} \simeq \Sigma a_i$ и последовательностей $\mathscr{A} \simeq \{a_i\}$, представляет собой преобразование рядов и последовательностей в функции, определенные на локально компактном кольце $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел, с помощью инверсного преобразования **Inv** с последующим применением преобразования Фурье:

$$\mathscr{A} \ \to \mathrm{Spec}(\mathscr{A}, p, \infty) = \mathbf{F}[\mathbf{Inv}[\mathscr{A}]] \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p).$$

Данный подхода позволяет применить к изучению свойств числовых и векторных рядов весь аппарат p-адического анализа, который включает в себя:

(i) геометрию и топологию кольца $\mathbb{Z}_p$ с его системами сфер, шаров и аддитивными и мультипликативными сдвигами;

(ii) операции мультипликативной и аддитивной свертки;

(iii) действие группы $\mathbb{Z}_p^{\times}(p)$ на множестве $\mathbb{Z}_p$ и представления этой группы операторами в пространствах $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_p)$, $\mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p)$ и $\mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p)$;

(iv) теорию меры и интегрирования на кольце $\mathbb{Z}_p$;

(v) соответствующие функциональные пространства непрерывных, абсолютно и квадратично интегрируемых функций $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_p), \mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p), \mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p)$, а также теорию операторов действующих на этих пространствах;

(vi) обобщенные функции.

Интерес представляют спектры рядов, связанных с ζ-функцией Римана. При исследовании функций из множества $\mathscr{F}(\mathbb{Z}_p)$ нас могут интересовать следующие вопросы:

(i) принадлежность полученных функций к соответствующим функциональным пространствам непрерывных, абсолютно или квадратично интегрируемых функций $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_p)$, $\mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p)$, $\mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p)$;

(ii) общий вид прямого и обратного спектра, как подмножеств комплексной плоскости;

(iii) наличие рациональных точек спектра, в которых полученные спектры имеют какие-либо характерные особенности (например, абсолютный максимум или минимум амплитуды);

(iv) поведение спектра на некоторых выделенных подмножествах, таких как p-адические сферы или дробные идеалы в $\mathbb{Z}_p$, то есть множества вида $(a/b)\cdot\mathbb{Z}$, где a/b есть рациональное число;

(v) образы этих множеств на комплексной плоскости при отображении

$$\mathrm{Spec}(\mathscr{A}, p^{\infty}) : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C};$$

(vi) множества, возникающие при действии на образы p-адических спектров группы дробно линейных преобразований;

(vii) соотношение между ограничениями этих функций на отдельные p-адические сферы, например, подобие соответствующих профилей с учетом растяжения области определения.

Представляет интерес анализ спектров рядов на непрерывность. Существует определенный класс рядов, спектр которых представляет собой непрерывную функцию на множестве $\mathbb{Z}_p$ с особенностью в нуле. Такой ряд расходится, но его спектр оказывается непрерывной функцией, определенной во всех точках кольца $\mathbb{Z}_p$, за исключением нуля. Будем называть такие ряды (или последовательности) p-адически непрерывными.

Определение. Ряд $\mathscr{A} \simeq \Sigma a_i$ называется p-адически непрерывными, если его спектр $\mathrm{Spec}(\mathscr{A}, p^{\infty})$ представляет собой непрерывную функцию на множестве $\mathbb{Z}_p\backslash\{0\}$.

Очевидно, что все абсолютно сходящиеся ряды являются p-адически непрерывными. Примером p-адически непрерывного ряда является гармонический ряд. Первичный визуальный тест на непрерывность некоторой функции $f \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p)$ можно сделать, упорядочив таблицу

значений ее дискретной аппроксимации $f_n \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^n))$ в соответствии с лексикографическим порядком p-адических индексов. В случае непрерывности функции f график функции $|f_n|$ будет напоминать силуэт современного города, застроенного многоэтажными зданиями, или силуэт крепости.



Рисунок 3.6 Сегмент графика $|f|$ непрерывной функции $f \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p)$, встроенный во внешнее изображение.

Участки приблизительно одинаковой высоты будут соответствовать приблизительно постоянным значениям рассматриваемой функции внутри p-адических шаров/сфер. Непрерывность функции означает, что ее значения «мало изменяются» внутри такого шара, что выражается в приблизительной горизонтальности графика внутри одного блока. Скачки соответствуют переходам от шара к шару. Это может выглядеть так, как показано на рисунке 3.6. По сути дела образы p-адических спектров являются образами канторова множества при его непрерывном отображение в комплексную плоскость. Интерес могут представлять образы p-адических спектров как подмножеств комплексной плоскости и их трансформации с помощью дробно-линейных отображений, а также соотнесение получающихся при этом структур со структурой объектов из области химии и биологии. Образы p-адических спектров можно превратить в трехмерные объекты путем представления комплексной плоскости в виде сферы Римана.

На p-адических спектрах естественным образом действует группа $\mathbb{Z}_p^\times$ обратимых элементов кольца p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$. В случае конечных спектров это будет группа $\mathbb{Z}(p^n)\times$ обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}(p^n)$, которая является циклической, если p есть простое число большее 2, и является суммой двух циклических групп, если $p = 2$. В конечном случае эти группы, действуя на $\mathbb{Z}(p^n)$, просто переставляют между собой p-адические шары одинакового радиуса. С алгебраической точки зрения группа $\mathbb{Z}(p^n)$, а также ее действия и представления являются тривиальными объектами. Однако они перестают быть таковыми,

если число n достаточно велико, а объекты, на которые действует группа $\mathbb{Z}(p^n)$, вложены в некоторое пространство, структура и геометрия которого начинают «скрещиваться» с действиями $\mathbb{Z}(p^n)$, порождая при этом некоторые новые структуры. Это может выглядеть, например так, как это показано на рисунке 3.7.

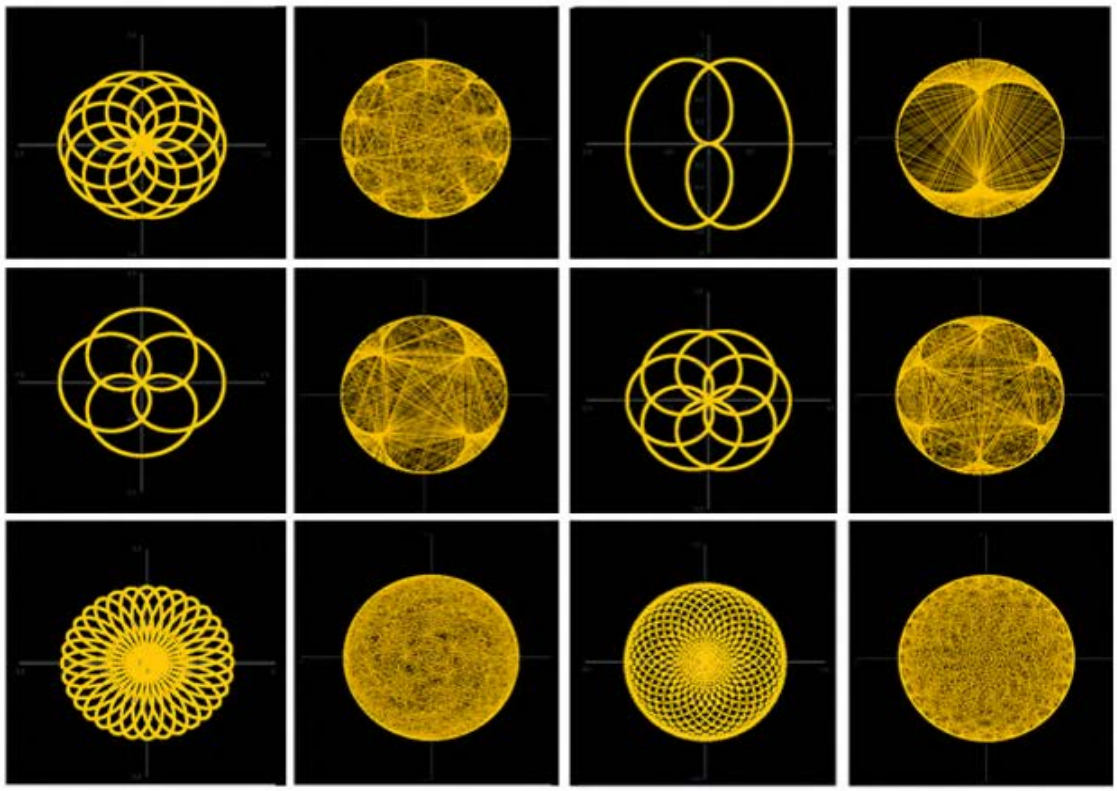


Рисунок 3.7 Примеры геометрических объектов, порождаемых действиями циклических групп.

Наличие у рядов p-адических спектров позволяет определить, выявить и визуализировать внутренне строение (или морфологию) ряда или бесконечного произведения, а также выявить некоторые их структурные особенности, которые являются не очевидными на первый взгляд. Вычислив спектр некоторого ряда $\mathscr{A} \simeq \Sigma a_n$, мы получаем функцию

$$\mathrm{Spec}[\mathscr{A}] : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C},$$

значение которой в нуле равно сумме исходного ряда, и интеграл которой по множеству $\mathbb{Z}_p$ равен нулевому члену ряда. Рассмотрим множество значений функции $\mathrm{Spec}[\mathscr{A}]$. ***Структура этого множества, его топология и плотность распределения точек определяют то, что можно назвать морфологией ряда***. Добавление к нулевому члену ряда некоторого комплексного числа z приводит к сдвигу всего спектра на величину z, поэтому с точки зрения p-адической морфологии спектр ряда как форма определен с точностью до комплексной константы z и, хотя это может звучать как парадокс, допуская некоторую вольность речи, можно сказать, что все сходящиеся комплексные ряды представляют собой ни что иное, как различные формы разложения нуля, а все сходящиеся бесконечные произведения представляют собой различные формы разложения единицы.

3.4 Структуры, кодирующие дихотомическое деление

Существует около десяти различных математических структур, которые используются для формализации процесса диадического ветвления или дихотомического деления. Рассмотрим более подробно соответствия, которые существуют между этими структурами. На рисунке 3.8 представлены четыре структурно тождественные диаграммы, имеющие, однако, совершенно различный математический смысл и призванные проиллюстрировать различные «смысловые перетекания», которые происходят между различными структурами, кодирующими процесс дихотомического деления. Существующие между этими структурами соответствия до конца не описываются математическим понятием «изоморфизм», так как это понятие применяется только к структурам одного и того же типа.

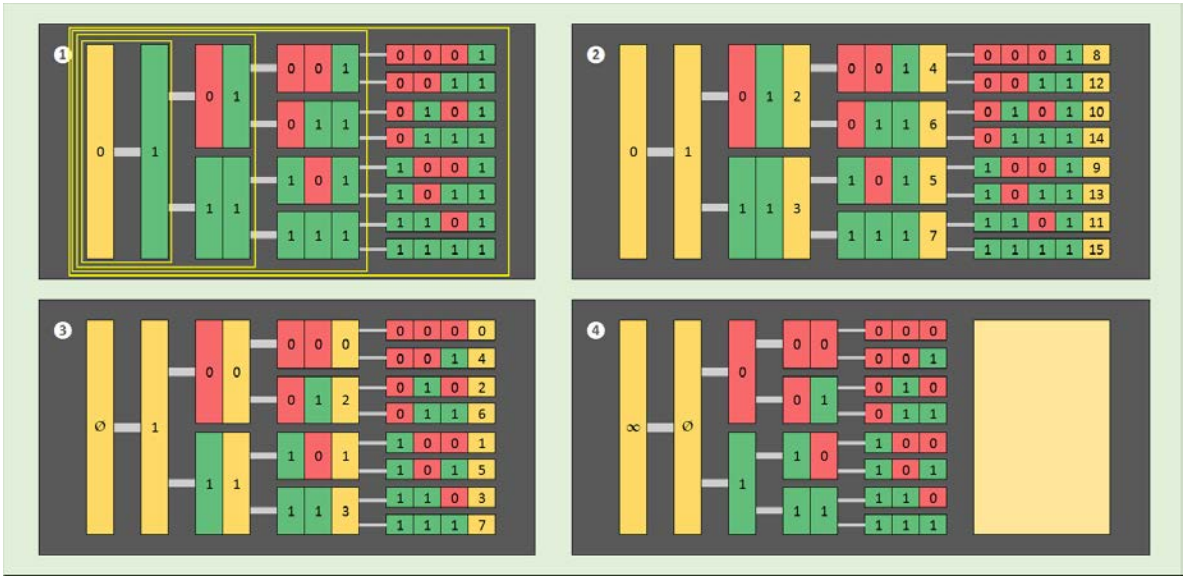


Рисунок 3.8 Соотношение между различными объектами, участвующими в формализации процесса дихотомического деления. Подробное описание см. в тексте.

С философской точки зрения все эти структуры можно рассматривать как различные «смысловые грани» одной и той же сущности, которую можно условно назвать процессом дихотомического деления.

Каждая из этих структур является бесконечной, на рисунке 3.8 показаны первые 5 уровней.

(1) На диаграмме (1) показана цепочка вложенных друг в друга абелевых групп $\mathbb{Q}_{01}(2^n)$, состоящих из дробей вида $k/2^n, 0 \leqslant k < 2^n$ (эти группы показаны желтыми рамками):

$$\mathbb{Q}_{01}(2^1) \subset \mathbb{Q}_{01}(2^2) \subset \mathbb{Q}_{01}(2^3) \subset \cdots \subset \mathbb{Q}_{01}(2^n) \subset \cdots \subset \mathbb{Q}_{01}(2^\infty).$$

Элементы этих групп представлены в виде двоичных дробей с отброшенным нулем. Например, 011 означает 0.011. Нумерация разрядов возрастает справа налево. Объединение всех этих групп дает группу $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty)$. Очевидно, что группа $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}(2^\infty)$. Изоморфизм задается отображением $q \to \exp(-2\pi i q)$. Разложение элементов группы $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty)$ в двоичную дробь естественным образом определяет на этой группе структуру двоичного дерева (см. рисунок 1.10).

(2) На диаграмме (2) те же строки интерпретируются как разрядное представление натуральных чисел, но нумерация разрядов возрастает слева направо. Соотнесение диаграмм (1) и (2) позволяет произвести отождествление $\mathbb{N}_0 \cong \mathbb{Q}_{01}(2^\infty)$ и перенести на множество натуральных чисел структуру абелевой группы и структуру бинарного дерева. Данное преобразование было подробно описано в параграфах 3.1 и 3.2.

(3) Диаграмма (3) показывает стандартную цепочку проекционных гомоморфизмов, которыми связаны между собой кольца вычетов по модулю 2. Проективный предел этой цепочки является кольцом целых 2-адических чисел.

$$\mathbb{Z}(2^0) \xleftarrow{\pi_0} \mathbb{Z}(2^1) \xleftarrow{\pi_1} \mathbb{Z}(2^2) \xleftarrow{\pi_2} \cdots \xleftarrow{\pi_{n-1}} \mathbb{Z}(2^n) \xleftarrow{\pi_n} \cdots \xleftarrow{\{\rho_k\}} \mathbb{Z}_2 \ . \tag{58}$$

Очевидно, что последовательность (58) можно представить в виде бесконечного двоичного дерева. Вершинами этого дерева являются элементы колец вычетов, а ребра представляют собой пары $\langle a, b\rangle$ такие, что $\pi_i(b) = a$. Сопоставление диаграмм (1) и (3) позволяет отождествить данное дерево с множеством $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty) \setminus \{0\}$. Дерево 2-адических шаров кольца $\mathbb{Z}(2^n)$ очевидно совпадает с деревом, состоящим из $(n+1)$ уровней последовательности (58), начиная с нулевого.

(4) Диаграмма (4) показывает дерево 2-адических шаров кольца целых 2-адических чисел $\mathbb{Z}_2$. Каждый шар $\mathfrak{b}$ радиуса $1/2^n$ определяется последовательностью a, состоящей из n нулей и единиц. 2-адическое число q принадлежит шару $\mathfrak{b}$ тогда и только тогда, когда первые n-знаков его 2-адического разложения совпадают с последовательностью a. Сопоставление диаграмм (3) и (4) позволяет отождествить 2-адические шары с элементами колец вычетов. Сопоставление диаграмм (1) и (4) позволяет отождествить множество $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty)\setminus\{0\}$ и дерево 2-адических шаров $\mathfrak{B}(\mathbb{Z}_2)$. При этом отождествлении шару с двоичным кодом a соответствует двоичная дробь $0.a1$. Кольцу $\mathbb{Z}_2$, представляющему собой единичный шар, соответствует $1/2$.

Введем несколько дополнительных обозначений, которые понадобятся нам в дальнейшем.

- Пусть $\mathbb{N}(2^k)$ есть множество всех натуральных чисел, двоичное представление которых содержит не более чем k разрядов. Пусть $\overline{\mathbb{N}}(2^k)$ есть множество чисел, которые получаются из чисел множества $\mathbb{N}(2^k)$ путем добавления к ним 1 в k-разряде. Другими словами, $\overline{\mathbb{N}}(2^k) = \{\ n \mid 2^k \leqslant n < 2^{k+1}\}$.
- Пусть символ $\mathbb{T}_p$ обозначает бесконечное p-адическое корневое дерево, а $\mathbb{T}(p^k)$ - корневое p-адическое дерево, имеющее k уровней. Пусть $\mathbb{L}(p^k)$ обозначает множество вершин дерева $\mathbb{T}(p^n)$ или дерева $\mathbb{T}_p$, лежащих на k-ом уровне, а $\mathrm{V}(\mathbb{T})$ и $\mathrm{E}(\mathbb{T})$ обозначают соответственно множества вершин и ребер дерева $\mathbb{T}$.
- Пусть $\mathfrak{W}\{L, R\}$ есть множество всех двухбуквенных слов в алфавите $\{L, R\}$, включая пустое слово. Очевидно, что на этом множестве можно задать структуру моноида, если в качестве операции умножения использовать соединение строк, а в качестве единицы взять пустое слово.

Очевидно, что:

(i) Множество $\mathbb{N}(2^k)$ находится во взаимно-однозначном соответствии со множеством всех 2-адических шаров радиуса $1/2^k$;

(ii) Отображение $n \to n + 2^k$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathbb{N}(2^k)$ и $\overline{\mathbb{N}}(2^k)$;

(iii) Объединение

$$\mathbb{N} = \{1\} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \overline{\mathbb{N}}(2^k)$$

представляет собой разбиение множества положительных натуральных чисел на счетное количество конечных множеств;

(iv) Это разбиение соответствует разбиению множества 2-адических шаров кольца $\mathbb{Z}_2$ на множества шаров одинакового радиуса.

Приведенные выше рассуждения доказывают следующее предложение 3.1.

Предложение 3.1 Существуют канонические взаимно однозначные соответствия между следующими шестью множествами:

(i) Множество $\mathbb{N}_0$ натуральных чисел, включая ноль;

(ii) Множество $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty)$ двоично-рациональных чисел из полуоткрытого интервала [0,1);

(iii) Множество $\mathbb{Z}(2^\infty)$ всех корней из единицы степеней 2^n, где $n \geqslant 0$;

(iv) Множество всех вершин бесконечного двоичного дерева с добавленной к нему бесконечной точкой;

(v) Множество всех двоичных слов длины $n \geqslant 0$ с добавленной к нему бесконечной точкой;

(vi) Множество всех шаров кольца целых 2-адических чисел с добавленной к нему бесконечной точкой.

При данном соответствии происходит отождествление следующих множеств:

(i) Множество $\overline{\mathbb{N}}(2^k)$ натуральных чисел;

(ii) Множество $\mathbb{Q}_C(2^k)$ центров отрезков, полученных делением отрезка [0,1] на 2^k равных частей;

(iii) Множество $\mathbb{Z}(2^k)$ вычетов по модулю 2^k;

(iv) Множество $\mathbb{L}(2^k)$ всех вершин бесконечного двоичного дерева, которые расположены на k-ом уровне данного дерева;

(v) Множество всех двоичных слов длины k;

(vi) Множество всех шаров радиуса $1/2^k$ кольца целых 2-адических чисел.

При этом особые точки множеств (i)-(vi) отождествляются следующим образом

$$\{0\} \leftrightarrow \{0\} \leftrightarrow \{1\} \leftrightarrow \{\infty\} \leftrightarrow \{\infty\} \leftrightarrow \{\infty\}.$$

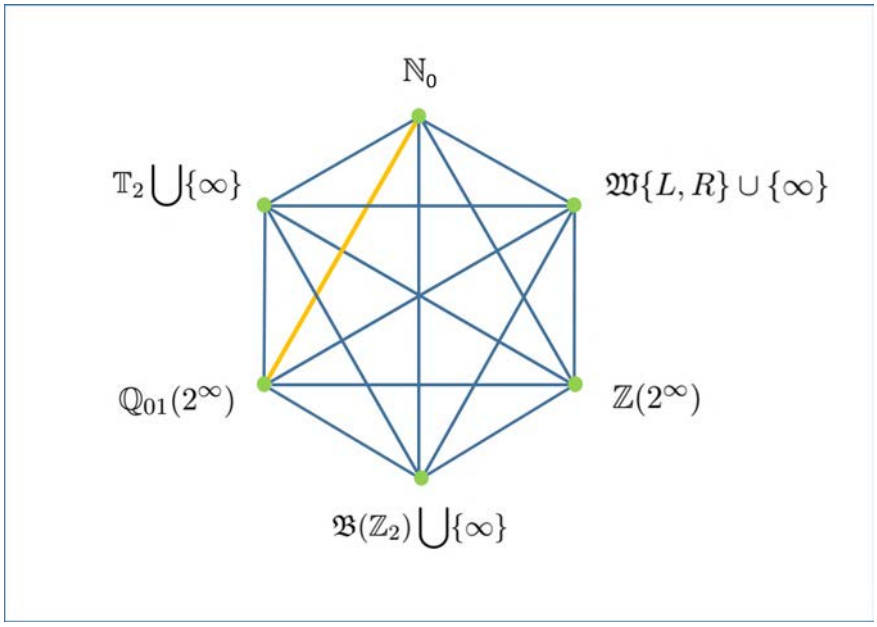


Рисунок 3.9 Соотношение между различными объектами, участвующими в формализации процесса дихотомического деления. Подробное описание см. в тексте.

Сформулированное выше предложение 3.1 легко обобщается на случай произвольного (не обязательно простого) числа p, выступающего в качестве основания позиционной системы счисления. Однако в приведенной выше формулировке данное предложение основывается на специфике числа два, которое является единственным четным простым числом. В случае $p > 2$ данное предложение претерпевает модификацию, которая является следствием того, что на группе $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ уже нельзя задать структуру p-ичного дерева. В результате этого шесть множеств, которые перечислены в предложении 3.1, распадаются на две тройки, внутри каждой из которых существуют взаимно однозначные соответствия между множествами, которые, однако, уже не распространяются за пределы этих троек:

$$\mathbb{N}_0 \simeq \mathbb{Z}(p^\infty) \simeq \mathbb{Q}_{01}(p^\infty),$$

$$\mathfrak{W}\{0, 1, \ldots, p-1\} \simeq \mathbb{T}_p \simeq \mathfrak{B}(\mathbb{Z}_p).$$

Каждая из этих структур имеет свои характерные особенности, которые ***вследствие указанных отождествлений скрытым образом присутствуют во всех остальных***:

(i) $\mathbb{T}_p \cong \mathfrak{W}\{0, 1, \ldots, p-1\}$ пути по дереву, p-ичная генерация объектов, аддитивные и мультипликативные функции на дереве;
(ii) $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty) \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ групповая операция, характеры, анализ Фурье, вейвлеты, корневые подпространства операторов сдвига, наличие операции свертки;
(iii) $\mathbb{N}_0$ – универсальное множество для индексации любых объектов.

Данное предложение позволяет устанавливать взаимно однозначное соответствие между пространствами функций:

$$\mathscr{F}(\mathbf{G_1}; \mathbb{V}) \cong \mathscr{F}(\mathbf{G_2}; \mathbb{V}),$$

где $\mathbf{G_1}$ и $\mathbf{G_2}$ любые два множества из множеств, перечисленных в предложении 3.1 или в его обобщении на случай $p > 2$. Каждое из этих шести канонических множеств $\mathbf{G}$ позволяет установить на функциональном пространстве $\mathscr{F}(\mathbf{G}; \mathbb{V})$ определенные структуры и переносить эти структуры с одного функционального пространства на другое.

Все описанные выше структуры и отношения могут быть отображены на одной круговой диаграмме, представляющей собой отображение двоичного дерева на систему концентрических 2^n-угольников.

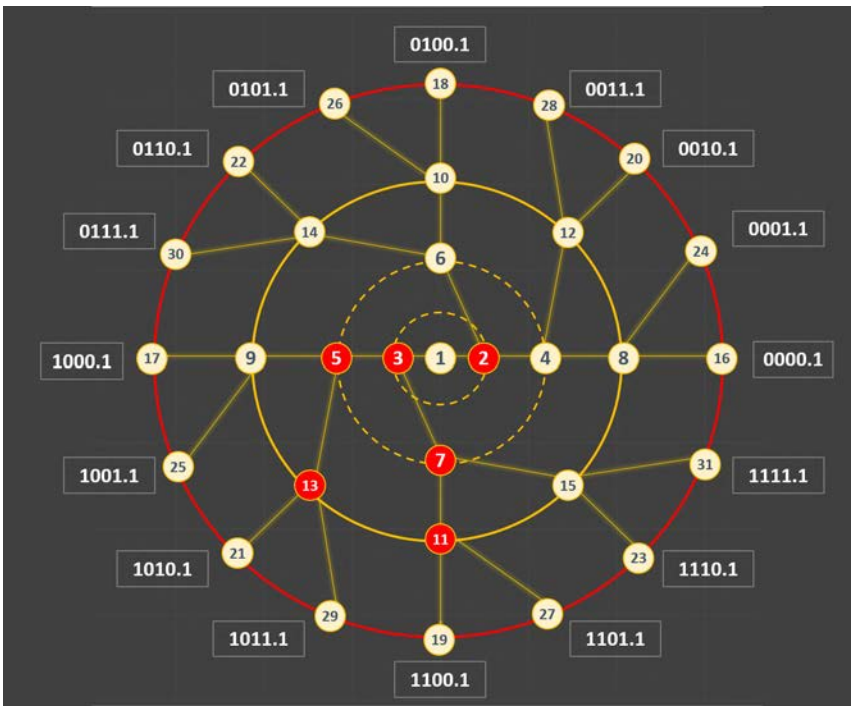


Рисунок 3.10 Каноническое отображение двоичного дерева на систему концентрических 2^n-угольников с канонической разметкой натуральными числами и простыми числами в качестве логической разметки.

На рисунке 3.10 изображено дерево $\mathbb{T}(2^k)$, где $k = 5$, на котором задана числовая и логическая маркировка. В качестве цифровой маркировки выбрана каноническая маркировка, описанная в предложении 3.1 выше. Логическим маркером 1 выделены простые числа, которые обозначены красным цветом. Круги соответствуют уровням дерева. Числа из внешнего круга можно отождествить с элементами кольца $\mathbb{Z}(2^{k-1})$ путем отбрасывания старшего разряда, значение которого всегда равно единице. 2-адическая метрика на этом кольце соответствует близости путей, которые ведут к двум различным точкам внешнего круга из единицы. Дерево $\mathbb{T}(2^k)$ естественным образом отождествляется с деревом 2-адических шаров $\mathfrak{B}(\mathbb{Z}(2^k))$. Чтобы получить отождествление с группой $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty) \simeq \mathbb{U}(2^\infty)$ нужно повернуть окружность с номером n против часовой стрелки на угол равный $\pi/2^n$, считая при этом, что нумерация окружностей начинается с нуля.

IV. Разложение Фурье-Хаара на конечных абелевых группах

В 1909 году Альфред Хаар (1885-1933) представил к защите в университете Геттингена тезисы докторской диссертации под названием «Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme» («К теории ортогональных систем функций»)([32]). Референтом по этой диссертации выступал Давид Гильберт (1862-1943). В данной диссертации Хаар ввел систему ортогональных функций, которая впоследствии была названа его именем и в современной терминологии представляет собой дискретную систему ортогональных вейвлетов на отрезке $[0, 1]$. В этой книге мы изложим две интерпретации разложения на дискретные вейвлеты Хаара, первая из которых будет связана с представлениями циклической группы $\mathbb{Z}(p^n)$ и вращениями правильных многоугольников, а вторая с распространением субстанции, энергии или информации по p-адическому дереву. Обе эти интерпретации являются изоморфными и переходят друг в друга при инверсном преобразовании, которое изменяет порядок индексов с последовательного на лексикографический. Они показывают тесную связь, которая существует между p-адическими деревьями и правильными p^n-угольниками. Мы также установим связь, которая существует между пространственными вейвлетами Хаара и процессом морфогенеза, что открывает возможности для описания природных форм с помощью вейвлетов.

Дискретное преобразование Хаара может быть сведено к дискретному преобразованию Фурье. Алгоритм вычисления преобразования Хаара достаточно прост и может быть описан в четырех предложениях. Возьмем последовательность из p^n чисел, разобьем ее на блоки, состоящие из p элементов в каждом, и выполним над каждым из этих блоков дискретное преобразование Фурье с нормировочным коэффициентом $1/p$. Затем составим из значений преобразования Фурье в нулевом элементе каждого блока новую последовательность, состоящую уже из p^{n-1} элементов, и продолжим действовать аналогичным образом до те пор, пока не придем к единственному элементу, который представляет собой среднее арифметическое исходной последовательности. Затем отбросим все элементы преобразований Фурье с нулевыми индексами, кроме последнего, как промежуточные результаты вычислений. Возникшая в результате такого преобразования последовательность из p^n элементов является преобразованием Хаара исходной последовательности.

Описанный выше алгоритм выглядит достаточно простым. Однако простота таких преобразований не должна вводить нас в заблуждение относительно их значимости. Подобно тому как в природе наиболее распространенными являются наиболее простые химические соединения (например, вода), которые именно за счет своего всеобщего распространения оказываются вовлеченными в наибольшее количество перекрестных связей, так и в математике наиболее простые конструкции имеют порой наиболее обширные и разветвленные семантические поля, что и определяет их место в общей конструкции естествознания. Далее мы покажем, что также как и преобразование Фурье, преобразование Хаара является одним из самых «онтологических» преобразований, поскольку в природе оно аналоговым образом реализуется в любой природной системе, в которой происходит дихотомическое распределение субстанции, энергии или информации. Поскольку любую систему с n-адическим делением можно виртуальным образом привести к системе с дихотомическим делением путем добавления виртуальных вершин, то можно сказать, что преобразование Хаара аналоговым образом реализуется в любой системе, в которой через сеть каналов, организованную в форме дерева, происходит распределение субстанции, энергии или информации.

Вейвлет представляет собой стремящуюся на бесконечности к нулю функцию с нулевым средним, сдвигая и растягивая которую, можно получить дискретную или непрерывную систему функций, которую можно затем использовать в качестве базиса для спектрального анализа функций, имеющих сложно структурированный спектр и полученных в результате наложения сигналов различного масштаба и локализации ([49]). В рамках данной книги мы будем иметь дело с p-адическими вейвлетами, которые обладают определенной спецификой и во многом отличаются от вейвлетов на вещественной прямой. Под p-адическим вейвлетом мы будем понимать непрерывную функцию с компактным носителем, имеющую нулевое средние. Мы также будем называть функции с нулевым средним асимметрическими, имея в виду аналогию с 2-адическим случаем, при котором нулевое среднее достигается за счет изменения знака функции при ее диадических сдвигах (например, функции Хаара или Радемахера).

Теория вейвлетов, применяемая в теории обработки сигналов, как правило строится на вещественной прямой $\mathbb{R}$ и предполагает сдвиги пространства до бесконечности во все стороны, а также его бесконечную делимость. В отличие от электромагнитных сигналов, распространение которых моделируется в пространствах $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$, все биологические процессы происходят в строго ограниченной области пространства, имеют определенную начальную точку во времени, а также имеют дискретную природу, ограниченную размером живой клетки, который составляет величину порядка 1-100 мкм. Поэтому с точки зрения биологии более подходящей областью для построения теории вейвлетов является область целых p-адических чисел. Построение теории p-адических вейвлетов восходит к работе С.В.Козырева ([10]), в которой были построены вейвлеты в функциональном пространстве $\mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_p;\mathbb{C})$, аналогичные вейвлетам Хаара. Системы ортогональных функций и вейвлеты на нульмерных группах рассматривались в серии статей С.Ф. Лукомского с соавторами ([13],[14]). В этих статьях можно найти библиографию работ, посвященных этой теме. В настоящей книге мы изложим теорию дискретных вейвлетов Хаара на кольце целых p-адических чисел, а также различные ее обобщения. Мы изложим ряд хорошо известных математических фактов, которые будут даны в несколько другой смысловой интерпретации, которая более подходит для их применения в области биологии и вообще в области процессов дихотомического ветвления. Мы также сделаем акцент на смысловой, а не на формально-аксиоматической стороне вопроса. В этой главе мы будем в основном рассматривать конечные последовательности чисел и конечномерные пространства, состоящие из функций, определенных на конечных множествах. В зависимости от контекста мы будем называть элементы этих пространства функциями или векторами. Говоря о конечных циклических группах, мы будем представлять их правильными многоугольниками, вписанными в единичный круг, и иногда будем говорить об их подгруппах и о соответствующих смежных классах как о многоугольниках, что значительно облегчает визуализацию описываемых вычислительных конструкций. Подобно тому как все свойства дискретного порообразования Фурье вытекают из свойств комплексных многочленов, определенных в вершинах правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность, все свойства дискретных вейвлетов Хаара, основываются на свойствах позиционной системы счисления с основанием p и свойствах правильного p^n-угольника, вписанного в единичную окружность. С точки зрения алгебры, такой многоугольник представляет собой циклическую абелеву группу порядка p^n, а все свойства дискретных вейвлетов Хаара вытекают из свойств

представлений этой группы. Особый интерес представляет случай, когда $p = 2$, что вызвано исключительной ролью, которую играет число 2 как в математике, так и в природе. Как и в случае с p-адическими числами свойства различных математических структур, связанных с группой $\mathbb{Z}(p^n)$, а также сама методологическая схема построения вейвлетов Хаара, определяются цепочкой вложенных циклических подгрупп этой группы. Если представить эту группу как группу корней степени из единицы и положить $\xi = \exp(2\pi i/p^n)$, то эта цепочка выглядит следующим образом:

$$\{1\} \subset \langle \xi^{p^{n-1}} \rangle \subset \dots \langle \xi^{p^2} \rangle \subset \langle \xi^p \rangle \subset \langle \xi \rangle = \mathbb{U}(p^n) \simeq \mathbb{Z}(p^n). \tag{59}$$

Действие группы $\mathbb{Z}(p^n)$ на самой себе естественным образом продолжается до действия группы $\mathbb{Z}(p^n)$ линейными операторами на множестве функций $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^n); \mathbb{V})$, по принципу $g[f](m) = f(g(m))$, где $\mathbb{V}$ может быть любым из множеств $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Как мы покажем ниже, этой последовательности из корней степени p^n из единицы соответствует последовательность из взаимно ортогональных идемпотентных операторов, которые осуществляют разложение пространства $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^n); \mathbb{V})$ в прямую сумму его подпространств, размерность которых уменьшается в геометрической прогрессии, что и дает нам разложение Хаара. Рассмотрим правильный p^n-угольник $\mathbb{Z}(p^n)$ и операцию его поворота на угол $2\pi/p$. Возникающая при этом перестановка вершин e очевидным образом удовлетворяет условию $e^p = 1$. Данная перестановка порождает оператор $\mathfrak{e}$, действующий на множестве функций $\mathscr{F}$, определенных в вершинах многоугольника по принципу $\mathfrak{e}[f] = f \circ e$. Оператор $\mathfrak{e}$ также удовлетворяет условию $\mathfrak{e}^p = 1$. Из данного условия вытекает тождество

$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a} = \frac{1}{p}(1 + \mathfrak{e} + \mathfrak{e}^2 + \dots + \mathfrak{e}^{p-1}). \tag{60}$$

Смысл оператора $\mathfrak{a}$ состоит в усреднении функций из множества $\mathscr{F}$ по всем правильным p-угольникам. Условие $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$ очевидно означает, что усреднение усредненной функции оставляет ее без изменения. Элементарный факт из линейной алгебры состоит в том, что каждый оператор удовлетворяющий этому условию раскладывает пространство функций $\mathscr{F}$ в прямую сумму двух подпространств $\mathscr{F}_0$ и $\mathscr{F}_1$, состоящих из функций, удовлетворяющих условиям $\mathfrak{a}[f] = f$ и $\mathfrak{a}[f] = 0$ соответственно. В случае оператора усреднения (60) первое подпространство состоит из всех функций, которые принимают постоянное значение на каждом правильном p-угольнике, а второе пространство состоит из всех функций среднее значение которых на каждом правильном p-угольнике равно 0. Операция факторизации $\mathbb{Z}(p^{n-1}) = \mathbb{Z}(p^n)/\mathbb{Z}(p)$ позволяет превратить множество всех правильных p-угольников в правильный p^{n-1}-угольник, а пространство функций $\mathscr{F}_0$ интерпретировать как пространство функций, определенных на группе $\mathbb{Z}(p^{n-1})$. Поэтому описанную выше процедуру разложения можно рекурсивно продолжить дальше. В результате этого возникает разложение вида

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \oplus \mathscr{F}_{01} \oplus \mathscr{F}_{001} \oplus \dots \oplus \mathscr{F}_{0\dots01} \oplus \mathscr{F}_{0\dots00}, \tag{61}$$

которое и дает нам разложение Фурье-Хаара. Далее мы покажем, что вейвлеты Хаара на кольце $\mathbb{Z}_2$ целых 2-адических чисел кодируют асимметрии, которые возникают при распределении субстанции, энергии или информации по некоторому множеству реципиентов посредством алгоритма дихотомического деления, как это показано на рисунке 4.1, а вейвлеты Харра на группе $\mathbb{Q}_{01}(2^n)$ отражают асимметрию в распределении потока событий, связанного с формированием некоторого фрактального объекта.

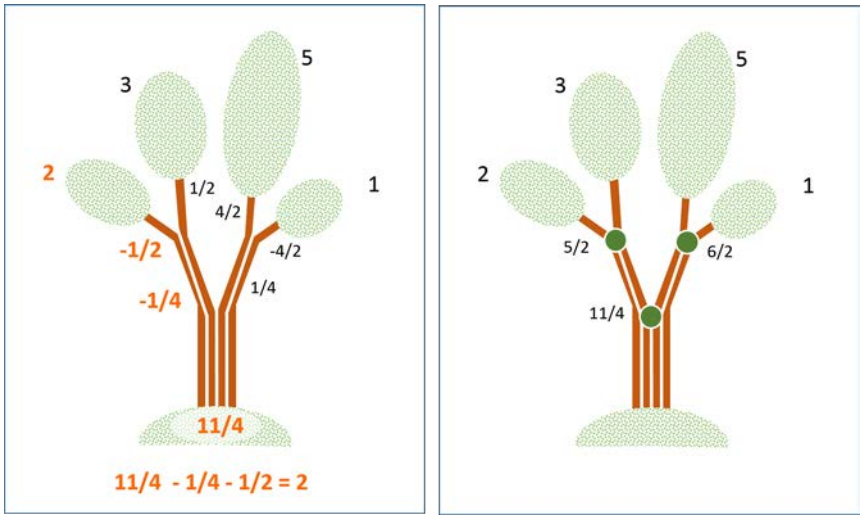


Рисунок 4.1 Схема построения разложения Хаара на двоичном дереве.

Существует глубокая связь между мультипликативными свойствами натуральных чисел, структурными свойствами соответствующих им циклических групп и строением пространств функций, которые определены на этих группах. Разложение Хаара является одной из иллюстраций этого факта. Построение разложения Хаара в пространстве функций, определенных на состоящем из p^n элементов множестве $\mathfrak{A}$ и принимающих значение в любом из числовых полей $\{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, состоит из трех шагов.

(i) На первом шаге пространство функций $\mathscr{F}(\mathfrak{A})$, раскладывается в сумму одномерного пространства постоянных функций и n ортогональных друг другу подпространств, состоящих из функций, которые мы далее называем асимметрическими, по аналогии со случаем $\mathfrak{A} = \mathbb{Z}(2^n)$, при котором такие функции меняют свой знак при сдвигах на элементы соответствующих подгрупп группы $\mathbb{Z}(2^n)$. Эти подпространства соответствуют различным степеням числа p и геометрически соответствуют системе из n «концентрических p-адических сфер с центром в нуле».

(ii) На втором шаге каждое из таких подпространств разлагается в ортогональную сумму более мелких подпространств, которые соответствуют отдельным p-адическим шарам или p-адическим блокам, если рассматривать преобразование Хаара в его традиционном инверсном представлении;

(iii) На третьем шаге в каждом из этих подпространств выбирается ортогональный базис, состоящий из вейвлетов Хаара в количестве $p-1$. Поскольку каждое из этих пространств изоморфно пространству $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p))$, то в качестве такого базиса как правило выбирается базис, состоящий из реплик неединичных характеров группы $\mathbb{Z}(p)$. Коэффициенты разложения по полученным таким образом векторам/функциям дают нам коэффициенты разложения/преобразования Харра.

□ Разложение, возникающее на первом шаге описанного выше алгоритма, мы будем далее называть разложением Фурье-Хаара, так как оно возникает из разложения Фурье путем его агрегации по p-адическим сферам. Разложение, возникающее на втором шаге алгоритма мы будем называть агрегированным разложением Хаара. В том случае, когда из контекста рассуждений понятно о какой степени детализации идет речь мы будем называть оба разложения, возникающие на шаге (ii) и (iii), «разложениями Хаара».

Поскольку множество p-адических шаров образует корневое p-адическое дерево, то все три описанные выше разложения приобретают содержательное значение, связанное с распространением субстанции, энергии или информации по сети, организованной в форме корневого p-адического дерева. Если на множестве $\mathfrak{A}$ определена положительная вещественная функция f, то ее усреднение по p-адическим шарам при указанной интерпретации приобретает смысл плотности потока, проходящего через соответствующую вершину дерева p-адических шаров, а асимметрические функции, представляющие собой разность плотности потока в двух инцидентных вершинах, приобретает смысл плотности стационарного потока, проходящего через соответствующее ребро этого дерева. В случае, когда $p = 2$, коэффициенты в разложении по вейвлетам могут быть отображены на ребра дерева шаров и приобретают непосредственный физический смысл. В случае $p > 2$, такое отображение также возможно, однако оно не несет в себе содержательного смысла и скорее представляет собой мнемоническую схему, предназначенную для визуализации процесса разложения по вейвлетам. Положительную функцию f также можно интерпретировать как случайную величину, заданную на вероятностном пространстве, содержащим p^n возможных равновероятных исходов. В этом случае усреднение функции f по p-адическим шарам приобретает смысл условного математического ожидания случайной величины, рассчитанного для соответствующего события по формуле Байеса. Распределение этих значений по дереву шаров обозначает иерархию таких математических ожиданий, составленную для дерева событий, представленных p-адическими шарами. Асимметрические функции в этом случае кодируют разности таких математических ожиданий, возникающие при перемещении по дереву событий. Мы далее обсудим эти вопросы более детально в параграфе 4.4. В случае перехода от группы $\mathbb{Z}(p^n)$ к произвольной конечной абелевой группе $\mathfrak{A}$ описанная логика в основных своих чертах остается без изменения. Линейную цепочку идеалов кольца $\mathbb{Z}(p^n)$ заменяет цепочка вложенных друг в друга подгрупп группы $\mathfrak{A}$, p-адические шары заменяются на смежные классы по этим подгруппам, а дерево шаров превращается в дерево смежных классов, как это было описано в параграфе 3.1. Ребра этого дерева индексируются элементами фактор групп, возникающих при факторизации двух последовательно идущих подгрупп в данной цепочке. В случае конкретной абелевой группы $\mathfrak{A}$ как для нее самой, так и для всех ее подгрупп и фактор групп имеет место канонический изоморфизм $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}^*$ между абелевой группой и группой ее характеров, поэтому ребра дерева смежных классов естественным образом индексируются элементами фактор групп указанной выше цепочки. Это позволяет осуществить каноническое отображение коэффициентов в разложении Хаара на ребра дерева смежных классов. В случае произвольной конечной абелевой группы $\mathfrak{A}$ такое отображение является условным и зависит от выбора базиса в этой группе.

Можно построить два конечных и три бесконечных варианта разложения Хаара. Конечные разложения относятся к функциям, определенным на множествах $\mathbb{Z}(p^n)$ и $\mathbb{N}(p^n)$, а бесконечные разложения относятся к функциям, определенным на множествах $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ и $\mathbb{N}_0$. Аналогичным образом разложения Хаара строятся для пространств функций, определенных на любом множестве, на котором свободно действует одна из трех абелевых групп $\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_{01}(p^\infty), \mathbb{Z}(p^n)$. В случае конечного множества произвольной мощности $n = \prod_i p_i^{a_i}$, преобразование Хаара является тензорным произведением преобразований Хаара на множествах мощности $p_i^{a_i}$. В случае бесконечных множеств, таких как $\mathbb{Z}_p$,

$\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ или $\mathbb{N}_0$ определенные на этих множествах функции аппроксимируются функциями, определенными на множествах $\mathbb{Z}(p^n)$, $\mathbb{Q}_{01}(p^n)$ и $\mathbb{N}(p^n)$, а разложение Харра получается путем предельного перехода при $n \to \infty$. Для сходимости данного разложения требуется чтобы функция была интегрируема (в случае $\mathbb{Z}_p$) или имела конечное среднее в смысле Чезаро (в случае $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ или $\mathbb{N}_0$). Мы рассмотрим бесконечномерные разложения далее в главе V.

4.1 Разложение на асимметрические функции

В этом параграфе мы изложим теорию дискретного разложения Хаара в наиболее общей ее форме, когда область определения рассматриваемых функций представляет собой абелеву группу, в которой задана цепочка ее вложенных друг в друга подгрупп. Основным конструктивным блоком для построения разложения Хаара является приведенная ниже лемма 4.1. Прежде чем ее сформулировать, введем необходимые определения и обозначения.

- Пространство функций $\mathscr{F}(\mathfrak{A};\mathbb{V})$, определенных на некотором множестве $\mathfrak{A}$ и принимающих значение в одном из числовых полей $\mathbb{V} \in \{\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, будем для краткости обозначать символом $\mathscr{F}(\mathfrak{A})$. Если $\mathfrak{A}$ есть циклическая группа $\mathbb{Z}(n)$, то будем сокращать это обозначение до $\mathscr{F}(n)$. Если множество $\mathfrak{A}$ конечно, то на множестве функций/векторов $\mathscr{F}(\mathfrak{A};\mathbb{V})$ естественным образом определяется скалярное произведение, которое превращает это векторное пространство в евклидово.

- Пусть $\mathfrak{K}$ есть подгруппа конечной абелевой группы $\mathfrak{A}$. Будем обозначать символом $\mathscr{C}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K})$ подпространство в $\mathscr{F}(\mathfrak{A})$, состоящее из функций, которые принимают постоянное значение на смежных классах по подгруппе $\mathfrak{K}$, или, что то же самое, подмножество функций из множества $\mathscr{F}(\mathfrak{A})$, инвариантных относительно сдвигов на элементы из подгруппы $\mathfrak{K}$. Будем называть такие функции ***симметрическими*** относительно подгруппы $\mathfrak{K}$. Будем обозначать символом $\mathscr{F}(0)$ пространство $\mathscr{C}(\mathfrak{A}/\mathfrak{A})$, то есть пространство функций, являющихся постоянными на группе $\mathfrak{A}$;

- Будем обозначать символом $\mathscr{A}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K})$ подпространство в $\mathscr{F}(\mathfrak{A})$, состоящее из функций, среднее значение которых на смежных классах по подгруппе $\mathfrak{K}$ равно нулю. Будем называть такие функции ***асимметрическими*** относительно подгруппы $\mathfrak{K}$.

- Пусть $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ есть цепочка подгрупп конечной абелевой группы $\mathfrak{A}$. Будем обозначать символом $\mathscr{A}(\mathfrak{A}/\mathfrak{B}/\mathfrak{C})$ подмножество функций в $\mathscr{F}(\mathfrak{A})$, которые принимают постоянной значение на смежных классах по подгруппе $\mathfrak{C}$ и имеют нулевое среднее на смежных классах по подгруппе $\mathfrak{B}$. Очевидно, что $\mathscr{A}(\mathfrak{A}/\mathfrak{B}/\mathfrak{C}) = \mathscr{A}((\mathfrak{A}/\mathfrak{C})/(\mathfrak{B}/\mathfrak{C}))$.

- Последовательность гомоморфизмов абелевых групп

$$\mathfrak{K} \xrightarrow{\ i\ } \mathfrak{A} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathfrak{A}/\mathfrak{K}$$

  называется точной, если ядро гомоморфизма π совпадает с образом гомоморфизма i.

- Будем обозначать символом $\mathscr{S}(\mathfrak{K})$ подмножество функционального пространства $\mathscr{F}(\mathfrak{A})$, состоящее из функций, носитель которых лежит внутри множества $\mathfrak{K}$.

Лемма 4.1 Точная последовательность гомоморфизмов конечных абелевых групп

$$\mathfrak{K} \xrightarrow{\ i\ } \mathfrak{A} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathfrak{A}/\mathfrak{K}$$

и оператор $\mathfrak{a}(\mathfrak{K})$ усреднения функций из множества $\mathscr{F}(\mathfrak{A})$ по смежным классам группы $\mathfrak{K}$, определяемый формулой

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{K})[f](x) = \frac{1}{|\mathfrak{K}|}\sum_{g\in\mathfrak{K}} f(x+g),$$

индуцируют точную последовательность линейных отображений функциональных пространств

$$\mathscr{A}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}) \xrightarrow{\ \widehat{i}\ } \mathscr{F}(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\ \mathfrak{a}(\mathfrak{K})\ } \mathscr{F}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}) \simeq \mathscr{C}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K})\ ,$$

которая задает разложение векторного пространства $\mathscr{F}(\mathfrak{A})$ в прямую сумму двух ортогональных подпространств

$$\mathscr{F}(\mathfrak{A}) = \mathscr{C}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}) \oplus \mathscr{A}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}), \tag{62}$$

состоящих соответственно из функций, постоянных на смежных классах фактор группы $\mathfrak{A}/\mathfrak{K}$, и функций, имеющих нулевое среднее на этих классах. В случае комплекснозначных функций преобразование Фурье переводит данное разложение в разложение

$$\mathscr{F}(\mathfrak{A}^*) = \mathscr{S}(\mathfrak{K}^\perp) \oplus \mathscr{S}(\mathfrak{A}^* \setminus \mathfrak{K}^\perp). \tag{63}$$

Доказательство. Очевидно, что ядром оператора усреднения по смежным классам подгруппы $\mathfrak{K}$ является множество функций $\mathscr{A}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K})$, состоящее из функций, сумма значений которых по любому смежному классу подгруппы $\mathfrak{K}$ равна нулю. Образом оператора усреднения является множество функций $\mathscr{C}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K})$, состоящее из функций, которые принимают постоянное значение на смежных классах по подгруппе $\mathfrak{K}$. Оператор $\mathfrak{a}(\mathfrak{K})$ является индемпотентным, то есть удовлетворяет условию $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$, поэтому указанное в лемме разложения является стандартным разложением векторного пространства в прямую сумму ядра и образа оператора проектирования на подпространство. Ортогональность разложения (62) легко проверяется путем группировки суммы, задающей скалярное произведение, по отдельным смежным классам. Преобразование Фурье переводит подпространство $\mathscr{C}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K})$, инвариантное относительно сдвигов на элементы из подгруппы $\mathfrak{K}$, в подпространство $\mathscr{S}(\mathfrak{K}^\perp)$. Поскольку преобразование Фурье является унитарным, оно отображает ортогональное дополнение $\mathscr{A}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K})$ к пространству $\mathscr{C}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K})$ в ортогональное дополнение к пространству $\mathscr{S}(\mathfrak{K}^\perp)$. Очевидно, что таким ортогональным дополнением является пространство $\mathscr{S}(\mathfrak{A}^* \setminus \mathfrak{K}^\perp)$, что доказывает справедливость разложения (63). ⊠

Теорема 4.2 (Разложение Фурье-Хаара на конечной абелевой группе) Пусть дана конечная абелева группа $\mathfrak{A}$ и цепочка, состоящая из $n-1$ ее различных подгрупп:

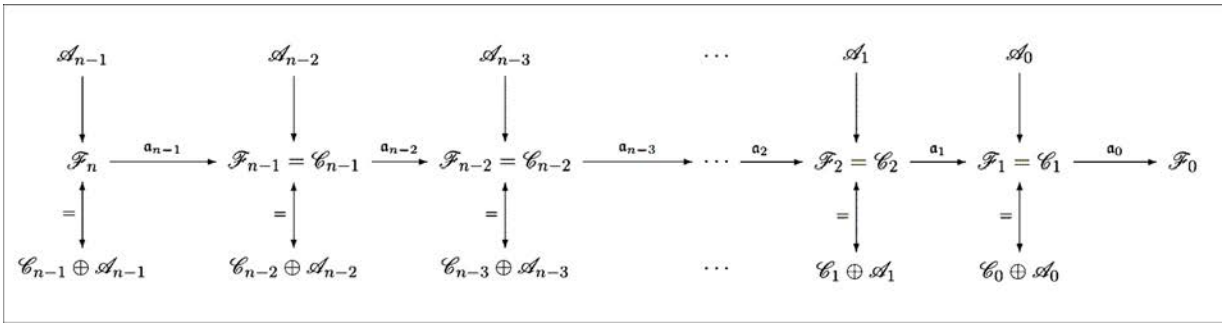
$$\mathfrak{K}_n = \{0\} \subset \mathfrak{K}_{n-1} \subset \mathfrak{K}_{n-2} \subset \cdots \subset \mathfrak{K}_3 \subset \mathfrak{K}_2 \subset \mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{A} = \mathfrak{K}_0, \tag{64}$$

тогда справедливы следующие утверждения:

(i) Функциональное пространство $\mathscr{F}(\mathfrak{A})$ разлагается в прямую сумму ортогональных другу другу подпространств:

$$\mathscr{F}(\mathfrak{A}) = \mathscr{F}(0) \oplus \sum_{m=0}^{n-1} \mathscr{A}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_m/\mathfrak{K}_{m+1}); \tag{65}$$

(ii) Процесс построения данного разложения описывается следующей диаграммой:



на которой приняты следующие обозначения

- $\mathfrak{A}_m = \mathfrak{A}/\mathfrak{K}_m$; (66)
- $\overline{\mathfrak{K}}_m = \mathfrak{K}_m/\mathfrak{K}_{m+1}$;
- $\mathscr{A}_m = \mathscr{A}(\mathfrak{A}_{m+1}/\overline{\mathfrak{K}}_m) = \mathscr{A}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_m/\mathfrak{K}_{m+1})$;
- $\mathscr{C}_m = \mathscr{C}(\mathfrak{A}_m) = \mathscr{C}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_m)$;
- $\mathscr{F}_m = \mathscr{F}(\mathfrak{A}_m) = \mathscr{F}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_m)$,

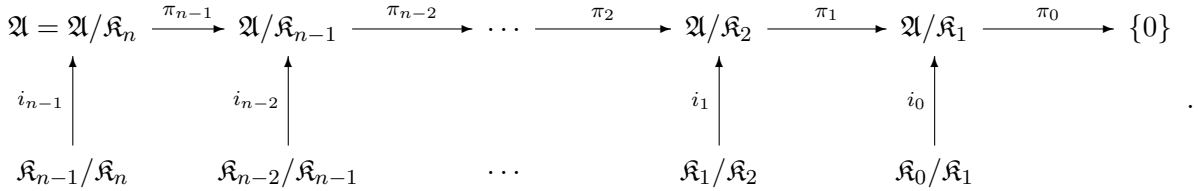
а операторы проектирования $\mathfrak{a}_m : \mathscr{C}(\mathfrak{A}_{m+1}) \to \mathscr{C}(\mathfrak{A}_m)$ определяются формулой:

$$\mathfrak{a}_m[f](x) = \frac{1}{|\overline{\mathfrak{K}}_m|} \sum_{g \in \overline{\mathfrak{K}}_m} f(x+g).$$

(iii) В случае комплекснозначных функций преобразование Фурье переводит указанное разложение в разложение вида:

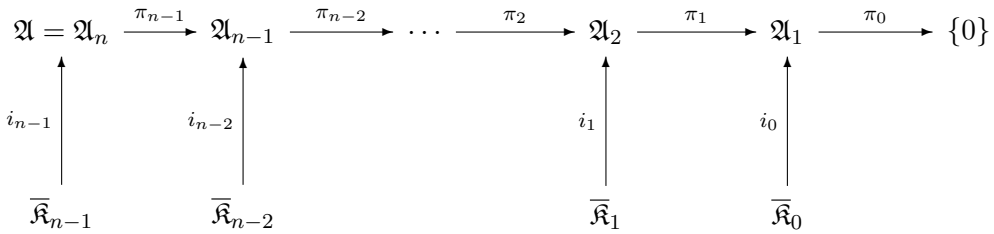
$$\mathscr{F}(\mathfrak{A}^*) = \langle \delta(0) \rangle \oplus \sum_{m=0}^{n-1} \mathscr{S}(\mathfrak{K}_{m+1}^{\perp} \setminus \mathfrak{K}_m^{\perp}). \tag{67}$$

Доказательство. Цепочка абелевых групп (79) индуцирует следующую цепочку абелевых групп, полученную из цепочки (79) с помощью операции факторизации:



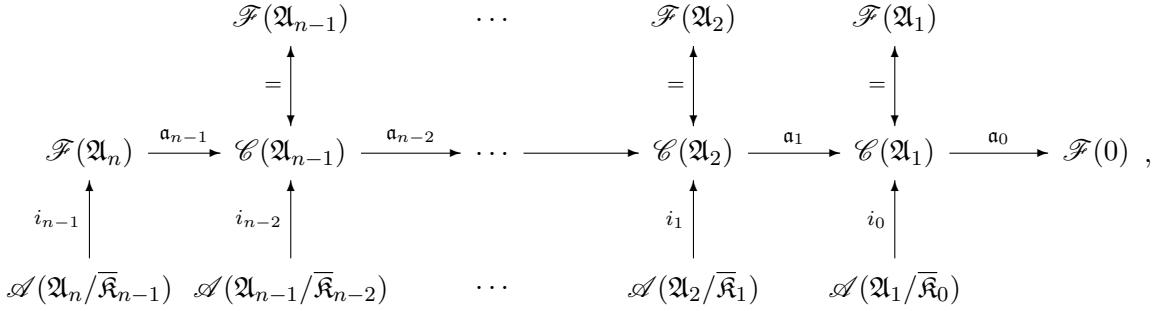
(68)

В принятых обозначениях данную цепочку можно также представить в виде



(69)

Цепочки (79) и (69) индуцируют следующую диаграмму линейных отображений функциональных пространств:



(70)

Оператор усреднения $\mathfrak{a}_{m-1}$ функции $f \in \mathscr{C}(\mathfrak{A}_m)$ по смежным классам подгруппы $\overline{\mathfrak{K}}_{m-1}$ дает функцию, которая является постоянной на этих смежных классах, и может быть интерпретирована как функция на фактор группе $\mathfrak{A}_m/\overline{\mathfrak{K}}_{m-1} = \mathfrak{A}_{m-1}$. Поэтому $\mathfrak{a}_{m-1}[f] \in \mathscr{C}(\mathfrak{A}_{m-1})$. Операторы усреднения $\{\mathfrak{a}_m\}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\mathfrak{a}_{m-1} \circ \mathfrak{a}_m = \mathfrak{a}_{m-1}, \quad \mathfrak{a}_m^2 = \mathfrak{a}_m.$$

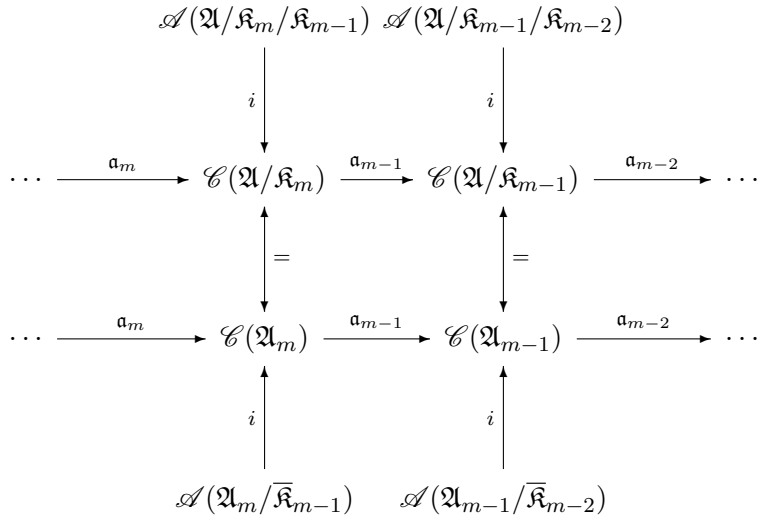
Любую функцию, определенную на фактор группе можно очевидным образом интерпретировать как функцию, определенную на исходной группе. Поэтому, все пространства функций, указанные на диаграмме (70) можно очевидным образом интерпретировать как подмножества пространства $\mathscr{F}(\mathfrak{A})$ функций, определенных на исходной группе $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_n$. Все операторы $\mathfrak{a}_m$ можно также полагать действующими на подпространствах пространства $\mathscr{F}(\mathfrak{A})$. Применяя лемму 4.1 к цепочке абелевых групп

$$\overline{\mathfrak{K}}_{m-1} \xrightarrow{i_{m-1}} \mathfrak{A}_m \xrightarrow{\pi_{m-1}} \mathfrak{A}_{m-1} \ ,$$

мы можем заключить, что оператор $\mathfrak{a}_{m-1}$ является оператором ортогонального проектирования пространства $\mathscr{C}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_m) = \mathscr{C}(\mathfrak{A}_m)$ на подпространство $\mathscr{C}(\mathfrak{A}_{m-1})$. Ядром этого оператора является подпространство $\mathscr{A}(\mathfrak{A}_m/\overline{\mathfrak{K}}_{m-1})$. Оператор $\mathfrak{a}_{m-1}$ задает разложение пространства $\mathscr{C}(\mathfrak{A}_m)$ в прямую сумму двух ортогональных подпространств

$$\mathscr{C}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_m) = \mathscr{C}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_{m-1}) \oplus \mathscr{A}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_{m-1}/\mathfrak{K}_m) \quad \text{или} \quad \mathscr{C}(\mathfrak{A}_m) = \mathscr{C}(\mathfrak{A}_{m-1}) \oplus \mathscr{A}(\mathfrak{A}_m/\overline{\mathfrak{K}}_{m-1}). \tag{71}$$

Детальное соотношение между этими пространствами показано на следующей диаграмме:



(72)

Разложение (65) получается n-кратным применением рекуррентной формулы (62), начиная с пространства $\mathscr{F}(\mathfrak{A}) = \mathscr{C}(\mathfrak{A}_n)$. Очевидно, что последовательность построения данного разложения соответствует той последовательности, которая показана на диаграмме (65). Данная диаграмма описывает следующую последовательность вычислений, выполняемых для любой функции $f \in \mathscr{F}(\mathfrak{A}_n)$:

(73)

$$\begin{aligned}
f_{n-1} &= f - \mathfrak{a}_{n-1}[f] = f - s_{n-1},\\
f_{n-2} &= s_{n-1} - \mathfrak{a}_{n-2}[s_{n-1}] = s_{n-1} - s_{n-2},\\
f_{n-3} &= s_{n-2} - \mathfrak{a}_{n-3}[s_{n-2}] = s_{n-2} - s_{n-3},\\
&\dots\\
f_{n-k} &= s_{n-k+1} - \mathfrak{a}_{n-k}[s_{n-k+1}] = s_{n-k+1} - s_{n-k},\\
&\dots\\
f_0 &= s_1 - \mathfrak{a}_0[s_1] = s_1 - \mathfrak{a}_0[f].
\end{aligned}$$

Из этих формул видно, что асимметрические функции соответствующего уровня представляю собой разность двух симметрических функций, находящихся на соседних уровнях и полученных в результате последовательного действия на функцию f операторов усреднения. В этих формулах $s_m = \mathfrak{a}_m[f]$, $f_m \in \mathscr{A}(\mathfrak{A}_{m+1}/\overline{\mathfrak{K}}_m) = \mathscr{A}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_m/\mathfrak{K}_{m+1})$, и $s_k \in \mathscr{C}(\mathfrak{A}_{m+1}/\mathfrak{K}_m)$. Сложив первый и третий столбцы этих формул, мы получим следующее разложение для функции f:

$$f = \sum_{m=0}^{n-1} f_m + \mathfrak{a}_0[f], \quad f_m \in \mathscr{A}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_m/\mathfrak{K}_{m+1}). \tag{74}$$

В случае комплекснозначных функций из леммы 4.1 следует, что преобразование Фурье $\mathbf{F} : \mathscr{F}(\mathfrak{A}) \to \mathscr{F}(\mathfrak{A}^*)$ отображает подпространство $\mathscr{C}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_m)$ в подпространство $\mathscr{S}(\mathfrak{K}_m^\perp)$, переводя соответствующие цепочки подпространств друг в друга, как показано на следующей диаграмме:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathscr{C}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_1) & \xrightarrow{i} & \mathscr{C}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_2) & \xrightarrow{i} & \cdots & \xrightarrow{i} & \mathscr{C}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_{n-2}) & \xrightarrow{i} & \mathscr{C}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_{n-1}) & \xrightarrow{i} & \mathscr{F}(\mathfrak{A}) \\
\downarrow \mathbf{F} & & \downarrow \mathbf{F} & & & & \downarrow \mathbf{F} & & \downarrow \mathbf{F} & & \downarrow \mathbf{F} \\
\mathscr{S}(\mathfrak{K}_1^\perp) & \xrightarrow{i} & \mathscr{S}(\mathfrak{K}_2^\perp) & \xrightarrow{i} & \cdots & \xrightarrow{i} & \mathscr{S}(\mathfrak{K}_{n-2}^\perp) & \xrightarrow{i} & \mathscr{S}(\mathfrak{K}_{n-1}^\perp) & \xrightarrow{i} & \mathscr{F}(\mathfrak{A}^*)
\end{array}$$

Поскольку преобразование Фурье является унитарным, то оно сохраняет отношение ортогонального дополнения между соответствующими подпространствами. Подпространства $\mathscr{A}(\mathfrak{A}_{m-1}/\overline{\mathfrak{K}}_{m-2})$ и $\mathscr{S}((\mathfrak{K}_{m-1} \setminus \mathfrak{K}_m)^\perp)$ представляют собой ортогональные дополнения в двух соответствующих друг другу звеньях цепочки. Поэтому преобразование Фурье переводит разложение (71) в разложение

$$\mathscr{S}(\mathfrak{K}_m^\perp) = \mathscr{S}(\mathfrak{K}_{m-1}^\perp) \oplus \mathscr{S}((\mathfrak{K}_{m-1} \setminus \mathfrak{K}_m)^\perp).$$

Последовательное n-кратное применение этой рекуррентной формулы, начиная с пространства $\mathscr{F}(\mathfrak{A}^*)$ дает нам разложение (67). Этим завершается доказательство теоремы 4.2. ⊠

Посмотрим, как изменяется размерность пространств $\mathscr{A}(\mathfrak{A}_i/\overline{\mathfrak{K}}_{i-1})$ на каждом шаге разложения. Очевидно, что для каждой группы $\mathfrak{A}_m$ в цепочке (69) имеет место соотношение

$$|\mathfrak{A}_m| = \prod_{i=0}^{m-1} |\overline{\mathfrak{K}}_i|.$$

Из разложения $\mathscr{F}(\mathfrak{A}_m) = \mathscr{F}(\mathfrak{A}_{m-1}) \oplus \mathscr{A}(\mathfrak{A}_m/\overline{\mathfrak{K}}_{m-1})$ следует равенство:

$$\dim(\mathscr{A}(\mathfrak{A}_m/\overline{\mathfrak{K}}_{m-1})) = |\mathfrak{A}_m| - |\mathfrak{A}_{m-1}| = \prod_{i=0}^{m-1} |\overline{\mathfrak{K}}_i| - \prod_{i=0}^{m-2} |\overline{\mathfrak{K}}_i| = (|\overline{\mathfrak{K}}_{m-1}| - 1) \prod_{i=0}^{m-2} |\overline{\mathfrak{K}}_i|.$$

Поэтому в терминах размерности разложение (77) дает следующее равенство:

$$|\mathfrak{A}_n| = \prod_{i=0}^{n-1} |\overline{\mathfrak{K}}_i| = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} [(|\overline{\mathfrak{K}}_i| - 1) \prod_{j=1}^{i-1} |\overline{\mathfrak{K}}_j|],$$

справедливость которого легко проверяется его последовательным раскрытием слева направо. Например, легко проверяется тождество

$$\mathfrak{k}_0\mathfrak{k}_1\mathfrak{k}_2 = 1 + (\mathfrak{k}_0 - 1) + (\mathfrak{k}_1 - 1)\mathfrak{k}_0 + (\mathfrak{k}_2 - 1)\mathfrak{k}_1\mathfrak{k}_0.$$

Разложение (65) показывает, что каждую функцию из множества $\mathscr{F}(\mathfrak{A})$ можно получить из постоянной функции путем последовательного добавления к ней асимметричных функций, определенных на смежных классах постепенно уменьшающего размера, которые можно интерпретировать как сигналы постепенно увеличивающейся частоты. Наибольший интерес представляет случай, когда $\mathfrak{A} = \mathbb{Z}(p^n)$. Мы рассмотрим этот случай более подробно в следующем параграфе.

4.2 Случай циклической группы

Особенно прозрачный смысл разложение Фурье-Хаара приобретает в случае циклической группы. Остановимся на этом случае более подробно. Рассмотрим точную последовательность циклических групп:

$$\mathbb{Z}(q) \simeq (p) \xrightarrow{\ i\ } \mathbb{Z}(pq) \xrightarrow{\ \pi\ } \mathbb{Z}(pq)/(p) \simeq \mathbb{Z}(p)\ ,$$

где $\pi(x) = x \mod p$. Будем предполагать, что циклическая группа $\mathbb{Z}(pq)$ реализована в виде правильного pq-угольника, вписанного в единичную окружность, а отображение π

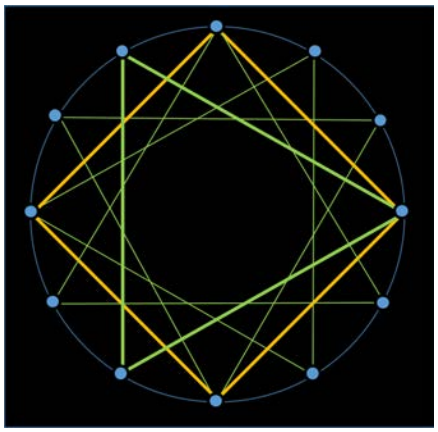


Рисунок 4.2 Случай $p = 4, q = 3$.

представляет собой возведение комплексного числа в степень q. Подгруппа (p), являющаяся ядром этого гомоморфизма, представляет собой правильный q-угольник, а фактор группа $\mathbb{Z}(pq)/(p) \simeq \mathbb{Z}(p)$ может быть одновременно реализована как правильный p-угольник и как множество правильных q-угольников, представляющих собой смежные классы по подгруппе $(p) \simeq \mathbb{Z}(q)$. Преимущество круговой визуализации состоит в том, что на одной диаграмме можно увидеть все перечисленные выше объекты. Рассмотрим операцию поворота многоугольника $\mathbb{Z}(pq)$ на угол $2\pi/q$. Возникающая при этом перестановка вершин e порождает оператор $\mathfrak{e}$, действующий на функции $f \in \mathscr{F}(pq)$, определенные в вершинах многоугольника, по принципу $\mathfrak{e}[f] = f \circ e$.

Очевидно, что $\mathfrak{e}^q = 1$, то есть данный оператор является корнем из единицы степени q. Из этого условия вытекает тождество

$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a} = \frac{1}{q}(1 + \mathfrak{e} + \mathfrak{e}^2 + \cdots + \mathfrak{e}^{q-1}).$$

Смысл оператора $\mathfrak{a}$ состоит в усреднении функций из множества $\mathscr{F}(pq)$ по каждому правильному q-угольнику. Условие $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$ очевидно означает, что усреднение усредненной функции оставляет ее без изменения. Элементарный факт из линейной алгебры состоит в том, что каждый отличный от нуля и единицы оператор, удовлетворяющий этому условию, определяет разложение пространства функций $\mathscr{F}(pq)$ в прямую сумму двух подпространств $\mathscr{C}(pq|q)$ и $\mathscr{A}(pq|q)$, состоящих из функций, удовлетворяющих условиям $\mathfrak{a}[f] = f$ и $\mathfrak{a}[f] = 0$ соответственно:

$$\mathscr{F}(pq) = \mathscr{C}(pq|q) \oplus \mathscr{A}(pq|q) \simeq \mathscr{F}(p) \oplus \mathscr{A}(pq|q). \tag{75}$$

При этом разложение любой функции $f \in \mathscr{F}(pq)$ задается формулой:

$$f = \mathfrak{a}(f) + (1 - \mathfrak{a})f. \tag{76}$$

Первое подпространство $\mathscr{C}(pq|q)$ состоит из всех функций, которые принимают постоянное значение на каждом правильном q-угольнике. Это пространство можно очевидным образом отождествить с пространством функций, определенных на фактор группе, которая изоморфна $\mathbb{Z}(p)$, а второе пространство $\mathscr{A}(pq|q)$ состоит из всех функций среднее значение которых на каждом правильном q-угольнике равно нулю. Оператор $\mathfrak{a} : \mathscr{F}(pq) \to \mathscr{C}(pq|q)$ является оператором проектирования с ядром $\mathscr{A}(pq|q)$. Соотношение

$$0 = 1 - \mathfrak{e}^q = (1 - \mathfrak{e}) \cdot (1 + \mathfrak{e} + \mathfrak{e}^2 + \cdots + \mathfrak{e}^{q-1}) = q \cdot (1 - \mathfrak{e}) \cdot \mathfrak{a}$$

показывает, что подпространство $\mathscr{C}(pq|q)$, является собственным подпространством для оператора $\mathfrak{e}$ и соответствует собственному значению равному единице, то есть оператор $\mathfrak{e}$ действует на этом подпространстве тождественным образом. Поэтому, разложение (75) можно продолжить в том случае, когда существует оператор $\mathfrak{e}_1$, действующий в функциональном пространстве $\mathscr{C}(pq|q) \simeq \mathscr{F}(q)$ и такой, что $\mathfrak{e}_1^k = \mathfrak{e}$, для некоторого $k > 1$, что соответствует дальнейшему делению углового пространства. Формула (75) показывает связь между разложением числа на множители, делением углового пространства и разложением пространства функций, определенных на соответствующей ему циклической группе, в прямую сумму двух подпространств симметрических и асимметрических функций. Если, например, $m = p_0p_1p_2$, то мы имеем следующую последовательность разложений:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(p_0p_1p_2) &= \mathscr{C}(p_0p_1p_2|p_2) \oplus \mathscr{A}(p_0p_1p_2|p_2) \simeq \mathscr{F}(p_0p_1) \oplus \mathscr{A}(p_0p_1p_2|p_2), \\
\mathscr{F}(p_0p_1) &= \mathscr{C}(p_0p_1|p_1) \oplus \mathscr{A}(p_0p_1|p_1) \simeq \mathscr{F}(p_0) \oplus \mathscr{A}(p_0p_1|p_0), \\
\mathscr{F}(p_0) &= \mathscr{F}(0) \oplus \mathscr{A}(p_0).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathscr{F}(p_0p_1p_2) = \mathscr{F}(0) \oplus \mathscr{A}(p_0) \oplus \mathscr{A}(p_0p_1|p_1) \oplus \mathscr{A}(p_0p_1p_2|p_2).$$

Продолжая рассуждения по индукции, данную формулу легко записать в общем виде для любого количества сомножителей. Пусть $m = p_0p_1 \dots p_{n-1}$. Введем обозначение

$$\overline{p}_k = p_0p_1 \dots p_{k-1}.$$

В этих обозначениях мы имеем следующую цепочку вложенных друг в друга циклических групп :

$$\{0\} \subset (\overline{p}_{n-1}) \subset (\overline{p}_{n-2}) \subset \ldots \subset (\overline{p}_2) \subset (\overline{p}_1) \subset \mathbb{Z}(m) ,$$

и соответствующую ей цепочку фактор групп:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{Z}(m) & \to & \mathbb{Z}(m)/(\overline{p}_{n-1}) & \to & \mathbb{Z}(m)/(\overline{p}_{n-2}) & \to & \ldots & \to & \mathbb{Z}(m)/(\overline{p}_2) & \to & \mathbb{Z}(m)/(\overline{p}_1) & \to & \{0\} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
(\overline{p}_{n-1}) & & (\overline{p}_{n-2})/(\overline{p}_{n-1}) & & (\overline{p}_{n-3})/(\overline{p}_{n-2}) & & \ldots & & (\overline{p}_1)/(\overline{p}_2) & & \mathbb{Z}(m)/(\overline{p}_1) & & \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\
\mathbb{Z}(p_{n-1}) & & \mathbb{Z}(p_{n-2}) & & \mathbb{Z}(p_{n-3}) & & \ldots & & \mathbb{Z}(p_1) & & \mathbb{Z}(p_0) & &
\end{array} .$$

В случае циклической группы порядка $m = p_0 p_1 \ldots p_{n-1}$ каждый элемент группы $\mathbb{Z}(m)$ имеет естественную кодировку в смешанной позиционной системе $\mathfrak{P} = \langle p_0 p_1 \ldots p_{n-1} \rangle$. Каждое натуральное число k меньшее m однозначно представляется в виде

$$k = k_0 + k_1 \cdot p_0 + k_2 \cdot p_0 p_1 + \cdots + k_{n-1} \cdot p_0 p_1 \ldots p_{n-1}, \quad k_i < p_i,$$

и однозначно определяется последовательностью $\langle k_0 k_1 \ldots k_{n-1} \rangle$ своих смешанных разрядов. В этой кодировке подгруппа $(\overline{p}_r)$ состоит в из чисел, первые r разрядов которых равны нулю, а факторизация $(\overline{p}_r)/(\overline{p}_{r+1})$ равносильна взятию r-ого разряда числа. Поэтому $(\overline{p}_r)/(\overline{p}_{r+1}) \simeq \mathbb{Z}(p_r)$. В случае циклических групп можно упростить систему обозначений, принятую для функциональных пространств $\mathscr{F}, \mathscr{A}, \mathscr{C}$ и вместо кода группы указывать только код ее образующей. В этих обозначениях элементарный шаг разложения Фурье-Хаара выглядит следующим образом:

$$\mathscr{F}(\overline{p}_k) = \mathscr{C}(m|\overline{p}_k) = \mathscr{C}(m|\overline{p}_{k-1}) \oplus \mathscr{A}(m|\overline{p}_{k-1}|\overline{p}_k) = \mathscr{F}(\overline{p}_{k-1}) \oplus \mathscr{A}(m|\overline{p}_{k-1}|\overline{p}_k).$$

Применяя последовательно эту формулу, мы получаем следующее разложение Фурье-Хаара для циклической группы $\mathbb{Z}(m)$, где $m = p_0 p_1 \ldots p_{n-1}$:

$$\mathscr{F}(m) = \mathscr{F}(0) \oplus \sum_{k=0}^{n-1} \mathscr{A}(m|\overline{p}_k|\overline{p}_{k+1}), \quad m = \overline{p}_n.$$

Если ввести более короткие обозначения

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_k &= \mathscr{A}(m|\overline{p}_k|\overline{p}_{k+1}), \\
\mathscr{C}_k &= \mathscr{C}(m|\overline{p}_k), \\
\mathscr{F}_k &= \mathscr{F}(m|\overline{p}_k),
\end{aligned}$$

то предыдущие формулы можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(\overline{p}_n) &= \mathscr{C}_{n-1} \oplus \mathscr{A}_{n-1}, \\
\mathscr{C}_k &= \mathscr{C}_{k-1} \oplus \mathscr{A}_{k-1}, \text{ для любого } k, \\
\mathscr{C}_0 &= \mathscr{F}(0).
\end{aligned}$$

В результате чего мы получаем следующее разложение:

$$\mathscr{F}(\overline{p}_m) = \mathscr{F}(\overline{p}_n) = \mathscr{F}(0) \oplus \mathscr{A}_0 \oplus \mathscr{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathscr{A}_{n-1}, \tag{77}$$

процесс построения которого описывается формулой (65) и диаграммой, приведенной выше в пункте (ii) теоремы 4.2. С точки зрения вычислений наиболее удобным является случай,

когда число m является степенью простого числа $m = p^n$. В этом случае в основе данного разложения лежит точная последовательность

$$\mathbb{Z}(p^{k-1}) \simeq \{p\} \xrightarrow{\ i\ } \mathbb{Z}(p^k) \xrightarrow{\ \pi\ } \mathbb{Z}(p)\ ,$$

а также следующие тождества, которые легко переносятся в область линейных операторов:

$$\begin{aligned} 1 - e^{p^{k+1}} &= (1 - e^{p^k})(1 + e^{p^k} + e^{p^k 2} + \cdots + e^{p^k(p-1)}), \\ 1 - e^{p^n} &= (1 - e) \prod_{m=1}^{n-1} (1 + e^{p^m} + e^{p^m 2} + \cdots + e^{p^m(p-1)}). \end{aligned}$$

Все формулы, приведенные в этом параграфе выше, сохраняются, если в них сделать замены $\overline{p}_k \to p^k$ и $p_k \to p$. В случае, когда $e^{p^n} = 1$ данные тождества позволяют осуществить разложение Хаара с операторами усреднения $\mathfrak{a}_k$, определенными следующим образом:

$$\mathfrak{a}_k = \frac{1}{p}(1 + \mathfrak{e}^{p^k} + \mathfrak{e}^{p^k 2} + \cdots + \mathfrak{e}^{p^k(p-1)}),$$

где $\mathfrak{e}$ есть оператор, индуцированный в функциональном пространстве $\mathscr{F}(p^n)$ поворотом на угол $2\pi/p$. Операторы проектирования на диаграмме в пункте (ii) теоремы 4.2 являются операторами усреднения $\mathfrak{a}_k$, которые усредняют функции $f \in \mathscr{F}(p^n)$ по правильным p^{n-k}-угольникам или по шарам радиуса $1/p^k$. Особенность p-адического случая состоит в возможности ввести на группе $\mathbb{Z}(p^n)$ метрику, которая превращает все ее подгруппы и соответствующие им смежные классы в p-адические шары. Множество этих шаров образует корневое $(n+1)$-уровневое дерево со степенью ветвления p в каждой его вершине. Радиус шара $a + (p^k)$ зависит от показателя степени k и равен $1/p^k$. Одноэлементные множества считаются шарами радиуса $1/p^n$.

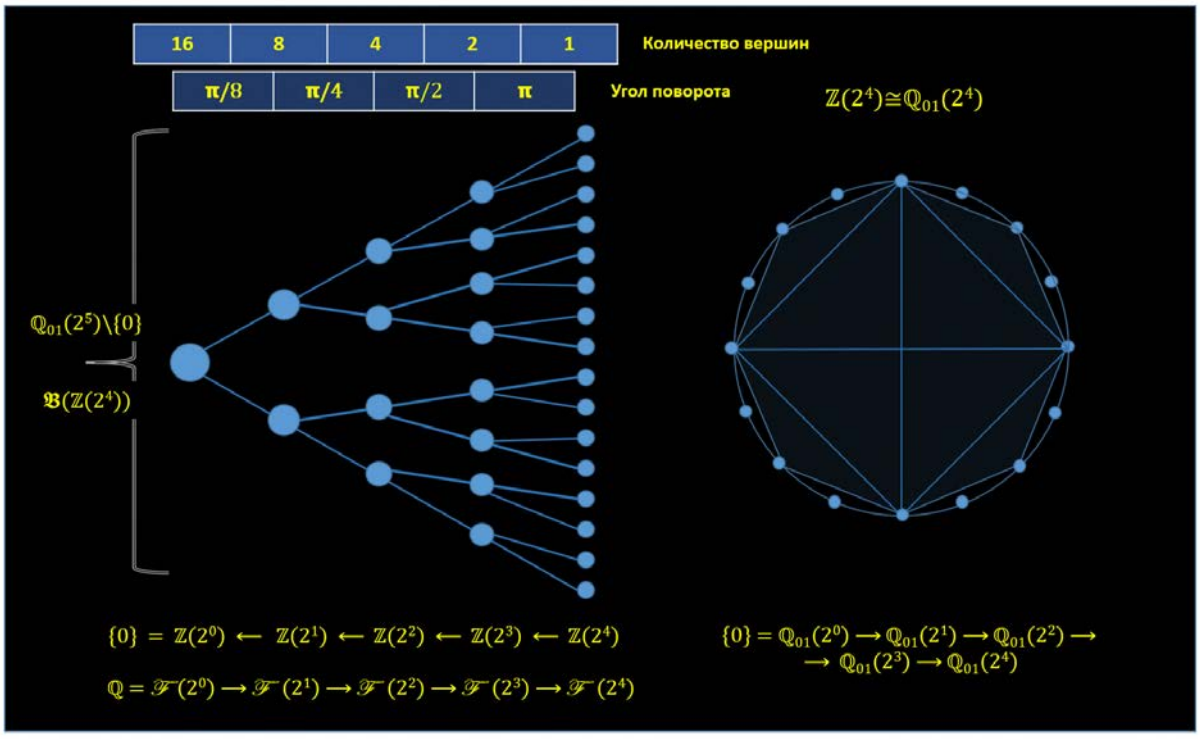


Рисунок 4.3 Подробная схема разложения Хаара в случае, когда $p = 2$.

Расстояние между двумя точками в p-адической метрике равно радиусу минимального шара, к которому принадлежит их разность. В конечном случае с точки зрения топологии в этой метризации нет большого смысла, так как получившаяся топология оказывается дискретной. Однако язык p-адических шаров оказывается очень удобным для интуитивного представления и визуализации тех операций, которые производятся с элементами группы $\mathbb{Z}(p^n)$. В этом случае пространства $\mathscr{C}_k$ являются подпространствами функций в пространстве $\mathscr{F}(p^n)$, которые инвариантны относительно поворота на угол $2\pi/p^{n-k}$ или, говоря

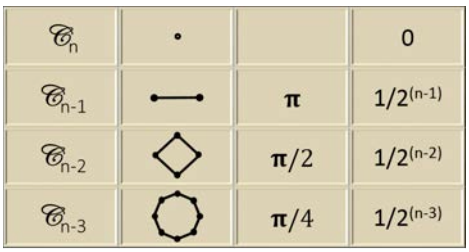


Рисунок 4.4

другими словами, из функций, принимающих постоянные значения на шарах радиуса $1/p^k$, при условии, что $k < n$. Пространство $\mathscr{A}_k$ состоит из функций, среднее значение которых на любом шаре радиуса $1/p^k$ равно нулю, и которые при этом принимают постоянное значение на любом шаре меньшего радиуса. Заметим, что размерность векторных пространств $\mathscr{C}_k$ уменьшается в геометрической прогрессии со знаменателем p, а пространства $\mathscr{C}_k$ и $\mathscr{A}_k$ в точности соответствуют p-адическим сферам кольца $\mathbb{Z}(p^n)$ в количестве n.

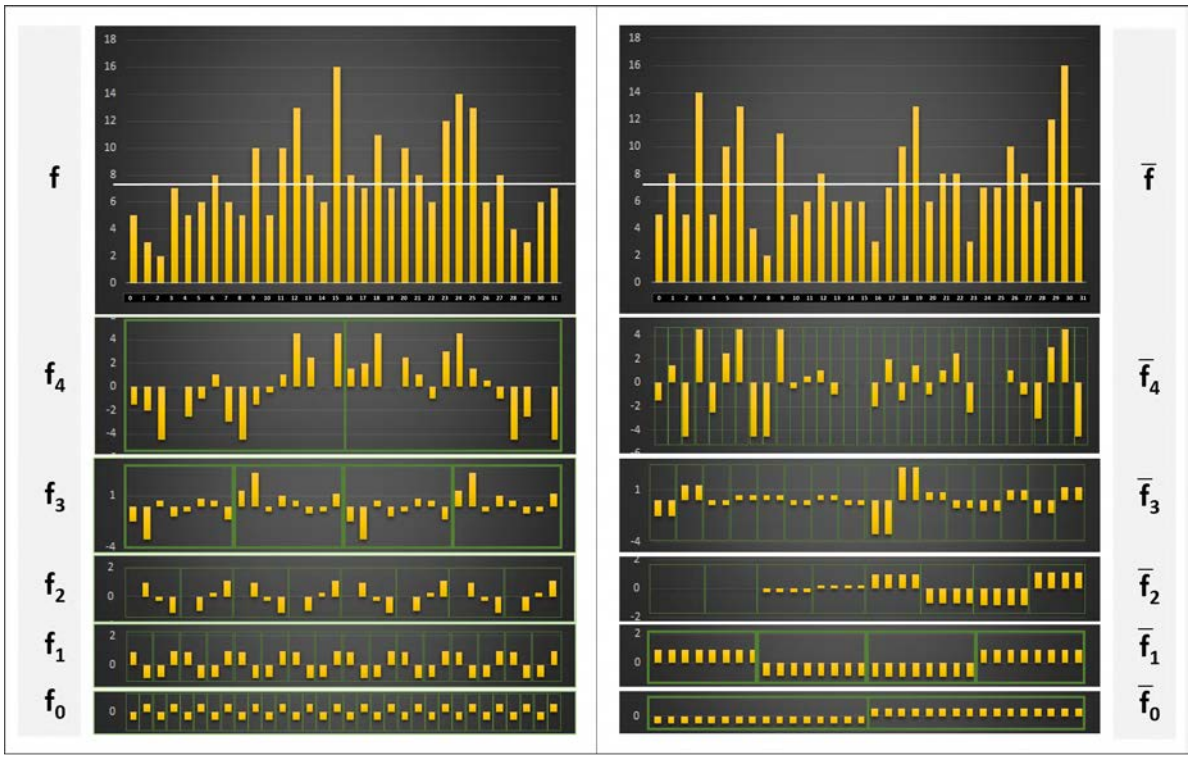


Рисунок 4.5 Пример двух разложений на группе $\mathbb{Z}(2^5)$, связанных инверсным отображением.

Для того чтобы получить из описанного выше разложения Хаара тот его вариант, который используется в теории обработки сигналов и в теории обработки изображений, нужно всего лишь применить инверсное преобразование, которое меняет порядок цифр в p-адическом разложении числа $x \in \mathbb{Z}(p^n)$. Инверсное преобразование переводит p-адические шары в

последовательные блоки чисел, состоящие из p^k элементов, и таким образом превращает описанное выше p-адическое вейвлет разложение Хаара в его классический вариант, известный в теории обработки сигналов. При этом усреднению по p-адическим шарам соответствует усреднение по p-адическим блокам, то есть по блокам из последовательно идущих p^n элементов при возрастающем числе n. Будем считать, что это преобразование относится к функциям, определенным на множестве $\mathbb{N}(p^n)$. Конструкция, которая получается из диаграммы (65) с помощью описанного выше инверсного преобразования, в теории обработки изображений, в случае когда $p = 2$ получила название MRA (multiresolution analysis). При этом функциональные пространства симметрических функций соответствуют усредненным изображениям, возникающим при последовательном двукратном удалении наблюдателя, а пространства асимметрических функций соответствуют разнице между изображением и его усреднением. Соотношение между этими двумя разложениями показано на рисунке 4.5. Мы рассмотрим этот вопрос более подробно в параграфе 5.4.

Комментарии к графикам на рисунке 4.5.

(i) На рисунке показаны два разложения Хаара двух функций f и $\overline{f} \in \mathscr{F}(2^5)$, которые связаны между собой инверсным преобразованием. Справа показано разложение функции $\overline{f}$ по 2-адическим блокам, а слева показано разложение функции f по 2-адическим шарам или по правильным 2^n-угольникам, если рассматривать группу $\mathbb{Z}(2^5)$ как правильный 32-угольник, вписанный в единичную окружность;

(ii) Среднее значение функций f и $\overline{f}$ показано белой горизонтальной линией на верхнем графике;

(iii) Каждый блок значений функции $\overline{f}_k$ состоит из p^{n-k-1} одинаковых значений;

(iv) Количество таких блоков для функции $\overline{f}_k$ равно p^{k+1};

(v) Сумма значений функции $\overline{f}_k$ в последовательно идущих p блоках равна нулю. В частности, когда $p = 2$, соседние блоки в каждой последовательной паре блоков имеют противоположные значения;

(vi) Значения функции f_k разбиваются на p^{n-k} блоков по p^k значений в каждом;

(vii) Функция f_k инвариантна относительно циклического сдвига на p^{k+1} элементов;

(viii) Если разместить значения функции f_k в вершинах правильного p^n-угольника, то сумма ее значений по каждому p^{n-k}-угольнику будет равно нулю. В случае, когда $p = 2$ это условие означает, что функция f_k меняет знак при циклическом сдвиге на 2^k элементов;

(ix) Инверсное отображение преобразует функции f_k и $\overline{f}_k$ друг в друга.

4.3 Разложение на вейвлеты

Для завершения конструкции дискретных вейвлетов Хаара нам нужно будет спуститься еще на два уровня детализации. Основным конструктивным блоком для данной детализации служит предложение 4.3, которое мы сформулируем в виде следующих друг за

другом четырнадцати отдельных утверждений, каждое из которых является достаточно очевидным, и которые вытекают друг из друга.

Предложение 4.3 Пусть даны:

(i) Точная последовательность гомоморфизмов конечных абелевых групп:

$$\mathfrak{K} \xrightarrow{\ i\ } \mathfrak{A} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathfrak{A}/\mathfrak{K}\ ;$$

(ii) Оператор усреднения $\mathfrak{a}(\mathfrak{K})$ функций из множества $\mathscr{F}(\mathfrak{A})$ по смежным классам группы $\mathfrak{K}$, который определяется формулой:

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{K})[f](x) = \frac{1}{|\mathfrak{K}|}\sum_{g\in\mathfrak{K}} f(x+g);$$

(iii) Соответствующая им точная последовательность линейных отображений функциональных пространств

$$\mathscr{A}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}) \xrightarrow{\ i\ } \mathscr{F}(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\ \mathfrak{a}(\mathfrak{K})\ } \mathscr{F}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}) \simeq \mathscr{C}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K})\ ,$$

которая задает разложение векторного пространства $\mathscr{F}(\mathfrak{A})$ в прямую сумму подпространств

$$\mathscr{F}(\mathfrak{A}) = \mathscr{C}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}) \oplus \mathscr{A}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}),$$

состоящих соответственно из функций, постоянных на смежных классах фактор группы $\mathfrak{A}/\mathfrak{K}$, и функций, имеющих нулевое среднее на этих классах.

Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) Функциональное пространство $\mathscr{F}(\mathfrak{A})$ разлагается в прямую сумму своих подпространств $\mathfrak{F}(\mathfrak{b})$

$$\mathscr{F}(\mathfrak{A}) = \bigoplus_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{A}/\mathfrak{K}} \mathfrak{F}(\mathfrak{b}),$$

состоящих из функций, носитель которых принадлежит смежному классу $\mathfrak{b}$;

(ii) Каждое подпространство $\mathfrak{F}(\mathfrak{b})$ является собственным подпространством оператора усреднения $\mathfrak{a}(\mathfrak{K})$;

(iii) Для каждого из этих подпространств оператор $\mathfrak{a}(\mathfrak{K})$ задает следующую точную последовательность линейных отображений:

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{b}) \xrightarrow{\ i\ } \mathfrak{F}(\mathfrak{b}) \xrightarrow{\ \mathfrak{a}(\mathfrak{K})\ } \mathfrak{C}(\mathfrak{b})\ ,$$

которая задает разложение векторного пространства $\mathfrak{F}(\mathfrak{b})$ в прямую сумму подпространств

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{b}) \oplus \mathfrak{W}(\mathfrak{b}),$$

состоящих соответственно из функций, постоянных на смежном классе $\mathfrak{b}$ и имеющих нулевое среднее на этом классе;

(iv) Пространства $\mathfrak{C}(\mathfrak{b})$ и $\mathfrak{W}(\mathfrak{b})$ имеют размерность 1 и $|\mathfrak{K}|-1$ соответственно, а оператор $\mathfrak{a}(\mathfrak{K})$ представляет собой проекцию пространства $\mathfrak{F}(\mathfrak{b})$ на одномерное пространство $\mathfrak{C}(\mathfrak{b})$ вдоль перпендикулярной ему гиперплоскости $\mathfrak{W}(\mathfrak{b})$;

(v) Имеют место следующие разложения

$$\mathscr{C}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}) = \bigoplus_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{A}/\mathfrak{K}} \mathfrak{C}(\mathfrak{b}), \qquad \mathscr{A}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}) = \bigoplus_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{A}/\mathfrak{K}} \mathfrak{W}(\mathfrak{b});$$

(vi) Если в каждом смежном классе $\mathfrak{b} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ выбрать по одному представителю $g(\mathfrak{b})$, то множество $\mathfrak{A}$ можно отождествить с декартовым произведением $\mathfrak{K} \times \mathfrak{A}/\mathfrak{K}$, и все пространства $\mathfrak{F}(\mathfrak{b})$ могут быть естественным образом отождествлены с пространством $\mathscr{F}(\mathfrak{K})$ по формуле: $f(x) \leftrightarrow \overline{f}(x + g(\mathfrak{b}))$, где $x \in \mathfrak{K}$. При этом разложение

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{b}) \oplus \mathfrak{W}(\mathfrak{b}),$$

отождествляется с разложением

$$\mathscr{F}(\mathfrak{K}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{K}) \oplus \mathfrak{W}(\mathfrak{K}),$$

где $\mathfrak{C}(\mathfrak{K})$ и $\mathfrak{W}(\mathfrak{K})$ есть соответственно подпространство постоянных функций и функций с нулевым средним на группе $\mathfrak{K}$;

(vii) Пусть $|\mathfrak{K}| = k$, и $\Xi = \langle \chi_0 = \mathbf{1}, \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{k-1} \rangle$ есть множество характеров группы $\mathfrak{K}$, тогда характер $\chi_0 = \mathbf{1}$ порождает одномерное пространство $\mathfrak{C}(\mathfrak{K})$, а оставшиеся $k-1$ характеров составляют ортогональный базис пространства $\mathfrak{W}(\mathfrak{K})$;

(viii) Базис характеров Ξ пространства $\mathfrak{F}(\mathfrak{K})$ можно заменить любым ортогональным базисом этого пространства, состоящим из векторов имеющих норму $\mathfrak{K}$, при условии, что $\chi_0 = \mathbf{1}$;

(ix) Множество функций $\Xi(\mathfrak{b}) = \langle \chi_0(\mathfrak{b}), \chi_1(\mathfrak{b}), \chi_2(\mathfrak{b}), \ldots, \chi_{k-1}(\mathfrak{b}) \rangle$, полученных с помощью отождествления пространств $\mathscr{F}(\mathfrak{K})$ и $\mathfrak{F}(\mathfrak{b})$, образуют базис пространства $\mathfrak{F}(\mathfrak{b})$. При этом функция $\chi_0(\mathfrak{b})$ порождает одномерное пространство $\mathfrak{C}(\mathfrak{b})$, а оставшиеся $k-1$ функций из этого множества составляют ортогональный базис пространства $\mathfrak{W}(\mathfrak{b})$;

(x) В пространстве $\mathfrak{F}(\mathfrak{b})$ существует базис $\Delta(\mathfrak{b})$, состоящий из дельта функций вида $\delta(x)$, где $x \in \mathfrak{b}$. Переход от базиса $\Delta(\mathfrak{b})$ к базису $\Xi(\mathfrak{b})$ осуществляется при помощи матрицы $\mathbf{H}(\Xi)$, которая зависит только от выбора базиса Ξ и является одинаковой для всех смежных классов $\mathfrak{b} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{K}$;

(xi) Если записать векторы базиса Ξ по столбцам, то получится квадратная матрица $\widehat{\Xi}$ размера $|\mathfrak{K}| \times |\mathfrak{K}|$. Данная матрица является ортогональной с точностью до множителя, так как $\widehat{\Xi} \cdot \widehat{\Xi}^T = |\mathfrak{K}| \cdot \mathbf{E}$. Тогда имеет место соотношение $\mathbf{H}(\Xi) = (1/|\mathfrak{K}|) \cdot \widehat{\Xi}^T$, и элементарное преобразование Хаара имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \ldots \\ h_{k-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathfrak{K}|} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \chi_{10} & \chi_{11} & \cdots & \chi_{1(k-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \chi_{(k-1)0} & \chi_{(k-1)1} & \cdots & \chi_{(k-1)(k-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \ldots \\ v_{k-1} \end{bmatrix}; \tag{78}$$

(xii) Если базис Ξ состоит из характеров группы $\mathfrak{K}$, то матрица $\mathbf{H}(\Xi)$ с точностью до нормировочного множителя совпадает с матрицей $\mathbf{F}$ преобразования Фурье. По изложенным ниже соображениям нормировочный коэффициент лучше выбирать равным $1/|\mathfrak{K}|$;

(xiii) Пусть $\Xi^\star(\mathfrak{b}) = \langle \chi_1(\mathfrak{b}), \chi_2(\mathfrak{b}), \ldots, \chi_{k-1}(\mathfrak{b}) \rangle$, тогда множество функций $\{\Xi^\star(\mathfrak{b}) \mid \mathfrak{b} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{K}\}$ составляют ортогональный базис в пространстве $\mathscr{A}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K})$;

(xiv) Множество функций $\{\chi_0(\mathfrak{b}) = \mathbf{1}(\mathfrak{b}) \mid \mathfrak{b} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{K}\}$, составляет ортогональный базис в пространстве $\mathscr{C}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K})$, которое можно отождествить с пространством $\mathscr{F}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K})$.

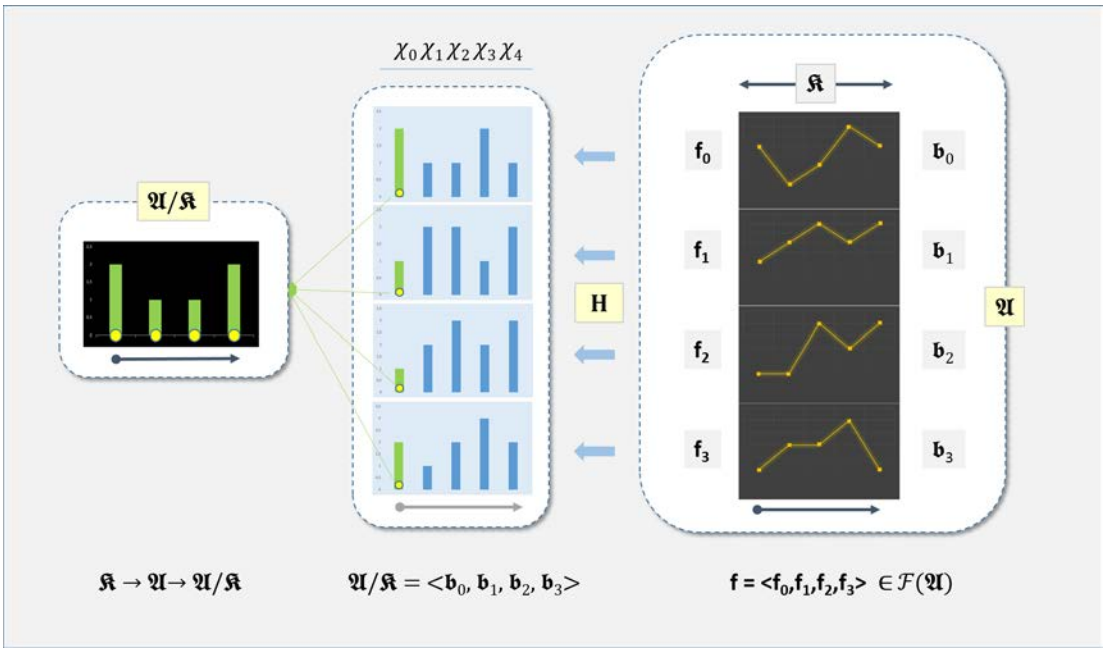


Рисунок 4.6 Схема элементарного шага разложения Хаара.

Доказательство. Доказательство данного предложения очевидно. Перечисленные утверждения по сути вытекают друг из друга. ⊠

Разложение Хаара представляет собой рекурсивное применение предложения 4.3 к цепочке функциональных пространств (70). Нумерация шагов алгоритма является нисходящей и начинается с номера n основной группы цепочки (79). Предварительно в каждом функциональном пространстве $\mathscr{F}(\overline{\mathfrak{K}}_i)$ выбирается ортогональный базис Ξ_k, нормированный на величину $|\overline{\mathfrak{K}}_i|$. Алгоритм начинает работу с функции $f = f_n \in \mathscr{F}(\mathfrak{A}) = \mathscr{F}(\mathfrak{A}_n)$. На шаге с номером m выполняются следующие действия, которые схематически показаны на рисунке 4.6:

(i) Функция $f_m \in \mathscr{F}(\mathfrak{A}_m)$ преобразуется в последовательность функций $\langle f_{m0}, f_{m1}, \ldots, f_{mM} \rangle$, заданных на смежных классах по подгруппе $\overline{\mathfrak{K}}_{m-1} \subset \mathfrak{A}_m$. Количество функций M совпадает с количеством элементов в фактор группе $\mathscr{F}(\mathfrak{A}_m/\overline{\mathfrak{K}}_{m-1})$;

(ii) К каждой функции f_{mi} применяется элементарное преобразование Хаара с матрицей $\mathbf{H}_m = \mathbf{H}(\Xi_m)$, которое представляет собой разложение по базису

$$\Xi(\mathfrak{b}) = \langle \chi_0^m(\mathfrak{b}), \chi_1^m(\mathfrak{b}), \chi_2^m(\mathfrak{b}), \ldots, \chi_{k-1}^m(\mathfrak{b}) \rangle, \quad \text{где} \quad \mathfrak{b} \in \mathfrak{A}_m/\overline{\mathfrak{K}}_{m-1};$$

(iii) Коэффициенты $h_i^m(\mathfrak{b})$ разложения по этому базису с номерами $1 \leqslant i \leqslant (M-1)$ входят в искомое разложение, а из коэффициентов $h_0^m(\mathfrak{b})$, где $\mathfrak{b} \in \mathfrak{A}_m/(\overline{\mathfrak{K}}_{m-1})$ формируется новая функция $f_{m-1} \in \mathscr{F}(\mathfrak{A}_{m-1}) = \mathscr{F}(\mathfrak{A}_m/\overline{\mathfrak{K}}_{m-1})$, которая передается на следующий шаг алгоритма с номером $m-1$.

Алгоритм завершается после шага с номером один, в результате которого вычисляется значения h_0, которое является средним арифметическим значением функции f на группе $\mathfrak{A}_n$. На этот алгоритм также можно взглянуть с точки зрения разложения функционального пространства $\mathscr{F}(\mathfrak{A}_m)$.

$$\mathscr{F}(\mathfrak{A}_m) = \mathscr{C}(\mathfrak{A}_{m-1}) \oplus \mathscr{A}(\mathfrak{A}_m/\overline{\mathfrak{K}}_{m-1}) = \mathscr{C}(\mathfrak{A}_{m-1}) \oplus \mathscr{A}((\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_m)/(\mathfrak{K}_{m-1}/\mathfrak{K}_m)) =$$

$$= \mathscr{C}(\mathfrak{A}_{m-1}) \oplus \mathscr{A}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_{m-1}/\mathfrak{K}_m).$$

Продолжая это разложение рекурсивно мы получим следующее разложение

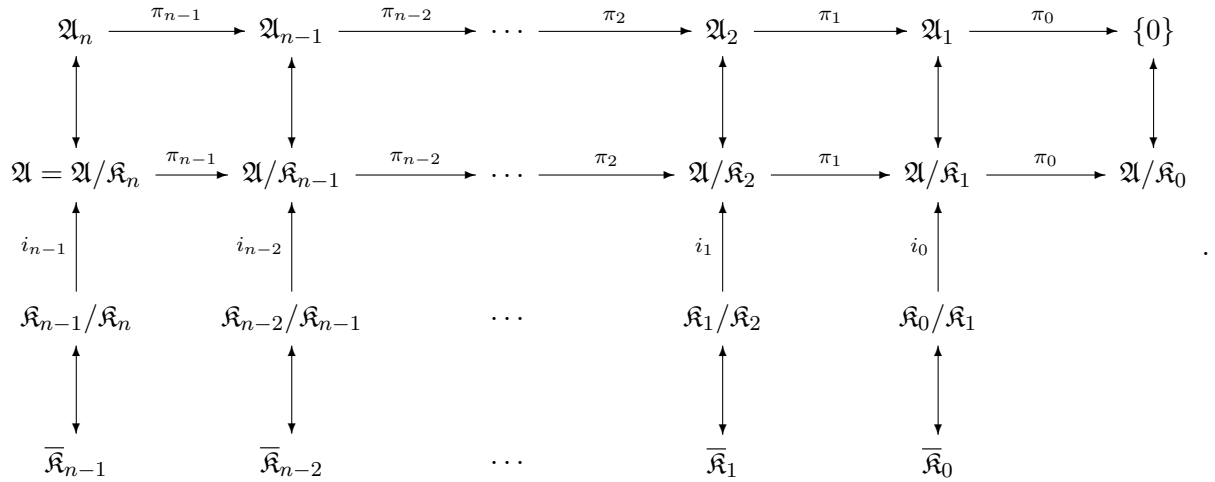
$$\mathscr{F}(\mathfrak{A}) = \mathscr{F}(0) \oplus \sum_{m=0}^{n-1} \mathscr{A}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_m/\mathfrak{K}_{m+1}).$$

Каждое из пространств $\mathscr{A}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_m/\mathfrak{K}_{m+1})$ может быть разложено в ортогональную сумму пространств $\mathfrak{W}(\mathfrak{b})$, являющихся конечномерными подпространствами размерности $|\mathfrak{K}_{m+1} - 1|$ и состоящими из функций, имеющих нулевое среднее на смежном классе $\mathfrak{b}$ по подгруппе $\mathfrak{K}_m$ и принимающих постоянное значение на смежных классах по подгруппе $\mathfrak{K}_{m+1}$.

$$\mathscr{A}(\mathfrak{A}/\mathfrak{K}_m/\mathfrak{K}_{m+1}) = \bigoplus_{\mathfrak{b}} \mathfrak{W}(\mathfrak{b}), \quad \mathfrak{b} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{K}_m.$$

Результатом работы данного алгоритма для рассматриваемой нами цепочки абелевых групп

$$\mathfrak{K}_n = \{0\} \subset \mathfrak{K}_{n-1} \subset \mathfrak{K}_{n-2} \subset \cdots \subset \mathfrak{K}_3 \subset \mathfrak{K}_2 \subset \mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{A} = \mathfrak{K}_0, \tag{79}$$



(80)

будут следующие три разложения Хаара:

$$\mathscr{F}(\mathfrak{A}) = \mathscr{F}(0) \oplus \bigoplus_{i=0}^{n-1} \bigoplus_{\mathfrak{b}} \mathfrak{W}(\mathfrak{b}), \quad \mathfrak{b} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{K}_i, \tag{81}$$

$$f = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\mathfrak{b}} f_i(\mathfrak{b}) + \mathfrak{av}[f] \cdot \mathbf{1}, \quad f_i(\mathfrak{b}) \in \mathfrak{W}(\mathfrak{b}), \tag{82}$$

$$f = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\mathfrak{b}} \sum_{m} h_m^i(\mathfrak{b}) \cdot \chi_m^i(\mathfrak{b}) + \mathfrak{av}[f] \cdot \mathbf{1}, \tag{83}$$

где $\mathfrak{b} \in \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}/\mathfrak{K}_i, \quad m \in \overline{\mathfrak{K}}_i^\star = (\mathfrak{K}_i/\mathfrak{K}_{i+1})^\star, \quad \mathfrak{av}[f] = \dfrac{1}{|\mathfrak{A}|} \sum_{i \in \mathfrak{A}} f(i).$

Заметим, что все элементы фактор групп $\mathfrak{A}_m$ являются смежными классами по соответствующим подгруппам и могут быть интерпретированы как подмножества множества $\mathfrak{A}$. Поэтому их можно представить в виде элементов единого множества

$$\overline{\mathfrak{A}} = \bigcup_{m=0}^{n} \mathfrak{A}/\mathfrak{K}_m = \bigcup_{m=0}^{n} \mathfrak{A}_m.$$

При таком представлении серию операторов проектирования $\{\pi_m\}$ и функций $\{s_m\}$ вычисления среднего значения по смежномым классам можно представить в виде:

$$\{\pi_m\} = \pi : \overline{\mathfrak{A}} \to \overline{\mathfrak{A}},$$

$$\{s_m\} = s : \overline{\mathfrak{A}} \to \mathbb{C}.$$

Поэтому для каждого элемента $\mathfrak{b} \in \mathfrak{A}_m$ определена функция усреднения

$$s(\mathfrak{b})[f] = \frac{1}{|\mathfrak{b}|} \sum_{i \in \mathfrak{b}} f(i). \tag{84}$$

Из формул (73) следует, что в функции f_k выражаются через функции s следующим образом. Если $\mathfrak{b} \in \mathfrak{A}_k$, то

$$f_{k-1}(\mathfrak{b}) = s(\mathfrak{b})[f] - s(\pi(\mathfrak{b}))[f]. \tag{85}$$

Схема взаимосвязи между этими функциями показана на рисунке 4.7

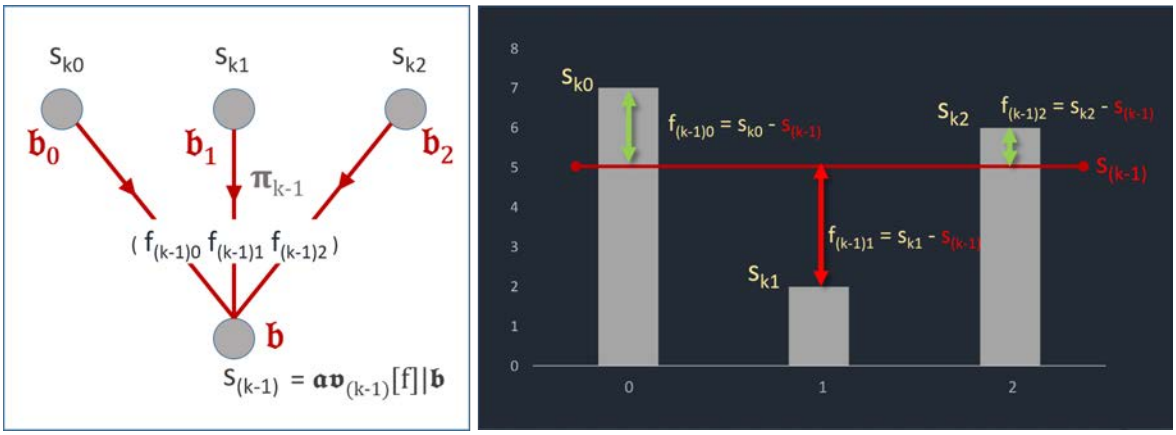


Рисунок 4.7 Схема построения вейвлетов из множества $\mathfrak{W}(\mathfrak{b})$.

При этом каждой нетерминальной вершине $\mathfrak{b}$ дерева смежных классов соответствует конечномерное пространство вейвлетов $\mathfrak{W}(\mathfrak{b})$, состоящее из функций, которые удовлетворяют следующим трем условиям:

(i) носитель функции принадлежит множеству $\mathfrak{b}$;

(ii) среднее значение функции по множеству $\mathfrak{b}$ равно нулю;

(iii) функция принимает постоянное значение на всех смежных класса, являющихся дочерними для смежного класса $\mathfrak{b}$.

В случае, когда $\mathfrak{A} = \mathbb{Z}(p^n)$, каждая функция $f_k(\mathfrak{b})$ определяется своими значениями на шарах радиуса $1/p^{k+1}$, лежащих внутри шара $\mathfrak{b}$. Поэтому такая функция по сути дела представляет собой вектор из пространства $\mathbb{C}^p$, а разложение (82) (за вычетом постоянного члена) принимает вид отображения:

$$\mathfrak{B}_+(p^n) \to \mathbb{C}^p \simeq \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p)),$$

$$\mathfrak{b} \to \langle f_k|\mathfrak{b}_0, f_k|\mathfrak{b}_1, f_k|\mathfrak{b}_2, \ldots, f_k|\mathfrak{b}_{p-1}\rangle, \tag{86}$$

где

$$\mathfrak{b} = \langle \mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_{p-1}\rangle$$

есть разложение p-адического шара в объединение p дочерних шаров. Разложение Хаара (83) получается из этого отображения путем разложения каждого из указанных выше векторов по характерам группы $\mathbb{Z}(p)$.

В случае $\mathfrak{A} = \mathbb{Z}(p^n)$ имеют место следующие упрощения общего алгоритма:

(i) Все группы $\overline{\mathfrak{K}}_i$ совпадают с группой $\mathbb{Z}(p)$;

(ii) Все базисы Ξ_m можно отождествить с ортогональным и нормированным на величину $|p|$ базисом Ξ пространства $\mathscr{F}(p)$;

(iii) Все матрицы $\mathbf{H}_m$ совпадают между собой и равны матрице $\mathbf{H} = \frac{1}{p} \cdot \widehat{\Xi}^{-1}$, где матрица $\widehat{\Xi}$ получается записью векторов базиса Ξ по столбцам.

В этом случае базис Хаара $\mathfrak{H}^+(p^n)$ состоит из множества функций:

$$\mathfrak{H}^+(p^n) = \{\mathbf{1}\} \cup \mathfrak{H}(p^n), \text{ где}$$

$$\mathfrak{H}(p^n) = \{\chi_m(\mathfrak{b}) \,|\, \mathfrak{b} \in \mathfrak{B}_+(p^n),\, m \in \mathbb{Z}(p)^\times\}$$

есть множество вейвлетов Хаара. Разложение функции f по базису Хаара выглядит следующим образом:

$$f = \sum_{(\mathfrak{b},m)\in\mathfrak{B}_+\times\mathbb{Z}(p)^\times} h_m(\mathfrak{b}) \cdot \chi_m(\mathfrak{b}) + h_0 \cdot \mathbf{1}, \tag{87}$$

где $\mathfrak{B}_+ = \mathfrak{B}_+(p^n)$ есть множество неодноэлементных шаров кольца $\mathbb{Z}(p^n)$, $\mathbb{Z}(p)^\times$ есть множество ненулевых элементов поля $\mathbb{Z}(p)$, h_0 есть среднее арифметическое функции f на множестве $\mathbb{Z}(p^n)$, а $\mathbf{1}$ есть единичная функция на этом множестве. В координатном представлении функции $\chi_i(\mathfrak{b})$ выглядят следующим образом:

$$\chi_i(\mathfrak{b})(x) = \begin{cases} \chi_i(d_k(x)), & \text{если } x \in \mathfrak{b}, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathfrak{b}, \end{cases}$$

где радиус шара $\mathfrak{b}$ равен $1/p^k$, и $d_k(x) \in \mathbb{Z}(p)$ обозначает k-ую цифру в p-адическом представлении числа x, которая соответствует разряду p^k.

Если $p = 2$, то множество $\mathbb{Z}(2)^\times$ состоит всего из одного элемента, поэтому разложение Хаара принимает форму

$$f = \sum_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}_+} h(\mathfrak{b}) \cdot \chi(\mathfrak{b}) + h_0 \cdot \mathbf{1}. \tag{88}$$

Если $\mathfrak{b}$ есть 2-адический шар, состоящий из двух шаров $\mathfrak{b}_0$ и $\mathfrak{b}_1$ вдвое меньшего радиуса, то соответствующий шару $\mathfrak{b}$ вейвлет Хаара $\chi(\mathfrak{b})$ определяется как:

$$\chi(\mathfrak{b})(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathfrak{b}_0, \\ -1, & x \in \mathfrak{b}_1, \\ 0, & x \notin \mathfrak{b}, \end{cases}$$

а элементарное преобразование Хаара выглядит следующим образом:

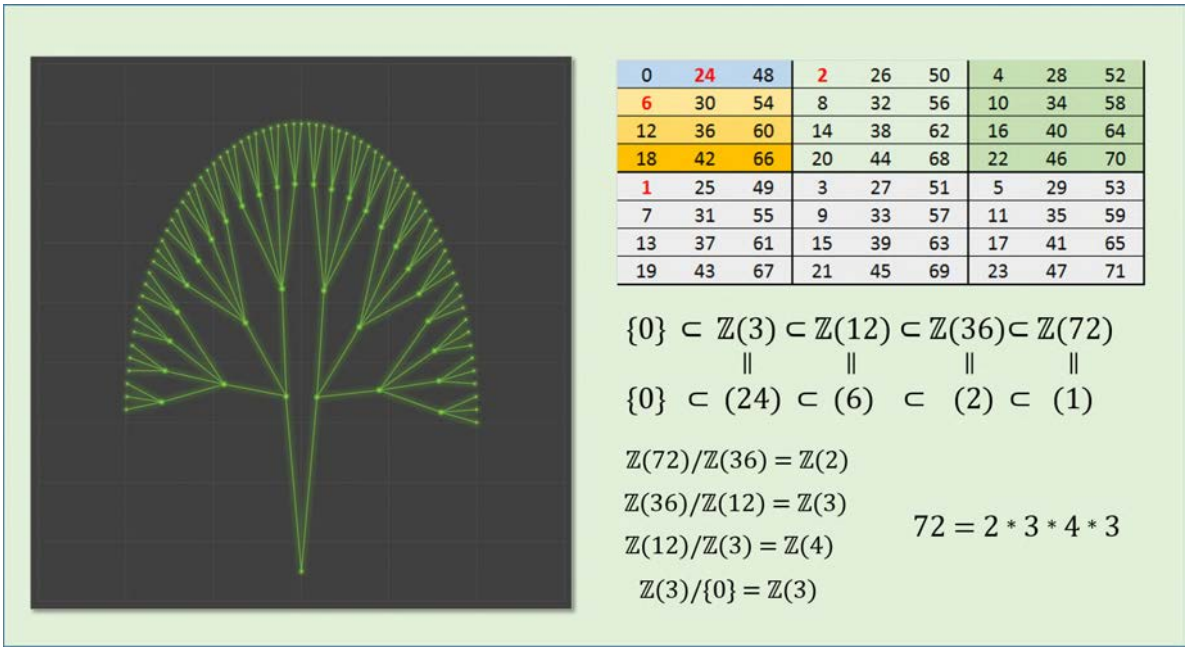
$$\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix}.$$

Участвующая в этом преобразовании матрица с точностью до множителя является матрицей преобразования Фурье на группе $\mathbb{Z}(2)$. В теории квантовых вычислений данная матрица, взятая с коэффициентом $1/\sqrt{2}$, является одним из основных гейтов и называется гейтом Адамара.

4.4 Содержательная интерпретация разложения Хаара

Перейдем к содержательной интерпретации дискретных вейвлетов Хаара, которая является главной целью настоящего параграфа и которая может быть биологической, геологической, физиологической, физической, геометрической или какой-либо другой, в зависимости от характера того дерева, к которому она относится. Каждое слово должно вызывать у нас некоторые образы и ассоциации, «душа никогда не мыслит без представлений», говорит Аристотель (Аристотель, «О душе», 431 a 17). Например, когда мы произносим слова «циклическая группа», то можно представлять себе при этом правильный многоугольник. Поскольку согласно известной теореме из теории абелевых групп каждая конечная абелева группа раскладывается в прямое произведение/сумму своих циклических подгрупп, то словосочетание «конечная абелева группа» может вызывать у нас ассоциацию с дискретным тором или с гиперкубом, в том случае, когда все входящие в это разложение подгруппы состоят из двух элементов. Однако есть еще одна «архетипическая» структура, которая является даже более распространенной, чем тор или гиперкуб, и которая естественным образом связана с каждой конечной абелевой группой, отличной от группы $\mathbb{Z}(p)$, где p есть простое число. ***Такой структурой является дерево***. Это дерево можно построить по любой конечной абелевой группе, в которой выделена цепочка вложенных друг в друга подгрупп. Интересно отметить, что теория групп начиналась в работах Эвариста Галуа (1811-1832) именно с рассмотрения цепочек вложенных друг в друга групп, являющихся (в современной терминологии) группами автоморфизмов полей алгебраических чисел, возникающих в результате последовательного присоединения к полю рациональных чисел корней неприводимого многочлена с целыми коэффициентами. Принцип построения дерева, соответствующего цепочке вложенных друг в друга подгрупп конечной абелевой группы, можно усмотреть из примера, который показан на рисунке 4.8

и который соответствует циклической группе $\mathbb{Z}(72)$, в которой выделена цепочка из трех ее подгрупп.



0	24	48	2	26	50	4	28	52
6	30	54	8	32	56	10	34	58
12	36	60	14	38	62	16	40	64
18	42	66	20	44	68	22	46	70
1	25	49	3	27	51	5	29	53
7	31	55	9	33	57	11	35	59
13	37	61	15	39	63	17	41	65
19	43	67	21	45	69	23	47	71

Рисунок 4.8 Дерево смежных классов, связанное с группой $\mathbb{Z}(72)$.

Вершинами этого дерева являются смежные классы, возникающие при факторизации каждой из групп цепочки по предыдущей подгруппе, входящей в данную цепочку. Ребрами данного дерева являются пары вложенных смежных классов, возникающие при факторизации соседних подгрупп. На рисунке 4.8 также показана таблица распределения элементов группы $\mathbb{Z}(72)$ по смежным классам цепочки подгрупп, указанной на том же рисунке. Эта таблица соответствует дереву, показанному на рисунке слева. Символ (n) обозначает подгруппу, порожденную вычетом $n \in \mathbb{Z}(72)$. Первоначально группа $\mathbb{Z}(72)$ разбивается на два смежных класса, соответствующих факторизации $(1)/(2)$. Каждый из этих смежных классов разбивается далее на три смежных класса, которые соответствуют факторизации $(2)/(6)$. Каждый из тех в свою очередь разбивается еще на четыре, которые соответствуют факторизации $(6)/(24)$. Завершает эту цепочка последняя факторизация $(24)/\{0\}$, которая просто объединяет в тройки терминальные вершины дерева, соответствующие семидесяти двум элементам исходной группы.

Покажем, что по каждой цепочкой абелевых групп (79), (80) каноническим образом может быть построено некоторое дерево.

(i) Цепочке (80) эпиморфизмов абелевых групп $\{\mathfrak{A}_i\}_{i=1}^n$ с базовой группой $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_n$ соответствует $(n+1)$-уровневое корневое дерево $\mathbb{T}(\{\mathfrak{A}_i\})$;

(ii) Вершинами дерева $\mathbb{T}(\{\mathfrak{A}_i\})$ являются все элементы фактор групп $\mathfrak{A}_i$, входящих в цепочку (80). Поскольку все эти элементы представляют собой некоторые смежные классы группы $\mathfrak{A}_n$ по ее подгруппам $\mathfrak{K}_i$, то данные смежные классы можно интерпретировать как подмножества группы $\mathfrak{A}_n$. Каждое такое подмножество однозначно определяется своей характеристической функцией;

(iii) Терминальным вершинам дерева $\mathbb{T}(\{\mathfrak{A}_i\})$ соответствуют элементы группы $\mathfrak{A}_n$, которые можно рассматривать как одноэлементные множества. Корню дерева соответствует сама группа $\mathfrak{A}_n$;

(iv) На ребрах дереве $\mathbb{T}(\{\mathfrak{A}_i\})$ можно задать две ориентации: прямую - идущую от корня дерева к его терминальным вершинам и обратную - идущую от терминальных вершин дерева к его корню;

(v) Ребра дерева $\mathbb{T}(\{\mathfrak{A}_i\})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с парами вложенных друг в друга смежных классов двух соседних фактор групп цепочки (79) или, что то же самое, с парами элементов $\langle a, b\rangle$, такими, что $\pi_m(a) = b$ для некоторого эпиморфизма π_m из цепочки (80). Степень ветвления дерева $\mathbb{T}(\{\mathfrak{A}_i\})$ на уровне m равна количеству элементов в группе $\overline{\mathfrak{K}}_m$;

(vi) На вершинах и на ребрах дерева $\mathbb{T}(\{\mathfrak{A}_i\})$ определена естественная функция меры. Мерой вершины является количество элементов в смежном классе основной группы $\mathfrak{A}_n$, который соответствует данной вершине. Данная функция меры является аддитивной, так как мера вершины равна сумме мер всех вершин, с которыми данная вершина связана с помощью исходящих из нее ребер, взятых в прямой ориентации. Мерой ребра можно считать меру вершины, из которой исходит это ребро при обратной ориентации;

Остановимся теперь на кодировке ребер дерева $\mathbb{T}(\{\mathfrak{A}_i\})$. Каждая последовательность

$$\overline{\mathfrak{K}}_{m-1} \xrightarrow{\ i_m\ } \mathfrak{A}_m \xrightarrow{\ \pi_m\ } \mathfrak{A}_{m-1} \tag{89}$$

является точной, то есть ядро гомоморфизма π_m совпадает с образом гомоморфизма i_m. Добавим к свойствам последовательности (79) еще одно условие, будем полагать, что для каждого k, такого что $1 \leqslant k < n$ задано отображение $\varrho_{m-1} : \mathfrak{A}_{m-1} \to \mathfrak{A}_m$, которое выбирает для каждого элемента $a \in \mathfrak{A}_{m-1}$ некоторый его прообраз $\varrho_{m-1}(a) \in \mathfrak{A}_m$ относительно гомоморфизма групп π_m. Типовой случай представляет собой гомоморфизм циклических групп $\pi : \mathbb{Z}(nm) \to \mathbb{Z}(n)$, заданный формулой $\pi(k) = k \mod n$. В этом случае отображение ϱ имеет вид $\varrho(x) = x$. Данное условие наряду с точностью последовательности (89) означает, что множество $\mathfrak{A}_m$ можно естественным образом отождествить с декартовым произведением $\overline{\mathfrak{K}}_{m-1} \times \mathfrak{A}_{m-1}$. При этом условии каждое множество $\mathfrak{A}_m$ в цепочке (79) естественным образом отождествляется с декартовым произведением множеств

$$\mathfrak{A}_m \simeq \prod_{i=0}^{m-1} \overline{\mathfrak{K}}_i.$$

Условие $\mathfrak{A}_m \simeq \overline{\mathfrak{K}}_{m-1} \times \mathfrak{A}_{m-1}$ означает, что все ребра входящие в некоторую вершину $b \in \mathfrak{A}_{m-1}$ при обратной ориентации находятся во взаимно однозначном соответствие с элементами группы $\overline{\mathfrak{K}}_{m-1}$, поэтому все ребра дерева $\mathbb{T}(\{\mathfrak{A}_i\})$ естественным образом индексируются элементами групп $\overline{\mathfrak{K}}_i$, а элементы декартова произведения $\prod\limits_{i=0}^{m-1} \overline{\mathfrak{K}}_i$ кодируют все возможные пути, идущие из вершины $\{0\}$ ко всем вершинам, представленным элементами группы $\mathfrak{A}_m$. Пусть $|\overline{\mathfrak{K}}_i| = \mathfrak{k}_i$, тогда

$$|\mathfrak{A}_n| = \prod_{i=0}^{n-1} \mathfrak{k}_i.$$

Каждое натуральное число m, такое что $0 \leqslant m < |\mathfrak{A}_n|$, можно однозначно представить в виде:

$$m = \sum_{i=0}^{n-1}(m_i \cdot \prod_{j=0}^{i-1} \mathfrak{k}_j), \text{ где } m_i < \mathfrak{K}_i. \tag{90}$$

Например, в случае $n = 4$ такое разложение будет иметь вид

$$m = m_0 + m_1 \cdot \mathfrak{k}_0 + m_2 \cdot \mathfrak{k}_0\mathfrak{k}_1 + m_3 \cdot \mathfrak{k}_0\mathfrak{k}_1\mathfrak{k}_2.$$

Данное разложение является аналогом разложения числа в позиционной системе счисления и совпадает с p-ичным (или p-адическим) разложением в том случае, когда все числа $\mathfrak{k}_i$ равны p. По аналогии с p-адическим разложением, числа m_i вычисляются с помощью алгоритма, который начинается с присвоения $\mathfrak{n} = m$, а дальше вычисляет коэффициенты m_i по рекуррентной формуле

$$m_i = \mathfrak{n} \mod \mathfrak{k}_i, \quad \mathfrak{n} = \mathfrak{n}/\mathfrak{k}_i.$$

Таким образом, все элементы группы $\mathfrak{A}_n$ оказываются естественным образом пронумерованы натуральными числами от нуля до $|\mathfrak{A}_n| - 1$, и каждое такое число m однозначно представляется n-разрядной последовательностью

$$m = \langle m_0, m_1, m_2 \ldots, m_{n-1}\rangle, \quad m_i < \mathfrak{k}_i, \tag{91}$$

которая однозначным образом кодирует путь, ведущий по дереву $\mathbb{T}(\{\mathfrak{A}_i\})$ от его корня к терминальной вершине, которая соответствует элементу группы $\mathfrak{A}$ с номером m. Аналогичным образом пути, состоящие из l звеньев, кодируются l-разрядными числами и соответствуют путям, ведущим из корня дерева к элементам группы $\mathfrak{A}_l$.

В данном координатном представлении функции $\chi_i(\mathfrak{b})$, описанные в пунктах (viii)-(xiv) предложения 4.3 выглядят следующим образом:

$$\chi_i(\mathfrak{b})(x) = \begin{cases} \chi_i(d_j(x)), & \text{если } x \in \mathfrak{b},\ \mathfrak{b} \in \mathfrak{A}_{j+1} \\ 0, & \text{если } x \notin \mathfrak{b}, \end{cases}$$

где $d_j(x)$ обозначает j-ую цифру в координатном представлении числа x, которая соответствует j-ому разряду числа x, соответствующему в свою очередь группе $\overline{\mathfrak{K}}_j$.

Теперь приведенное выше описание дерева $\mathbb{T}(\{\mathfrak{A}_i\})$ можно дополнить еще несколькими пунктами, описывающими кодировку его ребер.

(vii) Отождествление $\mathfrak{A}_m \simeq \mathfrak{A}_{m-1} \times \overline{\mathfrak{K}}_{m-1}$ позволяет установить соответствие между ребрами дерева $\mathbb{T}(\{\mathfrak{A}_i\})$ (взятыми независимо от их ориентации) и элементами всех групп $\overline{\mathfrak{K}}_m$, являющихся ядрами гомоморфизмов π_m, входящих в цепочку (69). Если $\pi_m(b) = a$ и $b \simeq \langle a, k\rangle$, то ребру $\langle b, a\rangle$ соответствует элемент $k \in \overline{\mathfrak{K}}_m$;

(viii) Выбор базиса $\Xi(\overline{\mathfrak{K}}_m) = \langle \chi_0 = \mathbf{1}, \chi_1, ..., \chi_m\rangle$ в каждом функциональном пространстве $\mathscr{F}(\overline{\mathfrak{K}}_m)$ и отождествление множеств $\overline{\mathfrak{K}}_m$ и $\Xi(\overline{\mathfrak{K}}_m)$ позволяют установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех ребер дерева $\mathbb{T}(\{\mathfrak{A}_i\})$ и множеством пар

$$\{\langle \mathfrak{b}, \chi\rangle \mid \mathfrak{b} \in \mathfrak{A}_m = \mathfrak{A}_{m+1}/\overline{\mathfrak{K}}_m,\ \chi \in \Xi(\overline{\mathfrak{K}}_m),\ 0 \leqslant m < n\};$$

(viii) Обозначим $\Xi^{\star}(\overline{\mathfrak{K}}_m) = \langle \chi_1, ..., \chi_m \rangle$, и будем называть ребра дерева $\mathbb{T}(\{\mathfrak{A}_i\})$, соответствующие элементам множеств $\Xi^{\star}(\overline{\mathfrak{K}}_m)$ *ребрами ветвей*, а ребра соответствующие единичному характеру $\chi_0(\overline{\mathfrak{K}}_m)$ будем называть *стволовыми ребрами*;

(ix) С каждой парой $\langle \mathfrak{b}, \chi \rangle$ связана некоторая функция $\mathfrak{h}(\mathfrak{b}, \chi) \in \mathscr{F}(\mathfrak{A}_n)$, имеющая своим носителем множество $\mathfrak{b}$ (напомним, что мы интерпретируем смежные классы всех фактор групп цепочки (69) как подмножества основной группы $\mathfrak{A}_n$). Данная функция определяется следующей диаграммой:

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{b}, \chi) : \mathfrak{b} \xrightarrow{\ i\ } \mathfrak{A}_n \xrightarrow{\ \pi\ } \mathfrak{A}_m \simeq \mathfrak{A}_{m-1} \times \overline{\mathfrak{K}}_{m-1} \twoheadrightarrow \overline{\mathfrak{K}}_{m-1} \xrightarrow{\ \chi\ } \mathbb{C}$$

Предложение 4.4 Существует взаимно однозначное соответствие между множеством

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{A}_n) = \{\mathfrak{h}(\mathfrak{b}, \chi) \mid \mathfrak{b} \in \mathfrak{A}_m = \mathfrak{A}_{m+1}/\overline{\mathfrak{K}}_m,\ \chi \in \Xi^{\star}(\overline{\mathfrak{K}}_m),\ 1 \leqslant m < n\}$$

базисных функций разложения Хаара для последовательности (69) абелевых групп $\{\mathfrak{A}_i\}_{i=1}^n$ и множеством ребер ветвей дерева $\mathbb{T}(\{\mathfrak{A}_i\})$, соответствующего данной последовательности.

Таким образом, множеству индексов, которые фигурируют формуле (83) разложения Хаара, можно дать естественную геометрическую интерпретацию, показанную на рисунке 4.9.

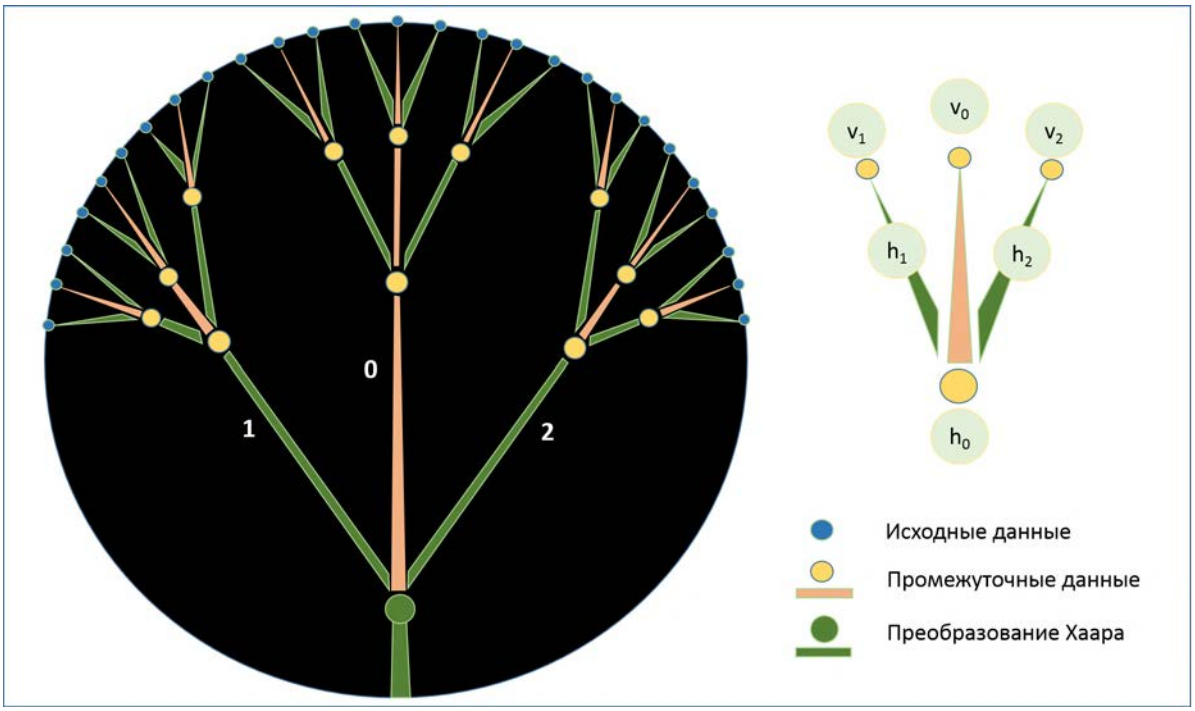


Рисунок 4.9 Схема отображения на троичное дерево коэффициентов Хаара для группы $\mathbb{Z}(3^3)$.

Как было сказано выше, все ребра дерева можно $\mathbb{T}(\{\mathfrak{A}_i\})$ естественным образом пометить элементами групп $\overline{\mathfrak{K}}_i$ и условно разделить на две категории: (1) стволовые ребра, которые помечены нулем и (2) ребра ветвей, которые помечены ненулевыми элементами групп $\overline{\mathfrak{K}}_i$. На рисунке эти две категории ребер раскрашены двумя различными цветами. К ним нужно еще добавить одно корневое ребро, которое можно идентифицировать с базовой группой

$\mathfrak{A}$. Множество всех ребер, помеченных на рисунке зеленым цветом, находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством индексов в формуле (83), а также с множеством элементов группы $\mathfrak{A}$. Как мы покажем ниже в случае $\mathfrak{A} = \mathbb{Z}(2^n)$ эта кодировка имеет приобретает конкретный «физический смысл», в других случаях она имеет характер полезной мнемонической диаграммы, которая помогает визуализировать процесс построения разложения Хаара.

Потоковая интерпретация

Рассматриваемое под эти углом зрения, преобразование Хаара на абелевой группе $\mathfrak{A}$ реализуется на дереве, состоящем из $n+1$ уровней. Если терминальные вершины этого дерева условно назвать листьями, то процесс, идущий от листьев к корню, имеет характер диффузии и соответствует прямому преобразованию Хаара, а процесс идущий в обратном направлении от корня дерева к его листьям имеет характер распределения и соответствует обратному преобразованию Хаара. Цепочки вложенных друг в друга смежных классов интерпретируются при этом как каналы вдоль которых происходит распределение значений. Поскольку вершины дерева соответствуют смежным классам, то элементарное преобразование Хаара в каждой вершине выглядит как диффузия, при которой субстанция, энергия или информация, сосредоточенная в m смежных классах меньшего размера, равномерно распределяется на один смежный класс большего размера, являющийся их объединением. Данный процесс схематически показан на рисунке 4.10 на примере смешивания трех цветов. Если f есть положительная вещественная функция, то ее среднее значение на некотором смежном классе, возникающее на соответствующем шаге алгоритма, можно интерпретировать как плотность субстанции, энергии или информации, а произведение плотности на меру данного класса (то есть количество элементов в нем) можно трактовать как количество субстанции, энергии или информации, сосредоточенной в данном классе. При этом информация об асимметрии данного распределения сохраняется в коэффициентах, присвоенных ребрам дерева, которые реализованы как пары вложенных друг в друга смежных классов. При обратном преобразовании Хаара происходит противоположный процесс, при котором значение в каждой вершине распределяется по m дочерним вершинам на основании информации

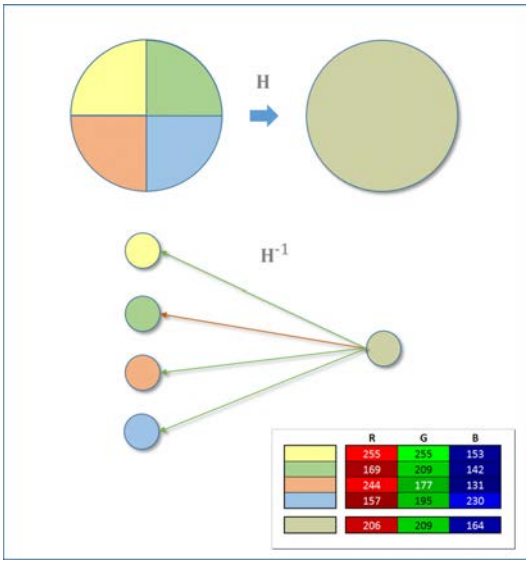


Рисунок 4.10

об асимметрии распределения, которая «хранится» в ребрах ветвей, исходящих из этой вершины. Это распределение представляет собой равномерное распределение вдоль m ребер, плюс линейная комбинация $m-1$ функций, среднее значение каждой из которых по m-ребрам, исходящим из данной вершины равно нулю. Если разместить дерево $\mathbb{T}(\{\mathfrak{A}_i\})$ в трехмерном пространстве и принять во внимание тот факт, что существует взаимно однозначное соответствие между его вершинами и ребрами, входящими в вершины при прямой ориентации дерева и выходящими из них в случае обратной ориентации, то меру каждого ребра можно интерпретировать как

пропускную способность канала, проходящего через данное ребро. Если f есть положительная вещественная функция, определенная на группе $\mathfrak{A}$ и интерпретируемая как плотность потока, то результаты ее преобразования Хаара во всех промежуточных вершинах $\{\mathfrak{b}\}$, которые выражаются функциями $\mathfrak{s}(\mathfrak{b})[f]$ в формулах (84), можно интерпретировать как плотность стационарного потока субстанции, энергии или информации, проходящей через данную вершину или через входящее в нее ребро. Плотность потока естественным образом определяется как количество субстанции, проходящее за единицу времени через единицу площади. Функции f_i, фигурирующие в формулах (85) и являющиеся результатом агрегированного преобразования Хаара, кодирую разность плотности потока между соответствующими вершинами. При этом прямое преобразование Хаара соответствует прямому потоку, идущему от листьев дерева к его корню, а обратное преобразование Хаара соответствует обратному потоку идущему от корня дерева к его листьям. Коэффициенты преобразования Хаара характеризуют асимметричность данных потока внутри дерева.

Вероятностная интерпретация

Пусть $\mathfrak{A} = \mathbb{Z}(p^n)$ и f есть вещественная функция, заданная на множестве $\mathbb{Z}(p^n)$. Функцию f можно интерпретировать как случайную величину, определенную на множестве, состоящем из p^n равновероятных элементарных исходов. В этом случае формулы (84) и (85) приобретают естественный смысл в терминах теории вероятностей. Функция $\mathfrak{av}[f]$ является постоянной функцией, значение которой в каждой точке равно математическому ожиданию случайной величины f. Аналогичным образом функция $\mathfrak{av}_k[f]$, ограниченная на шар $\mathfrak{b}$ радиуса $1/p^k$, представляет собой постоянную функцию, значение которой равно условному математическому ожиданию случайной величины $f|\mathfrak{b}$ при условии, что произойдет событие $\mathfrak{b}$. Эта величина вычисляется в соответствии с формулой условной вероятности Байеса: $p(\mathfrak{a}/\mathfrak{b}) = p(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})/p(\mathfrak{b})$. Функции f_n определяют характер изменения условного математического ожидания случайной величины f при перемещении по дереву событий, представленных p-адическими шарами.

Геометрическая интерпретация

Таким образом, в случае, когда $\mathfrak{A} = \mathbb{Z}(p^n)$, и $p \geqslant 3$, справедливо следующее предложение.

Предложение 4.5 Пусть $p \geqslant 3$, тогда существует взаимно однозначное соответствие между следующими объектами:

(i) числа кольца $\mathbb{Z}(p^n)$;

(ii) ребра ветвей p-адического дерева, имеющего $n+1$ уровень плюс одно корневое ребро;

(iii) множество $\mathfrak{H}^+(p^n)$ базисных функций Хаара, состоящее из единичной функции и множества $\mathfrak{H}(p^n)$ вейвлетов Хаара:

$$\mathfrak{H}^+(p^n) = \{\mathbf{1}\} \cup \mathfrak{H}(p^n), \quad \mathfrak{H}(p^n) = \{\chi_m(\mathfrak{b}) \,|\, \mathfrak{b} \in \mathfrak{B}(p^n), m \in \mathbb{Z}(p)^\times\}.$$

В случае выбора в качестве базиса разложения аддитивных характеров группы $\mathbb{Z}(p)$, эти соотношения являются каноническими. В случае выбора произвольного базиса Хаара, эти соотношения зависят от порядка нумерации базиса. Инверсное преобразование задает изоморфизм между двумя разложениями Хаара, построенными на основе p-адических шаров

и p-адических блоков соответственно. В случае произвольного числа $n \geqslant 3$ данную схему лучше представлять в трехмерном пространстве, как это показано на рисунке 4.11.

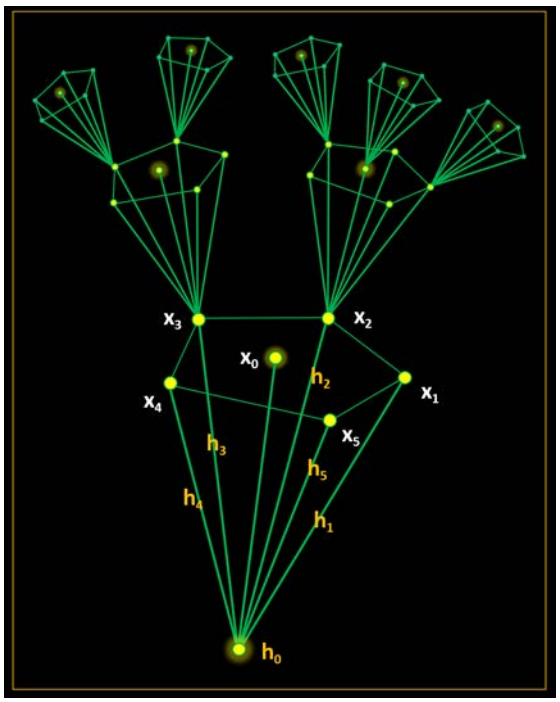


Рисунок 4.11 Схема отображения коэффициентов Хаара на 6-ричное дерево.

Схемы вычисления и визуализации аналогичны предыдущей схеме с той лишь разницей, что ветвь, которая соответствует нулю, проходит через центр $(n-1)$-угольника, лежащего в основании каждой элементарной пирамиды. Схема вычисления преобразования Хаара на двоичном дереве описывается предложением 4.6 и показана на следующей диаграмме.

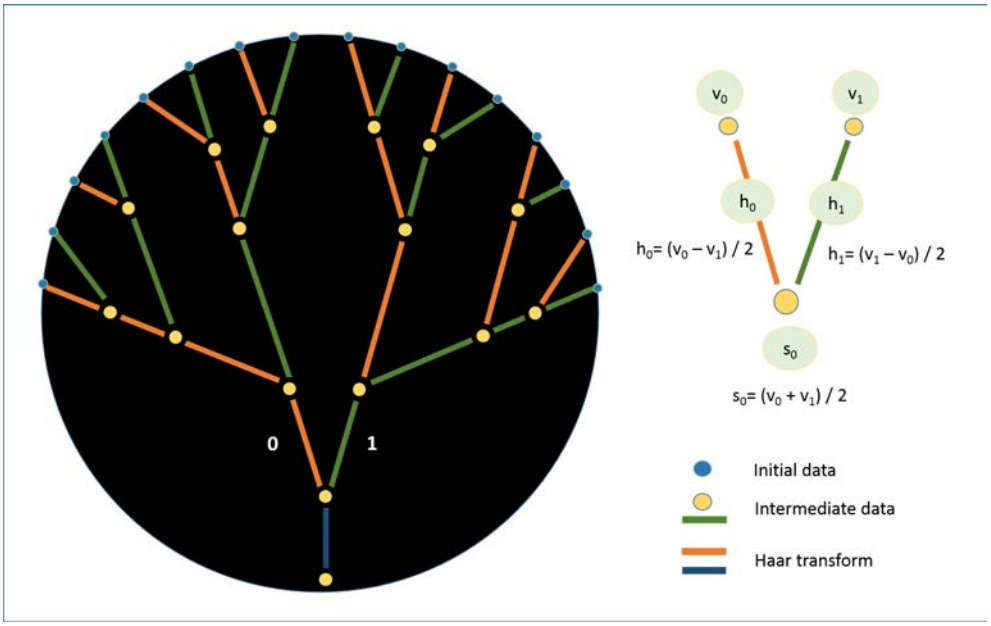


Рисунок 4.12 Схема вычисления вейвлетов Хаара на двоичном дереве $\mathbb{Z}(2^4)$.

Предложение 4.6 Существует взаимно однозначное соответствие между следующими множествами:

(i) числа кольца $\mathbb{Z}(2^n)$;

(ii) множество 2-адических шаров положительного радиуса кольца $\mathbb{Z}(2^n)$ с добавленным к ним «нулевым шаром»;

(iii) множество нулевых ребер 2-адического дерева, имеющего $n+1$ уровень плюс одно корневое ребро;

(iv) множество единичных ребер 2-адического дерева, имеющего $n+1$ уровень плюс одно корневое ребро;

(v) множество базисных функций Хаара $\mathfrak{H}^+(2^n) = \{\mathbf{1}, \chi(\mathfrak{b}) \,|\, \mathfrak{b} \in \mathfrak{B}(2^n)\}$.

Геометрическая интерпретация преобразования Хаара позволяет соотнести ребра и вершины p-адического дерева, надстроенного над кольцом $\mathbb{Z}(p^n)$, с p-адическими шарами и, соответственно, с их характеристическими функциями. Поэтому дельта функции, определенные на ребрах или на вершинах этого дерева, соответствуют характеристическим функциям p-адических шаров кольца $\mathbb{Z}(p^n)$, а линейные комбинации таких функций соответствуют функциям из пространства $\mathscr{F}(p^n)$.

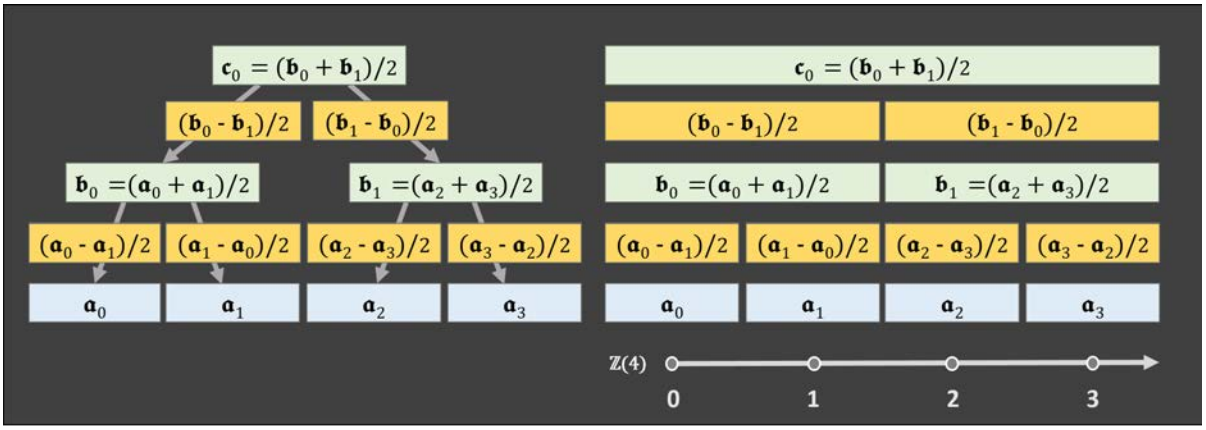


Рисунок 4.13 Схема построения вейвлетов Хаара на двоичном дереве. Соотношение между геометрической и функциональной интерпретациями.

Это позволяет применять методы обработки сигналов для анализа геометрических соотношений и физических процессов происходящих в древовидных сетях, в которых происходит распространение субстанции, энергии или информации. Пример такого соотношение показан на рисунке 4.13 на примере кольца $\mathbb{Z}(2^2)$. Слева показаны функции определенные на элементах дерева, а справа изображены функции из множества $\mathscr{F}(2^2)$, показанные блоками соответствующих значений.

Морфологическая интерпретация

Мы здесь остановимся на морфологической интерпретации вкратце и рассмотрим ее подробно далее в параграфе 6.6. Пусть дано отображение $f : \mathbb{Z}(p^n) \to \mathbb{R}^3$, которое можно представить в виде тройки вещественных функций $f = \langle x, y, z \rangle$. Образ этого отображения

в пространстве $\mathbb{R}^3$ можно представить себе в виде некоторого геометрического объекта сложной формы $\mathfrak{P}$. Для таких объектов используется также термин ***облако точек***. В этом случае операторы усреднения $\mathfrak{av}_k$, действуя на функцию f, порождают последовательность объектов $\mathfrak{P}_k$, представляющих собой различные степени агрегирования исходного объекта $\mathfrak{P}$. Функции f_k, которые получаются на втором шаге реализации преобразования Хаара кодируют переходы между объектами $\mathfrak{P}_k$ в процессе их трансформации.

Резюмируя сказанное выше, мы можем метафорически описать преобразование Хаара следующим образом, используя понятия диффузии и формообразования.

Разложение (65, 66), читаемое справа налево, выглядит как распространение некоторой субстанции из центра к периферии или как процесс формообразования. При этом равенство нулю суммы значений функций, соответствующих каждой p-адической сфере, обеспечивает выполнение своего рода закона сохранения, при котором общее количество субстанции сохраняется на каждом шаге. Это же разложение, читаемое слева направо, выглядит как процесс диффузии или как процесс разрушения исходной формы, при котором некоторая субстанция, неравномерным образом распределенная по p-адическим шарам минимального радиуса, на каждом шаге равномерно распределяется на шары большего радиуса и в конце приходит к состоянию равномерного распределения по шару единичного радиуса.

Визуализация разложения Хаара

Как говорил еще Аристотель: «Понять - значит наблюдать образы». Мы закончим этот параграф рассмотрением визуализации разложения Хаара для цепочки абелевых групп (79,80). Эта визуализация будет построена на следующих принципах:

(i) представление элементов группы $\mathfrak{A}$ путями, исходящими из корня построенного выше дерева $\mathbb{T}(\{\mathfrak{A}_i\})$;

(ii) взаимно однозначное отображение значений вейвлетов из множеств $\mathfrak{W}(\mathfrak{b})$ на ребра этого дерева;

Если $\mathfrak{A} = \mathbb{Z}(p^n)$, то дерево $\mathbb{T}(\{\mathfrak{A}_i\})$ превращается в $n+1$-уровневое p-адическое дерево $\mathbb{T}(p^n)$, вершинами которого являются все p-адические шары кольца $\mathbb{Z}(p^n)$.

Как мы показали выше в этом параграфе, имеет место следующее взаимно однозначное соответствие между группой $\mathfrak{A}$ и декартовым произведением фактор групп, входящих в цепочку (79):

$$\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{K}_0/\mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_1/\mathfrak{K}_2 \times \cdots \times \mathfrak{K}_{n-2}/\mathfrak{K}_{n-1}.$$

Это соответствие позволяет с каждым элементом группы $\mathfrak{A}$ связать последовательность элементов указанного декартова произведения, которую в свою очередь можно интерпретировать как путь, проходящий по дереву $\mathbb{T}(\{\mathfrak{A}_i\})$ и ведущий из его корня к одной из терминальных вершин. При этом каждой нетерминальной вершине $\mathfrak{b}$ дерева смежных классов соответствует конечномерное пространство вейвлетов $\mathfrak{W}(\mathfrak{b})$, состоящее из функций, которые удовлетворяют следующим трем условиям:

(i) носитель функции принадлежит множеству $\mathfrak{b}$;

(ii) среднее значение функции по множеству $\mathfrak{b}$ равно нулю;

(iii) функция принимает постоянное значение на всех смежных класса, являющихся дочерними для смежного класса $\mathfrak{b}$

Как показывает следующая точная последовательность абелевых групп

$$\{0\} \longrightarrow \mathfrak{K}_m/\mathfrak{K}_{m+1} \xrightarrow{i_m} \mathfrak{A}/\mathfrak{K}_{m+1} \xrightarrow{\pi_m} \mathfrak{A}/\mathfrak{K}_m \longrightarrow \{0\} \ ,$$

каждый элемент $\mathfrak{b} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{K}_m$ имеет $|\mathfrak{K}_m/\mathfrak{K}_{m+1}|$ прообразов, индексированных элементами группы $\mathfrak{K}_m/\mathfrak{K}_{m+1}$. Это означает, что степень ветвления дерева $\mathbb{T}(\{\mathfrak{A}_i\})$ в вершине $\mathfrak{b}$ равна $|\mathfrak{K}_m/\mathfrak{K}_{m+1}|$, а также то, что значения функции $f_m(\mathfrak{b})$ и ребра, исходящие из вершины $\mathfrak{b}$ индексированы элементами одной и той же группы и, следовательно, значения функции можно приписать этим ребрам, как это показано на рисунке 4.7 выше. На рисунке 4.14 показан пример отображения этих коэффициентов на двоичное дерево с упрощенной индексацией.

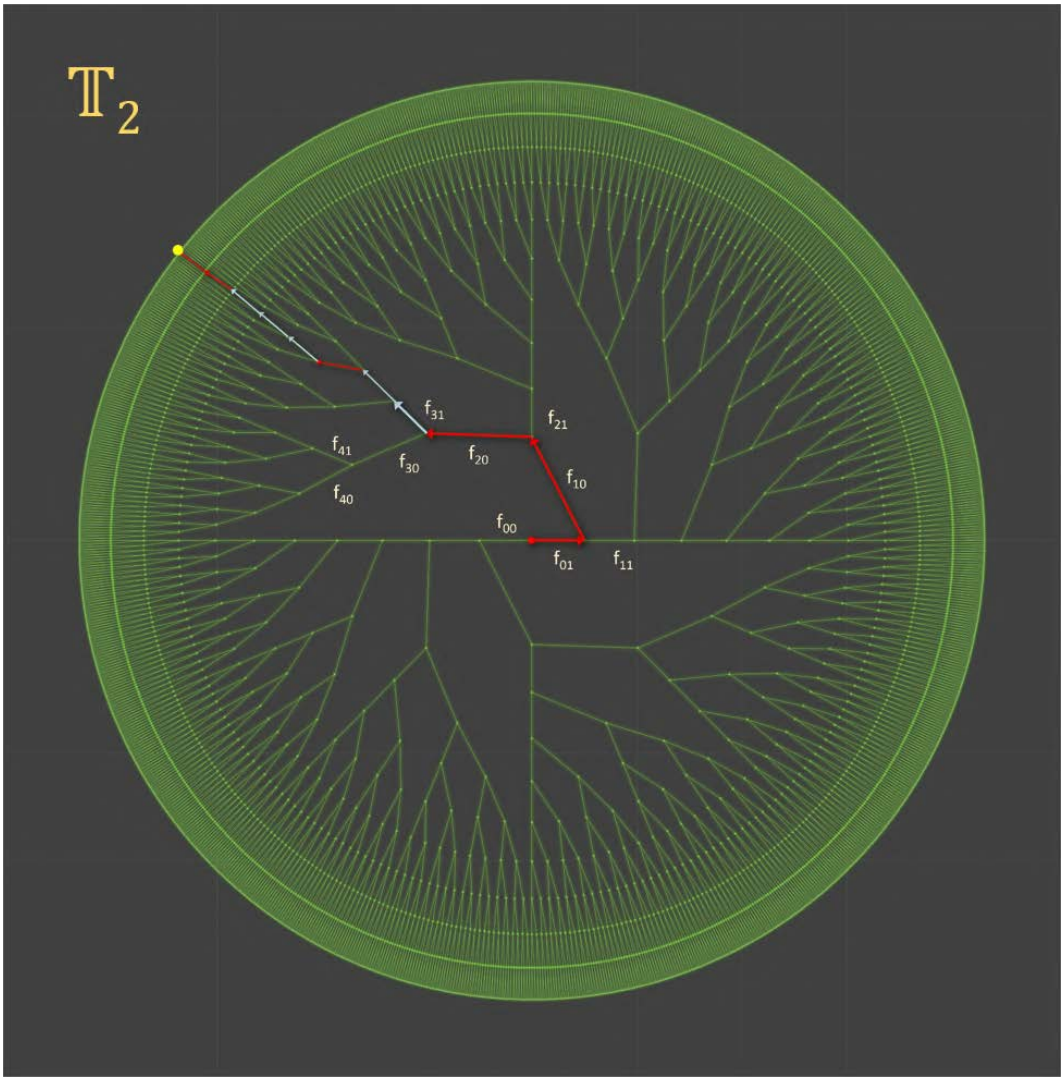


Рисунок 4.14 Схема отображения значений вейвлетов на двоичное дерево.

При этом значение функции f в терминальной вершине $x \in \mathfrak{A}$ дерева смежных классов получается путем сложения всех значений приписанных ребрам, составляющим путь, ведущий из корня дерева к вершине x, а значения промежуточных сумм в вершинах, через которые проходит этот путь, равны среднему значению функции f по смежному классу, который соответствует данной вершине.

В случае, когда $\mathfrak{A} = \mathbb{Z}(p^n)$ каждое пространство вейвлетов $\mathfrak{W}(\mathfrak{b})$, соответствующих шару $\mathfrak{b}$ изоморфно $(p-1)$-мерному пространству функций с нулевым средним на циклической группе $\mathbb{Z}(p)$. При этом значения вейвлета $f_k(\mathfrak{b})$ на дочерних шарах шара $\mathfrak{b}$ однозначно отображаются на ребра, исходящие из вершины дерева шаров $\mathfrak{b}$. Если $p = 2$, то сумма этих значений равна нулю, а значение, соответствующее дочернему шару с нулевым индексом совпадает с коэффициентом в разложении Хаара.

4.5 N-мерное разложение Хаара

Рассмотрим двумерное разложением Хаара на примере его построения для функций, определенных на абелевой группе $\mathbb{Z}(p^n) \oplus \mathbb{Z}(q^n)$, являющейся прямой суммой двух циклических групп. Основные объекты, участвующие в двумерном разложении Хаара, выражаются через соответствующие объекты одномерных разложений. Ключевую роль в построении двумерного преобразования Хаара играет понятие тензорного произведения векторных пространств и тензорного произведения действующих на этих пространствах линейных операторов. Остановимся на этом более подобно.

Тензорное произведение векторных пространств $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(r))$ и $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(s))$ можно представить как векторное пространство матриц $\mathscr{M}(r,s)$ размера $r \times s$, при этом соответствие между векторами и матрицами устанавливается следующим образом (на примере $r = 2$ и $s = 3$):

$$W = U \otimes V = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} \end{bmatrix},$$

где $w_{ij} = u_i v_j$. Поскольку множество матричных индексов представляет собой декартово произведение $\mathbb{Z}(r) \times \mathbb{Z}(s)$, отсюда следует, что

$$\mathscr{F}(\mathbb{Z}(r) \oplus \mathbb{Z}(s)) \simeq \mathscr{M}(r,s).$$

Данное равенство является справедливым для любых чисел r и s, при этом поточечным операциям с функциями соответствуют поэлементные операции с матрицами. Тензорное произведение операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, действующих в пространствах $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(r))$ и $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(s))$ соответственно, в матричном представлении реализуется с помощью обычного матричного умножения:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}\ (W) = \mathbf{A} \cdot W \cdot \mathbf{B}^T.$$

Перед тем как перейти к описанию взаимосвязи двумерного преобразования Хаара с одномерными, введем несколько необходимых нам определений.

- Пусть $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ являются шарами в кольцах $\mathbb{Z}(p^n)$ и $\mathbb{Z}(q^n)$ соответственно. Будем говорить, что $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ являются шарами одного уровня, если они лежат на одинаковых уровнях в деревьях шаров $\mathfrak{B}(p^n)$ и $\mathfrak{B}(q^n)$ соответственно, или, что то же самое, если $\mathbf{r}(\mathfrak{b}) = 1/p^m$, и $\mathbf{r}(\mathfrak{c}) = 1/q^m$ с одинаковом показателем степени m.

□ Будем обозначать символом $\mathfrak{B}_n(p,q)$ множество пар $\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \rangle$ шаров одного уровня колец $\mathbb{Z}(p^n)$ и $\mathbb{Z}(q^n)$. Символ $\mathfrak{B}_+(p,q|n)$ будет обозначать множество таких пар неодноэлементных шаров.

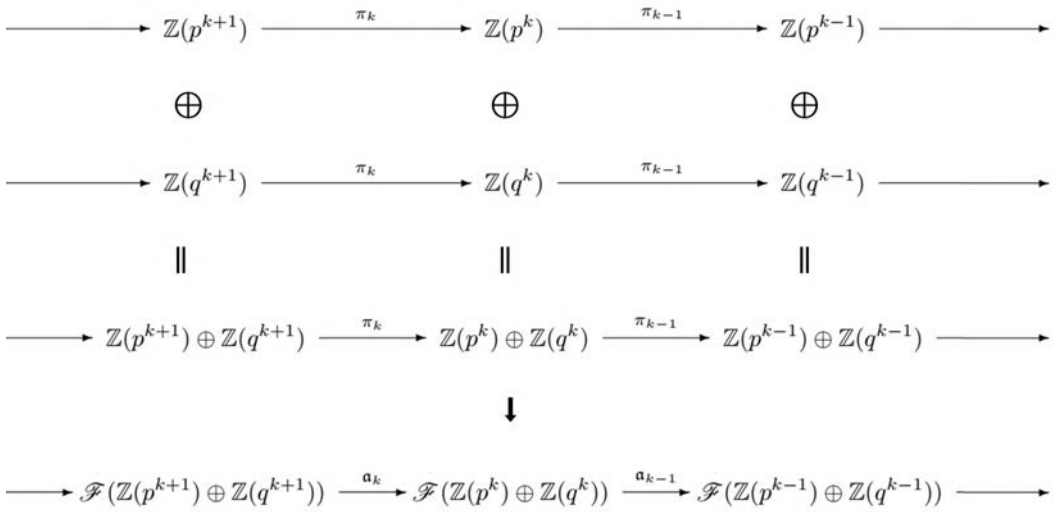
□ Оператор усреднения

$$\mathfrak{a}_k(p,q) : \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^{k+1}) \oplus \mathbb{Z}(q^{k+1})) \to \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^k) \oplus \mathbb{Z}(q^k))$$

является оператором усреднения по смежным классам по подгруппе $(p^k) \times (q^k)$.

Связь между 2-мерным и одномерным преобразованием Хаара описывается следующим предложением, в котором использовано сокращенное обозначение $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^k)) \equiv \mathscr{F}(p^k)$:

Предложение 4.7 Пусть дана прямая сумма двух стандартных последовательностей, каждая из которых состоит из n циклических групп/колец вычетов:



тогда имеют место следующие соотношения между объектами, участвующими в построении разложения Хаара:

(i) Каждое функциональное пространство $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^k) \oplus \mathbb{Z}(q^k))$ является тензорным произведением функциональных пространств $\mathscr{F}(p^k)$ и $\mathscr{F}(q^k)$:

$$\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^k) \oplus \mathbb{Z}(q^k)) \simeq \mathscr{F}(p^k) \otimes \mathscr{F}(q^k);$$

(ii) Каждый оператор усреднения $\mathfrak{a}_k(p,q)$ является тензорным произведением соответствующих «одномерных» операторов усреднения:

$$\mathfrak{a}_k(p,q) = \mathfrak{a}_k(p) \otimes \mathfrak{a}_k(q);$$

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^{k+1}) \oplus \mathbb{Z}(q^{k+1})) & \xrightarrow{\mathfrak{a}_k(p,q)} & \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^k) \oplus \mathbb{Z}(q^k)) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathscr{F}(p^{k+1}) \otimes \mathscr{F}(q^{k+1}) & \xrightarrow{\mathfrak{a}_k(p) \otimes \mathfrak{a}_k(q)} & \mathscr{F}(p^k) \otimes \mathscr{F}(q^k) \end{array} ;$$

(iii) Все смежные классы данной последовательности фактор колец имеют вид $\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$, где $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ являются соответственно p-адическими и q-адическими шарами колец $\mathbb{Z}(p^n)$ и $\mathbb{Z}(q^n)$ соответственно. Эти шары являются шарами одного уровня;

(iv) Имеет место изоморфизм векторных пространств

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) \;=\; \mathfrak{F}(\mathfrak{b}) \otimes \mathfrak{F}(\mathfrak{c}) \;=\; \begin{bmatrix} \mathfrak{S}(\mathfrak{b}) \\ \mathfrak{W}(\mathfrak{b}) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathfrak{S}(\mathfrak{c}) & \mathfrak{W}(\mathfrak{c}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{S}(\mathfrak{b}) \otimes \mathfrak{S}(\mathfrak{c}) & \mathfrak{S}(\mathfrak{b}) \otimes \mathfrak{W}(\mathfrak{c}) \\ \mathfrak{W}(\mathfrak{b}) \otimes \mathfrak{S}(\mathfrak{c}) & \mathfrak{W}(\mathfrak{b}) \otimes \mathfrak{W}(\mathfrak{c}) \end{bmatrix},$$

где $\mathfrak{S}(\mathfrak{b})$ и $\mathfrak{W}(\mathfrak{b})$ есть соответственно подпространства констант и функций с нулевым средним, определенных на шаре $\mathfrak{b}$. При этом имеют место следующие изоморфизмы подпространств:

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{b}) \otimes \mathfrak{S}(\mathfrak{c}),$$

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) = [\mathfrak{C}(\mathfrak{b}) \otimes \mathfrak{W}(\mathfrak{c})] \oplus [\mathfrak{W}(\mathfrak{b}) \otimes \mathfrak{C}(\mathfrak{c})] \oplus [\mathfrak{W}(\mathfrak{b}) \otimes \mathfrak{W}(\mathfrak{c})];$$

(v) Если $\Xi(p) = \langle \chi_0^p = \mathbf{1}^p, \chi_1^p, \chi_2^p, \ldots, \chi_{n-1}^p \rangle$ и $\Xi(q) = \langle \chi_0^q = \mathbf{1}^q, \chi_1^q, \chi_2^q, \ldots, \chi_{n-1}^q \rangle$ есть базисы в пространствах $\mathscr{F}(p)$ и $\mathscr{F}(q)$ соответственно, то множество векторов $\Xi(p) \otimes \Xi(q)$ представляет собой базис в пространстве $\mathscr{F}(p) \otimes \mathscr{F}(q)$, который можно представить в виде следующей матрицы:

$$\Xi(p) \otimes \Xi(q) \;=\; \begin{bmatrix} \mathbf{1}^p \otimes \mathbf{1}^q & \ldots & \mathbf{1}^p \otimes \chi_n^q \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \chi_m^p \otimes \mathbf{1}^q & \ldots & \chi_m^p \otimes \chi_n^q \end{bmatrix};$$

(vi) Базис двумерного разложения Хаара состоит из множества функций:

$$\mathfrak{H}^+(p^n, q^n) = \{\mathbf{1}^p \otimes \mathbf{1}^q\} \cup \{\langle \mathfrak{d}, \chi(\mathfrak{d}) \rangle\}, \quad \text{где}$$

$$\mathfrak{d} \in \mathfrak{B}_+(p, q|n), \quad \text{и } \chi \in [\mathbf{1}^p \otimes \Xi^\star(q)] \cup [\Xi^\star(p) \otimes \mathbf{1}^q] \cup [\Xi^\star(p) \otimes \Xi^\star(q)];$$

(vii) Если $\mathbf{H}_p$ и $\mathbf{H}_q$ являются элементарными преобразованиями Хаара для слагаемых указанной последовательности колец, то элементарное преобразование Хаара $\mathbf{H}_{p,q}$ для прямой суммы этих последовательностей является тензорным произведением

$$\mathbf{H}_{p,g} = \mathbf{H}_p \otimes \mathbf{H}_q$$

указанных преобразований и в матричном представлении записывается следующим образом:

$$\mathbf{H}_{p,g}(W) = \mathbf{H}_p \cdot W \cdot \mathbf{H}_q^T, \text{ где } W \in \mathscr{F}(p) \otimes \mathscr{F}(q) \simeq \mathscr{M}(p, q).$$

Доказательство. Доказательство данного предложения является несложным упражнением по применению понятия тензорного произведения векторных пространств и действующих в них линейных операторов. ⊠

Так же как и в одномерном случае инверсное преобразование, выполненное по каждой координате отдельно, преобразует r-адические шары в r-адические блоки, и трансформирует преобразование Хаара для последовательности абелевых групп в ту его форму, в которой оно применяется в теории обработки изображений. На рисунке 4.18 ниже показано

соответствие между этими двумя формами, а также показаны базисные функции и формула элементарного преобразования Хаара для случая, когда $p = q = 2$ и $n = 4$.

Предложение 4.7 очевидным образом обобщается на прямую сумму любого конечного количества стандартных последовательностей колец вычетов, имеющих одинаковую длину. Это позволяет применять преобразования Хаара к любым числовым массивам, размерность которых по i-ой координате равна p_i^n при фиксированном числе n.

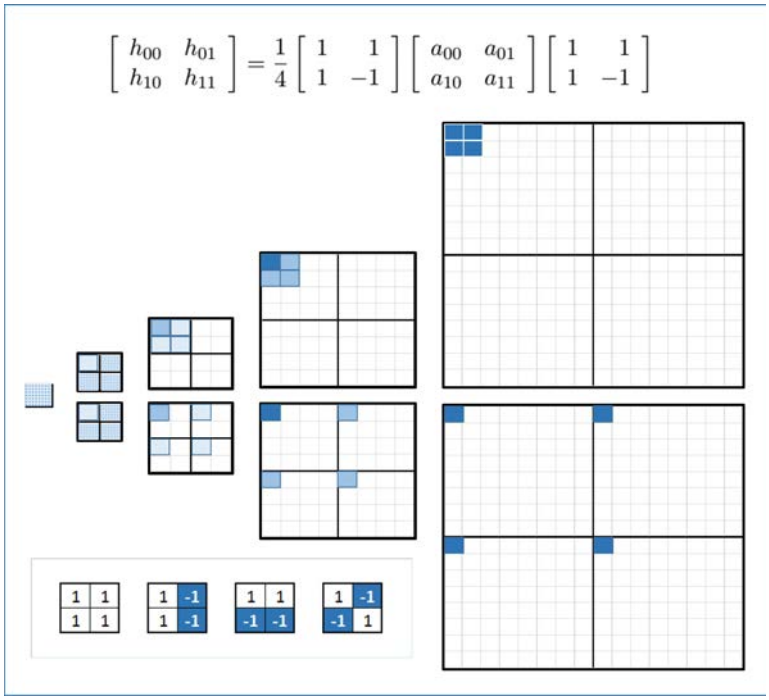


Рисунок 4.15 Схема двумерных преобразований Хаара, связанных между собой инверсным отображением.

4.6 Обобщенное разложение Хаара, правило Леонардо и дерево Пифагора

В предыдущем параграфе мы видели, что разложение Хаара связано с понятием дискретной p-адической диффузии и с понятием распределения субстанции, энергии или информации через сеть каналов, пропускная способность которых уменьшается в геометрической прогрессии со знаменателем p. В этом параграфе мы рассмотрим разложение Хаара и соответствующий ему процесс диффузии на дереве с произвольной пропускной способностью ребер, а также остановимся на связи этого разложения с «правилом Леонардо» и с деревом Пифагора. Пропускная способность структур, которые соответствуют таким деревьям, естественным образом описывается в терминах теории меры и в терминах аддитивных функций, определенных на деревьях.

Определение. Будем называть функцию $\mu : \mathrm{V}(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$, определенную на множестве вершин ориентированного корневого дерева $\mathbb{T}$, аддитивной, если ее значение в любой вершине равна сумме ее значений в дочерних вершинах.

Пусть $\mathbb{T}$ есть некоторое корневое дерево. Если добавить к корневой вершине этого дерева бесконечную точку и соединить ее с корнем дерева с помощью «стволового ребра», то

между множеством вершин исходного дерева и множеством ребер, включая стволовое ребро, устанавливается взаимно однозначное соответствие. Каждой вершине однозначно соответствует входящее в нее ребро. Поэтому понятие аддитивности можно перенести на функции, определенные на ребрах дерева $\mathbb{T} \cup \{\infty\}$. Можно просто говорить об аддитивной функции f, определенной на дереве $\mathbb{T} \cup \{\infty\}$. Очевидно, что аддитивная функция на конечном дереве однозначно определяется своими значениями в терминальных вершинах. Если функция μ принимает положительные вещественные значения, то ее можно интерпретировать как меру, заданную на дереве $\mathbb{T}$, при этом все вершины и все ребра данного дерева приобретают некоторый вес. Возьмем кольцо $\mathbb{Z}(p^n)$, и надстроим над ним ориентированное дерево p-адических шаров ненулевого радиуса, состоящее из n уровней. Добавим к этому дереву бесконечную вершину, как это показано на рисунке 4.16. В результате мы получим полное ориентированное p-адическое дерево $\mathbb{T}(p^{n+1}) \cup \{\infty\}$ с добавленной к нему бесконечной вершиной, в котором элементы кольца $\mathbb{Z}(p^n)$ являются терминальными вершинами. Будем далее обозначать такое дерево символом $\mathbb{T}_+(p^{n+1})$. Множество вершин этого дерева, за исключением бесконечной вершины, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством его ребер. Очевидно, что положительные меры, определенные на кольце $\mathbb{Z}(p^n)$, находятся во взаимно однозначном соответствии с аддитивными функциями $\mu \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^n); \mathbb{R}^+)$. Каждая такая функция очевидным образом продолжается на множество всех p-адических шаров кольца $\mathbb{Z}(p^n)$. Мера шара определяется как сумма мер всех элементов, которые ему принадлежат. Обратно, каждая мера, определенная на множестве шаров, должна быть определена на шарах нулевого радиуса, то есть на отдельных элементах кольца $\mathbb{Z}(p^n)$. Если интерпретировать такое дерево как систему распределения субстанции, энергии или информации, то функция μ естественным образом интерпретируется как пропускная способность ребер и вершин. Такая интерпретация является естественной для любых природных, технических или абстрактных систем, в которых происходит распределение субстанции, энергии или информации через сеть каналов, организованных с форме ориентированного дерева.

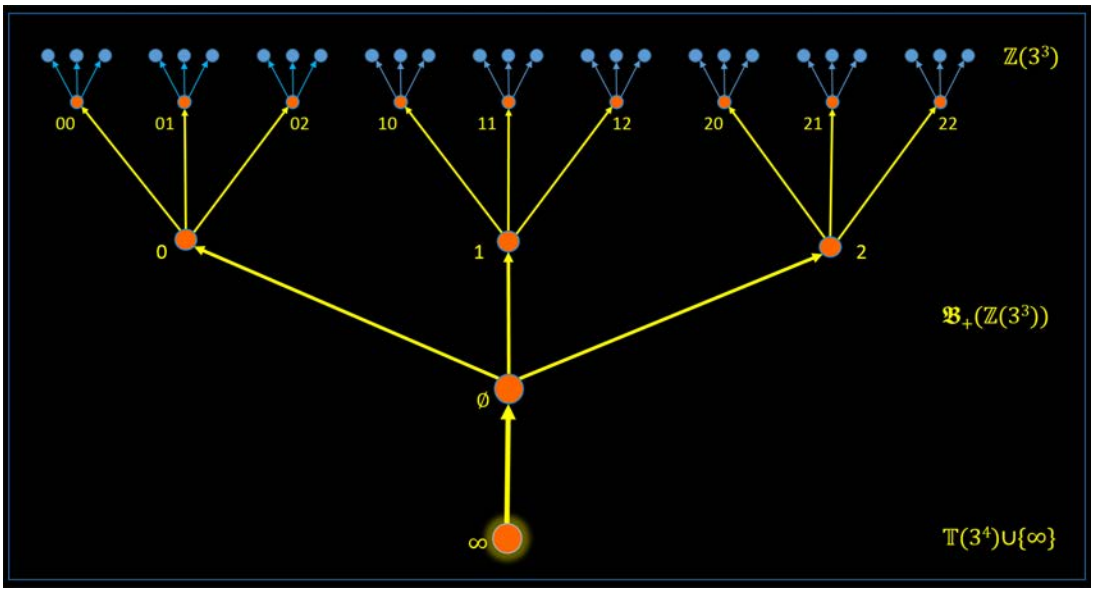


Рисунок 4.16 Троичное дерево $\mathbb{T}_+(3^4) \cup \{\infty\}$ с множеством $\mathbb{Z}(3^3)$ в качестве терминальных вершин.

Бесконечной точке при этом соответствует источник, через который субстанция, энергия или информация попадают в систему. Поскольку любое конечное, связное и ориентированное корневое дерево может быть вложено в некоторое дерево $\mathbb{T}_+(p^n)$, то эта интерпретация с соответствующими модификациями имеет универсальный характер. Условие аддитивности меры соответствует условию сохранения пропускной способности в точках ветвления. Представим себе дерево $\mathbb{T}_+(p^n)$ вложенным в трехмерное пространство и состоящим из ребер цилиндрической формы, подобранных таким образом, что площадь сечения родительского ребра равна сумме площадей сечения дочерних ребер.

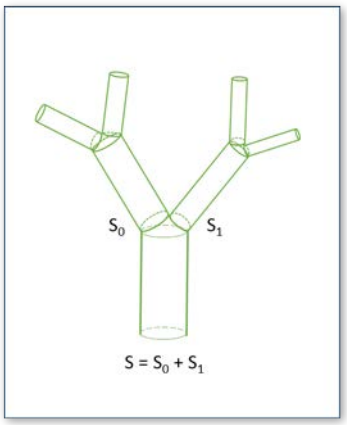


Рисунок 4.17

Пример такой конструкции изображен на рисунке 4.17. Условие аддитивности меры означает, что площадь сечения ребра равна сумме площадей сечений его дочерних ребер. Это правило известно как «правило Леонардо», так как более пятисот лет назад Леонардо Да Винчи высказал гипотезу, которая связывает толщину ствола с толщиной ветвей на разных уровнях их ветвления. Леонардо записал в своей записной книжке что «все ветви дерева на каждой ступени его ветвления, сложенные вместе, равны по толщине стволу» (см. рисунок 4.18). Срезы дерева показаны на диаграмме в верхней части страницы и обозначены латинскими буквами. Если предположить, что срезы ветвей дерева имеют форму кругов, то правило Леонардо выражается приведенной ниже формулой, где d есть диаметр некоторой ветви, а $d_0, d_1, \ldots d_k$ есть диаметры ее $k+1$ дочерних ветвей.

$$d^2 = d_0^2 + d_1^2 + \cdots + d_k^2,$$



Рисунок 4.18 Схема из записной книжки Леонардо да Винчи (Manuscript M, folio 78).

Данная формула имеет смысл не только для ветвей, но и для корней дерева. Аналогичная формула с показателем степени близким к тройке справедлива для кровеносной системы человека и животных, если эту систему (а точнее ее фрагменты) рассматривать как двоичное дерево. В этом случае данная формулы выглядит как

$$d^n = d_0^n + d_1^n, \qquad \text{где } n \sim 3.$$

Распределительная система, которую мы рассматривали в предыдущей главе, соответствует единичной функции $\mathbf{1}$, при которой пропускная способность всех терминальных каналов одинакова и равна 1. Рассмотрим общий случай, когда на кольце $\mathbb{Z}(p^n)$ задана положительная мера μ и некоторая функция f, принимающая вещественные или комплексные значения. В вещественном случае будем интерпретировать значение $f(x)$ как плотность стационарного потока в вершине $x \in \mathbb{Z}(p^n)$, то есть количество субстанции, энергии или информации, поступающий в точку x в единицу времени, на единицу площади (если мера каналов интерпретируется как площадь). На множестве функций $\mathscr{F}(p^n)$ естественным образом определено скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle = \sum_{x\in\mathbb{Z}(p^n)} f(x)\overline{g(x)}\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{Z}(p^n)} f\ \overline{g}\cdot d\mu.$$

Данное скалярное произведение определено для всех подпространств пространства $\mathscr{F}(p^n)$, которые фигурируют в рассуждениях предыдущего параграфа. Поток через ребро или через вершину дерева, которая соответствует шару $\mathfrak{b}$, может быть записан в виде $\int_{\mathfrak{b}} f d\mu$. Если функция f интерпретируется как плотность потока в терминальных вершинах дерева $\mathbb{T}_+(p^n)$, то плотность потока в любой вершине $\mathfrak{b}$ или (что то же самое) в любом ребре вычисляется следующим образом:

$$\mathfrak{av}[f](\mathfrak{b}) = \sum_{x\in\mathfrak{b}} f(x)\mu(x)/\mu(\mathfrak{b}). \tag{92}$$

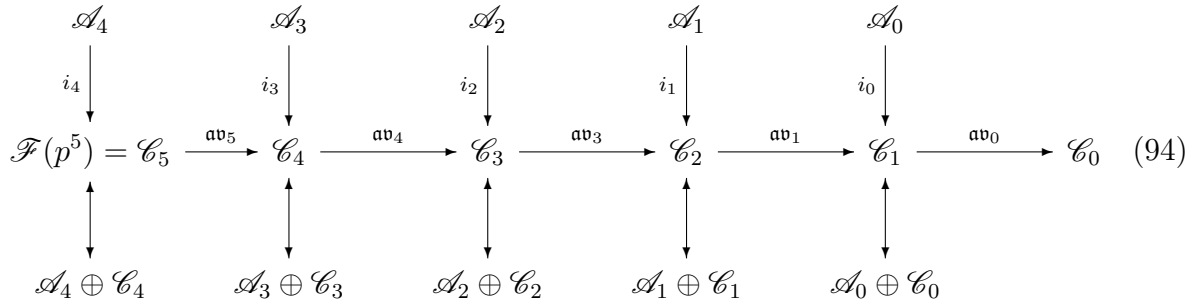
Естественным образом определяются операторы усреднения $\mathfrak{av}_k : \mathscr{F}(p^n) \to \mathscr{F}(p^n)$, которые усредняют функции из пространства $\mathscr{F}(p^n)$ по правильным p^{n-k}-угольникам или по шарам радиуса $1/p^k$. Если $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}_k$ есть такой шар и $x \in \mathfrak{b}$, то

$$\mathfrak{av}_k[f](i) = \sum_{x\in\mathfrak{b}} f(x)\mu(i)/\mu(\mathfrak{b}). \tag{93}$$

Легко проверить, что $\mathfrak{av}_k^2 = \mathfrak{av}_k$ и $\mathfrak{av}_{k-1}\circ\mathfrak{av}_k = \mathfrak{av}_k$.

Вероятностная интерпретация. Если $\mu(\mathbb{Z}(p^n)) = 1$, то функцию μ можно интерпретировать как дискретное распределение вероятностей на множестве $\mathbb{Z}(p^n)$. В этом случае функцию f можно рассматривать как случайную величину, и формулы (92) и (93) приобретают естественный смысл в терминах теории вероятностей. Функция $\mathfrak{av}[f]$ является постоянной функцией, значение которой в каждой точке равно математическому ожиданию случайной величины f. Аналогичным образом функция $\mathfrak{av}_k[f]$, ограниченная на шар $\mathfrak{b}$ радиуса $1/p^k$, представляет собой постоянную функцию, значение которой равно условному математическому ожиданию случайной величины $f|\mathfrak{b}$, вычисленному по формуле условной вероятности Байеса: $p(\mathfrak{a}/\mathfrak{b}) = p(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})/p(\mathfrak{b})$.

Все разложения и диаграммы, начиная с диаграммы (70), и кончая диаграммой (72), оказываются справедливыми, так все они основываются на свойствах операторов $\mathfrak{av}_k$.



(94)

Различия начинаются на уровне пространств $\mathfrak{F}(\mathfrak{b})$, состоящих из функций, носитель которых есть подмножество некоторого шара $\mathfrak{b}$. Среди этих функций выделяется функция $\mu(\mathfrak{b})$, представляющая собой ограничение меры μ на шар $\mathfrak{b}$. Подпространство $\mathfrak{W}(\mathfrak{b})$ асимметрических функций на шаре $\mathfrak{b}$ состоит из функций, которые ортогональны функции $\mu(\mathfrak{b})$ в смысле метрики, индуцированной мерой μ. Для каждого пространства $\mathfrak{F}(\mathfrak{b})$ определено свое скалярное произведение, которое индуцировано мерой $\mu(\mathfrak{b})$, определенной на множестве дочерних шаров шара $\mathfrak{b}$. Поэтому базис Ξ, а также матрица $\mathbf{H}$, фигурирующие в предложении 4.3, оказываются зависимыми от p-адического шара $\mathfrak{b}$. Разложение (78) принимает форму:

$$\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \dots \\ h_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu(\mathfrak{b})} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \chi_{10} & \chi_{11} & \cdots & \chi_{1(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_{(n-1)0} & \chi_{(n-1)1} & \cdots & \chi_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \dots \\ v_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{95}$$

где строки указанной матрицы представляют собой ортогональный базис пространства $\mathfrak{F}(\mathfrak{b})$. Таким образом, заключительный третий этап алгоритма разложения на вейвлеты Хаара в общем случае состоит из четырех шагов, которые нужно выполнить для каждого p-адического шара $\mathfrak{b}$:

(i) вычисление векторов $\mu(\mathfrak{b})$;

(ii) выбор ортогонального базиса $\Xi(\mathfrak{b})$, который состоит из базиса пространства $\mathfrak{W}(\mathfrak{b})$, к которому добавлена единичная функция;

(iii) вычисление обратной матрицы $\mathbf{H}(\mathfrak{b}) = (1/(|\mu(\mathfrak{b})|)\Xi(\mathfrak{b})^T$, соответствующей этому базису;

(iv) умножение на нее соответствующего вектора $v \in \mathfrak{F}(\mathfrak{b})$.

Все элементы формулы (95) являются функциями от p-адического шара $\mathfrak{b}$, то есть определены на дереве p-адических шаров $\mathfrak{B}(p^n)$. С учетом этих особенностей сама форма разложения Хаара остается без изменений.

С правилом Леонардо Да Винчи естественным образом связан фрактальный математический объект, известный как «дерево Пифагора». Первое известное автору упоминание этого объекта встречается в математическом эссе Босмана ([21]), которое вышло в 1957

году. В последние годы этот объект привлекает к себе все большее внимание в связи с разработкой различных техник визуализации иерархически организованных данных ([19]). С точки зрения p-адической арифметики этот объект представляет интерес в связи с его использованием для визуализации мер, определенных на конечных и бесконечных p-адических кольцах и на p-адических деревьях. Мы рассмотрим дерево Пифагора, которое можно построить не только из квадратов, но и из прямоугольников. Способ построения простого дерева Пифагора с очевидностью усматривается из рисунка 4.19. Дерево Пифагора с точностью до подобия определяется двумя параметрами: (i) углом α при основании исходного прямоугольного треугольника и (ii) соотношением сторон l исходного прямоугольника. Будем обозначать такое дерево символом $\mathscr{P}(\alpha, l)$. Показанная на рисунке пунктирная линия соединяет центры прямоугольников, составляющих данное дерево. Дерево Пифагора интересно тем, что величины оснований составляющих его прямоугольников кодируют все возможные варианты толщины ветвей, удовлетворяющих условию Леонардо Да Винчи с фиксированным углом α.

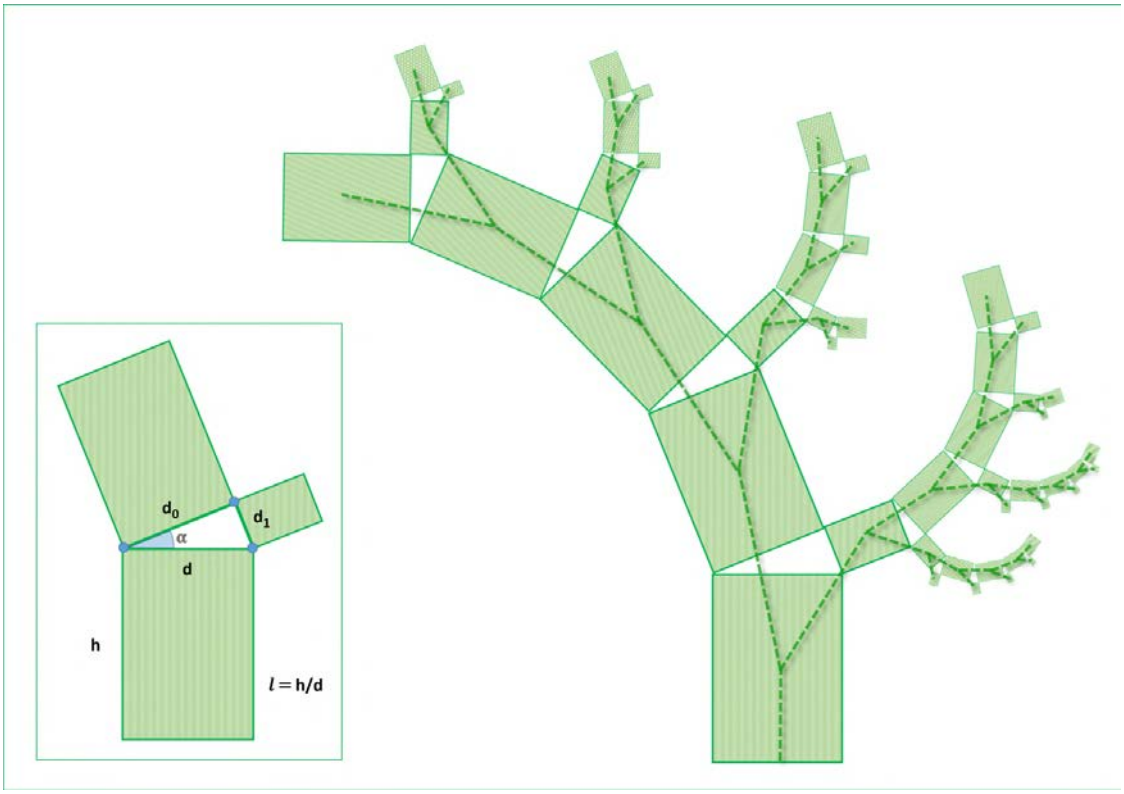


Рисунок 4.19 Схема построения дерева Пифагора $\mathscr{P}(\alpha, l)$.

Поскольку бесконечные пути по двоичному дереву находятся во взаимно однозначном соответствии с целыми 2-адическими числами, то любая пара, состоящая из вложения базового прямоугольника $\mathfrak{q}$ в вещественную плоскость $\mathbb{R}^2$ и острого угла α, определяет дерево Пифагора, которое будучи продолженным до бесконечности задает непрерывное отображение $\mathscr{P}(\mathfrak{q}, l) : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{R}^2$. При этом множество вершин (или точек ветвления) данного дерева находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\mathfrak{B}(\mathbb{Z}_2)$ всех 2-адических шаров, которое естественным образом отождествляется с множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$, как это было показано ранее в главе III. На рисунке 4.20 показаны пятнадцать первых уровней деревьев $\mathscr{P}(\pi/4, \phi)$ и $\mathscr{P}(\pi/6, \phi)$, где $\phi = (\sqrt{5}+1)/2$ (золотое сечение).

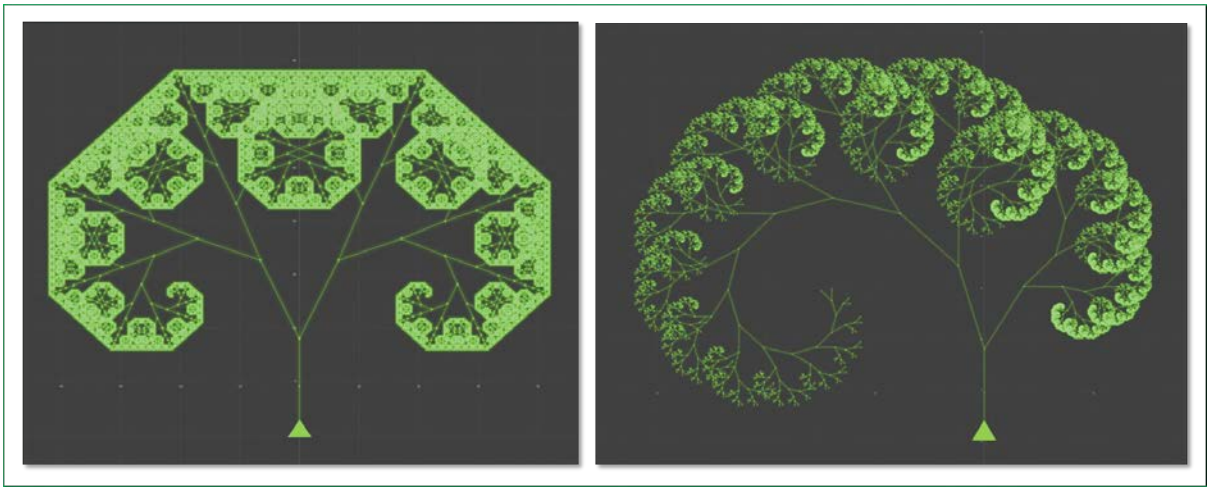


Рисунок 4.20 Первые пятнадцать уровней деревьев $\mathscr{P}(\pi/4, \phi)$ и $\mathscr{P}(\pi/6, \phi)$.

Обобщенное дерево Пифагора строится по любой положительной аддитивной функции μ (по любой мере) заданной на кольцах $\mathbb{Z}(2^n)$ или $\mathbb{Z}_2$. Каждая такая функция естественным образом продолжается на корневое двоичное дерево шаров, связанное с любым из этих колец. С каждым шаром $\mathfrak{b}$ этого дерева можно естественным образом связать прямоугольный треугольник. Если шар $\mathfrak{b}$ является объединением дочерних шаров $\mathfrak{b}_0$ и $\mathfrak{b}_1$, то имеет место равенство:

$$\mu(\mathfrak{b}) = \mu(\mathfrak{b}_0) + \mu(\mathfrak{b}_1),$$

следовательно, тройка чисел $\langle\sqrt{\mu(\mathfrak{b})}, \sqrt{\mu(\mathfrak{b}_0)}, \sqrt{\mu(\mathfrak{b}_1)}\rangle$ соответствует сторонам некоторого прямоугольного треугольника $\langle \mathrm{d}, \mathrm{d}_0, \mathrm{d}_1\rangle$ с острым углом $\alpha(\mathfrak{b})$ между гипотенузой d и катетом d_0.

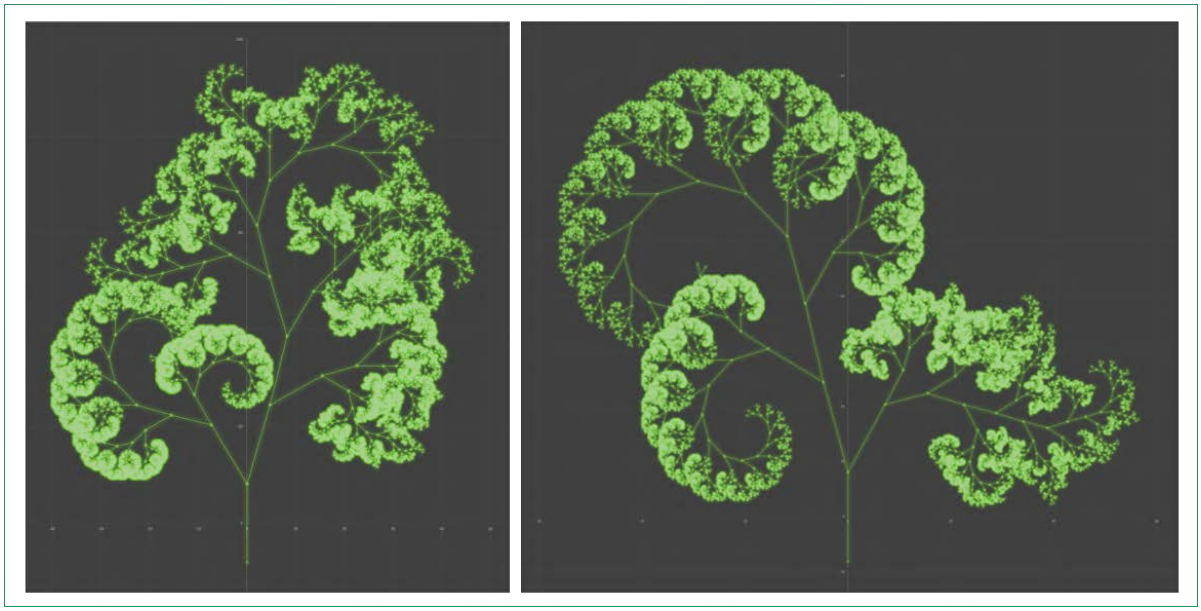


Рисунок 4.21 Изоморфные копии деревьев $\mathscr{P}(\pi/3, \phi)$ и $\mathscr{P}(\pi/6, \phi)$, полученные отражением в вершинах, номера которых являются простыми числами.

Заменив на рисунке 4.21 статический угол α динамическим углом $\alpha(\mathfrak{b})$, зависящим от шара, который определяет точку ветвления, мы получим обобщенное дерево Пифагора, которое является визуальным представлениям меры μ.

Далее в главе VIII мы будем обсуждать автоморфизмы двоичных деревьев. Забегая несколько вперед, приведем два примера деревьев, являющихся изоморфными копиями дерева Пифагора. Для получения изоморфной копии дерева Пифагора достаточно в процессе построения данного дерева в произвольном множестве его вершин поменять угол α на его дополнение до прямого угла $\pi/2 - \alpha$. Данная операция соответствует отражению базовой конструкции относительно вертикальной прямой, проходящей через центр прямоугольника. На рисунке 4.21 показаны изоморфные копии деревьев $\mathscr{P}(\pi/3, \phi)$ и $\mathscr{P}(\pi/6, \phi)$, полученные отражением в вершинах, номера которых (при отождествлении двоичного дерева с натуральным рядом) являются простыми числами.

V. Бесконечномерные разложения Фурье-Хаара

5.1 Гармонический анализ на p-адических группах

Интересно отметить, что, хотя по своему смыслу анализ Фурье связан с процессом распространения плоских волн, исторически данное разложение возникло в связи с изучением процесса распространения тепла или процесса диффузии, который подчиняется тем же математическим закономерностям, что и процесс распространения тепла. Оба этих процесса описываются уравнением $u_t = a^2 \triangle u + f$, однако по своему смыслу имеют мало общего с распространением и наложением плоских волн. В отличие от вещественного гармонического анализа на отрезке или на прямой, p-адический анализ Фурье изначально связан с процессом диффузии, а приближение непрерывной на кольце целых p-адических чисел функции частичными суммами ее ряда Фурье представляет собой ни что иное, как кодификацию идущего в обратном направлении процесса диффузии значений данной функции по p-адическим шарам. Процессы остывания и диффузии представляют собой процессы рассеяния энергии и с точки зрения философии являются проявлением общего принципа повышения энтропии. В отличие от физического мира, в котором эти процессы являются необратимыми и описываются уравнением, которое не инвариантно относительно замены переменной $t \to -t$, в мире p-адической математики эти конструкции являются обратимыми и с равным успехом могут рассматриваться с двух сторон. При этом процессу диффузии, который разрушает исходную структуру, превращая ее в постоянную функцию, соответствует обратный процесс, который создает исходную структуру из абсолютно однородного состояния. Этот обратный процесс является процессом формообразования, отдельные этапы которого могут быть описаны с помощью p-адических вейвлетов Хаара. В отличие от гармонического анализа на вещественном отрезке или на вещественной прямой, в котором коэффициенты разложения в ряд Фурье индексируются целыми числами, в случае гармонического анализа на кольце целых 2-адических чисел на множестве коэффициентов Фурье функции $f \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}_2)$ можно задать несколько структур, включая (1) структуру абелевой группы; (2) структуру двоичного дерева (3) структуру моноида 2-ичных слов. Все три способа индексации определяют различные семантические подходы в гармоническому анализу на кольце $\mathbb{Z}_2$. В этой главе наша цель будет состоять в том, чтобы обрисовать символическую связь, которая существует между следующими тремя сущностями:

(i) процессами диффузии и формообразования;

(ii) строением взаимно двойственных локально компактных групп $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ и $\mathbb{Z}_p$;

(iii) и определенными на них вейвлетами Хаара.

Мы покажем, что смежные классы по цепочкам вложенных друг в друга подгрупп этих групп формируют древоподобные структуры, по которым в двух противоположных направлениях распространяются два процесса, один из которых можно интерпретировать как диффузию, а другой как формообразование. В случае группы $\mathbb{Z}_p$ диффузия происходит по p-адическим шарам. В процессе такой диффузии значения функции, интерпретированные как плотность субстанции, распространяются с p шаров меньшего радиуса на содержащий их родительский шар. В случае множеств $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ и $\mathbb{N}_0$ диффузия идет соответственно по смежным классам конечных подгрупп и по последовательным блокам состоящим из p^n элементов. Асимметрии в этих двух процессах кодируются вейвлетами Хаара, определенными на смежных классах двух этих групп. Суть этих процессов детально изложена

нами выше для случая конечных абелевых групп. В настоящей главе мы изложим данную теорию для бесконечномерного случая и построим теорию вейвлетов Хаара на множествах $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty), \mathbb{N}_0$ и $\mathbb{Z}_p$. Следует отметить, что по своему смыслу бесконечномерный случай мало чем отличается от конечного. Можно, например, легко заменить группы $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ и $\mathbb{Z}_p$ на группы $\mathbb{Q}_{01}(p^n)$ и $\mathbb{Z}(p^n)$ при достаточно большом n с сохранением всех смысловых и концептуальных отношений между основными объектами. Однако рассмотрение бесконечного случая требует совсем другого уровня усилий и применения другого математического инструментария в виде теории интегрирования на локально компактных группах и теории бесконечномерных функциональных пространств интегрируемых функций. Применение более сложного математического инструментария является платой за возможность использовать понятие бесконечности. Читатель может оценить объем этих усилий и соотнести их с получаемыми при этом результатами. Наше внимание в основном будет сосредоточено именно на функциях, определенных на перечисленных выше трех множествах, однако ряд предложений, которые применимы для любой локально компактной абелевой группы, мы сформулируем в общем виде. Большинство приведенных ниже утверждений ориентировано на работу с классом групп, которые можно было бы назвать ***p-адическими***, понимая под этим термином локально компактные абелевы группы, содержащие замкнутые подгруппы ненулевой меры. Фактор группы по таким подгруппам всегда дискретны. Типовые p-адические группы получаются из аддитивных групп p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{Q}_p$, а также из двойственных им групп, путем применения к ним операций конечного прямого суммирования/произведения, выделения замкнутых подгрупп и факторизации. Поскольку данный параграф содержит много выкладок, то для того, чтобы не загромождать текст лишними скобками, мы будем использовать для прямого и обратного преобразования Фурье более простые обозначения:

$$\mathbf{F}[f] \equiv \widehat{f}, \qquad \overline{\mathbf{F}}[f] \equiv \widetilde{f}.$$

p-Адические группы

□ Будем называть локально компактную абелеву группу p-адической, если она содержит хотя бы одну замкнутую подгруппу ненулевой меры. К числу p-адических групп относятся аддитивные группы $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{Q}_p$, а также все дискретные абелевы группы, в которых мера Хаара некоторого подмножества с точностью до множителя совпадает с количеством его элементов.

Предложение 5.1 Пусть G есть локально компактная абелева группа, и H есть ее замкнутая подгруппа ненулевой меры. Тогда фактор группа G/H является дискретной. Для любой абсолютно интегрируемой функции f, постоянной на смежных классах по подгруппе H, справедливо равенство:

$$\int\limits_G f(x)\ d\mu = \mu(H) \cdot \sum_{g \in G/H} \widehat{f}(g),$$

где $\widehat{f} \in \mathscr{L}^1(G/H)$ есть функция, полученная факторизацией из функции f.

Доказательство. Пусть μ есть мера Хаара, определенная на группе G. На локально компактной группе G/H можно определить меру Хаара μ' следующим образом. Пусть K есть

компактное множество в группе G/H и $\pi^{-1}(K)$ его прообраз в группе G относительно естественного гомоморфизма групп $\pi : G \to G/H$. Определим меру множества K следующим образом:

$$\mu'(K) = \mu(\pi^{-1}(K))/\mu(H).$$

Легко проверить, что мера μ' является инвариантной относительно сдвигов на элементы из фактор группы G/H, поэтому она продолжается до меры Хаара на этой группе. Очевидно, что мера любого одноэлементного множества группы G/H равна единице, откуда следует дискретность группы G/H. Указанное выше равенство непосредственно следует из аддитивных свойств интеграла по области его определения. ⊠

Геометрический смысл характеров

Геометрический смысл характеров абелевых групп легко себе уяснить по аналогии с геометрией обычного трехмерного пространства. Это пространство можно себе представлять «сотканным» из бесконечного количества прямых и плоскостей. Если в этом пространстве задать начало координат, то каждый пучок параллельных друг другу прямых или плоскостей однозначно определяется некоторым линейным оператором, определенной на этом пространстве и отображающем его в пространство $\mathbb{R}^3$, а сами прямые или плоскости внутри такого пучка однозначно кодируются значениями данного оператора и представляют собой его множества уровней. Поэтому можно сказать, что все прямые и плоскости трехмерного пространства представляют собой множества уровней всевозможных линейных операторов, отображающих это пространство в $\mathbb{R}^3$. В теории абелевых групп роль, аналогичную роли прямых и плоскостей в трехмерной геометрии, играют смежные классы по всевозможным подгруппам данной группы. Эти смежные классы являются множествами уровней всевозможных характеров данной абелевой группы. Как мы показали выше, цепочки подгрупп данной группы, создают древоподобные структуры, вершинами которых являются указанные смежные классы, а ребрами соответствующие вложения одних смежных классов в другие. Данные деревья можно использовать в качестве множества параметров для параметризации сложных иерархических структур в многомерных пространствах. Этот подход был изложен автором в статье ([41]) и был назван «p-адической морфологией».

Основные функциональные пространства

Основным предметом гармонического анализа на локально компактных абелевых группах является разложение определенных на этих группах функций по характерам данных групп. Также как и в случае функционального анализа на отрезке, окружности или прямой основными объектами функционального анализа на кольце $\mathbb{Z}_p$ являются четыре функциональных пространства комплекснозначных функций. Эта четверка состоит из пространства финитных функций и трех других функциональных пространств, получаемых из пространства финитных функций путем его замыкания/пополнения по определенным нормам. Перечислим упомянутые выше четыре функциональных пространства:

(i) Пространство финитных функций $\mathscr{C}_0(\mathbb{Z}_p)$, на котором задана норма $\|*\|_0$ и скалярное произведение $(*,*)$:

$$\|f\|_0 = \max f(x), \quad x \in \mathbb{Z}_p, \qquad (f,g) = \int_{\mathbb{Z}_p} f\ \overline{g}\ d\mu.$$

Финитные функции являются непрерывными. К числу финитных функций принадлежат аддитивные характеры абелевой группы $\mathbb{Z}_p$, которые образуют счетный ортонормированный базис пространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{Z}_p)$.

(ii) Пространство непрерывных функций $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_p)$, на котором также задана норма $\|*\|_0$ и скалярное произведение $(*,*)$. Пространство $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_p)$ является замыканием пространства $\mathscr{C}_0(\mathbb{Z}_p)$ по норме $\|*\|_0$.

(iii) Пространство $\mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p)$ интегрируемых с квадратом функций, на котором задана норма $\|*\|_2$ и скалярное произведение $(*,*)$:

$$\|f\|_2 = \Big(\int_{\mathbb{Z}_p} |f|^2 d\mu\Big)^{1/2}, \qquad (f,g) = \int_{\mathbb{Z}_p} f\ \bar{g}\ d\mu.$$

В зависимости от подхода к определению пространства $\mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p)$ он определяется как пополнение пространства $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_p)$ по норме $\|*\|_2$ или как множество классов эквивалентности отличающихся на множестве меры ноль функций, квадрат которых интегрируем по Лебегу (см. параграф 1.15 и Приложение Б).

(iv) Пространство $\mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p)$ абсолютно интегрируемых функций, с заданной на нем нормой $\|*\|_1$:

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{Z}_p} |f| d\mu.$$

В зависимости от подхода к определению пространства $\mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p)$, оно также определяется или как пополнение пространства $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_p)$ по норме $\|*\|_1$ или или как множество классов эквивалентности отличающихся на множестве меры ноль функций, модуль которых интегрируем по Лебегу (см. параграф 1.15 и Приложение Б). Скалярное произведение произвольных двух функций этого пространстве в общем случае не определено, однако оно имеет смысл, когда одна из двух функций является ограниченной.

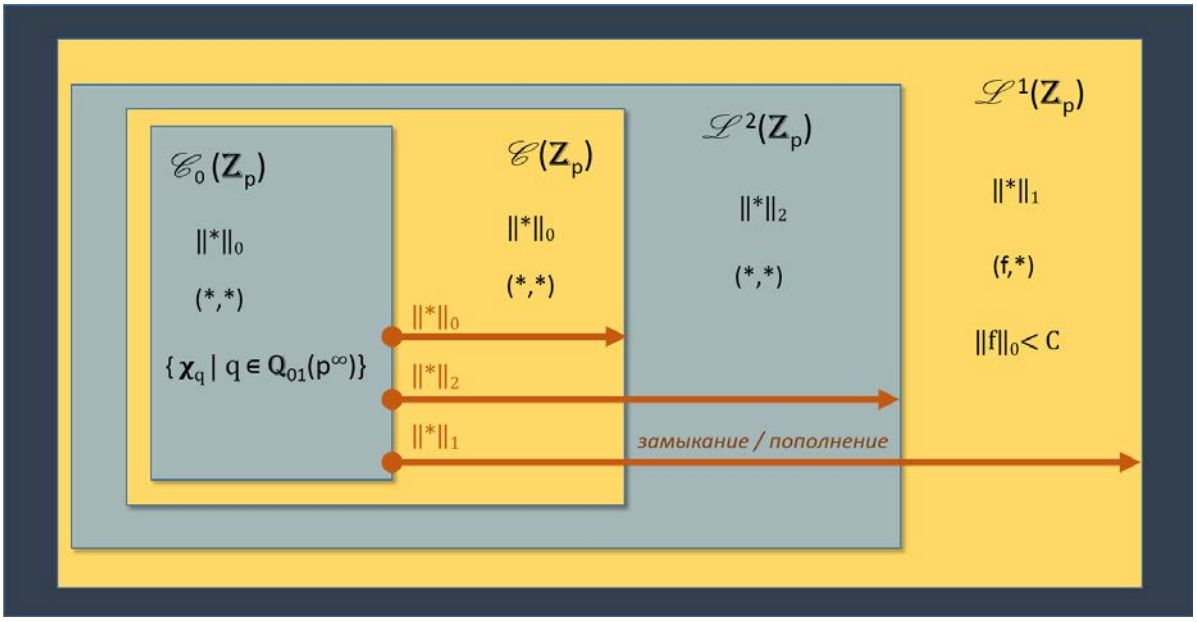


Рисунок 5.1 Соотношение между основными пространствами функций, определенных на кольце $\mathbb{Z}_p$.

Соотношение между этими пространствами схематически показано на рисунке 5.1. Все три пространства $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_p), \mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p)$ и $\mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p)$ являются полными относительно норм, которые их определяют. В случае пространства $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_p)$ это следует из непрерывности функции, которая является пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. В случае пространств $\mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p), \mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p)$ доказательство их полноты зависит от того способа, которым эти пространства определяются. В случае определения данных пространств как пространств классов эквивалентности интегрируемых по Лебегу функций, отличающихся на множестве меры ноль, их полнота следует соответственно из теорем Леви и Фату (см.[11], глава VII). В случае определения этих пространств как пополнений пространства непрерывных функций по соответствующим нормам, их полнота следует из того факта, что пополнение метрического пространства является полным метрическим пространством (см.[11], глава II).

В приведенных далее определениях предполагается, что система элементов $\{\phi_n \,|\, n \in I\}$ проиндексирована элементами некоторого счетного или конечного множества I, элементы которого пронумерованы натуральными числами.

□ Система элементов $\{\phi_n\}$ полного нормированного пространства H называется замкнутой, если ее линейная оболочка являются всюду плотным множеством в пространстве H.

□ Система элементов $\{\phi_n\}$ евклидова пространства H называется полной, если единственным элементом, который ортогонален всем элементам $\{\phi_n\}$ является нулевой вектор.

В случае евклидова пространства, в котором есть счетное всюду плотное множество, условия замкнутости и полноты эквивалентны друг другу, так как и то и другое условие означают, что ортогональное дополнение пространства, являющего замыканием линейной оболочки системы $\{\phi_n\}$, имеет размерность ноль.

□ Ортонормированная система элементов $\{\phi_n\}$ евклидова пространства H, удовлетворяющая условию замкнутости или полноты, называется ортонормированным базисом пространства H. Как мы далее покажем, в этом случае каждый элемент $f \in H$ может быть представлен сходящимся рядом вида $f = \sum_n f_n \cdot \phi_n$.

□ Система элементов $\{\phi_n\}$ нормированного пространства H называется базисом пространства H, если каждый элемент $f \in H$ может быть единственным образом представлен в виде сходящего ряда вида $f = \sum_n f_n \cdot \phi_n$.

Замечание о порядке суммирования. В случае, если пространство H является евклидовым, неравенство Парсеваля (см.ниже) избавляет нас от необходимости заботиться о порядке суммирования ортогональных рядов, так как такие ряды абсолютно сходятся в квадратичном смысле. Если пространство H не является евклидовым, то ситуация несколько усложняется. В зависимости от пространства H в качестве множества индексов его базиса может выступать любое счетное множество, например, $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$, $\mathfrak{B}(\mathbb{Z}_p)$ или $\mathrm{Ver}(\mathbb{T}_p)$. Поскольку ряд, в который раскладывается каждый элемент $f \in H$, в общем случае не является абсолютно сходящимся, то его сумма в общем случае зависит от порядка суммирования. Будем далее предполагать, что суммирование рядов, индексированных

элементами группы $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$, всегда происходит в порядке возрастания p-адической нормы индексов, возникающей при естественном вложении множества $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ в кольцо $\mathbb{Z}_p$, что эквивалентно возрастанию показателя n при представлении числа $q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ в виде $q = a/p^n$, где $(a, p) = 1$. Будем называть такой порядок суммирования ***каноническим***.

В каждом из упомянутых выше четырех функциональных пространств система характеров $\Xi_p = \{\chi_q \mid q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)\}$ является базисом, особенности которого меняются от пространства к пространству и могут быть сформулированы в виде одной теоремы, доказательства отдельных положений которой мы приведем далее.

Теорема о базисе. Пусть $\Xi_p = \{\chi_q \mid q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)\}$ есть множество характеров аддитивной группы $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел. Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) Система Ξ_p является ортонормированной;

(ii) Система Ξ_p является базисом в пространстве $\mathscr{C}_0(\mathbb{Z}_p)$ финитных функций. Каждую финитную функцию можно однозначным образом представить в виде конечной линейной комбинации функций из системы Ξ_p.

(iii) Система Ξ_p является замкнутой в пространстве $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_p)$ непрерывных функций. Каждая непрерывная функция является пределом равномерно сходящейся последовательности конечных линейных комбинаций функций из системы Ξ_p.

(iv) Система Ξ_p является ортонормированным базисом в пространстве $\mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p)$ квадратично интегрируемых функций. Каждая такая функция f может быть единственным образом представлена сходящимся по норме $\| * \|_2$ рядом вида

$$f = \sum_{q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)} f_q \cdot \chi_q,$$

при этом имеет место равенство Парсеваля

$$\|f\|_2^2 = \sum_{q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)} |f_q|^2.$$

(v) Система Ξ_p является базисом в пространстве $\mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p)$ абсолютно интегрируемых функций. Каждая такая функция f может быть единственным образом представлена рядом вида

$$f = \sum_{q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)} f_q \cdot \chi_q,$$

который сходится по норме $\| * \|_1$ при условии канонического порядка суммирования этого ряда.

Предложение 5.2 Множество аддитивных характеров $\{\chi_q \mid q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)\}$ группы $\mathbb{Z}_p$ образует ортонормированный базис в пространстве финитных функций $\mathscr{C}_0(\mathbb{Z}_p)$.

Доказательство. Каждый аддитивный характер χ_q ранга n или ниже соответствует некоторому рациональному числу $q = k/p^n$. Такой характер можно «пропустить» через фактор кольцо $\mathbb{Z}(p^n)$, поэтому он является финитной функцией и интеграл квадрата его нормы по

кольцу $\mathbb{Z}_p$ совпадает с суммой его значений квадрата его нормы по кольцу $\mathbb{Z}(p^n)$ деленной на p^n:

$$\|\chi_q(x)\|_2 = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} |\chi_q(x)|^2 dx = \frac{1}{p^n} \sum_{x=0}^{p^n-1} \exp(-2\pi i \frac{kx}{p^n}) \cdot \exp(2\pi i \frac{kx}{p^n}) = 1.$$

Аналогичным образом доказывается ортогональность двух различных характеров, которые предварительно «пропускаются» через фактор кольцо $\mathbb{Z}(p^n)$, где число n должно быть не меньше, чем ранг каждого из характеров. Каждая финитная функция ранга n также «пропускается» через фактор кольцо $\mathbb{Z}(p^n)$ и в соответствии со свойствами дискретного преобразования Фурье может быть представлена как линейная комбинация характеров ранга не выше n. Для того, чтобы в этом убедиться достаточно спроецировать группу $\mathbb{Z}_p$ на группу вычетов $\mathbb{Z}(p^k)$ и заметить, что характеристические функции шаров радиуса $1/p^k$, будучи «пропущены» через группу $\mathbb{Z}(p^k)$, превращаются в дельта функции, определенные на группе $\mathbb{Z}(p^k)$. Из свойств дискретного преобразования Фурье очевидно, что каждая такая функция может быть представлена в виде:

$$\delta_m(x) = \frac{1}{p^k} \sum_{n=0}^{p^k-1} \exp(-2\pi i \frac{nm}{p^k}) \cdot \exp(2\pi i \frac{nx}{p^k}).$$

Функция $\exp(2\pi i \cdot nx/p^k)$, будучи «поднятой» обратно на группу $\mathbb{Z}_p$, очевидно соответствует характеру χ_q, где $q = n/p^k$, а указанное выше разложение превращается в разложение характеристической функции соответствующего p-адического шара по аддитивным характерам группы $\mathbb{Z}_p$. $\boxtimes$

Пункт (iii) теоремы о базисе был доказан нами ранее (см. предложение 1.29). Докажем далее пункт (iv).

Теорема 5.3 Множество характеров $\{\chi_q \mid q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)\}$ образует ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p)$.

Доказательство. Как было показано выше, множество характеров является ортонормированной системой и характеристическая функция каждого p-адического шара радиуса $1/p^k$ представляет собой конечную линейную комбинацию характеров из множества $\{\chi_q \mid q \in \mathbb{Q}_{01}(p^k)\}$. Таким образом, мы имеем следующую цепочку утверждений: (1) характеристические функции шаров образуют базис в пространстве финитных функций и представляются в виде конечных линейных комбинаций характеров; (2) множество финитных функций является всюду плотным подмножеством пространства непрерывных функций $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_p)$; (3) пространство $\mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p)$ является пополнением пространства $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_p)$ по норме $\|*\|_2$. Отсюда следует, что линейная оболочка множества характеров является всюду плотным множеством в пространстве $\mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p)$, то есть является замкнутой системой функций. Докажем, что в этом случае каждый элемент пространства может быть однозначно представлен в виде сходящего ряда Фурье вида

$$v = \sum_{q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)} (v, \chi_q) \cdot \chi_q. \tag{96}$$

Пусть H_k есть конечномерное подпространство в $\mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p)$, которое порождается множеством характеров $\{\chi_q \mid q \in \mathbb{Q}_{01}(p^k)\}$. Мы имеем следующую цепочку вложенных друг в друга

конечномерных подпространств:

$$H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_k \subset \ldots.$$

Пусть $\{\pi_k\}$ есть операторы проектирования на эти подпространства, действующие по правилу:

$$\pi_k(v) = \sum_{q \in \mathbb{Q}_{01}(p^k)} (v, \chi_q) \cdot \chi_q.$$

Поскольку для любого $q \in \mathbb{Q}_{01}(p^k)$ имеет место равенство $(v - \pi_k(v), \chi_q) = 0$, то из этого следует, что $v - \pi_k(v) \perp \pi_k(v)$, поэтому величина $\|v - \pi_k(v)\| = \mathrm{d}(v, H_k)$ представляет собой минимальное расстояние между точкой v и подпространством H_k. Поскольку $H_k \subset H_{k+1}$, то $\mathrm{d}(v, H_k) > \mathrm{d}(v, H_{k+1})$. В силу равенства $\|v\|^2 = \|v - \pi_k(v)\|^2 + \|\pi_k(v)\|^2$ мы имеем следующие цепочки неравенств:

$$\|\pi_0(v)\| < \|\pi_1(v)\| < \|\pi_2(v)\| < \cdots < \|\pi_k(v)\| < \cdots < \|v\|,$$

$$\mathrm{d}(v, H_0) > \mathrm{d}(v, H_1) > \mathrm{d}(v, H_2) > \cdots > \mathrm{d}(v, H_k) > \cdots > 0. \tag{97}$$

Поскольку множество характеров является замкнутым, то последовательность (97) сходится к нулю, так как в противном случае расстояние между точкой v и любым из подпространств H_k превышало бы некоторую положительную величину δ, а значит расстояние между точкой v и замыканием линейной оболочки множества $\{\chi_q \mid q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)\}$ было бы больше δ, что противоречило бы факту замкнутости системы характеров, который был доказан ранее. Поэтому имеют место следующие соотношения:

$$\lim_{n\to\infty} \pi_k(v) = v, \qquad v = \sum_{q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)} (v, \chi_q) \cdot \chi_q = \sum_{q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)} v_q \cdot \chi_q,$$

$$\|v\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|\pi_n(v)\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{q \in \mathbb{Q}_{01}(p^n)} |(v, \chi_q)|^2 = \sum_{q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)} |(v, \chi_q)|^2,$$

$$\|v\|^2 = \sum_{q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)} |(v, \chi_q)|^2 = \sum_{q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)} |v_q|^2. \tag{98}$$

Равенство (98), которое представляет собой бесконечномерный аналог теоремы Пифагора, называется равенством Парсеваля. Из равенства Парсеваля вытекает, что каждый элемент векторного пространства $\mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p)$ однозначно определяется своими коэффициентами Фурье. Для того чтобы в этом убедиться, нужно применить это равенство для разности двух таких представлений. Отсюда также следует, что результат суммирования ряда Фурье (96) не зависит от порядка суммирования его членов. ⊠

Для доказательства утверждения (v) теоремы о базисе нам потребуется исследовать связь между разложением в ряд Фурье и формальным процессом p-адической диффузии в функциональном пространстве $\mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p)$.

Преобразование Фурье и сдвиг

Одним из ценных свойств преобразования Фурье является его взаимодействие со сдвигом, которое выражается в том, что Фурье преобразование от функции, сдвинутой на некоторый вектор, получается из Фурье преобразования исходной функции путем его умножения на

функцию поточечного фазового сдвига. Это свойство преобразования Фурье позволяет превратить кольцо комплексных факторизованных многочленов в произведение полей их коэффициентов, свести алгоритм вычисления сверки сигналов к поточечному произведению их Фурье образов или свести линейное уравнение в частных производных к системе из счетного множества обыкновенных дифференциальных уравнений.

Лемма 5.4 Пусть f есть интегрируемая функция, определенная на локально компактной топологической абелевой группе G, тогда для любых $h \in G$ и $\chi \in G^*$ справедливы следующие соотношения:

(i) $\widehat{f(x+h)}(\chi) = \chi(h) \cdot \widehat{f}(\chi)$;

(ii) $\widetilde{f(x+h)}(\chi) = \chi(-h) \cdot \widetilde{f}(\chi)$;

(iii) $\widehat{\chi_h \cdot f}(y) = \widehat{f}(y-h)$;

(iv) $\widetilde{\chi_h \cdot f}(y) = \widetilde{f}(y+h)$.

Доказательство. Лемма 5.4 доказывается непосредственными вычислениями. Обозначим оператор сдвига d_h. По определению преобразования Фурье мы имеем

$$\widehat{f}(\chi) = \int_G \overline{\langle \chi, x \rangle} f(x) dx = \int_G \overline{\chi(x)} f(x) dx,$$

$$\widehat{\mathrm{d}_h[f]}(\chi) = \int_G \overline{\chi(x)} f(x+h) dx = \int_G \overline{\chi(y-h)} f(y) dy = \chi(h) \cdot \int_G \overline{\chi(y)} f(y) dg = \chi(h) \cdot \widehat{f},$$

$$\widehat{\mathrm{d}_h[f]}(\chi) = \widehat{f(x+h)}(\chi) = \chi(h) \cdot \widehat{f}.$$

Аналогичное соотношение справедливо для обратного преобразования Фурье:

$$\widetilde{\mathrm{d}_h[f]}(\chi) = \widetilde{f(x+h)}(\chi) = \chi(-h) \cdot \widetilde{f} = \widetilde{f}/\chi(h).$$

$$\widehat{\chi_h \cdot f}(y) = \int_G \overline{\langle y, x \rangle} \chi_h(x) f(x) dx = \int_G \overline{\langle y, x \rangle} \langle h, x \rangle f(x) dx = \int_G \overline{\langle y-h, x \rangle} f(x) dx = \widehat{f}(y-h).$$

$$\widetilde{\chi_h \cdot f}(y) = \int_G \langle y, x \rangle \chi_h(x) f(x) dx = \int_G \langle y, x \rangle \langle h, x \rangle f(x) dx = \int_G \langle y+h, x \rangle f(x) dx = \widetilde{f}(y+h). \quad \boxtimes$$

Интегрирование и усреднение характеров по смежным классам

Пусть G есть компактная абелева группа. Если представлять себе эту группу как некоторое пространство, то характеры группы G кодируют собой амплитуды всевозможных стоячих волн, распространяющихся в этом пространстве. Для получения из них обычной плоской волны нужно умножить характер на фазу волны, зависящую от времени: $\chi \to \exp(2\pi\omega t) \cdot \chi$. Интуитивно ясно, что средняя амплитуда стоячей волны в замкнутом пространстве должны быть равна нулю, о чем говорит следующая лемма. Это также очевидно из геометрических соображений: множество значений неединичного характера представляет собой правильный n-угольник или окружность, поэтому в дискретном случае интегрирование характера сводится к суммированию полной геометрической прогрессии всех комплексных корней степени n из единицы, сумма которой очевидно равна нулю. Этот простой факт лежит в

основании гармонического анализа на локально компактных абелевых группах, так как из него вытекает условие ортогональности характеров.

Лемма 5.5 Интеграл по компактной абелевой группе G ее неединичного характера χ равен нулю:

$$\chi \neq \mathbf{1} \quad \rightarrow \quad \int_G \chi(h)dh = 0.$$

Доказательство. Пусть χ есть неединичный характер группы G, и g есть такой ее элемент, что $\chi(g) \neq 1$. Рассмотрим интеграл от характера $\chi \circ \mathrm{d}_g$, который получается из χ путем его сдвига на элемент g. Тогда мы имеем:

$$\int_G (\chi \circ \mathrm{d}_g)(h)dh = \int_G \chi(h+g)dh = \int_G \chi(u)du,$$

где в интеграле сделана замена переменной $h + g = u, dh = du$. В тоже время

$$\int_G \chi(h+g)(h)dh = \chi(g) \int_G \chi(h)dh.$$

Следовательно

$$\int_G (\chi \circ \mathrm{d}_g)(h)dh = \int_G \chi(h)dh = \chi(g) \cdot \int_G \chi(h)dh,$$

$$(1 - \chi(g)) \cdot \int_G \chi(h)dh = 0.$$

Так как $\chi(g) \neq \mathbf{1}$, отсюда следует равенство нулю указанного интеграла. ⊠

Следствие 5.6 Множество характеров компактной абелевой группы G образует ортонормированную систему функций.

Доказательство. Доказательство этого утверждения следует из леммы 5.5 с учетом того, что мера самой группы равна единице, а произведение $\chi_1 \cdot \overline{\chi_2}$ двух различных характеров является характером отличным от единичного. ⊠

□ Пусть H есть подмножество в локально компактной абелевой группе G. Аннулятором множества H называется подгруппа группы G^*, состоящая из всех характеров, отображающих множество H в единицу. Аннулятор множества H обозначается символом $H^\perp$.

Лемма 5.7 Пусть H есть компактная подгруппа конечной меры в локально компактной абелевой группе G, $g + H$ есть ее смежный класс, и χ есть характер группы G. Тогда справедливы следующие равенства:

(i)

$$\int_H \langle \chi, h \rangle dh = \int_H \chi(h)dh = \mu(H) \cdot \mathbf{1}_{H^\perp}(\chi) = \begin{cases} \mu(H), & \text{если } \chi \in H^\perp, \\ 0, & \text{если } \chi \notin H^\perp. \end{cases}$$

(ii)

$$\int_{g+H} \langle \chi, h \rangle dh = \int_{g+H} \chi(h)dh = \chi(g) \cdot \mu(H) \cdot \mathbf{1}_{H^\perp}(\chi) = \begin{cases} \chi(g) \cdot \mu(H), & \text{если } \chi \in H^\perp, \\ 0, & \text{если } \chi \notin H^\perp. \end{cases}$$

Доказательство. Если $\mu(H) = 0$, то данное утверждение тривиально. Предположим, что $\mu(H) > 0$, тогда пункт (i) доказывается применением леммы 5.5 к ограничению характера χ на подгруппу H, а пункт (ii) следует из того, что

$$\int_{g+H} \chi(h)dh = \chi(g) \cdot \int_H \chi(h)dh,$$

что доказывается линейной заменой переменой в соответствующем интеграле. ⊠

□ Каждый p-адический шар кольца $\mathbb{Z}_p$, имеющий радиус $1/p^k$, однозначно определяется k-разрядным числом u, принадлежащим кольцу $\mathbb{Z}(p^k)$ и задающим первые k p-адических цифр, которые являются общими для всех p-адических чисел, принадлежащих этому шару. Будем обозначать такой шар символом $\mathfrak{b}(u, k)$.

□ Каждый характер χ_q группы целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$ однозначно определяется рациональным числом $q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$, которое можно представить в виде $q = l/p^n$, где $(l, p) = 1$. Будем называть такой характер характером порядка n и обозначать символом $\chi(l, n)$. Все эти характеры выражаются через характер χ аддитивной группы p-адических чисел.

$$\chi : \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\pi} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \xrightarrow{\exp} \mathbb{C} \ ,$$

$$\chi : x \to \exp(2\pi i\{x\}).$$

$$\chi_q : x \to \exp(2\pi i\{qx\}),$$

$$q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty), \quad q = \frac{l}{p^n}, \quad (l, p) = 1.$$

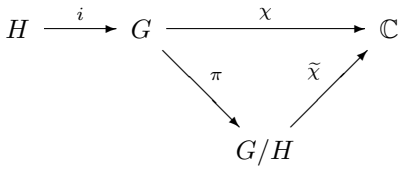
Очевидно, что все характеры порядка n могут быть «пропущены» через фактор кольцо $\mathbb{Z}_p/(p^n)$ и поэтому являются финитными функциями, постоянными на p-адических шарах/смежных классах по подгруппе (p^n).

Лемма 5.8 Для любого p-адического шара $\mathfrak{b}(u, k) \subseteq \mathbb{Z}_p$ и характера $\chi(l, n) \in \mathbb{Z}_p^*$ имеют место следующие соотношения:

$$\int\limits_{\mathfrak{b}(u,k)} \chi(l, n)d\mu = \begin{cases} 1/p^k, & \text{если } l = 0, \\ 0, & \text{если } n > k, \\ 1/p^k \cdot \exp(2\pi i \cdot lu/p^n), & \text{если } n \leqslant k. \end{cases} \tag{99}$$

Доказательство. Лемма 5.8 является следствием леммы 5.7. ⊠

Условие $\chi \in H^\perp$ эквивалентно условию $\mathrm{Ker}[\chi] \subseteq H$, поэтому результат интегрирования характера χ по подгруппе H зависит от того, можно или нет «пропустить» этот характер через фактор группу G/H, как это показано на следующей диаграмме.



Если $\chi \in H^\perp$, то билинейное отображение $\langle \chi, g \rangle = \chi(g) = g(\chi)$ факторизуется до билинейного отображения $H^\perp \times G/H \to \mathbb{C}$, из чего следует, что $G/H \cong (H^\perp)^*$.

Определение оператора усреднения

Пусть H есть подмножество конечной ненулевой меры в локально компактной абелевой группе G, тогда для любой интегрируемой на группе G функции f определено ее среднее значение на множестве H:

$$\mathfrak{a}_H(f) = \frac{1}{\mu(H)} \int_H f(h)dh,$$

Данное отображение представляет собой непрерывный линейный функционал:

$$\mathfrak{a}_H : \mathscr{L}^1(G) \to \mathbb{C}.$$

Далее нас в основном будут интересовать средние значения характеров локально компактных абелевых групп по смежным классам замкнутых подгрупп. Это связано с тем, что любая конечная цепочка подгрупп в такой группе порождает структуру типа дерево, ребрами которого являются смежные классы этих подгрупп, а ограничения характеров группы на смежные классы по этим подгруппам представляют собой амплитуды плоских волн, которые могут распространяться по отдельным ребрам/сегментам этого дерева и которые кодируют асимметрии в процессах распространения субстанции, энергии и информации по такой древовидной структуре. Теория всплесков берет свое начало именно из этой конструкции, первоначально предложенной в 1909 году Альфредом Хааром (правда без упоминания абелевых групп и деревьев).

Лемма 5.9 Пусть H есть компактная подгруппа ненулевой меры в локальной компактной абелевой группы G. Функция усреднения характера χ по смежному классу $g + H$ равна значению этого характера в точке g, умноженному на характеристическую функцию аннулятора подгруппы H:

$$\mathfrak{a}_{g+H}(\chi) = \chi(g) \cdot \mathbf{1}_{H^\perp}(\chi),$$

в частности

$$\mathfrak{a}_H(\chi) = \mathbf{1}_{H^\perp}(\chi).$$

Доказательство. Данное утверждение получается из леммы 5.7 путем деления обеих частей указанных формул на величину $\mu(H)$. ⊠

Преобразование Фурье характеристических функций

Следующее предложение продолжает тему дуализма «волна-частица» применительно к локально компактным абелевым группам, распространяя это соотношение на их замкнутые подгруппы и устанавливая смысловое соотношение между множествами замкнутых подгрупп двух двойственных друг другу групп.

Предложение 5.10 Пусть H есть компактная подгруппа ненулевой меры в локально компактной абелевой группе G, тогда преобразование Фурье от характеристической функции смежного класса $g + H$ вычисляется по следующей формуле:

$$\widehat{\mathbf{1}_{g+H}}(\chi) = \chi(g) \cdot \mu(H) \cdot \mathbf{1}_{H^\perp}(\chi),$$

в частности

$$\widehat{\mathbf{1}_H}(\chi) = \mu(H) \cdot \mathbf{1}_{H^\perp}(\chi).$$

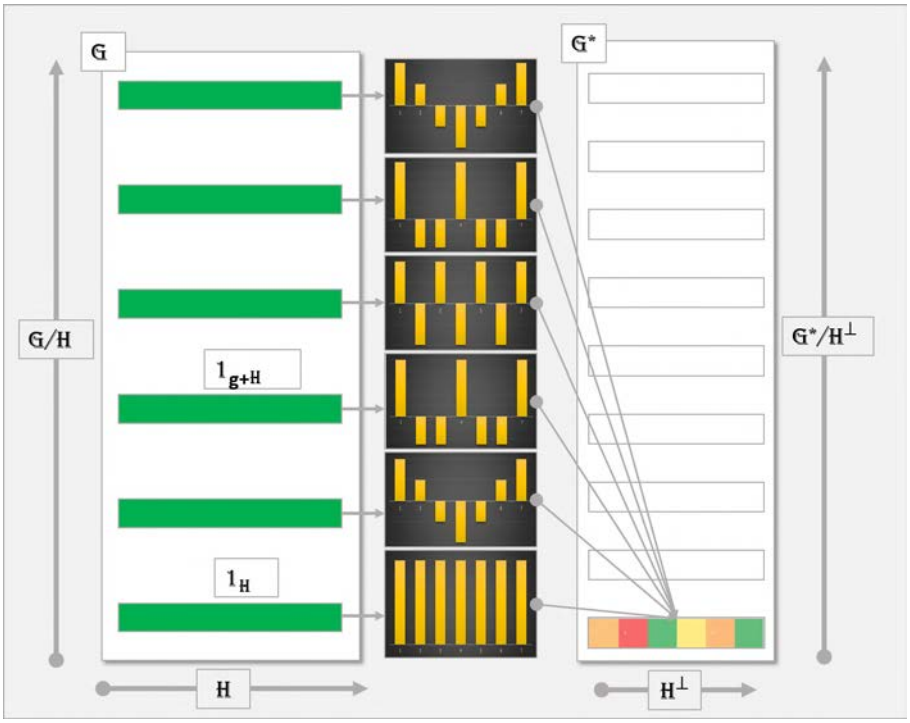


Рисунок 5.2 Факторизация преобразования Фурье по замкнутой подгруппе H.

Доказательство. Рассмотрим преобразование Фурье от соответствующей характеристической функции

$$\widehat{\mathbf{1}_{g+H}}(\chi) = \int\limits_G \overline{\langle \chi, x\rangle}\mathbf{1}_{g+H}(x)dx = \int\limits_{g+H} \overline{\langle \chi, x\rangle}\mathbf{1}_{g+H}(x)dx = \int\limits_H \overline{\langle \chi, y-g\rangle}\mathbf{1}_H(y)dy =$$

$$= \int\limits_H \overline{\langle \chi, y-g\rangle}dy = \chi(g)\cdot\int\limits_H \overline{\langle \chi, y\rangle}dy =$$

$$= \chi(g)\cdot\overline{\mu(H)\cdot\mathbf{1}_{H^\perp}(\chi)} = \chi(g)\cdot\mu(H)\cdot\mathbf{1}_{H^\perp}(\chi). \quad \boxtimes$$

В силу двойственности приведенное выше равенство можно записать в форме

$$\widehat{\mathbf{1}_{g+H}}(\chi) = g(\chi)\cdot\mu(H)\cdot\mathbf{1}_{H^\perp}(\chi). \tag{100}$$

Так как $\chi \in H^\perp$, то элемент g определен с точностью до смежного класса по подгруппе H, поэтому можно считать, что $g \in G/H$. Поэтому из уравнения (100) следует, что

$$G/H \cong (H^\perp)^*.$$

Предложение 5.10 по сути дела описывает факторизацию преобразования Фурье по компактной подгруппе конечной ненулевой меры. Характеристические функции смежных классов по подгруппе H превращаются преобразованием Фурье в характеры группы $H^\perp$, умноженные на меру подгруппы H. Носители все этих функций, а также их линейных комбинаций, лежат внутри подгруппы $H^\perp$. Из леммы 5.4 следует, что этим свойством обладают функции, постоянные на смежных классах по подгруппе H, и только они.

Преобразование Фурье и свертка

Свертка двух функций $f, g \in \mathscr{L}^1(G)$ определяется следующим образом:

$$f * g = \int\limits_G f(x-y)g(y)dy.$$

Если $f, g \in \mathscr{L}^1(G)$, то свертка $f * g$ также принадлежит пространству $\mathscr{L}^1(G)$ ([52]). В случае, когда группа G конечна, свертка представляет собой операцию умножения в групповом кольце $\mathbb{C}[G]$. Операция свертки имеет глубокий смысл, связанный с такими процессами как диффузия, распространение тепла и распределение плотности вероятности. Если функция g обозначает плотность источника, а функция f плотность распространения в единицу времени, то свертка функций f и g дает нам количество некоторой субстанции в единичный момент времени, которая диффундирует по закону, заданному функцией f, и в нулевой момент времени была инжектирована источником с мощностью g. Соответственно, n-кратное применение свертки дает картину распределения субстанции в момент времени n. Непрерывная картина получается из дискретной с помощью предельного перехода. В случае если функции f и g задают плотность распределения вероятности двух независимых случайных величин, свертка этих двух функций дает плотность распределения вероятности суммы этих двух случайных величин.

Очевидно, что $f*1 = f*1 = f$. Заменой переменных под знаком интеграла легко убедиться, что операция свертки коммутативна и ассоциативна, то есть

$$f * g = g * f, \qquad (f * g) * h = f * (g * h).$$

Теорема о свертке. Пусть f и g есть две интегрируемые функции на локально компактной абелевой группе G. Тогда Фурье преобразование свертки этих функций, равно произведению их Фурье преобразований:

$$\mathbf{F}[f * g] = \mathbf{F}[f] \cdot \mathbf{F}[g], \qquad \widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

Доказательство. Рассмотрим Фурье преобразование от свертки двух данных функций:

$$\widehat{f * g}\ (q) = \int\limits_G \Big(\int\limits_G f(x-y)g(y) \Big) \overline{\langle x, q \rangle} dx$$

Поскольку $\overline{\langle x, q \rangle} = \overline{\langle x-y, q \rangle} \cdot \overline{\langle y, q \rangle}$, то указанный выше интеграл можно переписать в следующем виде:

$$\widehat{f * g}\ (q) = \int\limits_G \Big(\int\limits_G f(x-y)g(y)dy \Big) \overline{\langle x-y, q \rangle}\ \overline{\langle y, q \rangle} dx =$$

$$= \int\limits_G \Big(\int\limits_G f(x-y)\overline{\langle x-y, q \rangle} dx \Big) g(y)\overline{\langle y, q \rangle} dy = \int\limits_G \Big(\int\limits_G f(z)\overline{\langle z, q \rangle} dz \Big) g(y)\overline{\langle y, q \rangle} dy =$$

$$= \Big(\int\limits_G f(z)\overline{\langle z, q \rangle} dz \Big) \Big(\int\limits_G g(y)\overline{\langle y, q \rangle} dy \Big) = \widehat{f}(q) \cdot \widehat{g}(q).$$

В данной цепочке преобразований сделана замена переменной $x - y = z, dx = dz$. $\boxtimes$

Усреднение по подгруппе

Определение оператора усреднения. Если $H \subseteq G$ есть замкнутая подгруппа конечной ненулевой меры в локально компактной абелевой группе G, то на пространстве $\mathscr{L}^1(G)$ абсолютно интегрируемых на группе G функций естественным образом определен оператор усреднения:

$$\mathfrak{av}_H[f] : \mathscr{L}^1(G) \to \mathscr{L}^1(G),$$
$$\mathfrak{av}_H[f](x) = \frac{1}{\mu(H)} \int_H f(x+h)dh.$$

Полученная таким образом функция также является абсолютно интегрируемой так как

$$\int_G (\frac{1}{\mu(H)} \int_H f(x+y)dy)dx = \frac{1}{\mu(H)} \int_H (\int_G f(x+y)dx)dy = \frac{1}{\mu(H)} \int_H dy \cdot \int_G f(x)dx = \int_G f(x)dx.$$

Нетрудно убедиться, что оператор усреднения следующим образом выражается через свертку с характеристической функцией соответствующего подмножества:

$$\int\limits_H f(x+h)dh = \int\limits_H f(x+h)\mathbf{1}_H(h)dh = \int\limits_{-H} f(x-u)\mathbf{1}_H(-u)du =$$

$$\int\limits_{-H} f(x-u)\mathbf{1}_{-H}(u)du = f * \mathbf{1}_{-H}(x),$$

где в интеграле сделана замена переменной $h = -u, dh = du$. Если множество H симметрично относительно нуля, то есть $H = -H$, то отсюда мы получаем следующее равенство

$$\mathfrak{av}_H[f] = \frac{1}{\mu(H)} \int\limits_H f(x+h)dh = \frac{1}{\mu(H)} \cdot f * \mathbf{1}_H,$$

которое в частности справедливо для любой замкнутой подгруппы H. Оператор усреднения превращает любую интегрируемую функцию f в функцию $\mathfrak{av}_H[f]$, которая принимает постоянное значение на всех смежных классах по подгруппе H и поэтому является инвариантной относительно сдвигов на любые элементы из подгруппы H, то есть

$$\mathfrak{av}_H[f](x+h) = \mathfrak{av}_H[f](x),$$

при любом $h \in H$. Таким образом, оператор усреднения $\mathfrak{av}_H$ удовлетворяет условию $\mathfrak{av}_H \circ \mathfrak{av}_H = \mathfrak{av}_H$ и является оператором проектирования на подпространство, состоящее из функций, инвариантных относительно действия группы H. Ядром этого оператора является подпространство интегрируемых функций $\mathscr{A}^1(G/H)$, среднее значение которых на каждом смежном классе группы H равно нулю. Каждая интегрируемая функция f представляется в виде

$$f = \mathfrak{av}_H[f] + (1 - \mathfrak{av}_H)[f] \in \mathrm{Im}[\mathfrak{av}_H] \oplus \mathrm{Ker}[\mathfrak{av}_H].$$

Другими словами, имеет место разложение

$$\mathscr{L}^1(G) = \mathscr{L}^1(G/H) \oplus \mathscr{A}^1(G/H),$$

где $\mathscr{L}^1(G/H) = \mathrm{Im}[\mathfrak{av}_H]$, и $\mathscr{A}^1(G/H) = \mathrm{Ker}[\mathfrak{av}_H]$. Заметим, что данное разложение является разложением в прямую сумму двух ортогональных друг другу пространств в смысле скалярного произведения, заданного интегралом по мере Хаара на группе G. Согласно предложению 5.1 фактор группа G/H является дискретной. Пусть $u \in \mathscr{L}^1(G/H)$, $v \in \mathscr{A}^1(G/H)$ и J есть множество смежных классов фактор группы G/H, в каждом из которых выбрано по одному представителю x_j. Тогда имеет место следующее равенство:

$$\langle u, v\rangle = \int\limits_G u(x)\overline{v(x)}d\mu = \sum_{j\in J}\int\limits_{x_j+H} u(x_j)\overline{v(x)}d\mu = \sum_{j\in J} u(x_j)\int\limits_{x_j+H}\overline{v(x)}d\mu = 0,$$

так как сумма $\sum\limits_{j\in J} u(x_j)$ является конечной в силу условия $u \in \mathscr{L}^1(G/H)$.

Покажем, что отображение $\mathfrak{av}_H$ представляет собой непрерывный линейный оператор

$$\mathfrak{av}_H : \mathscr{L}^1(G) \to \mathscr{L}^1(G).$$

Лемма 5.11 Пусть G есть локально компактная абелева группа и $H \subseteq G$ есть ее замкнутая подгруппа конечной ненулевой меры. Тогда оператор усреднения $\mathfrak{av}_H$ является непрерывным идемпотентным оператором, действующим в функциональном пространстве $\mathscr{L}^1(G)$, при этом $\|\mathfrak{av}_H\| \leqslant 1$. Пространство $\mathscr{L}^1(G)$ разлагается в прямую сумму двух замкнутых подпространств, которые ортогональны друг другу в интегральной метрике:

$$\mathscr{L}^1(G) = \mathrm{Im}[\mathfrak{av}_H] \oplus \mathrm{Ker}[\mathfrak{av}_H] = \mathscr{L}^1(G/H) \oplus \mathscr{A}^1(G/H).$$

Доказательство. Рассмотрим следующую цепочку интегралов:

$$\|\mathfrak{av}_H[f]\|_1 = \frac{1}{\mu(H)}\|\int\limits_H f(x+h)dh\|_1 = \frac{1}{\mu(H)}\int\limits_G |\int\limits_H f(x+h)dh|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu(H)}\int\limits_G\int\limits_H |f(x+h)|dh\,dx = \frac{1}{\mu(H)}\int\limits_H\int\limits_G |f(x+h)|dx\,dh =$$

$$= \frac{1}{\mu(H)}\int\limits_H dh\cdot\int\limits_G |f(y)|dy = \int\limits_G |f(y)|dy = \|f\|_1.$$

Из данной цепочки равенств следует, что $\|\mathfrak{av}_H\| \leqslant 1$. Идемпотентность оператора легко проверяется двойным интегрированием и является интуитивно очевидной, так как усреднение того, что было уже однажды усреднено, оставляет исходный объект без изменения. Разложение в прямую суммы вытекает из общих свойств идемпотентных операторов и является следствием формулы

$$f = \mathfrak{av}_H[f] + (1 - \mathfrak{av}_H)[f].$$

Ортогональность этих подпространств была доказана нами выше. ⊠

Лемма 5.12 Пусть G есть локально компактная абелева группа и $H \subseteq G$ ее компактная подгруппа ненулевой меры, тогда для любой интегрируемой на группе G функции f справедливо следующее соотношение:

$$\widehat{\mathfrak{av}_H[f]} = \mathbf{1}_{H^\perp}\cdot\widehat{f}. \tag{101}$$

Доказательство. Данное равенство вытекает из леммы 5.4, из теоремы о свертке и из предложения 5.10, согласно которым мы имеем

$$\widehat{\mathfrak{av}_H[f]} = \frac{1}{\mu(H)} \cdot \widehat{f * \mathbf{1}_H} = \frac{1}{\mu(H)} \cdot \widehat{f} \cdot \widehat{\mathbf{1}_H} =$$

$$= \frac{1}{\mu(H)} \cdot \widehat{f} \cdot \mu(H) \cdot \mathbf{1}_{H^\perp} = \widehat{f} \cdot \mathbf{1}_{H^\perp}. \qquad \boxtimes$$

Утверждение аналогичное лемме 5.11 также справедливо для квадратично интегрируемых функций.

Лемма 5.13 Пусть G есть локально компактная абелева группа и $H \subseteq G$ ее замкнутая подгруппа конечной ненулевой меры. Тогда оператор усреднения $\mathfrak{av}_H$ является непрерывным идемпотентным оператором, действующим в функциональном пространстве $\mathscr{L}^2(G)$, при этом $\|\mathfrak{av}_H\| \leqslant 1$. Пространство $\mathscr{L}^2(G)$ разлагается в прямую сумму двух замкнутых ортогональных подпространств:

$$\mathscr{L}^2(G) = \mathrm{Im}[\mathfrak{av}_H] \oplus \mathrm{Ker}[\mathfrak{av}_H] = \mathscr{L}^2(G/H) \oplus \mathscr{A}^2(G/H).$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathscr{L}^2(G)$. Воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского в форме (35), мы получаем следующую оценку:

$$\Big(\int\limits_H f(x+h)\,dh\Big)^2 \leqslant \int\limits_H f^2(x+h)\,dh \cdot \mu(H).$$

Используя инвариантность меры Хаара относительно сдвигов и меняя порядок интегрирования, получаем отсюда следующую цепочку соотношений

$$\|\mathfrak{av}_H[f]\|^2 = \int\limits_G \Big(\frac{1}{\mu(H)} \cdot \int\limits_H f(x+h)\,dh\Big)^2 dx \leqslant \frac{1}{\mu(H)} \cdot \int\limits_G \int\limits_H f^2(x+h)\,dh\,dx =$$

$$= \frac{1}{\mu(H)} \cdot \int\limits_H \int\limits_G f^2(x+h)\,dx\,dh = \frac{1}{\mu(H)} \cdot \int\limits_H \|f\|^2 dh = \|f\|^2,$$

из которой следует, что $\mathfrak{av}_H$ есть непрерывный оператор, и $\|\mathfrak{av}_H\| \leqslant 1$. Ортогональность указанного в лемме разложения была доказана нами выше. $\boxtimes$

Обращение преобразования Фурье

Пусть f есть интегрируемая функция на локально компактной абелевой группе $\mathfrak{g}$. В общем случае функция $\mathbf{F}_\mathfrak{g}[f]$ может оказаться неинтегрируемой, поэтому формула обращения преобразования Фурье $\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{g}^*} \circ \mathbf{F}_\mathfrak{g} = \mathbf{1}_\mathfrak{g}$ в общем случае может не иметь смысла. Однако, если функция $\mathbf{F}_\mathfrak{g}[f]$ интегрируема, то композиция $\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{g}^*} \circ \mathbf{F}_\mathfrak{g}$ двух последовательных преобразований Фурье, является функцией, которая инвариантна относительно сдвигов, так как согласно лемме 5.4

$$\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{g}^*}[\mathbf{F}_\mathfrak{g}[f(x+d)](\chi)](y) = \overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{g}^*}[\chi_d(x) \cdot \mathbf{F}_\mathfrak{g}[f(x)](y) = \overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{g}^*}[\mathbf{F}_\mathfrak{g}[f(x)]](y+d).$$

Следовательно, композиция двух преобразований Фурье с точностью до константы μ совпадает с единичным оператором, то есть

$$\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{g}^*} \circ \mathbf{F}_\mathfrak{g} = \mu \cdot \mathbf{1}_\mathfrak{g}.$$

Далее можно нормировать каждое из преобразований Фурье на величину $1/\sqrt{\mu}$ или оставить одно из них без изменения, а другое нормировать на величину $1/\mu$, получив для нормированных таким образом преобразований Фурье соотношение

$$\overline{\mathbf{F}}_{\mathfrak{g}^*} \circ \mathbf{F}_{\mathfrak{g}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{g}}.$$

Преобразование Фурье, усреднение и частотная фильтрация

Следующее предложение является обобщение леммы 5.4. Оно утверждает, что частотная фильтрация спектра интегрируемой функции по замкнутой подгруппе эквивалентна усреднению этой функции по аннулятору данной подгруппы.

Предложение 5.14 Пусть f есть непрерывная и абсолютно интегрируемая функция, определенная на локально компактной абелевой группе G. Тогда функция f является инвариантной относительно сдвигов $\mathrm{d_h}(x) = x + h$ на элементы из некоторого подмножества $H \subseteq G$, тогда и только тогда, когда носитель ее преобразования Фурье $\widehat{f}$ есть подмножество аннулятора множества H:

$$\widehat{f \circ \mathrm{d_h}} = \widehat{f}, \quad \text{для любого } h \in H \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{supp}(\widehat{f}) \subseteq H^{\perp}. \tag{102}$$

Доказательство. Рассмотрим следующие интегралы

$$|\widehat{f(x+h)}(\chi) - \widehat{f}(\chi)| = |\int_G \overline{\langle \chi, x\rangle} f(x+h)dx - \int_G \overline{\langle \chi, x\rangle} f(x)dx| \leqslant$$

$$\leqslant \int_G |\overline{\langle \chi, x\rangle}| \cdot |f(x+h) - f(x)|dx \leqslant \int_G |f(x+h) - f(x)|dx = 0,$$

откуда следует, что

$$\widehat{f(x+h)}(\chi) = \widehat{f}(\chi)$$

С другой стороны, мы имеем следующее равенство, вытекающее из свойств преобразования Фурье относительно сдвига:

$$\widehat{f \circ \mathrm{d_h}}(\chi) = \widehat{f(x+h)}(\chi) = \chi(h) \cdot \widehat{f}(\chi),$$

Заметим, что из условия $f \in \mathscr{L}^1(G)$ следует, что $\widehat{f}$ есть обычная функция, значение которой определено в каждой точке $\chi \in G^*$. Из приведенных выше формул видно, что инвариантность функции f относительно сдвига на элемент h равносильна условию

$$(\mathbf{1} - \chi(h)) \cdot \widehat{f}(\chi) = 0, \tag{103}$$

из которого следует, что условие $\widehat{f}(\chi) \neq 0$, равносильно условию $\chi(h) = \langle \chi, h\rangle = 1$, которое означает, что $\mathrm{supp}[\widehat{f}] \subseteq \{h\}^{\perp}$. Переход от одноэлементного множества $\{h\}$ к произвольному множеству H очевиден. Обратное утверждение доказывается применением к формуле (103) обратного преобразования Фурье. $\boxtimes$

Лемма 5.15 Преобразование Фурье абсолютно сходящегося на группе $\mathbb{Q}_{01}(p^{\infty})$ ряда является непрерывной функцией на кольце целых p-адических чисел:

$$f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_{01}(p^{\infty})) \quad \rightarrow \quad \mathbf{F}[f] \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}_p).$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty))$, рассмотрим разность значений функции $\mathbf{F}[f]$ в двух точках $x, y \in \mathbb{Z}_p$:

$$\mathbf{F}[f](x) - \mathbf{F}[f](y) = \sum_{q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)} f(q)(\overline{\langle q, x\rangle} - \overline{\langle q, y\rangle}) =$$

$$= \sum_{q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)} f(q)\overline{\langle q, x\rangle}(1 - \overline{\langle q, y - x\rangle}).$$

В данной формуле использованы равенства:

$$\langle q, x\rangle = \exp(2\pi i\{q \cdot x\}),$$

$$\langle q, x\rangle - \langle q, y\rangle = \langle q, x\rangle \cdot (1 - \langle q, y - x\rangle).$$

Поскольку ряд $\{f(q)\}$ является абсолютно сходящимся, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что сумма ряда $\{|f(q)|\}$ на дополнении к подгруппе $\mathbb{Q}_{01}(p^n)$ будет меньше ε. Тогда указанную выше сумму можно разбить на два слагаемых:

$$\sum_{q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)} f(q)\overline{\langle q, x\rangle}(1 - \overline{\langle q, y - x\rangle}) =$$

$$= \sum_{q \in \mathbb{Q}_{01}(p^n)} f(q)\overline{\langle q, x\rangle}(1 - \overline{\langle q, y - x\rangle}) \quad - \sum_{q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)\setminus\mathbb{Q}_{01}(p^n)} f(q)\overline{\langle q, x\rangle}(1 - \overline{\langle q, y - x\rangle}).$$

Оценим это выражение для любых $x, y \in \mathbb{Z}_p$ таких, что $x - y \in (p^n)$. Первое слагаемое в этой сумме равно нулю так как $\langle q, y - x\rangle = 1$. Абсолютная величина второго слагаемого очевидно меньше 2ε, что доказывает непрерывность функции $\mathbf{F}[f]$. $\boxtimes$

Пространство $\mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty))$ представляет собой пространство всех абсолютно сходящихся рядов на группе $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$. Определим на этом пространстве оператор усреднения $\mathfrak{av}_n$.

$$\mathfrak{av}_n : \mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)) \to \mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)),$$

$$\mathfrak{av}_n[f] = \mathfrak{av}_H[f], \text{ где } H = \mathbb{Q}_{01}(p^n).$$

Следующая лемма выражает интуитивно очевидный факт, состоящий в том, что при бесконечной диффузии в неограниченном пространстве максимальная плотность субстанции становится бесконечно малой.

Лемма 5.16 Пусть $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty))$, тогда $\lim_{n\to\infty} \|\mathfrak{av}_n[f]\|_0 = 0$.

Доказательство. По условию ряд $\{|f(q)|\}$ является сходящимся, пусть его сумма равна s. Очевидно, что средняя величина функции f по любой подгруппе $\mathbb{Q}_{01}(p^m)$, а также по каждому из ее смежных классов, не превышает величины s/p^m. При $m \to \infty$ эта величина стремятся к нулю, что и доказывает данную лемму. $\boxtimes$.

$\square$ Пусть $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p)$ и $\{f_q \mid q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)\}$ есть множество Фурье коэффициентов функции f. Рассмотрим n-ые частные суммы разложения функции f в ряд Фурье, которые определим следующим образом:

$$\mathrm{S}_n[f](x) = \sum_{q \in \mathbb{Q}_{01}(p^n)} f_q \cdot \chi_q(x), \quad f_q = (f, \chi_q).$$

Очевидно, что функция $\mathrm{S}_n[f]$ является финитной, так как она есть линейная комбинация характеров ранга на выше n, которые пропускаются через фактор группу $\mathbb{Z}(p^n)$ и поэтому принимают постоянное значение на всех шарах радиуса $1/p^n$.

□ Пусть $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$ есть одно из функциональных пространств $\mathscr{C}_0, \mathscr{C}, \mathscr{L}^1, \mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p)$ и $n \in \mathbb{N}$. Обозначим символом $\mathfrak{av}_n : \mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p) \to \mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$ оператор усреднения по подгруппе $(p^n) \subset \mathbb{Z}_p$.

□ Пусть $\mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p)$ есть одно из функциональных пространств $\mathscr{C}_0, \mathscr{C}, \mathscr{L}^1, \mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_p)$ и $n \in \mathbb{Z}$. Обозначим символом $\mathfrak{av}_n : \mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p) \to \mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p)$ оператор усреднения по подгруппе $(p^n) \subset \mathbb{Q}_p$.

Чтобы не усложнять обозначений, мы будем использовать для обозначения оператора усреднения по подгруппам в $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{Q}_p$ одно и тоже обозначение, полагая при этом, что выбор области усреднения будет ясен из контекста.

Заметим, что пространство $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$ изометрично вкладывается в пространство $\mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p)$ и является в нем инвариантным подпространством для любого оператора усреднения $\mathfrak{av}_n$ при $n \geqslant 0$.

Процесс последовательного применения операторов $\mathfrak{av}_n$ с убывающим индексом n можно метафорически рассматривать как p-адическую диффузию, при которой значение функции f постепенно усредняются по p-адическим шарам возрастающего радиуса. Следующая лемма устанавливает связь p-адического преобразования Фурье с процессом p-адической диффузии.

Лемма 5.17 Пусть $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p)$, тогда имеет место равенство $\mathrm{S}_n[f] = \mathfrak{av}_n[f]$.

Доказательство. Функция $\mathrm{S}_n[f]$ является финитной функцией ранга n. Очевидно, что функция $\mathfrak{av}_n[f]$ также является финитной ранга не выше n, так как она принимает постоянное значение на всех шарах радиуса $1/p^n$. Покажем, что коэффициенты Фурье этих двух финитных функций совпадают, откуда будет следовать их равенство.

$$(\mathfrak{av}_n[f], \chi_q) = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \overline{\chi}_q(x)\mathfrak{av}_n[f](x)dx = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \overline{\chi}_q(x)p^n \int\limits_{(p^n)} f(x+y)dydx =$$

$$= p^n \int\limits_{(p^n)} \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \overline{\chi}_q(x)f(x+y)dxdy = p^n \int\limits_{(p^n)} \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \overline{\chi}_q(y-z)f(z)dzdy =$$

$$= p^n \int\limits_{(p^n)} \chi_q(y)dy \cdot \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \overline{\chi}_q(z)f(z)dz = p^n \int\limits_{(p^n)} \chi_q(y)dy \cdot \mathbf{F}[f](q) = p^n \int\limits_{(p^n)} \chi_q(y)dy \cdot f_q.$$

Пусть $q = l/p^k$, где $(l, p) = 1$, тогда согласно лемме 5.8

$$p^n \int\limits_{(p^n)} \chi_q(y)dy = \begin{cases} 1, & \text{если } k \leqslant n, \\ 0, & \text{если } k > n. \end{cases}$$

Из этого равенства следует, что Фурье коэффициенты разложения финитных функций $\mathrm{S}_n[f]$ и $\mathfrak{av}_n[f]$ по ортогональному базису характеров $\{\chi_q \mid q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)\}$ совпадают, из чего следует совпадение этих функций. ⊠

Теорема 5.18 Последовательность частичных сумм $\mathrm{S}_n[f]$ ряда Фурье непрерывной комплекснозначной функции $f \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}_p)$ равномерно сходится к этой функции при $n \to \infty$.

Доказательство. Поскольку метрическое пространство $\mathbb{Z}_p$ компактно, то каждая непрерывная функция f, определенная на этом пространстве, является равномерно непрерывной, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, что из равенства $\|x - y\| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Выберем такое натуральное число k, что $1/p^k < \varepsilon$, и покроем пространство $\mathbb{Z}_p$ множеством $\{\mathfrak{b}_i \mid i \in \mathbb{Z}(p^k)\}$ непересекающихся шаров радиуса $1/p^k$. Для любой замкнутой подгруппы $G = (p^n) \subseteq (p^k)$ справедливы следующие соотношения:

$$\mathfrak{av}_G[f](x) = \frac{1}{\mu(G)} \int\limits_G f(x+g)dg = \frac{1}{\mu(G)} \int\limits_{x+G} f(y)dy.$$

$$\|f - \mathfrak{av}_G[f]\| = |f(x) - \frac{1}{\mu(G)} \int\limits_{x+G} f(y)dy| = |\frac{1}{\mu(G)} \int\limits_{x+G} f(x)dy - \frac{1}{\mu(G)} \int\limits_{x+G} f(y)dy| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu(G)} \int\limits_{x+G} |f(x) - f(y)|dy \leqslant \frac{1}{\mu(G)} \cdot \mu(G) \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

Из последнего равенства следует, что для любого $n \geqslant k$ имеет место неравенство

$$\|f - \mathfrak{av}_n[f]\| \leqslant \varepsilon,$$

которое с учетом леммы 5.17 доказывает равномерную сходимость последовательности $\mathrm{S}_n[f]$ к функции f. ⊠

Теорема 5.19 Для любой функции $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_p)$ последовательность $\{\mathfrak{av}_n[f]\}$ при $n \to \infty$ сходится в среднем к функции f, другими словами, справедливо следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \mathfrak{av}_n[f]\|_1 = 0.$$

Доказательство. Поскольку функция f принадлежит к пространству $\mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_p)$, которое по определению является замыканием по норме $\| * \|_1$ пространства $\mathscr{C}(\mathbb{Q}_p)$ непрерывных на множестве $\mathbb{Q}_p$ функций, то существует последовательность непрерывных функций $\{\phi_n\}$, которая сходится к функции f по норме $\| * \|_1$. Согласно предложению 1.32 множество финитных функций является всюду плотным в $\mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_p)$, поэтому функции $\{\phi_n\}$ можно считать финитными. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Путь ϕ_n есть финитная функция ранга k из этой последовательности такая, что $\|f - \phi_n\|_1 \leqslant \varepsilon$. Тогда для любого натурально числа $m \geqslant \max(n, k)$ мы имеем следующее неравенство

$$\|f - \mathfrak{av}_m[f]\|_1 \leqslant \|f - \phi_n\|_1 + \|\phi_n - \mathfrak{av}_m[\phi_n]\|_1 + \|\mathfrak{av}_m[\phi_n] - \mathfrak{av}_m[f]\|_1 \leqslant \varepsilon + 0 + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

так как: (1) для любой финитной функции ранга k ее усреднение по шарам радиуса, меньшего чем $1/p^k$, совпадает с самой этой функцией, то есть $\mathfrak{av}_m[\phi_n] = \phi_n$, при $m \geqslant k$; (2) $\|\mathfrak{av}_m[\phi_n] - \mathfrak{av}_m[f]\|_1 \leqslant \|\phi_n - f\|_1 \leqslant \varepsilon$, в силу того, что согласно лемме 5.11 норма оператора усреднения $\mathfrak{av}_m$ меньше единицы. Так как число ε может быть выбрано произвольно малым, данное неравенство доказывает утверждение теоремы. ⊠

Теорема 5.19a Для любой функции $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p)$ последовательность $\{\mathfrak{av}_n[f]\}$ при $n \to \infty$ сходится в среднем к функции f, другими словами, справедливо следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \mathfrak{av}_n[f]\|_1 = 0.$$

Доказательство. Данное утверждение следует из теоремы 5.19 и того факта, что пространство $\mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p)$ изометрично вкладывается в пространство $\mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_p)$ и является в нем инвариантным подпространством для любого оператора усреднения $\mathfrak{av}_n$ при $n \geqslant 0$. ⊠

Теорема 5.20 Для любой функции $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_p)$ последовательность $\{\mathfrak{av}_n[f]\}$ при $n \to \infty$ сходится в средне квадратичном к функции f, другими словами, справедливо следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \mathfrak{av}_n[f]\|_2 = 0.$$

Доказательство. Доказательство теоремы 5.20 дословно повторяет доказательство теоремы 5.19 с заменой пространства $\mathscr{L}^1$ на пространство $\mathscr{L}^2$, а также с заменой нормы $\| * \|_1$ на норму $\| * \|_2$. ⊠

Теорема 5.20a Для любой функции $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p)$ последовательность $\{\mathfrak{av}_n[f]\}$ при $n \to \infty$ сходится в средне квадратичном к функции f, другими словами, справедливо следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \mathfrak{av}_n[f]\|_2 = 0.$$

Доказательство. Данное утверждение следует из теоремы 5.20 и того факта, что пространство $\mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p)$ изометрично вкладывается в пространство $\mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_p)$ и является в нем инвариантным подпространством для любого оператора усреднения $\mathfrak{av}_n$ при $n \geqslant 0$. ⊠

5.2 2-Адическая диффузия и разложение на асимметрические функции.

Существует бесконечное количество различающихся по своему смыслу изображений или сигналов, поэтому не существует универсального метода анализа изображений или сигналов. Каждый из методов подходит для определенного семантического класса изображений. Фурье анализ идеально подходит для анализа сигналов, полученных суммированием некоторого спектра гармонических колебаний, однако, если мы рассмотрим сигнал, полученный наложением коротких пакетов почти гармонических колебаний различной частоты, то Фурье анализ такого сигнала даст картину, которая не будет соответствовать реальной структуре данного сигнала, так как его компоненты имеют как пространственную, так и частотную локализацию. Для анализа таких сигналов была разработана техника их разложения на вейвлеты, которые представляют собой функции с нулевым средним, имеющие как пространственную так и частотную локализацию. Исторически первое такое разложение было описано Альфредом Хааром в его диссертации от 1909 года ([32]). В этой главе мы в три этапа опишем процесс построения дискретных вейвлетов Хаара. На первом этапе мы опишем этот процесс как результат последовательного усреднения по блокам, размер которых образует геометрическую прогрессию. На втором этапе мы покажем связь этого процесса с представлениями группы $\mathbb{Z}(2^\infty)$, а на третьем этапе опишем процесс разложения Хаара для функций, определенных на группах $\mathbb{Z}(p^\infty)$ для произвольного натурального числа $p > 1$. Мы также покажем глубокую связь, которая существует между этим разложением и процессами диффузии и формообразования. Интересно отметить, что

основные смысловые особенности этого разложения можно в полной мере увидеть и оценить уже на примере его построения для множества, состоящего всего из восьми элементов. Все последующие построения существенно усложняются применением соответствующего математического аппарата, разработанного для работы с бесконечными множествами, однако эти обобщения не привносят ничего нового в смысловом плане. Как утверждал В.И.Арнольд (1937-2010): «Существует два основных способа ставить задачу: *французский способ* состоит в том, чтобы сформулировать вопрос *наиболее общим образом*, т. е. так, чтобы его нельзя было бы далее обобщить без потери смысла, в то время как *русский способ* состоит в том, чтобы сформулировать его *в том простейшем случае, который нельзя далее упростить*, не лишая вопрос его основного содержания.»([1]) «Русским подходом» к построению вейвлетов Хаара можно считать построение этого разложения для функций, определенных на множестве $\mathbb{N}(2^k) = \{0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1\}$. Мы опишем это разложение в настоящем параграфе.

Рассмотрим некоторую функцию $f : \mathbb{N}(2^k) \to \mathbb{C}$. Множество $\mathbb{N}(2^k)$ можно разбить на последовательные блоки, состоящие из $2, 2^2, 2^3 \ldots$ и так далее последовательно идущих элементов, как это показано на рисунке 5.3 для случая $k = 3$.

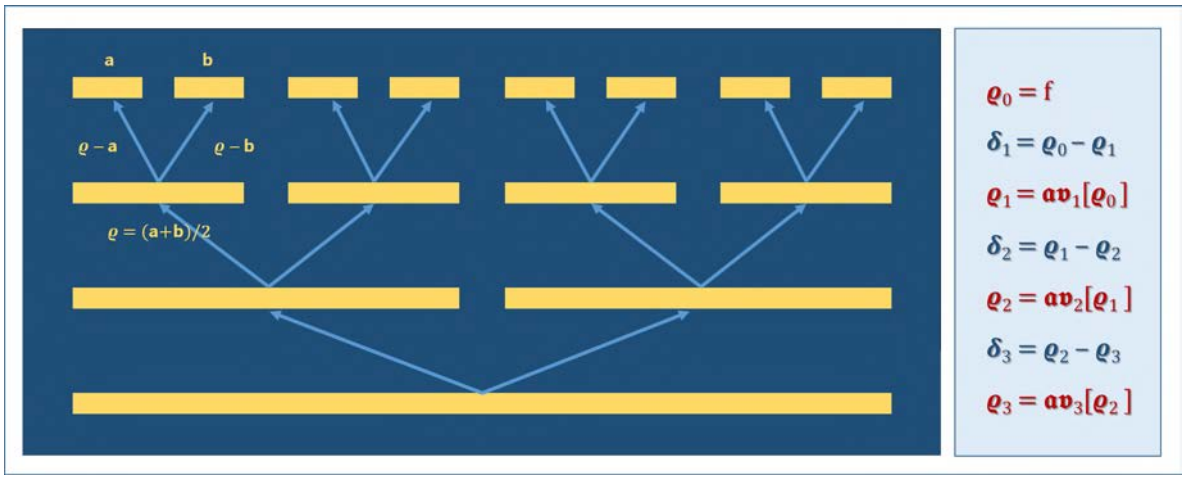


Рисунок 5.3 Схема построения разложения Хаара для множества $\mathbb{N}(2^3)$.

На множестве таких блоков можно задать структуру ориентированного корневого двоичного дерева $\mathfrak{B}(\mathbb{N}(2^k))$, вершинами которого являются сами эти блоки, а ребра задаются отношением включения блоков друг в друга, как это показано на рисунке 5.3. Это дерево изоморфно дереву $\mathbb{T}(2^{k+1})$. Количество уровней в таком дереве равно $k + 1$, а его корнем является само множество $\mathbb{N}(2^k)$. Заметим, что каждое ребро данного дерева также можно интерпретировать как подмножество в $\mathbb{N}(2^k)$, выбирая в качестве такого подмножества блок, соответствующей конечной вершине данного ребра. На множестве функций $\mathscr{F}(\mathbb{N}(2^k))$ действуют операторы усреднения $\{\mathfrak{av}_m\}$, которые усредняют значения функций из этого множества по последовательно идущим блокам, состоящим из 2^m элементов, как это показано на рисунке 5.3. Данный процесс последовательного усреднения можно рассматривать как символическую диффузию, в результате которой значение функции f, рассматриваемой как плотность некоторой абстрактной субстанции, последовательно распределяется на блоки возрастающего размера. В результате действия операторов усреднения возникает цепочка

подпространств $\mathscr{S}_m$, состоящих из функций, принимающих постоянные значения на блоках размера 2^m. Мы далее будем называть такие функции ***симметрическими ранга*** m. Эти подпространства соответствуют уровням дерева $\mathfrak{B}(\mathbb{N}(2^k)) \simeq \mathbb{T}(2^{k+1})$. Очевидно, что каждый оператор $\mathfrak{av}_m$ отображает пространство $\mathscr{S}_{m-1}$ в пространство $\mathscr{S}_m$. Ядром этого оператора является пространство функций $\mathscr{A}_m$, которые принимают постоянное значение на каждом блоке размера 2^{m-1} и имеет нулевое среднее на каждом блоке размера 2^m.

$$\mathscr{A}_m \xrightarrow{\mathfrak{i}_m} \mathscr{S}_{m-1} \xrightarrow{\mathfrak{av}_m} \mathscr{S}_m \ .$$

Поскольку каждый оператор $\mathfrak{av}_m$ является идемпотентным, то есть удовлетворяет условию $\mathfrak{av}_m^2 = \mathfrak{av}_m$, то имеет место следующее разложение

$$\mathscr{S}_{m-1} = \mathscr{S}_m \oplus \mathscr{A}_m = \mathrm{Im}[\mathfrak{av}_m] \oplus \mathrm{Ker}[\mathfrak{av}_m],$$

где образ и ядро применяются для ограничения оператора $\mathfrak{av}_m$ на подпространство $\mathscr{S}_{m-1}$.

Таким образом, для каждой функции $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}(2^k))$ определена последовательность ее усредненных образов

$$f \to \langle \mathfrak{av}_1[f], \mathfrak{av}_2[f], \ldots, \mathfrak{av}_k[f] \rangle = \langle \varrho_1[f], \varrho_2[f], \ldots, \varrho_k[f] \rangle,$$

а также последовательность разностей между ними

$$f \to \langle f - \mathfrak{av}_1[f], \mathfrak{av}_1[f] - \mathfrak{av}_2[f], \ldots, \mathfrak{av}_{k-1}[f] - \mathfrak{av}_k[f] \rangle = \langle \delta_1[f], \delta_2[f], \delta_3[f], \ldots, \delta_k[f] \rangle.$$

Очевидно, что

$$f = \delta_1[f] + \delta_2[f] + \delta_3[f] + \cdots + \delta_k[f] + \mathfrak{av}_k[f]. \tag{104}$$

На рисунке 5.4 показан пример разложения некоторой функции $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}(2^7))$. Из приведенных графиков видно, что функции δ_m имеют характерную структуру, их значения разбиваются на чередующиеся пары, принимающие противоположные значения на двух последовательно идущих блоках размера 2^{m-1}. Причина такого строения этих функций достаточно очевидна. Каждая симметрическая функция ϱ_m принимает постоянные значения a и b на двух последовательно идущих блоках, состоящих из 2^m элементов. В результате ее усреднения возникает функция ϱ_{m+1}, принимающая значение $(a+b)/2$ на блоке размера 2^{m+1}. В результате их вычитания, получается функция $\delta_m = \varrho_{m-1} - \varrho_m$, которая является постоянной на блоках размера 2^m, принимая на них взаимно противоположные значения:

$$a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}, \qquad b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2}. \tag{105}$$

Каждая функция δ_m принадлежит к подпространству функций, которые принимают постоянное значение на всех блоках размера 2^{m-1} и имеют нулевое среднее на каждом блоке размера 2^m, то есть принимают противоположные значения на двух смежных блоках, входящих в состав этого блока. Будем называть такие функции ***асимметрическими ранга*** m. Асимметрические функции ранга m образуют подпространство $\mathscr{A}_m$ в пространстве $\mathscr{F}(\mathbb{N}(2^k))$. Из формулы (104) следует, что пространство $\mathscr{F}(\mathbb{N}(2^k))$ разлагается в ортогональную прямую сумму своих подпространств асимметрических функций и одномерного подпространства постоянных функций $\mathscr{S}_k$.

$$\mathscr{F}(\mathbb{N}(2^k)) = \mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_2 \oplus \mathscr{A}_3 \oplus \cdots \oplus \mathscr{A}_k \oplus \mathscr{S}_k$$

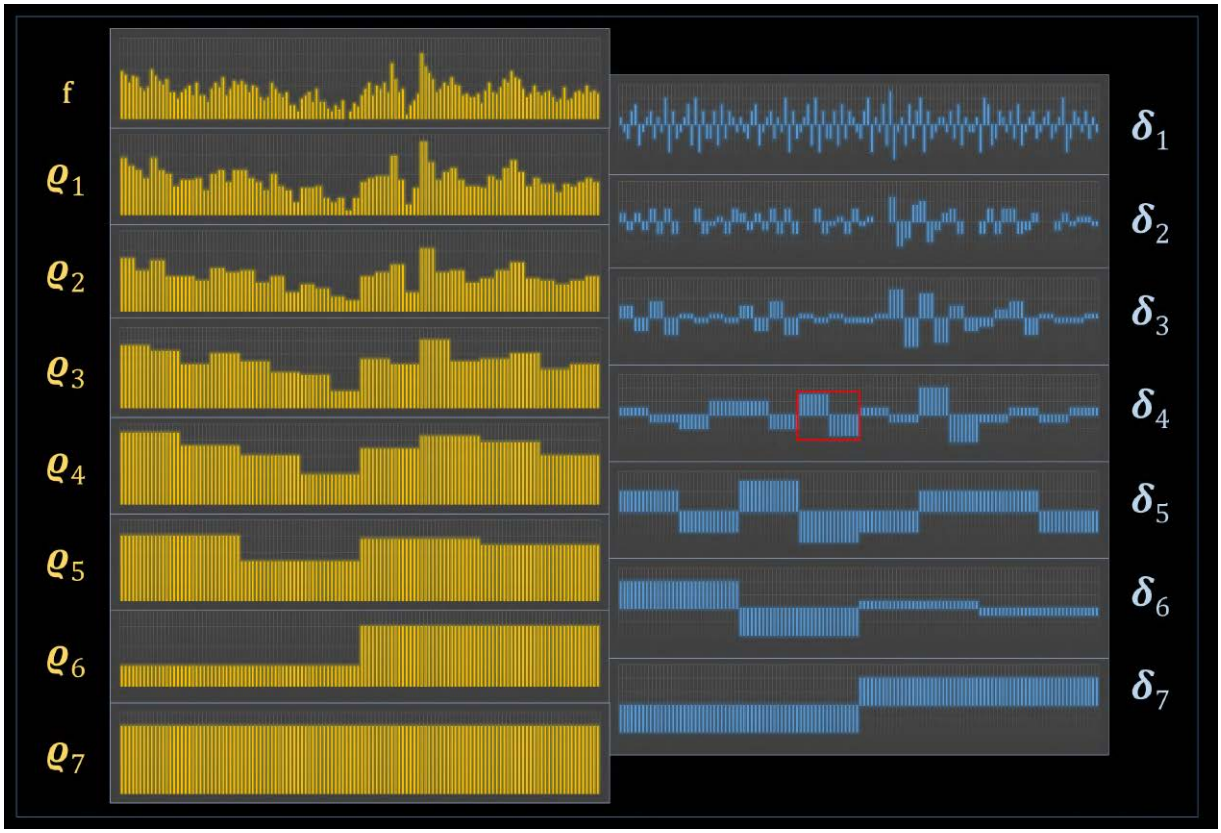


Рисунок 5.4 Пример построения разложения Хаара для множества $\mathbb{N}(2^7)$ Слева показаны графики симметрических функций, справа их последовательные разности.

Заметим, что каждое подпространство $\mathscr{A}_m$ имеет размерность 2^{k-m} и разлагается в ортогональную прямую сумму своих одномерных подпространств $\mathscr{W}(\mathfrak{b})$ соответствующих отдельным блокам в количестве 2^{k-m}, каждый из которых состоит из 2^m элементов. Пространство $\mathscr{W}(\mathfrak{b})$ состоит из асимметрических функций, носитель которых лежит внутри блока $\mathfrak{b}$.

$$\mathscr{A}_m = \bigoplus_{\mathfrak{b}} \mathscr{W}(\mathfrak{b}), \quad |\mathfrak{b}| = 2^m.$$

Пример графика функции, принадлежащей к одному из множеств $\mathscr{W}(\mathfrak{b})$ выделен на рисунке 5.4 красной рамкой. Если $\mathfrak{b}$ есть такой блок и $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1$ есть два его дочерних блока, то одномерное пространство $\mathscr{W}(\mathfrak{b})$ порождается функцией $w(\mathfrak{b})$, определенной следующим образом:

$$w(\mathfrak{b})(x) = \begin{cases} +1, \text{ если } x \in \mathfrak{b}_0 \\ -1, \text{ если } x \in \mathfrak{b}_1. \end{cases}$$

Функции $w(\mathfrak{b})$ получили название «вейвлетов» или «всплесков». Вейвлет представляет собой функцию, носитель которой имеет четкую пространственную локализацию и среднее значение которой равно нулю. Функция $w(\mathfrak{b})$ представляет собой дискретный вейвлет, называемый вейвлетом Хаара в честь Альфреда Хаара, впервые рассмотревшего такие функции в своей диссертации от 1909 года. Каждый вейвлет $w(\mathfrak{b})$ можно соотнести с парой ребер, исходящих из блока $\mathfrak{b}$. При этом левое ребро соответствует положительной части вейвлета, а правое соответствует его отрицательной части. Каждый вейвлет $w(\mathfrak{b})$ имеет как частотную, так и пространственную локализацию. Его частотная локализация определяется

индексом пространства $\mathscr{A}_m$, а его пространственная локализация определяется блоком $\mathfrak{b}$, вне которого функция $w(\mathfrak{b})$ обращается в ноль. В соответствии с этим разложение (104) принимает вид:

$$f = \sum_{\mathfrak{b}} f_{\mathfrak{b}} \cdot w(\mathfrak{b}) + f_{\mathfrak{av}} \cdot \mathbf{1}, \quad |\mathfrak{b}| \geqslant 2, \tag{106}$$

где коэффициент $f_{\mathfrak{av}}$ равен среднему значению функции f на множестве $\mathbb{N}(p^k)$ и соответствует блоку, совпадающему с этим множеством. Данное разложения называется разложением по ***дискретным вейвлетам Хаара***.

Нетрудно видеть, что общее количество двоичных блоков, включая само множество $\mathbb{N}(2^k)$, равно 2^k, поэтому количество коэффициентов в разложении Хаара равно 2^k. При этом коэффициенты $\{f_{\mathfrak{b}}\}$ вычисляются рекуррентно в соответствии с формулами (105). Из рисунка 5.4 очевидно, что функции $\{w(\mathfrak{b})\}$ ортогональны друг другу, поэтому умножив их на соответствующие нормировочные коэффициенты, разложение (106) можно преобразовать в ортонормированное.

Заметим, что каждое из подпространств $\mathscr{S}_m$ раскладывается в прямую сумму ортогональных друг другу подпространств, соответствующих отдельным блокам, состоящим из 2^m элементов.

$$\mathscr{S}_m = \bigoplus_{\mathfrak{b}} \mathfrak{S}(\mathfrak{b}), \quad |\mathfrak{b}| = 2^m.$$

Подпространство $\mathfrak{S}(\mathfrak{b})$ состоит из функций, принимающих постоянное значение на блоке $\mathfrak{b}$ и обращающихся в ноль за пределами этого блока. Каждая функция $s \in \mathscr{S}_m$ разлагается в линейную комбинацию дельта функций, соответствующих отдельным блокам, состоящим из 2^m элементов.

$$s = \sum_{\mathfrak{b}} s_{\mathfrak{b}} \cdot \delta(\mathfrak{b}), \quad |\mathfrak{b}| = 2^m.$$

Если отобразить множество значений функций $\{\varrho_m\}$ и $\{\delta_m\}$ на множество вершин и ребер графа, как это показано на рисунке X, то значение в каждой вершине этого графа будет равно значению в его корне плюс сумма значений по всем ребрам, составляющим путь, ведущий из корня графа к данной вершине. Данная закономерность справедлива только для случая, когда $p = 2$. Подпространства $\mathfrak{S}(\mathfrak{b})$ в точности соответствуют вершинам дерева двоичных блоков $\mathfrak{B}(\mathbb{N}(2^k))$. Если интерпретировать функцию f как изображение, то можно сказать, что отображение $\mathfrak{b} \to \varrho_m|\mathfrak{b}$ дает декомпозицию этого изображения на его отдельные фрагменты, заданные с различной степенью разрешения. Таким образом, мы видим, что каждая форма разлагается в дерево своих компонент, переходы между которыми осуществляются с помощью вейвлетов. Каждая форма может быть получена таким образом из постоянной функции или из некоторой массы/субстанции, сосредоточенной в одной точке, если интерпретировать значения функции f как плотность некоторой субстанции. Обратно любая форма может быть преобразована с помощью процесса диффузии в постоянную функцию или в некоторое количество субстанции, сосредоточенное в одной точке. Данная конструкция в символическом виде описывает связь, которая существует между взаимно обратными процессами формообразования и форморазрушения, которое происходит в результате процесса диффузии, представляющего собой одно из проявлений закона повышения энтропии. Если интерпретировать функцию f или ее квадрат как энергию, то цепочка

$$f \to \varrho_1[f] \to \varrho_2[f] \to \cdots \to \varrho_k[f]$$

представляет собой ни что иное, как символический процесс рассеяния энергии, который лежит в основе закона повышения энтропии.

Построенное нами дерево блоков $\mathfrak{B}(\mathbb{N}(2^k))$ можно продолжать до бесконечности, увеличивая число k. При $k = \infty$, мы получаем бесконечное дерево $\mathfrak{B}(\mathbb{N}(2^\infty))$, имеющее бесконечное количество уровней, на каждом из которых располагается бесконечное число двоичных блоков. Это дерево позволяет построить разложении Хаара для произвольной функции/последовательности $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}_0)$. Поскольку остаточный член разложения (104) представляет собой среднее Чезаро последовательности $f(n)$, из формы этого разложения видно, что оно поточечно сходится к функции f тогда и только тогда, когда ее среднее Чезаро равно нулю.

В случае $p = 2$, все пространства $\mathscr{W}(\mathfrak{b})$ асимметрических функций или вейвлетов, определенных на блоках $\mathfrak{b}$, оказываются одномерными, а коэффициенты $f_\mathfrak{b}$ в вейвлет разложении (106) совпадают со значениями функций $w(\mathfrak{b})$ на первом из двух дочерних блоков блока $\mathfrak{b}$. В случае произвольного p каждое пространство $\mathscr{W}(\mathfrak{b})$ имеет размерность $p-1$, и для получения вейвлет разложения функции f нужно разложить функции $\delta_m[f]|\mathfrak{b}$ по базису этого пространства. Если размер блока $\mathfrak{b}$ равен 2^m, то каждое пространство $\mathscr{W}(\mathfrak{b})$ изоморфно подпространству функций с нулевым средним в пространстве $\mathscr{F}(\mathbb{N}(2^m)) \simeq \mathscr{F}(\mathbb{Z}(2^m))$, поэтому в качестве базиса пространства вейвлетов $\mathscr{W}(\mathfrak{b})$ можно выбрать множество, состоящее из $p-1$ неединичных характеров группы $\mathbb{Z}(2^m)$.

Все наши предыдущие рассуждения относились к одномерному случаю, однако они легко обобщаются на случай двух и более измерений. В этом случае мы имеем дело с функциями, определенными на множестве $\mathbb{N}(2^k) \times \mathbb{N}(2^k)$ или на множестве $\mathbb{N}(2^k) \times \mathbb{N}(2^k) \times \mathbb{N}(2^k)$. В двумерном или трехмерном случае в качестве блоков следует взять декартовы произведения одномерных блоков одинакового размера. Также как и в одномерном случае операторы усреднения $\{\mathfrak{av}_m\}$ усредняют функции по блокам, размер которых по каждой координате равен 2^m. Описанная выше логика разложения без изменений переносится на случай высших размерностей. Некоторые особенности возникают с выбором базиса в пространстве вейвлетов $\mathscr{W}(\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2)$. Поскольку имеет место изоморфизм

$$\mathscr{F}(\mathbb{N}(2) \times \mathbb{N}(2)) \simeq \mathscr{F}(\mathbb{N}(2)) \otimes \mathscr{F}(\mathbb{N}(2)),$$

то в двумерном случае такой базис может состоять из следующих трех матриц:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Также как и в одномерном случае в качестве базиса пространства вейвлетов $\mathscr{W}(\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2)$, определенных на блоках размера $2^m \times 2^m$, можно выбрать множество функций $\phi_1 \otimes \phi_2$, где ϕ_1, ϕ_2 есть характеры группы $\mathbb{Z}(2^m)$, один из которых отличен от единичного.

Вейвлеты Хаара и зрение

В основе описанной выше конструкции вейвлетов Хаара лежит хорошо знакомый каждому феномен зрения, состоящий в уменьшении и размытии изображения при удалении объекта

от наблюдателя. Рассмотрим оптическую систему, состоящую из тонкой плоской линзы с фокусным расстоянием F и расположенного за этой линзой светочувствительного устройства с конечной разрешающей способностью, которое можно себе представить как матрицу размера $2^n \times 2^n$, состоящую из светочувствительных элементов. Из курса геометрической оптики известно, что при размещении наблюдаемого объекта на расстоянии d от линзы, где $d > 2F$, его изображение, создаваемое данной линзой, будет перевернутым, уменьшенным и имеющим размер $F \cdot H/(d - F)$, где H есть линейный размер объекта. При $d >> F$, данная формула дает приблизительно обратно пропорциональную зависимость между видимым размером объекта и расстоянием, с которого он наблюдается. Из того факта, что принимающая матрица имеет конечную разрешающую способность следует, что при увеличении расстояния до наблюдаемого объекта в два раза та его часть, которая отображается в конкретный элемент нашей матрицы также увеличивается в два раза, что эквивалентно операции усреднения изображения по матрице размера 2×2.

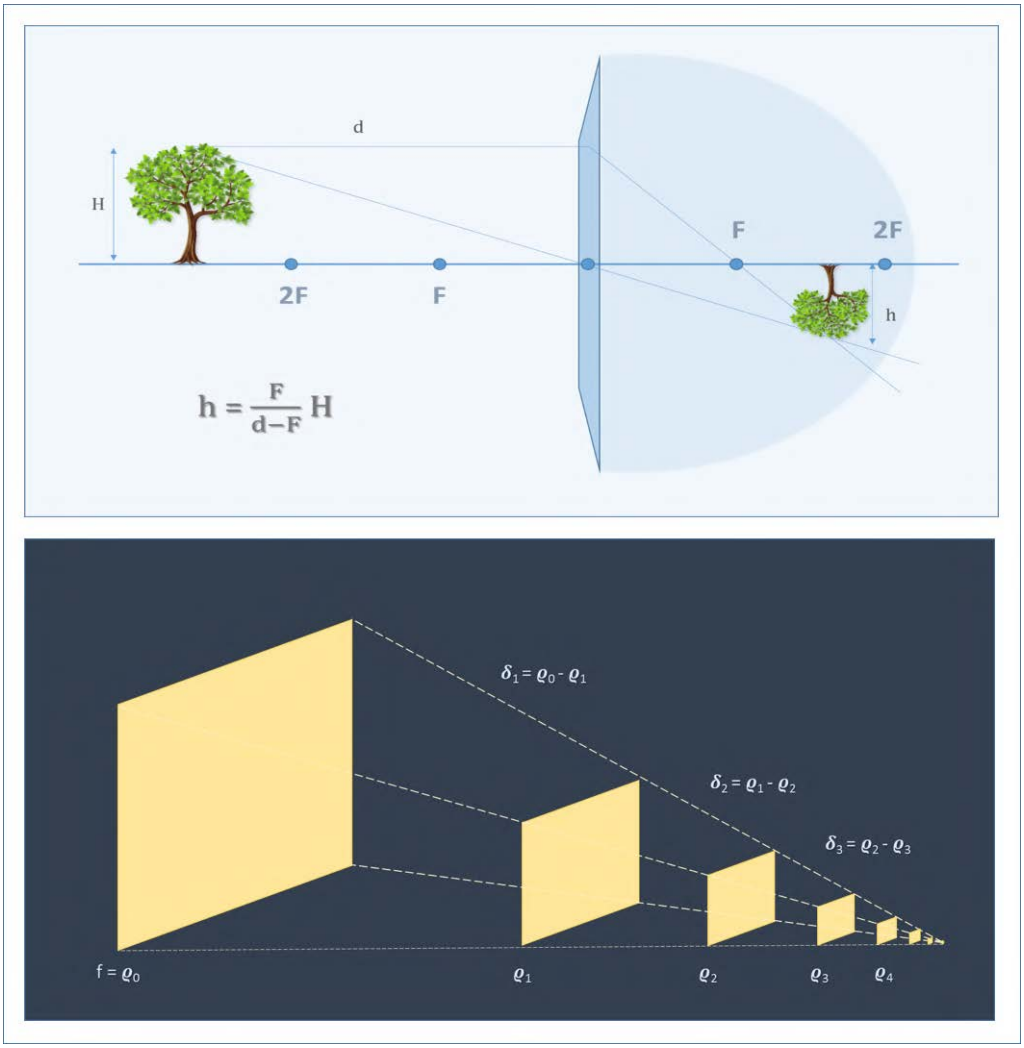
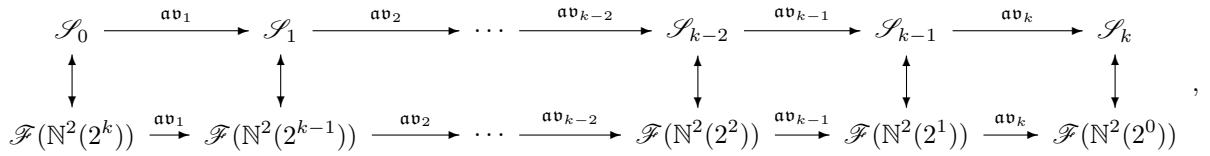


Рисунок 5.5 Разложения на асимметрические функции и функция зрения.

Различие с описанной выше конструкцией построения симметрических функций $\{\varrho_n\}$ состоит в том, что в случае зрения изображение вместе с усреднением подвергается также сжатию, в то время как все функции $\{\varrho_n\}$ определены на множестве, состоящем из одного

и того же количества элементов. Однако это различие несущественно, так как имеет место изоморфизм следующих функциональных пространств:



где принято обозначение $\mathscr{F}(\mathbb{N}^2(2^k)) = \mathscr{F}(\mathbb{N}(2^k) \times \mathbb{N}(2^k))$.

Вейвлеты Хаара и представления группы $\mathbb{Z}(2^\infty)$

Если применить к множеству $\mathbb{N}_0$ описанное в главе III инверсное преобразование, то оно отобразит функциональное пространство $\mathscr{F}(\mathbb{N}_0)$ в функциональное пространство $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(2^\infty))$, а блоки, состоящие из 2^n последовательно идущих чисел, перейдут в правильные 2^n угольники, вписанные в окружность единичного радиуса или (что тоже самое) в смежные классы группы $\mathbb{Z}(2^\infty)$ по подгруппам $\mathbb{Z}(2^n)$. Как мы далее покажем, при этом преобразовании описанная нами конструкция разложения Фурье-Хаара преобразуется в изоморфную ей конструкцию, основанную на «бесконечном извлечении квадратного корня» из единицы.

Рассмотрим следующую простейшую конструкцию из линейной алгебры, которая по сути дела представляет собой перевод на язык линейных операторов процедуры разложения вектора по координатным осям и отражает факт симметричности плоскости относительно замены координат $\langle \mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \rangle \to \langle \mathfrak{Y}, \mathfrak{X} \rangle$. Пусть $\mathbf{H}$ есть векторное пространство над полем $\mathbb{C}$, и $\mathfrak{e} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ есть инволютивный, то есть обладающий свойством $\mathfrak{e} \circ \mathfrak{e} = \mathbf{1}$, линейный оператор, действующий на пространстве $\mathbf{H}$ и отличный от умножения на ± 1. Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) оператор $\mathfrak{e}$ имеет два собственных значения равных ± 1;

(ii) производные от него операторы $\mathfrak{e}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathfrak{e})$ и $\mathfrak{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathfrak{e})$ представляют собой пару коммутирующих ортогональных идемпотентов, в сумме дающих единицу:

$$\mathfrak{e}_0 \circ \mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}_0, \;\; \mathfrak{e}_1 \circ \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1,$$

$$\mathfrak{e}_0 \circ \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1 \circ \mathfrak{e}_0 = 0 \;\; \text{и} \;\; \mathfrak{e}_0 \circ \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1 \circ \mathfrak{e}_0 = \mathbf{1};$$

(iii) подпространства

$$\mathbf{H}_0 = \mathrm{Im}[\mathfrak{e}] = \mathrm{Im}[\mathfrak{e}_0] = \mathrm{Ker}[\mathfrak{e}_1],$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathrm{Ker}[\mathfrak{e}] = \mathrm{Im}[\mathfrak{e}_1] = \mathrm{Ker}[\mathfrak{e}_0]$$

являются корневыми подпространствами оператора $\mathfrak{e}$, соответствующими его собственным значениям 1 и –1, и в качестве таковых инвариантны относительно $\mathfrak{e}$. Данные подпространства можно назвать подпространствами четных (симметричных) и нечетных (асимметричных) элементов соответственно;

(iv) векторное пространство $\mathbf{H}$ разлагается в прямую сумму $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \oplus \mathbf{H}_1$;

(v) каждый вектор $\mathbf{v}$ пространства $\mathbf{H}$ разлагается в сумму четного $\mathbf{v}_+$ и нечетного $\mathbf{v}_-$ векторов, которые вычисляются по формулам $\mathbf{v}_+ = \frac{1}{2}(\mathbf{1}+\mathfrak{e})(\mathbf{v})$ и $\mathbf{v}_- = \frac{1}{2}(\mathbf{1}-\mathfrak{e})(\mathbf{v})$;

(vi) операторы $\mathfrak{e}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{1}+\mathfrak{e})$ и $\mathfrak{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{1}-\mathfrak{e})$ являются операторами проектирования пространства $\mathbf{H}$ на подпространства $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{H}_1$.

В случае евклидовой плоскости $\langle \mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \rangle$ в качестве оператора $\mathfrak{e}$ можно взять оператор отражения плоскости относительно прямой $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}$. В этом случае операторы $\mathfrak{e}_0$ и $\mathfrak{e}_1$ превращаются в операторы ортогонального проектирования на эту прямую и на нормаль к ней. В многомерном случае в качестве оператора $\mathfrak{e}$ можно взять оператор отражения относительно любой гиперплоскости, тогда в качестве порождаемых им проекторов будут выступать операторы проектирования на эту гиперплоскость и на ее нормаль, при этом четными векторами будут векторы, принадлежащие данной геперплоскости, а нечетными - векторы, лежащие на ее нормали. Далее в качестве пространства $\mathbf{H}$ мы возьмем пространство комплекснозначных функций, определенных на группе $\mathbb{Z}(2^\infty) \cong \mathbb{Q}_{01}(2^\infty)$. Мы будем отождествлять пространства $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(2^\infty))$ и $\mathscr{F}(\mathbb{Q}_{01}(2^\infty))$ и в зависимости от ситуации использовать то мультипликативную, то аддитивную систему обозначений. С помощью отображения инверсии каждое из этих пространств отождествляется с пространством арифметических функций $\mathscr{F}(\mathbb{N}_0)$. В случае группы $\mathbb{Z}(2^\infty)$ в качестве идемпотентного оператора $\mathfrak{e}$ возьмем оператор, индуцированный поворотом окружности на угол π, а в случае группы $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty)$ в качестве оператора $\mathfrak{e}$ возьмем оператор сдвига на $1/2$. Для простоты будем обозначать как поворот или сдвиг, так и индуцированные ими функциональные операторы одним и тем же символом $\mathfrak{e}$.

$$\mathfrak{e}[f](x) = f(x+1/2), \qquad \mathfrak{e}[f](x) = f(x+\pi).$$
$$\mathfrak{e}^{1/2^n}[f](x) = f(x+1/2^{n+1}), \qquad \mathfrak{e}^{1/2^n}[f](x) = f(x+\pi/2^n).$$

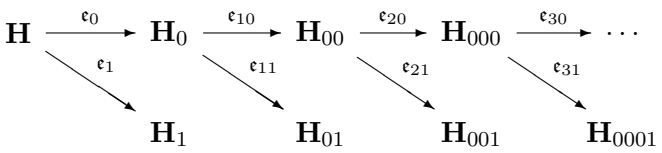
Очевидно, что из оператора $\mathfrak{e}$ возможно до бесконечности «извлекать квадратный корень», то есть, что существуют отличные от ± 1 операторы:

$$\mathfrak{e}^{1/2}, \mathfrak{e}^{1/4}, \mathfrak{e}^{1/8}, \mathfrak{e}^{1/16}, \dots \text{ и т.д.}$$

В этом случае описанное выше разложение пространства $\mathbf{H}$ на корневые подпространства оператора $\mathfrak{e}$ можно продолжить далее. Очевидно, что условие $\mathfrak{e}(v) = v$, при $v \in \mathbf{H}_0$, эквивалентно инволютивности оператора $\mathfrak{e}^{1/2}$ действующего на пространстве $\mathbf{H}_0$, поэтому к нему применимы пункты (i) – (vi) выше и подпространство $\mathbf{H}_0$ аналогичным образом раскладывается в прямую сумму $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{00} \oplus \mathbf{H}_{01}$. Продолжая эту процесс далее до бесконечности, мы получим разложение:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_{01} \oplus \mathbf{H}_{001} \oplus \mathbf{H}_{0001} \dots, \tag{107}$$

которое строится по следующей схеме:



На каждом шаге подпространство четных элементов раскладывается в прямую сумму четных и нечетных элементов, затем нечетные элементы входят в итоговое разложение, а с

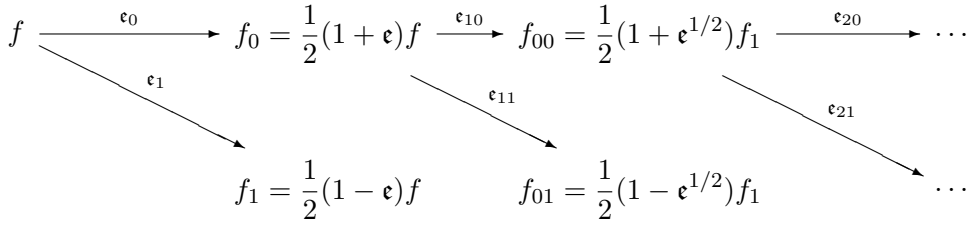
четными элементами разбиение продолжается далее. Если индекс каждого подпространства $\mathbf{H}_{0*01}$ интерпретировать как количество двоичных знаков после запятой при разложение числа из интервала [0,1) в двоичную дробь, то разложение (107) можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{1/2} \oplus \mathbf{H}_{1/4} \oplus \mathbf{H}_{1/8} \oplus \mathbf{H}_{1/16} \dots,$$

Из самой процедуры разложения легко усматривается тот факт, что каждое подпространство $\mathbf{H}_{1/2^n}$ является корневым подпространством оператора $\mathfrak{e}^{1/2^n}$, которое соответствует собственному значению –1. В результате такого разложения каждый элемент $f \in \mathbf{H}$ последовательно раскладывается в ряд

$$f \simeq f_1 + f_{01} + f_{001} + f_{0001} \dots,$$

(мы пока опускаем вопрос о сходимости) в соответствии со следующей схемой:



Нетрудно видеть, что подпространства $\mathbf{H}_{1/2^n}$ являются подпространствами функций, которые удовлетворяют некоторому условию нечетности, а именно они меняют свой знак на противоположный при повороте аргумента на угол $2\pi/2^n$ или при его сдвиге на $1/2^n$. Из процесса построения данного разложения также видно, что на шаге с номером k в качестве четных/симметрических функций выступают функции, принимающие постоянное значение на каждом правильном k-угольнике, то есть на каждом смежном классе по подгруппе $\mathbb{Z}(2^k) \subset \mathbb{Z}(2^\infty)$, а нечетными/асимметрическими являются те из них, которые принимают противоположные значения на двух k-угольниках, из которых один получен поворотом на угол $2\pi/2^{k+1}$ из другого. Если применить к группам $\mathbb{Z}(2^\infty)$ или $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty)$ инверсное преобразование, которое отождествляет их с множеством натуральных чисел $\mathbb{N}_0$, то правильные k-угольники или смежные классы по циклической подгруппе порядка 2^k преобразуются в последовательно идущие блоки, состоящие из 2^k чисел, с сохранением соответствующих условий симметричности/асимметричности для функций из множества $\mathscr{F}(\mathbb{N}_0)$. Из приведенной выше диаграммы нетрудно усмотреть общий алгоритм построения данного разложения. Рассмотрим первые три члена этого разложения и остаток, который при этом получается. Операторы проектирования на подпространства $\mathbf{H}_k$ и остаточный член разложения выглядят следующим образом.

$$\begin{aligned}
&\pi_1 = 1/2 \cdot (\mathbf{1} - \mathfrak{e}),\\
&\pi_{01} = 1/4 \cdot (\mathbf{1} - \mathfrak{e}^{1/2}) \circ (\mathbf{1} + \mathfrak{e}),\\
&\pi_{001} = 1/8 \cdot (\mathbf{1} - \mathfrak{e}^{1/4}) \circ (\mathbf{1} + \mathfrak{e}^{1/2}) \circ (\mathbf{1} + \mathfrak{e}),\\
&r = 1/8 \cdot (\mathbf{1} + \mathfrak{e}^{1/4}) \circ (\mathbf{1} + \mathfrak{e}^{1/2}) \circ (\mathbf{1} + \mathfrak{e}).
\end{aligned}$$

При этом операторы $\pi_1, \pi_{01}, \pi_{001}$ представляют собой проекторы на подпространства $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_{01}$ и $\mathbf{H}_{001}$ соответственно, а оператор r есть остаточный член разложения, который

и определяет сходимость или расходимость данного разложения. При этом имеет место следующее операторное равенство:

$$\mathbf{1} = \pi_1 + \pi_{01} + \pi_{001} + r.$$

Если обозначить $\mathfrak{e}^{1/4} = \mathfrak{g}$, то очевидно, что

$$r = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} \mathfrak{g}^n,$$

откуда следует, что оператор r представляет собой оператор усреднения по подгруппе $\mathbb{Z}(2^3)$ комплексных корней из единицы восьмой степени. Общую формулу данного разложения нетрудно вывести далее по индукции. Мы далее сделаем это для случая разложения Хаара для произвольного натурального числа $p \geqslant 2$.

□ Для произвольной функции $f \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}(2^\infty)) \cong \mathscr{F}(\mathbb{Q}_{01}(2^\infty))$ будем называть описанный выше процесс разложением этой функции ***на асимметрические 2-адические функции***.

В силу взаимно однозначного соответствия между пространствами $\mathscr{F}(\mathbb{Q}_{01}(2^\infty))$ и $\mathscr{F}(\mathbb{N}_0)$, которое устанавливается инверсным преобразованием, описанные выше разложения на асимметрические функции переходят при инверсном преобразовании друг в друга. Мы далее детально опишем этот процесс для произвольного натурального числа $p \geqslant 2$.

Общий случай построения вейвлетов Хаара на группах $\mathbb{Z}(p^\infty)$ и $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая разложения Хаара. Как обычно мы будем отождествлять группу $\mathbb{Z}(p^\infty)$ с множеством всех комплексных корней из единицы всех степеней p^n, где $n \in \mathbb{N}_0$.

□ Пусть $\mathfrak{e}^q$, где $q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$, обозначает отображение $\mathfrak{e}^q : \mathbb{Z}(p^\infty) \to \mathbb{Z}(p^\infty)$ поворота на угол $2\pi q$, действующее по принципу $\mathfrak{e}^q(x) = x \cdot 2\pi i q$. Тем же символом будем обозначать соответствующий сдвигу оператор

$$\mathfrak{e}^q : \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^\infty)) \to \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^\infty)),$$

$$\mathfrak{e}^q[f](x) = f(x \cdot 2\pi i q) = f \circ \mathfrak{e}^q(x).$$

Определение операторов усреднения. Определим последовательность операторов усреднения $\{\mathfrak{a}_k[f], \mathfrak{av}_k[f] \mid k \in \mathbb{N}\}$, действующих на пространстве $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^\infty))$, следующим образом:

$$\mathfrak{a}_k[f] = \frac{1}{p}(1 + \mathfrak{e}^{1/p^k} + \mathfrak{e}^{2/p^k} + \mathfrak{e}^{3/p^k} + \cdots + \mathfrak{e}^{p-1/p^k})[f],$$

$$\mathfrak{av}_k[f] = \frac{1}{p^k} \cdot \sum_{m=0}^{p^k-1} \mathfrak{e}^{m/p^k}[f].$$

Если рассматривать группу $\mathbb{Z}(p^\infty)$ как подмножество единичной окружности на комплексной плоскости, то легко видеть, что действие оператора $\mathfrak{av}_k$ на функцию f представляет собой ее усреднения по всем k-угольникам, то есть по всем смежным классам по

подгруппе $\mathbb{Z}(p^k)$. Из разложения числа в позиционной системе счисления по основанию p следует, что

$$\mathfrak{av}_k[f] = \mathfrak{a}_k \cdots \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1[f]. \tag{108}$$

Логика построения этих операторов усреднения повторяет логику разложения числа в позиционной системе счисления, которая вынесена в показатели степени по принципу:

$$(1+2)(1+2^2)(1+2^4)\dots(1+2^{2^k}) = 1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{2^{k+1}-1},$$

при $p=2$ или по принципу:

$$(1+3+3^2)(1+3^3+3^6)(1+3^9+3^{18})\dots(1+3^{3^k}+3^{2\cdot 3^k}) = 1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{3^{k+1}-1},$$

при $p=3$.

Определение симметрических функций. Будем называть функцию $f \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^\infty))$ симметрической порядка k, если она принимает постоянное значение на всех смежных классах по подгруппе $\mathbb{Z}(p^k)$, то есть на правильных p^k-угольниках. Будем обозначать подпространство симметрических функций в $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^\infty))$ символом $\mathscr{S}_k$. Очевидно, что пространство $\mathscr{S}_k$ состоит из функций, удовлетворяющих условию $\mathfrak{av}_k[f] = f$, то есть является собственным подпространством оператора $\mathfrak{av}_k$, которое соответствует собственному значению 1. Другими словами, $\mathscr{S}_k = \mathrm{Im}(\mathfrak{av}_k)$. Будем условно считать, что $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^\infty)) = \mathscr{S}_0$.

Предположим, что $f \in \mathscr{S}_k$, тогда имеют место следующие равенства:

$$f = \mathfrak{av}_k[f] \quad \to \quad \mathfrak{a}_{k+1}[f] = \mathfrak{a}_{k+1} \circ \mathfrak{av}_k[f] = \mathfrak{av}_{k+1}[f],$$

которые показывают, что оператор $\mathfrak{a}_{k+1}$ отображает подпространство $\mathscr{S}_k$ на подпространство $\mathscr{S}_{k+1}$, усредняя функции, постоянные на правильных p^k-угольниках, по правильным p^{k+1}-угольникам. Ядром этого оператора в подпространстве $\mathscr{S}_k$ являются функции, среднее значение которых на каждом смежном классе по подгруппе $\mathbb{Z}(p^{k+1})$ равно нулю.

Определение асимметрических функций. Будем называть функцию $f \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^\infty))$ асимметрической порядка k если она принимает постоянное значение на всех смежных классах по подгруппе $\mathbb{Z}(p^{k-1})$, то есть на правильных p^{k-1}-угольниках, а ее среднее значение по любому смежному классу по подгруппе $\mathbb{Z}(p^k)$ равно нулю. Будем обозначать подпространство асимметрических функций порядка k в $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^\infty))$ символом $\mathscr{A}_k$. Очевидно, что для любого $k \in \mathbb{N}$ пространство $\mathscr{A}_k$ является ядром оператора $\mathfrak{a}_k$, то есть имеет место следующая точная последовательность линейных отображений векторных пространств:

$$\mathscr{A}_k \xrightarrow{\ \mathfrak{i}\ } \mathscr{S}_{k-1} \xrightarrow{\ \mathfrak{a}_k\ } \mathscr{S}_k \ , \quad k \in \mathbb{N}.$$

Данная последовательность показывает, что подпространство $\mathscr{A}_k$ состоит из функций, удовлетворяющих следующим двум условиям:

$$\mathfrak{av}_{k-1}[f] = f, \quad \mathfrak{a}_k[f] = 0.$$

В случае когда $p=2$, эти два условия можно заменить одним условием асимметричности функции f при поворотах ее аргумента на угол $2\pi/2^k$:

$$f \in \mathscr{A}_k \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{e}^{1/2^k}[f] = -f,$$

которое означает, что функция f является асимметрической порядка k, тогда и только тогда, когда она меняет знак при сдвиге аргумента на угол $2\pi/2^k$. Действительно, из этого условия следует, что

$$\mathfrak{e}^{1/2^{k-1}}[f] = \mathfrak{e}^{1/2^k} \circ \mathfrak{e}^{1/2^k}[f] = \mathfrak{e}^{1/2^k}[-f] = f.$$

Отсюда следует, что $f \in \mathscr{S}_k$. С другой стороны, при $p = 2$ оператор усреднения $\mathfrak{a}_m$ имеет вид

$$\mathfrak{a}_m = \frac{1}{2}(1 + \mathfrak{e}^{1/2^m}).$$

Поэтому мы имеем следующую цепочку равенств, доказывающую требуемое утверждение:

$$\mathfrak{e}^{1/2^k}[f] = -f \quad \to \quad \frac{1}{2}(1 + \mathfrak{e}^{1/2^k})[f] = 0 \quad \to \quad \mathfrak{a}_k[f] = 0.$$

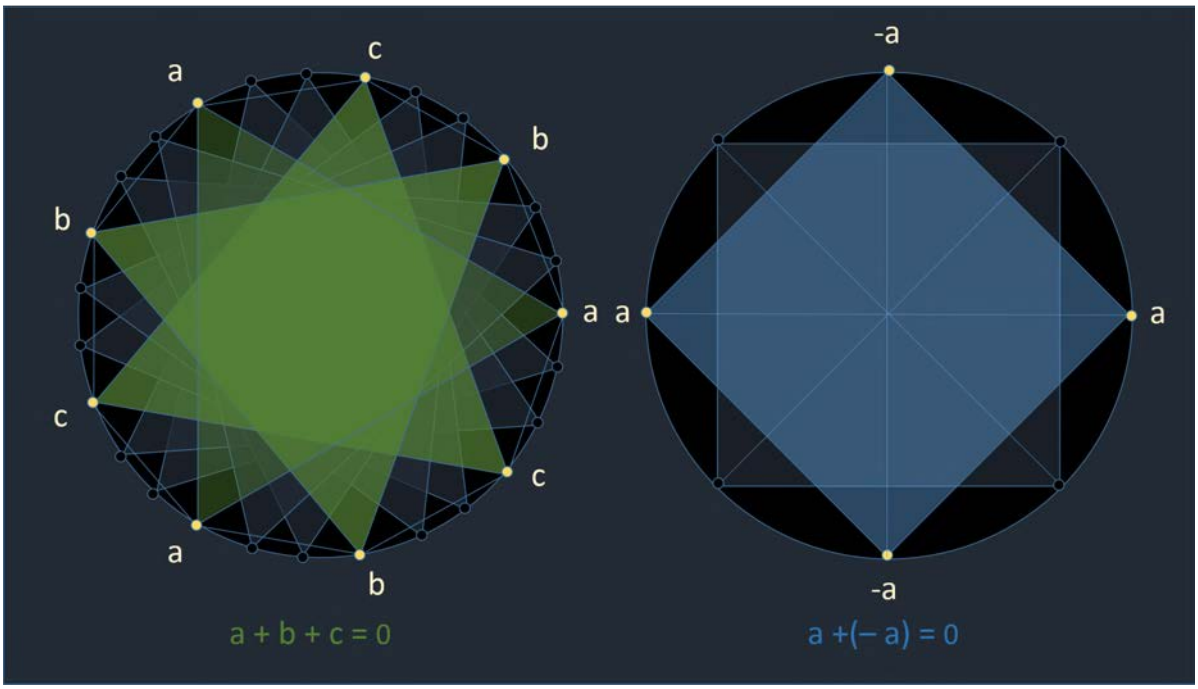


Рисунок 5.6 Сравнение пространств $\mathscr{A}_2$ для случаев, когда $p = 3$ и $p = 2$.

Поскольку оператор $\mathfrak{a}_k$ на подпространстве $\mathscr{S}_{k-1}$ является идемпотентным, из приведенной выше точной последовательности следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ имеет место разложение пространства $\mathscr{S}_{k-1}$ в прямую сумму двух подпространств:

$$\mathscr{S}_{k-1} = \mathscr{A}_k \oplus \mathscr{S}_k,$$

$$f = (1 - \mathfrak{a}_k)[f] + \mathfrak{a}_k[f].$$

Данная цепочка разложений может быть продолжена до бесконечности, как показано на следующей диаграмме:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathscr{S}_0 = \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^\infty)) & \xrightarrow{\mathfrak{a}_1} & \mathscr{S}_1 & \xrightarrow{\mathfrak{a}_2} & \mathscr{S}_2 & \xrightarrow{\mathfrak{a}_3} & \mathscr{S}_3 & \xrightarrow{\mathfrak{a}_4} & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle 1-\mathfrak{a}_1} & & \downarrow{\scriptstyle 1-\mathfrak{a}_2} & & \downarrow{\scriptstyle 1-\mathfrak{a}_3} & & \downarrow{\scriptstyle 1-\mathfrak{a}_4} & & \\
\mathscr{A}_1 & & \mathscr{A}_2 & & \mathscr{A}_3 & & \mathscr{A}_4 & &
\end{array}$$

Из данной диаграммы вытекает следующее разложение, которое справедливо как минимум для финитных функций:

$$\mathscr{F}_0(\mathbb{Z}(p^\infty)) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathscr{A}_k.$$

Для того, чтобы распространить это разложение на более широкий класс функций, рассмотрим следующую диаграмму, которая иллюстрирует последовательность разложения на асимметрические функции некоторой функции $f \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^\infty))$

$$\begin{array}{ccc}
f = f_{0,0} & \xrightarrow{\qquad 1-\mathfrak{a}_1 \qquad} & f_{1,0} = (1-\mathfrak{a}_1)[f_{0,0}] \\
\Big\downarrow \mathfrak{a}_1 & & \\
f_{0,1} = \dfrac{1}{p}(1+\mathfrak{e}^{1/p}+\mathfrak{e}^{2/p}+\cdots+\mathfrak{e}^{p-1/p})[f_{0,0}] & \xrightarrow{1-\mathfrak{a}_2} & f_{1,1} = (1-\mathfrak{a}_2)[f_{0,1}] \\
\Big\downarrow \mathfrak{a}_2 & & \\
f_{0,2} = \dfrac{1}{p}(1+\mathfrak{e}^{1/p^2}+\mathfrak{e}^{1/p^2}+\cdots+\mathfrak{e}^{p-1/p^2})[f_{0,1}] & \xrightarrow{1-\mathfrak{a}_3} & f_{1,2} = (1-\mathfrak{a}_3)[f_{0,2}] \\
\Big\downarrow \mathfrak{a}_3 & & \\
f_{0,3} = \dfrac{1}{p}(1+\mathfrak{e}^{1/p^3}+\mathfrak{e}^{1/p^3}+\cdots+\mathfrak{e}^{p-1/p^3})[f_{0,2}] & &
\end{array}$$

Если остановить разложение на третьем шаге, то получится следующая формула:

$$f = (1-\mathfrak{a}_1)[f] + (1-\mathfrak{a}_2)\mathfrak{a}_1[f] + (1-\mathfrak{a}_3)\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1[f] + \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1[f]. \tag{109}$$

В общем случае мы получаем следующую последовательность операторов проектирования на подпространства асимметрических функций:

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= (1-\mathfrak{a}_1) \\
\pi_2 &= (1-\mathfrak{a}_2)\mathfrak{a}_1 \\
\pi_3 &= (1-\mathfrak{a}_3)\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1 \\
&\cdots \\
\pi_k &= (1-\mathfrak{a}_k)\mathfrak{a}_{k-1}\ldots\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1 \\
&\cdots
\end{aligned}$$

Из формулы (108) следует, что

$$\pi_k = \mathfrak{av}_{k-1} - \mathfrak{av}_k,$$

при этом мы полагаем, что $\mathfrak{av}_0 = 1$. Из приведенной выше диаграммы видно, что описанная процедура разложения описывает метод построения последовательности операторов $\{\pi_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ проектирования пространства $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^\infty))$ на подпространства асимметрических функций.

$$\pi_k = \mathfrak{av}_{k-1} - \mathfrak{av}_k : \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^\infty)) \to \mathscr{A}_k$$

Поэтому пространство $\mathscr{A}_k$ может быть также определено как собственное подпространство оператора π_k, соответствующее собственному значению единица, то есть как множество функций, для которых справедливо равенство $\pi_k[f] = (\mathfrak{av}_{k-1} - \mathfrak{av}_k)[f] = f$.

Операторы $\{\pi_k\}$ выглядят особенно просто в случае, когда $p = 2$: Из предыдущих рассуждений следует что система операторов $\{\pi_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ определяется следующим образом:

$$\pi_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 - \mathfrak{e}^1/2), \qquad \pi_n = \frac{1}{2^n} \cdot (1 - \mathfrak{e}^{1/2^n}) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (1 + \mathfrak{e}^{1/2^k}),$$

$$\mathfrak{av}_n = \frac{1}{2^n} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (1 + \mathfrak{e}^{1/2^k}).$$

Оператор $\mathfrak{e}^{1/2^k}$ является оператором сдвига функций из множества $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(2^\infty))$ на угол равный $2\pi/2^k$:

$$\mathfrak{e}^{1/2^k}[f](x) = f(x \cdot 2\pi/2^k).$$

Последовательность операторов $\{\pi_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ образует систему ортогональных идемпотентов в кольце $\mathrm{End}(\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^\infty)))$ (см. Приложени A). При этом при любом $k \in \mathbb{N}$ имеет место следующее операторное разложение

$$\mathbf{1} = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \cdots + \pi_{k-1} + \mathfrak{av}_k,$$

которое в терминах операторов усреднения можно записать в виде

$$\mathbf{1} = (\mathbf{1} - \mathfrak{av}_1) + (\mathfrak{av}_1 - \mathfrak{av}_2) + \cdots + (\mathfrak{av}_{k-1} - \mathfrak{av}_k) + \mathfrak{av}_k.$$

Этому разложению соответствует разложение

$$f = \pi_1[f] + \pi_2[f] + \pi_3[f] + \cdots + \pi_{k-1}[f] + \mathfrak{av}_k[f], \tag{110}$$

которое справедливо для любого $k \in \mathbb{N}$ и любой функции $f \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^\infty))$. Заметим, что индексы при операторах $\{\pi_k\}$ соответствуют порядкам позиционной системы счисления по основанию p, а операторы $\{\pi_n\}$ являются операторами проектирования на подпространства $\mathscr{A}_k(\mathbb{Z}(p^\infty)) \subset \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^\infty))$ асимметрических функций, которые определяются следующим образом

$$\mathscr{A}_k(\mathbb{Z}(p^\infty)) = \{f \mid \pi_k[f] = f\}.$$

В общем случае такие функции принимают постоянное значение на каждом правильном p^{k-1}-угольнике, который является смежным классом по подгруппе $\mathbb{Z}(p^{k-1}) \subset \mathbb{Z}(p^\infty)$ и имеют нулевое среднее на всех правильных p^k-угольниках. Если элемент n принадлежит подгруппе $\mathbb{Z}(p^k)$ то из равенства (110) следует, что

$$f(n) - \pi_1[f](n) - \pi_2[f](n) - \pi_3[f](n) - \cdots - \pi_{k-1}[f](n) = \mathfrak{av}_k[f](n). \tag{111}$$

Значение $\mathfrak{av}_k[f](n)$ представляет собой среднее значение функции f по смежному классу $n+\mathbb{Z}(p^k)$ по подгруппе $\mathbb{Z}(p^k)$. Если $k \to \infty$, то начиная с некоторого k имеет место равенство $n + \mathbb{Z}(p^k) = \mathbb{Z}(p^k)$. Поэтому из равенства (111) следует, что если

$$\lim_{k\to\infty} \mathfrak{av}_k[f](n) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k} \cdot \sum_{m \in \mathbb{Z}(p^k)} f(m) = 0,$$

то имеет место следующее соотношение

$$f(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k[f](n),$$

которое показывает, что приведенное ниже разложение сходится поточечно:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k[f]. \tag{112}$$

Теорема 5.21 Разложение функции $f \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^\infty))$ на асимметрические p-адическое функции поточечно сходится к исходной функции f тогда и только тогда, когда функция f имеет асимптотически нулевую плотность или, говоря другими словами, ее среднее по Чезаро равно нулю, то есть когда

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k} \cdot \sum_{m\in\mathbb{Z}(p^k)} f(m) = 0.$$

Следствие 5.22 Пусть $f \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^\infty))$. Если

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k} \cdot \sum_{m\in\mathbb{Z}(p^k)} f(m) = c,$$

то функция $f - c$ может быть представлена как сумма асимметрических p-адических функций. Это разложение сходится к функции $f - c$ поточечно.

Предложение 5.23 Пусть $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{Z}(p^\infty))$ есть суммируемая функция (или, что то же самое, абсолютно сходящийся на группе $\mathbb{Z}(p^\infty)$ числовой ряд), тогда ряд

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k[f]$$

сходится к функции f по норме $\| * \|_1$.

Доказательство. Для доказательства сходимости данного функционального ряда достаточно оценить его остаточный член, который равен $\mathfrak{av}_k[f]$. Применив инверсное преобразование, данное предложение достаточно доказать для абсолютно сходящегося ряда $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}_0)$. Пусть $\sigma = \sum_n |f(n)|$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и соответствующий ему блок размера $2^{m(\varepsilon)}$, такой что для любого $k \geqslant m(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$|\sum_{n<2^k} |f(n)| - \sigma| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\|\mathfrak{av}_k[f]\|_1 = \frac{1}{2^k} \cdot \sum_{n<2^k} |f(n)| + \frac{1}{2^k} \cdot \sum_{n\geqslant 2^k} |f(n)| \leqslant \frac{1}{2^k} \cdot (\sigma + 2\varepsilon) \leqslant \frac{1}{2^{m(\varepsilon)}} \cdot (\sigma + 2\varepsilon).$$

Очевидно, что при $\varepsilon \to 0$, $m(\varepsilon) \to \infty$ и, следовательно, правая часть вышеуказанного неравенства стремится к нулю, что и доказывает требуемое утверждение. ⊠

Заметим, что из сходимости указанного ряда по норме $\| * \|_1$ следует его сходимость по более слабой норме $\| * \|_0$. Разложение функции $f \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}(p^\infty))$ на асимметрические p-адические функции тесно связано с разложением функций из $\mathscr{F}(\mathbb{Z}_p)$ по p-адическим сферам. Имеет место следующее утверждение.

Предложение 5.24 Пусть $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{Z}(p^\infty))$ есть абсолютно сходящийся комплекснозначный ряд, $\sigma(f)$ есть его сумма, и $\mathbf{F}[f] \in \mathscr{C}(\mathbb{Z}_p)$ есть его преобразование Фурье, тогда существует взаимно однозначное соответствие между сходящимся по норме $\| * \|_1$ разложением

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k[f] = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \ldots.$$

функции f на асимметрические p-адические функции и сходящимся по норме $\| * \|_1$ разложением ее Фурье образа $\mathbf{F}[f]$ по p-адическим сферам:

$$\mathbf{F}[f] = \mathbf{F}[f]_\infty + \mathbf{F}[f]_0 + \mathbf{F}[f]_1 + \mathbf{F}[f]_2 + \ldots, \tag{113}$$

где

$$\mathbf{F}[f_k] = \mathbf{F}[f]_{k-1}, \qquad f_k = \mathbf{F}^{-1}[\mathbf{F}[f]_{k-1}], \qquad \mathbf{F}[f]_\infty = \mathbf{F}[f](0) \cdot \delta_0 = \sigma(f) \cdot \delta_0,$$

и $\mathbf{F}[f]_k$ есть ограничение функции $\mathbf{F}[f]$ на p-адическую сферу радиуса $1/p^k$ с центром в нуле, при этом ноль считается p-адической сферой нулевого радиуса, которой соответствует индекс равный ∞.

Доказательство. Докажем сначала сходимость в среднем функционального ряда (113). Заметим, что все функции/последовательности f_k также являются абсолютно сходящимися, поэтому их Фурье образы $\mathbf{F}[f_k] = \mathbf{F}[f]_{k-1}$ представляют собой непрерывные функции, включая дельта функцию $\mathbf{F}[f]_\infty$. Без ограничения общности можно считать, что $\sigma(f) = 0$, так как в противном случае функцию f можно заменить на $f - \sigma(f) \cdot \delta_1$. Из формулы (110) следует, что остаточный член ряда (113) равен $\mathbf{F}[\mathfrak{av}_k]$. Согласно лемме 5.12

$$\mathbf{F}[\mathfrak{av}_k] = \mathbf{F}[f] \cdot \mathbf{1}_{(p^k)},$$

и мы имеем следующую оценку:

$$\|\mathbf{F}[\mathfrak{av}_k]\|_1 = \|\mathbf{F}[f] \cdot \mathbf{1}_{(p^k)}\|_1 \leqslant \sup\{\mathbf{F}[f](z) \mid z \in \mathbb{Z}_p\} \cdot 1/(p^k),$$

из которой следует, что ряд (113) сходится в среднем. Как было показано выше, функции f_k получаются в результате действия на функцию f операторов проектирования π_k, каждый из которых представляет собой разность двух операторов усреднения по подгруппам $\mathbb{Z}(p^k)$ и $\mathbb{Z}(p^{k+1})$. Согласно лемме 5.12 преобразование Фурье от усредненной по некоторой подгруппе функции эквивалентно умножению ее Фурье образа на характеристическую функцию аннулятора этой подгруппы. Аннулятором подгруппы $\mathbb{Z}(p^k)$ в аддитивной группе целых p-адических чисел является группа $(p)^k$. Поэтому в случае, когда $k \geqslant 1$, условие

$$\pi_k[h] = (\mathfrak{av}_{k-1} - \mathfrak{av}_k)[h] = h$$

эквивалентно условию

$$(\mathbf{F}[\mathfrak{av}_{k-1}] - \mathbf{F}[\mathfrak{av}_k])[h] = (\mathbf{1}_{(p^{k-1})} - \mathbf{1}_{(p^k)}) \cdot \mathbf{F}[h] = \mathbf{F}[h],$$

которое в точности соответствует условию принадлежности функции $\mathbf{F}[h]$ p-адической сфере с радиусом $1/p^{k-1}$ с центром в нуле. Соотношение $\mathbf{F}[f]_\infty = \sigma(f) \cdot \delta_0$ вытекает из общих свойств преобразования Фурье. $\boxtimes$

В частности, 2-адическое разложение на асимметрические функции определено для всех положительных арифметических функций с асимптотически нулевой плотностью, например, для характеристических функций бесконечных множеств с асимптотически нулевой плотностью, из которых самыми важными является характеристическая функция множества простых чисел $\wp$, а также функция $[\wp/2]$.

Структуру нечетных 2-адических функций предпочтительнее описывать в случае $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}_0)$, так как в этом случае проще всего сформулировать и проверить критерий постоянства или равенства нулю асимптотической плотности, которая для функций $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}_0)$ определяется как предел:

$$\frac{1}{2^n} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{2^N-1} f(n).$$

В общем случае функции f_k обладают рядом интересных свойств.

Предложение 5.25 Функции f_k обладают следующими свойствами:

(i) множество значений Ω_k каждой функции f_k симметрично относительно нуля;

(ii) если функция f принимает только целые значения, то множество значений Ω_k каждой функции f_k конечно и состоит из чисел вида $\pm n/2^{(k+1)}$;

(iii) график каждой функции f_k состоит из последовательностей двух чередующихся блоков, каждый из которых имеет длину 2^k. Внутри одного блока функция f_k принимает постоянные значения, а сумма ее значений по двум последовательным блокам равна нулю, то есть значения функций f_k на двух соседних блоках внутри одной пары отличаются только знаком;

(iv) множество значений функции $\langle f_{k+L}, f_k\rangle$ представляет собой подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ симметричное относительно оси Y.

Описанный процесс построения четных функций на группе $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty)$ или группе $\mathbb{Q}_{01}(2,n)$ также можно интерпретировать как 2-адическую диффузию. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим каноническое соответствие $q \leftrightarrow q/2^n$, которое существует между группами $\mathbb{Z}(2^n)$ и $\mathbb{Q}_{01}(2,n)$, а в пределе между группами $\mathbb{Z}(2^\infty)$ и $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty)$. На кольце $\mathbb{Z}(2^n)$ определена естественная 2-адическая метрика, которая позволяет построить на основе множества $\mathbb{Z}(2^n)$ иерархическую систему вложенных друг в друга шаров, образующих двоичное дерево, в корне которого находится само множество $\mathbb{Z}(2^n)$ (представляющее из себя единичный 2-адический шар), и терминальными вершинами которого являются все одноэлементные подмножества представляющие собой шары минимального радиуса. Предположим, что на терминальных вершинах определена некоторая функция $\rho_0 : \mathbb{Z}(2^n) \to \mathbb{C}$, которую мы будем интерпретировать как «плотность». Мы будем предполагать, что в нашей иерархической системе шаров в направлении от терминальных вершин к корню идет процесс «диффузии», в результате которого, на шаге с номером k, где $1 \leqslant k \leqslant n$, происходит полная диффузия во всех шарах радиуса $(1/2)^{n-k}$, то есть плотность каждого шара данного уровня образуется путем равномерного распределения массы всех точек, лежащих внутри этого шара, по всему шару. При этом возникает последовательность функций:

$$\langle \rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_{n-1}, \rho_n\rangle,$$

отображающих изменение плотности на каждом шаге этого процесса. Очевидно, что последняя в этом ряду функция ρ_n является постоянный и отражает конечное состояние диффузии, когда вся «масса» равномерно распределяется по всему единичному 2-адическому шару, совпадающему с множеством $\mathbb{Z}(2^n)$. Помимо функций ρ_k мы определим функции $\delta_k, 1 \leqslant k \leqslant n$. Каждая функция δ_k определяет разность плотности двух шаров $\mathfrak{b}_{k+1} \subset \mathfrak{b}_k$, лежащих на соседних уровнях. Таким образом, процесс 2-адической диффузии принимает следующий вид:

←		←		ρ0	ρ0	ρ1	ρ2	ρ3	ρ4	ρ5	δ1	δ2	δ3	δ4	δ5	Σ(δ)	ρ−Σ(δ)
Code	N	RevCode	RN														
00000	0	00000	0	0	0	0,00	0,50	0,500	0,375	0,344	0,00	-0,50	0,000	0,125	0,031	-0,344	0,344
00001	1	10000	16	0	0	0,00	0,50	0,500	0,375	0,344	0,00	-0,50	0,000	0,125	0,031	-0,344	0,344
00010	2	01000	8	0	1	1,00	0,50	0,500	0,375	0,344	0,00	0,50	0,000	0,125	0,031	0,656	0,344
00011	3	11000	24	0	1	1,00	0,50	0,500	0,375	0,344	0,00	0,50	0,000	0,125	0,031	0,656	0,344
00100	4	00100	4	0	0	0,50	0,50	0,500	0,375	0,344	-0,50	0,00	0,000	0,125	0,031	-0,344	0,344
00101	5	10100	20	0	1	0,50	0,50	0,500	0,375	0,344	0,50	0,00	0,000	0,125	0,031	0,656	0,344
00110	6	01100	12	0	0	0,50	0,50	0,500	0,375	0,344	-0,50	0,00	0,000	0,125	0,031	-0,344	0,344
00111	7	11100	28	0	1	0,50	0,50	0,500	0,375	0,344	0,50	0,00	0,000	0,125	0,031	0,656	0,344
01000	8	00010	2	1	0	0,00	0,25	0,250	0,375	0,344	0,00	-0,25	0,000	-0,125	0,031	-0,344	0,344
01001	9	10010	18	0	0	0,00	0,25	0,250	0,375	0,344	0,00	-0,25	0,000	-0,125	0,031	-0,344	0,344
01010	10	01010	10	0	0	0,50	0,25	0,250	0,375	0,344	-0,50	0,25	0,000	-0,125	0,031	-0,344	0,344
01011	11	11010	26	0	1	0,50	0,25	0,250	0,375	0,344	0,50	0,25	0,000	-0,125	0,031	0,656	0,344
01100	12	00110	6	0	0	0,50	0,25	0,250	0,375	0,344	-0,50	0,25	0,000	-0,125	0,031	-0,344	0,344
01101	13	10110	22	0	1	0,50	0,25	0,250	0,375	0,344	0,50	0,25	0,000	-0,125	0,031	0,656	0,344
01110	14	01110	14	0	0	0,00	0,25	0,250	0,375	0,344	0,00	-0,25	0,000	-0,125	0,031	-0,344	0,344
01111	15	11110	30	0	0	0,00	0,25	0,250	0,375	0,344	0,00	-0,25	0,000	-0,125	0,031	-0,344	0,344
10000	16	00001	1	0	0	0,50	0,50	0,375	0,313	0,344	-0,50	0,00	0,125	0,063	-0,031	-0,344	0,344
10001	17	10001	17	1	1	0,50	0,50	0,375	0,313	0,344	0,50	0,00	0,125	0,063	-0,031	0,656	0,344
10010	18	01001	9	0	0	0,50	0,50	0,375	0,313	0,344	-0,50	0,00	0,125	0,063	-0,031	-0,344	0,344
10011	19	11001	25	0	1	0,50	0,50	0,375	0,313	0,344	0,50	0,00	0,125	0,063	-0,031	0,656	0,344
10100	20	00101	5	1	0	0,00	0,25	0,375	0,313	0,344	0,00	-0,25	-0,125	0,063	-0,031	-0,344	0,344
10101	21	10101	21	0	0	0,00	0,25	0,375	0,313	0,344	0,00	-0,25	-0,125	0,063	-0,031	-0,344	0,344
10110	22	01101	13	1	0	0,50	0,25	0,375	0,313	0,344	-0,50	0,25	-0,125	0,063	-0,031	-0,344	0,344
10111	23	11101	29	1	1	0,50	0,25	0,375	0,313	0,344	0,50	0,25	-0,125	0,063	-0,031	0,656	0,344
11000	24	00011	3	1	0	0,00	0,00	0,250	0,313	0,344	0,00	0,00	-0,250	-0,063	-0,031	-0,344	0,344
11001	25	10011	19	1	0	0,00	0,00	0,250	0,313	0,344	0,00	0,00	-0,250	-0,063	-0,031	-0,344	0,344
11010	26	01011	11	1	0	0,00	0,00	0,250	0,313	0,344	0,00	0,00	-0,250	-0,063	-0,031	-0,344	0,344
11011	27	11011	27	0	0	0,00	0,00	0,250	0,313	0,344	0,00	0,00	-0,250	-0,063	-0,031	-0,344	0,344
11100	28	00111	7	1	0	0,50	0,50	0,250	0,313	0,344	-0,50	0,00	0,250	-0,063	-0,031	-0,344	0,344
11101	29	10111	23	1	1	0,50	0,50	0,250	0,313	0,344	0,50	0,00	0,250	-0,063	-0,031	0,656	0,344
11110	30	01111	15	0	0	0,50	0,50	0,250	0,313	0,344	-0,50	0,00	0,250	-0,063	-0,031	-0,344	0,344
11111	31	11111	31	1	1	0,50	0,50	0,250	0,313	0,344	0,50	0,00	0,250	-0,063	-0,031	0,656	0,344

Рисунок 5.7 Пример 2-адической диффузии множества простых чисел.

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= \rho_1 + \delta_1, \\
\rho_1 &= \rho_2 + \delta_2, \\
\rho_2 &= \rho_3 + \delta_3, \\
\rho_3 &= \rho_4 + \delta_4, \\
\rho_4 &= \rho_5 + \delta_5, \\
\rho_0 &= \rho_4 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5, \\
\rho_0 - \rho_5 &= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5.
\end{aligned}$$

Очевидно, что данное разложение совпадает с описанным выше разложением на асимметрические функции. В случае группы $\mathbb{Z}(2^\infty)$ дереву 2-адических шаров соответствует бесконечное двоичное дерево, вершинами которого являются все классы смежности по всем конечным циклическим подгруппам, а ребра соответствуют парам смежных классов, из которых один содержится в другом и содержит в два раза меньше элементов. Как мы показали выше, при отображении инверсии смежные классы переходят в блоки соседних элементов, состоящие из 2^k элементов. Если исходная функция ρ_0 принимает произвольные вещественные значения, то в процесса разложения вся исходная масса/заряд постепенно «распределяется» по бесконечному (в случае $\mathbb{Z}(2^\infty)$) или по конечному (в случае $\mathbb{Z}(2^n)$) числу уровней, принимая при этом как положительные, так и отрицательные значения.

Как мы показали выше, если асимптотическая плотность исходной функции равна нулю, то данное разложение сходится в каждой конкретной точке.

5.3 Разложение Фурье-Хаара на кольце $\mathbb{Z}_p$

В этом параграфе мы рассмотрим разложение Фурье-Хаара для кольца $\mathbb{Z}_p$.

□ Пусть $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$ есть одно из функциональных пространств в цепочке

$$\mathscr{C}(\mathbb{Z}_p;\mathbb{C}) \subset \mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p;\mathbb{C}) \subset \mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p;\mathbb{C}).$$

Мы далее будем использовать символ $\mathfrak{F}$ как функциональную переменную, принимающую значение из множества основных функциональных пространств.

Разложение Фурье-Хаара для функций из пространства $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$ является аналогичным разложению Фурье-Хаара для конечных циклических групп вида $\mathbb{Z}(p^n)$. Отличие заключается в бесконечности цепочки подгрупп и в замене усреднения посредством суммирования на усреднение посредством интегрирования:

$$\mathfrak{av}_k[f](x) = \frac{1}{\mu((p^k))} \int\limits_{(p^k)} f(x+h)dh = p^k \int\limits_{(p^k)} f(x+h)dh.$$

Очевидно, что для любой функции $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$, функция $\mathfrak{av}_k[f]$ является финитной, поэтому каждый оператор $\mathfrak{av}_k$ является оператором проектирования пространства $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$ на подпространство финитных функций. Согласно лемме 5.11 данная проекция является ортогональной в интегральной метрике. Так же как и в случае конечных абелевых групп разложение Фурье-Хаара основано на следующей цепочке фактор колец или фактор групп кольца/группы $\mathbb{Z}_p$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\pi_n} & \mathbb{Z}_p/(p^n) & \xrightarrow{\pi_{n-1}} & \mathbb{Z}_p/(p^{n-1}) & \xrightarrow{\pi_{n-2}} & \cdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle i_{n-1}} & & \uparrow{\scriptstyle i_{n-2}} & & \\
 & & (p^{n-1})/(p^n) & & (p^{n-2})/(p^{n-1}) & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\pi_3} & \mathbb{Z}_p/(p^3) & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{Z}_p/(p^2) & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbb{Z}_p/(p) & \xrightarrow{\pi_0} & \{1\} \\
 & & \uparrow{\scriptstyle i_2} & & \uparrow{\scriptstyle i_1} & & \uparrow{\scriptstyle i_0} & & \\
\cdots & & (p^2)/(p^3) & & (p)/(p^2) & & (1)/(p) & &
\end{array}.$$

Полагая, что оператор $\mathfrak{av}_k$ осуществляет усреднение по подгруппе (p^k), мы получаем следующую точную последовательность линейных отображений векторных пространств

$$\mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p^k)/(p^{k+1})) \xrightarrow{\mathfrak{i}_k} \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p^{k+1})) \xrightarrow{\mathfrak{av}_k} \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p^k)) \ ,$$

которая имеет место для любого $k \in \mathbb{N}_0$. В соответствии с ранее введенными обозначениями символ $\mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p^k)/(p^{k+1}))$ на этой диаграмме обозначает подпространство функций в $\mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p^{k+1}))$, среднее значение которых на каждом шаре радиуса $1/p^k$ равно нулю, и которые мы также как и в конечном случае будем называть ***асимметрическими ранга*** k.

Поскольку $\mathfrak{av}_k^2 = \mathfrak{av}_k$, то из этой точной последовательности вытекает следующее ортогональное разложение

$$\mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p^{k+1})) = \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p^k)) \oplus \mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p^k)/(p^{k+1})), \tag{114}$$

в котором

$$\mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p^k)/(p^{k+1})) = \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p^{k+1})) \cap \mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p^k)),$$

где $\mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p^k))$ есть подпространство функций в $\mathscr{F}(\mathbb{Z}_p)$, имеющих нулевое среднее на шарах радиуса $1/p^k$. В основе бесконечного разложения Фурье-Хаара лежит приведенная ниже коммутативная диаграмма конечномерных функциональных пространства, связывающая пространства функций, определенных на фактор кольцах кольца $\mathbb{Z}_p$, цепочкой операторов $\{\mathfrak{av}_k, \mathfrak{j}_k\}$, удовлетворяющих следующим соотношениям

$$\mathfrak{j}_k[f] = f \circ \pi_k, \qquad \mathfrak{av}_k \circ \mathfrak{j}_k = \mathbf{1}, \qquad \mathfrak{av}_k \circ \mathfrak{av}_k = \mathfrak{av}_k, \qquad \mathfrak{av}_{k-1} \circ \mathfrak{av}_k = \mathfrak{av}_k \circ \mathfrak{av}_{k-1} = \mathfrak{av}_{k-1}.$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p^2)/(p^3)) & & \mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p)/(p^2)) & & \mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(1)/(p)) & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle i_2} & & \downarrow{\scriptstyle i_1} & & \downarrow{\scriptstyle i_0} & & \\
\cdots & \xrightarrow{\pi_2} & \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p^3)) & \xrightarrow{\mathfrak{av}_2} & \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p^2)) & \xrightarrow{\mathfrak{av}_1} & \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p)) & \xrightarrow{\mathfrak{av}_0} & \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(1)) \simeq \mathbb{C} \\
 & & \updownarrow{\scriptstyle =} & & \updownarrow{\scriptstyle =} & & \updownarrow{\scriptstyle =} & & \updownarrow{\scriptstyle =} \\
\cdots & \xleftarrow{\mathfrak{j}_3} & \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p^3)) & \xleftarrow{\mathfrak{j}_2} & \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p^2)) & \xleftarrow{\mathfrak{j}_1} & \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p)) & \xleftarrow{\mathfrak{j}_0} & \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(1)) \simeq \mathbb{C}
\end{array} .$$

Последовательное применение формулы (114), начиная с некоторого индекса k, дает нам следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p^k)) &= \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p^{k-1})) \oplus \mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p^{k-1})/(p^k)); && (115)\\
&\dots && (116)\\
\mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p^3)) &= \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p^3)) \oplus \mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p^2)/(p^3)); && (117)\\
\mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p^2)) &= \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p^1)) \oplus \mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p)/(p^2)); && (118)\\
\mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p)) &= \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(1)) \oplus \mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(1)/(p)); && (119)
\end{aligned}$$

Поскольку $\mathbb{Z}_p/(1)$ есть одноэлементное множество, то $\mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(1)) \simeq \mathbb{C}$, и последнюю строчку этого разложения можно записать как

$$\mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p)) = \mathbb{C} \oplus \mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(1)/(p)).$$

Поэтому на k-ом шаге этого алгоритма мы получаем следующее ортогональное разложение

$$\mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p^k)) = \mathbb{C} \oplus \sum_{n=0}^{k-1} \mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p^n)/(p^{n+1})).$$

Из точной последовательности с идемпотентным оператором проектирования $\mathfrak{av}_k$

$$\mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p^k)) \xrightarrow{i} \mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\mathfrak{av}_k} \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p^k))$$

следует, что имеет место следующее разложение

$$\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p) = \mathscr{F}(\mathbb{Z}/(p^k)) \oplus \mathscr{A}(\mathbb{Z}/(p^k)),$$

которое дает нам ортогональное разложение

$$\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{C} \oplus \mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p^k)) \oplus \sum_{n=0}^{k-1} \mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p^n)/(p^{n+1})),$$

где $\mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p^k))$ есть подпространство в $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$, состоящее из функций с нулевым средним на каждом шаре радиуса $1/p^k$. При $k \to \infty$ данная формула переходит в формулу

$$\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{C} \oplus \sum_{n=0}^{\infty} \mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p^n)/(p^{n+1})), \tag{120}$$

которая показывает, что пространство $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$ разлагается в прямую сумму конечномерных ортогональных друг другу подпространств, состоящих из финитных асимметрических функций, и одномерного подпространства постоянных функций, обозначенного как $\mathbb{C}$. Нам остается только доказать сходимость этого разложения по норме, которая соответствует пространству $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$. В случае, когда $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p) = \mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p)$ разложение (120), так же как и в конечномерном случае, допускает двоякое прочтение, которое связано с взаимно обратными процессами диффузии и формообразования. Правая часть разложения (120), читаемая справа налево описывает идущий из p-адической бесконечности процесс p-адической диффузии, который преобразует любую функцию f из множества $\mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p)$ в константу. Прочтение того же разложения в обратном порядке описывает процесс формообразования, который с помощью последовательности асимметрических деформаций преобразует константу в некоторую форму, которая описывается функцией $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p)$. При этом на каждом шаге интеграл от данной функции сохраняет свое значение, что выглядит как закон сохранения массы или как закон сохранения заряда. Данное разложение позволяет связать с каждой интегрируемой на $\mathbb{Z}_p$ функцией ее ряд Фурье-Харра, состоящей из константы и счетного множества асимметрических функций. Из теорем 5.18, 5.19 и 5.20 следует, что для любой функции $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$ ее ряд Фурье-Хаара сходится к функции f в метрике, соответствующей пространству $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$. На уровне операций с отдельной функцией описанное выше разложение выглядит следующим образом.

$$\begin{array}{ccc}
f = f_{0,3} & \xrightarrow{\qquad 1-\mathfrak{av}_2 \qquad} & f_{1,3} = (1-\mathfrak{av}_2)[f_{0,3}] \\
\Big\downarrow \mathfrak{av}_2 & & \\
\mathfrak{av}_2[f] = f_{0,2} = p^2 \int_{(p^2)} f_{0,3}(x+y)dy & \xrightarrow{1-\mathfrak{av}_2} & f_{1,2} = (1-\mathfrak{av}_1)[f_{0,2}] = (\mathfrak{av}_2 - \mathfrak{av}_1)[f] \\
\Big\downarrow \mathfrak{av}_1 & & \\
\mathfrak{av}_1[f] = f_{0,1}(x) = p \int_{(p)} f_{0,2}(x+y)dy & \xrightarrow{1-\mathfrak{av}_1} & f_{1,1} = (1-\mathfrak{av}_0)[f_{0,1}] = (\mathfrak{av}_1 - \mathfrak{av}_0)[f] \\
\Big\downarrow \mathfrak{av}_0 & & \\
\mathfrak{av}_0[f] = f_{0,0}(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} f_{0,1}(x+y)dy & &
\end{array}$$

Данное разложения начинается с разложения

$$f = \mathfrak{av}_2[f] + (1 - \mathfrak{av}_2)[f],$$

к которому далее применяется рекуррентная формула

$$\mathfrak{av}_k[f] = \mathfrak{av}_{k-1}\mathfrak{av}_k[f] + (1 - \mathfrak{av}_{k-1})\mathfrak{av}_k[f] = \mathfrak{av}_{k-1}[f] + (\mathfrak{av}_k - \mathfrak{av}_{k-1})[f].$$

После трех шагов разложения мы получаем следующее разложение для функции f

$$f = \mathfrak{av}_0[f] + (\mathfrak{av}_1 - \mathfrak{av}_0)[f] + (\mathfrak{av}_2 - \mathfrak{av}_1)[f] + (1 - \mathfrak{av}_2)[f].$$

Данная диаграмма растет вверх и для каждой функции $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$ дает разложение:

$$f_{0,0} = \mathfrak{av}_0[f], \qquad f_{0,k} = p^k \int\limits_{(p^k)} f(x+y)dy = \mathfrak{av}_k[f],$$

$$f_{1,k} = (1 - \mathfrak{av}_{k-1})[f_{0,k}] = (1 - \mathfrak{av}_{k-1})\mathfrak{av}_k[f] = (\mathfrak{av}_k - \mathfrak{av}_{k-1}\mathfrak{av}_k)[f] = (\mathfrak{av}_k - \mathfrak{av}_{k-1})[f].$$

После выполнения $n+1$ шагов мы получаем следующее разложение:

$$f = f_{0,0} + \sum_{k=1}^{n} f_{1,k} = \mathfrak{av}_0[f] + \sum_{k=1}^{n}(\mathfrak{av}_k - \mathfrak{av}_{k-1})[f] + (1 - \mathfrak{av}_n)[f]. \tag{121}$$

При $n \to \infty$ данное разложение превращается в бесконечный ряд:

$$f = f_{0,0} + \sum_{k=1}^{\infty} f_{1,k} = \mathfrak{av}_0[f] + \sum_{k=1}^{\infty}(\mathfrak{av}_k - \mathfrak{av}_{k-1})[f]. \tag{122}$$

Остаточный член ряда (121) имеет вид $(1 - \mathfrak{av}_n)[f]$, поэтому из теорем 5.18, 5.19 и 5.20 следует, что для каждой функции $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$ этот ряд сходится по соответствующей норме. Из предыдущих рассуждений также следует, что функции $f_{1,k}$ являются асимметрическими ранга k, что можно проверить непосредственными вычислениями:

$$\mathfrak{av}_k[f_{1,k+1}] = \mathfrak{av}_k(\mathfrak{av}_{k+1} - \mathfrak{av}_k)[f] = \mathfrak{av}_k[f] - \mathfrak{av}_k[f] = 0, \quad \Rightarrow \quad f_{1,k+1} \in \mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p^k)),$$

$$f_{1,k+1} = (\mathfrak{av}_{k+1} - \mathfrak{av}_k)[f] = (\mathfrak{av}_{k+1} - \mathfrak{av}_{k+1}\mathfrak{av}_k)[f] =$$

$$= \mathfrak{av}_{k+1}(1 - \mathfrak{av}_k)[f] \quad \Rightarrow \quad f_{1,k+1} \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p^{k+1})),$$

$$f_{1,k+1} \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}_p/(p^{k+1}) \cap \mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p^k)) = \mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p^k)/(p^{k+1})).$$

Логика дальнейшего разложения функций из подпространств $\mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p^n)/(p^{n+1}))$ по вейвлетам Хаара полностью повторяет логику конечномерного разложения, которая была нами детально описана в главе IV. К ранее сказанному необходимо добавить несколько замечаний.

□ Пусть $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}(\mathbb{Z}_p)$ есть некоторый p-адический шар. Символом $\mathscr{W}(\mathfrak{b})$ будем обозначает соответствующее данному шару пространство вейвлетов/всплесков, то есть подмножество финитных функций из пространства $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$, удовлетворяющих следующим трем условиям:

(i) носитель функции лежит внутри шара $\mathfrak{b}$;

(ii) функция принимает постоянное значение на всех дочерних шарах шара $\mathfrak{b}$;

(iii) среднее значение функции на шаре $\mathfrak{b}$ равно нулю.

Очевидно, что каждое из подпространств $\mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p^n)/(p^{n+1}))$ асимметрических функций раскладывается в прямую сумму ортогональных друг другу в интегральной метрике подпространства, состоящих из финитных функций, соответствующих отдельным p-адическим шарам/смежным классам:

$$\mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p^n)/(p^{n+1})) = \bigoplus_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}} \mathscr{W}(\mathfrak{b}), \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_n(\mathbb{Z}_p),$$

где $\mathfrak{B}_n(\mathbb{Z}_p)$ есть множество всех p-адических шаров радиуса $1/p^n$. В соответствии с этим разложение (120) может быть продолжено далее до уровня отдельных p-адических шаров:

$$\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{C} \oplus \Big(\bigoplus_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}} \mathscr{W}(\mathfrak{b})\Big), \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathbb{Z}_p). \tag{123}$$

Замечание о порядке суммирования. Если пространство $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$ совпадает с пространством $\mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p)$, то в этом пространстве выполняется равенство Парсеваля, которое избавляет нас от необходимости заботиться о порядке суммирования ортогональных рядов. В противном случае разложение (123), представленное с форме функционального ряда, не является абсолютно сходящимся, и его сумма в общем случае зависит от порядка суммирования. Будем далее предполагать, что суммирование функциональных рядов, индексированных целочисленными p-адическими шарами, всегда происходит в порядке убывания радиуса этих шаров. Будем называть такой порядок суммирования каноническим.

Пример разложения на асимметрические функции и на соответствующие им вейвлеты приведен на рисунке 5.8 ниже. Отдельный вейвлет выделен красной рамкой. Кольцо $\mathbb{Z}_p$ реализовано как канторово множество, промежутки между отдельными сегментами которого сокращены для удобства визуализации.

Каждое из пространств $\mathscr{W}(\mathfrak{b})$ изоморфно пространству $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(p))$ функций, определенных на конечной циклической группе. Далее в каждом из этих пространств выбирается базис, состоящий из $p-1$ нетривиальных (отличных от единичного) характеров, что и дает нам разложение на вейвлеты Хаара. Заметим, что когда индекс n пробегает множество всех натуральных чисел, включая ноль, то множество всех смежных классов $\mathbb{Z}_p/(p^n)$ совпадает с множеством всех p-адических шаров.

Таким образом, ортогональный базис Хаара $\mathfrak{H}^+(\mathbb{Z}_p)$ можно описать как множество функций, состоящее из характеристической функции единичного шара и счетного множества функций $\mathfrak{H}(\mathbb{Z}_p)$, индексированных p-адическими шарами и числами из множества $\{1, 2, \ldots, p-1\}$:

$$\mathfrak{H}(\mathbb{Z}_p) = \{\chi_m(\mathfrak{b}) \mid \mathfrak{b} \in \mathfrak{B}(\mathbb{Z}_p), \quad \chi_m \in \mathbb{Z}^\times(p), \quad m \neq 0\},$$

$$\mathfrak{H}^+(\mathbb{Z}_p) = \{\mathbf{1}(\mathbb{Z}_p)\} \cup \mathfrak{H}(\mathbb{Z}_p).$$

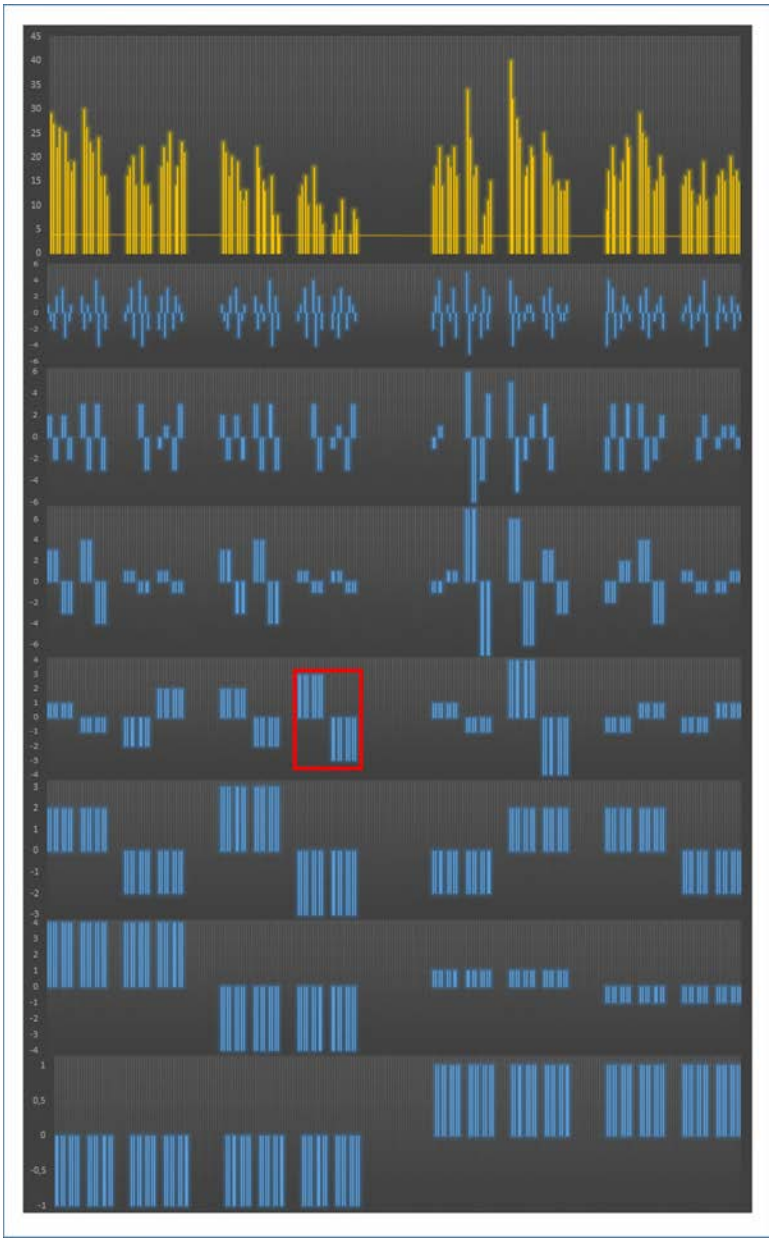


Рисунок 5.8 Пример разложения на асимметрические функции и на соответствующие им вейвлеты.

Каждый шар $\mathfrak{b}$ радиуса $1/p^k$ однозначно определяется p-ичным словом $\mathfrak{w}$ длины k. Функция $\chi_m(\mathfrak{b})$ принимает ненулевое значение только на шаре $\mathfrak{b}$ и в представлении числа $x \in \mathfrak{b}$ p-адической дробью выглядит следующим образом

$$\chi_m(\mathfrak{b})(x) = \chi_m(\mathfrak{b})(d_0, d_1, d_2, \dots, d_{k-1}, d_k, \dots) = \chi_m(\mathfrak{b})(d_k) = \exp(2\pi i \cdot \frac{d_k m}{p}).$$

Если $\mathfrak{b}$ есть p-адический шар радиуса $\mathfrak{r}(\mathfrak{b}) = 1/p^k$, то

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p} |\chi_m(\mathfrak{b})|^2 \, d\mu = \int\limits_{\mathfrak{b}} d\mu = \mathfrak{r}(\mathfrak{b}) = 1/p^k,$$

поэтому, чтобы сделать базис Хаара ортонормированным, следует нормировать составля-

ющее его множество вейвлетов на соответствующую величину:

$$\chi_m(\mathfrak{b}) \to \sqrt{\mathfrak{r}(\mathfrak{b})} \cdot \chi_m(\mathfrak{b}).$$

Преобразование Фурье переводит разложение Фурье-Хаара в разложение

$$\mathscr{F}(\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \operatorname{supp}(\mathbb{Q}_{01}(p^n) \setminus \mathbb{Q}_{01}(p^{n+1})).$$

Если рассматривать группу $\mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ как подмножество поля p-адических чисел, то данному разложению соответствует разложение по пересечению этого множества с множеством p-адических сфер радиуса большего единицы.

С начала этого параграфа мы использовали эксплицитную систему обозначений, которую можно упростить следующим образом:

$$\mathscr{A}_k = \mathscr{A}(\mathbb{Z}_p/(p^k)/(p^{k+1})), \quad k \geqslant 0,$$

$$\mathscr{S}_k = \mathbb{Z}_p/(p^k).$$

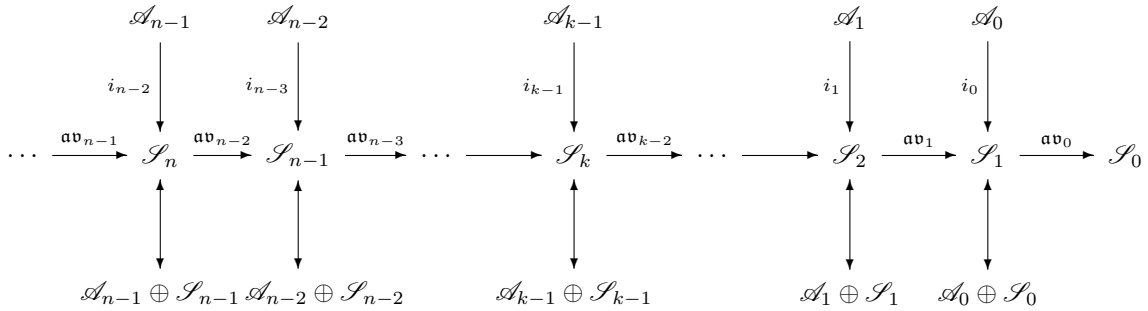
В этих обозначениях описанную в данном параграфе конструкцию можно сформулировать в виде одной теоремы, формулировка которой состоит из одиннадцати отдельных пунктов.

Теорема 5.26 (О разложении по асимметрическим функциям). Пусть $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$ есть одно из функциональных пространств в цепочке

$$\mathscr{C}(\mathbb{Z}_p;\mathbb{C}) \subset \mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p;\mathbb{C}) \subset \mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p;\mathbb{C}).$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) Последовательность операторов усреднения $\{\mathfrak{av}_k\}$ индуцирует следующую точную последовательность конечномерных векторных подпространств пространства $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$:



(124)

(ii) Пространство $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$ раскладывается в ортогональную прямую сумму

$$\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p) = \mathscr{S}_0 \oplus \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \mathscr{A}_k\Big)$$

своих конечномерных пространств, состоящих из асимметрических функций $\mathscr{A}_k$ ранга k, и одномерного пространства постоянных функций $\mathscr{S}_0$;

(iii) для любой функции $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$ имеет место разложение:

$$f = \varrho[f] + \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k[f] = \mathfrak{av}_0[f] + \sum_{k=0}^{\infty} (\mathfrak{av}_{k+1} - \mathfrak{av}_k)[f] = \lim_{k\to\infty} S_k[f], \tag{125}$$

где π_k и ϱ есть операторы проектирования соответственно на подпространства $\mathscr{A}_k$ и $\mathscr{S}_0$, которые следующим образом выражаются через операторы усреднения $\mathfrak{av}_k$:

$$\varrho = \mathfrak{av}_0, \quad \pi_k = \mathfrak{av}_{k+1} - \mathfrak{av}_k;$$

(iv) Величина $S_n[f]$ совпадает с n-ой суммой p-адического ряда Фурье функции f и выражается через оператор усреднения: $S_k[f] = \mathfrak{av}_k[f]$;

(v) Если $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p) = \mathscr{C}(\mathbb{Z}_p; \mathbb{C})$, то разложение (125) сходится равномерно;

(vi) Если $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p) = \mathscr{L}^2(\mathbb{Z}_p; \mathbb{C})$, то разложение (125) сходится в среднем квадратичном;

(vii) Если $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p) = \mathscr{L}^1(\mathbb{Z}_p; \mathbb{C})$, то разложение (125) сходится в среднем;

(viii) Каждое подпространство асимметрических функций $\mathscr{A}_k$ является конечномерным и раскладывается в ортогональную прямую сумму

$$\mathscr{A}_k = \bigoplus_{\mathfrak{b}} \mathscr{W}(\mathfrak{b}), \quad \mathfrak{b} \in \mathfrak{B}_k(\mathbb{Z}_p),$$

подпространств $\mathscr{W}(\mathfrak{b})$, каждое из которых состоит из асимметрических финитных функций ранга k, носитель которых принадлежит p-адическому шару $\mathfrak{b}$ радиуса $1/p^k$;

(ix) Это позволяет продолжить разложение (125) до разложения

$$\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p) = \mathscr{S}_0 \oplus \Big(\bigoplus_{\mathfrak{b}} \mathscr{W}(\mathfrak{b})\Big), \quad \mathfrak{b} \in \mathfrak{B}(\mathbb{Z}_p), \tag{126}$$

которое соответствует множеству всех p-адических шаров. Соответствующее функциональное разложение функции $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$ сходится в метрике, соответствующей пространству $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$ при условии канонического порядка суммирования данного разложения;

(x) Каждое из пространств $\mathscr{W}(\mathfrak{b})$ изометрично в соответствующей метрике пространству комплексных функций с нулевым средним, определенных на циклической группе $\mathbb{Z}(p)$, базис которого составляют $p-1$ неединичных характеров этой группы;

(xi) Отождествление этих характеров с функциями из пространства $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$ дает нам счетное множество ортогональный вейвлетов Хаара и позволяет продолжить разложение (126) до разложения произвольной функции $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$ по отдельным вейвлетам

$$f = f_0 \cdot \mathbf{1}(\mathbb{Z}_p) + \sum_{\mathfrak{b}} \sum_{m} f_{\mathfrak{b},m} \cdot \chi_m(\mathfrak{b}),$$

$$\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}(\mathbb{Z}_p), \quad \chi_m \in \mathbb{Z}(p)^*, \quad m \in \mathbb{Z}(p)^\times.$$

Данное разложение сходится в метрике, соответствующей пространству $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$, при условии канонического порядка суммирования данного разложения.

Доказательство. Доказательство данной теоремы следует из предыдущих рассуждений данного параграфа, а также из теорем 5.18, 5.19 и 5.20. ⊠

□ Пусть $\mathfrak{b}$ есть некоторый p-адический шар в $\mathbb{Q}_p$. Обозначим символом $\mathfrak{F}(\mathfrak{b})$ подпространство функций в $\mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p)$, носитель которых с точностью до множества меры ноль является подмножеством множества $\mathfrak{b}$ или, что есть тоже самое, множество функций, полученных ограничением функций из пространства $\mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p)$ на множество $\mathfrak{b}$. Очевидно, что пространство $\mathfrak{F}(\mathfrak{b})$ изометрично вкладывается в пространство $\mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p)$.

Заметим, что все рассуждения данного параграфа, а также все утверждения теоремы 5.26 сохраняют свою справедливость при замене кольца целых p-адических чисел на произвольный p-адический шар $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}(\mathbb{Q}_p)$ с соответствующей заменой пространства $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$ на пространство $\mathfrak{F}(\mathfrak{b})$. В этом также можно убедиться, установив непрерывный и коммутирующий с операторами усреднения изоморфизм между пространствами $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$ и $\mathfrak{F}(\mathfrak{b})$. Данный изоморфизм описывается следующим предложением.

Предложение 5.27 Пусть $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}(\mathbb{Q}_p)$ есть p-адический шар радиуса p^k с центром в нуле. Тогда отображение

$$I_k : \mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{b}),$$
$$I_k[f](x) = f(p^k x)$$

является непрерывным изоморфизмом нормированных векторных пространств, и для любого $n \in \mathbb{N}_0$ имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{I_k} & \mathfrak{F}(\mathfrak{b}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{av}_n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{av}_{n-k}} \\ \mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{I_k} & \mathfrak{F}(\mathfrak{b}) \end{array}$$

Доказательство. Доказательство этого интуитивно ясного утверждения представляет собой упражнение по замене переменных в p-адических интегралах. Непрерывность линейного оператора I_k вытекает из следующих соотношений:

$$\int\limits_{\mathfrak{b}} f(p^k x)\,dx = \int\limits_{p^k\mathfrak{b}} f(y)\,p^k\,dy = p^k \int\limits_{\mathbb{Z}_p} f(y)\,dy.$$

В приведенном интеграле сделана замена переменных $y = p^k x$, $dx = p^k dy$, а также произведена соответствующая ей замена области интегрирования. Проверим далее коммутативность указанной диаграммы:

$$I_k \circ \mathfrak{av}_n[f] = p^n \int\limits_{(p^n)} f(p^k x + h)\,dh = p^n \int\limits_{(p^n)} f(p^k(x + p^{-k}h))\,dh =$$

$$= p^n \int\limits_{(p^{n-k})} f(p^{-k}(x+\tau))\,p^k d\tau = p^{n-k} \int\limits_{(p^{n-k})} I_k[f](x+\tau)\,d\tau = \mathfrak{av}_{n-k} \circ I_k[f].$$

В приведенном выше интеграле сделана замена переменных $\tau = p^{-k} \cdot h, dh = p^{-k} \cdot d\tau$, а также произведена соответствующая ей замена области интегрирования $(p^n) \to (p^{n-k})$ (см. замечание ниже). $\boxtimes$

Замечание о замене переменных. Отметим, что порядок линейной замены переменных в p-адическом интеграле отличается от аналогичной замены при интегрировании на вещественной прямой. При линейной замене переменных $y = p^k \cdot x$ элемент меры заменяется по формуле $dy = p^{-k} \cdot dx$. Такой характер замены связан с тем, что отображение $y = p^k \cdot x$ преобразует шар $p^n\mathbb{Z}_p$ радиуса $1/p^n$ в шар $p^{n+k}\mathbb{Z}_p$ радиуса $1/p^{n+k}$. Поскольку p^k стоит в знаменателе, то при $k \to \infty$ данное отображение является сжимающим, а не растягивающим, как это имеет место в вещественном случае. Поэтому такому отображению соответствует формула $dy = p^{-k} \cdot dx$.

Поскольку операторы усреднения инвариантны относительно аддитивных сдвигов, утверждение предложения 5.27 можно распространить на произвольные шары, добавив в формулу для оператора I_k сдвиг на соответствующий вектор.

$\square$ Пусть $\mathfrak{b}$ есть некоторое открытое множество в $\mathbb{Q}_p$, например p-адический шар или p-адическая сфера. Пусть символ $\mathfrak{H}^+(\mathfrak{b})$ обозначает множество функций, представляющих собой множество $\mathfrak{H}(\mathfrak{b})$ соответствующих вейвлетов Хаара, к которому добавлена характеристическая функция шара $\mathfrak{b}$:

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{b}) = \{\chi_m(\mathfrak{c}) \mid \mathfrak{c} \in \mathfrak{B}(\mathbb{Z}_p), \quad \mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{b}, \quad \chi_m \in \mathbb{Z}(p)^*, \quad m \neq 0\},$$

$$\mathfrak{H}^+(\mathfrak{b}) = \{\mathbf{1}(\mathfrak{b})\} \cup \mathfrak{H}(\mathfrak{b}).$$

Следствие 5.28. Все утверждения теоремы 5.26 сохраняют свою справедливость при замене кольца целых p-адических чисел на произвольный p-адический шар $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}(\mathbb{Q}_p)$ с соответствующей заменой пространства $\mathfrak{F}(\mathbb{Z}_p)$ на пространство $\mathfrak{F}(\mathfrak{b})$. При этом

(i) Если радиус шара $\mathfrak{b}$ равен $1/p^n$ то разложение (125) в терминах операторов усреднения, действующих в пространстве $\mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p)$, записывается следующим образом:

$$f = \mathfrak{av}_{-n}[f] + \sum_{k=-n}^{\infty} (\mathfrak{av}_{k+1} - \mathfrak{av}_k)[f].$$

Данное разложение сходится в метрике пространства $\mathfrak{F}(\mathfrak{b})$ при условии канонического порядка его суммирования;

(ii) Функции множества $\mathfrak{H}^+(\mathfrak{b})$ ортогональны в интегральной метрике и образуют базис пространства $\mathfrak{F}(\mathfrak{b})$;

(iii) Каждая функция $f \in \mathfrak{F}(\mathfrak{b})$ единственным образом представляется рядом

$$f = \sum_{\mathfrak{w} \in \mathfrak{H}^+(\mathfrak{b})} f_{\mathfrak{w}} \cdot \mathfrak{w},$$

который сходится в метрике пространства $\mathfrak{F}(\mathfrak{b})$ при условии канонического порядка суммирования данного ряда.

Формула (123) имеет достаточно общий характер и может быть адаптирована для любого из следующих множеств: (1) прямая сумма двух и более колец целых p-адических колец $\mathbb{Z}_{rs} = \mathbb{Z}_r \oplus \mathbb{Z}_s$, где r и s есть взаимно простые числа; (2) поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$; (3) прямая сумма двух и более p-адических полей $\mathbb{Q}_{rs} = \mathbb{Q}_r \oplus \mathbb{Q}_s$, где r и s есть взаимно простые числа. В процесса такой адаптации для многомерного случая множество шаров должно быть заменено на множество цилиндрических подмножеств одного порядка, представляющих собой произведение шаров одинакового порядка, то есть шаров, лежащих на одинаковых уровнях деревьев p-адических шаров соответствующих колец или полей. В следующих параграфах мы рассмотрим аналог формулы (123) для функциональных пространств, состоящих из функций, определенных на поле p-адических чисел.

5.4 Кратномасштабный анализ в $\mathscr{L}^{1,2}(\mathbb{Q}_p)$ и аксиоматический подход к дискретным вейвлетам

В математике существует два подхода к аксиоматизации. При первом подходе, который ведет свое происхождение из античной Греции и принят в пятнадцати книгах «Начал» Евклида, аксиомы используются как исходные утверждения, которые являются очевидными и не могут быть сведены к каким-либо другим более простым утверждениям. Например, «Все прямые углы равны между собой». Второй подход, сложившийся под влиянием работ по аксиоматизации математики, инициированных на рубеже XIX-XX веков Геттингенской математической школой во главе с Давидом Гильбертом, состоит в том, что аксиомы используются для определения некоторого круга абстрактных математических объектов, которые затем исследуются с привлечением всех имеющихся в математическом арсенале средств. В первом случае аксиоматика используется в силу невозможности свести данные объекты и соответствующие им утверждения к чему-либо более простому и очевидному, а во втором для абстрактной фиксации объекта исследования. При втором подходе всегда существует некоторый круг архетипических объектов, абстрагированием от свойств которых получаются данные аксиомы. Детальное изучение таких архетипических объектов оказывается крайне полезным в плане понимания смысла данных аксиом, так как в противном случае происхождение данных аксиомы остается не ясным или в лучшем случае обосновывается научным авторитетом сформулировавшего их автора. Далее мы рассмотрим это на примере понятия ***кратномасштабного анализа*** (MRA - Multiresolution analysis), для которого такими архетипическими объектами являются вейвлеты Хаара. Понятие кратномасштабного анализа было введено в работах ([47],[48], [50]) и в идейном плане является дискретной реализацией более общего метода ***scale space (масштабирования пространства)***, применяемого в машинном зрении и в обработке изображений. С историей развития метода масштабирования пространства можно познакомится в обзорной статье одного из авторов этого метода ([44]). p-Адический кратномасштабный анализ рассматривается в статье ([53]).

Определение кратномасштабного анализа

□ Кратномасштабным анализом в пространстве $\mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_p)$ называется индексированная целыми числами цепочка замкнутых подпространств $\mathscr{V}_k \subset \mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_p)$:

$$\cdots \subset \mathscr{V}_{-2} \subset \mathscr{V}_{-1} \subset \mathscr{V}_0 \subset \mathscr{V}_1 \subset \mathscr{V}_2 \subset \ldots,$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

(i) объединение $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathscr{V}_k$ плотно в $\mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_p)$;

(ii) $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathscr{V}_k = \{0\}$;

(iii) $f(x) \in \mathscr{V}_k \Leftrightarrow f(p^{-k}x) \in \mathscr{V}_0$;

(iv) существует функция $\mathfrak{I} \in \mathscr{V}_0$, множество сдвигов которой на все элементы $q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ образует ортонормированный базис в пространстве $\mathscr{V}_0$.

Аксиомы (i)-(iv) по сути дела утверждают, что множества функций, полученных из функции $\mathfrak{I}$ с помощью мультипликативных сдвигов на элементы p^k и аддитивных сдвигов на элементы $q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$, образуют ортогональные базисы соответствующих пространства $\mathscr{V}_i$. В параграфе 1.13 мы видели, что упомянутое выше множество сдвигов в точности соответствует множеству всех p-адических шаров, дерево которых показано на рисунке 1.15. При этом мультипликативные сдвиги на величину p^k соответствуют перемещениям по уровням дерева p-адических шаров, а аддитивные сдвиги на величину $q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ соответствуют перемещению по одному и тому же уровню этого дерева. Мы далее рассмотрим происхождение пространств $\mathscr{V}_i$ и покажем, каким образом четыре аксиомы MRA получаются абстрагированием от разложения Фурье-Хаара, а также обсудим смысл этого разложения и покажем, что аналогичная конструкция с некоторыми модификациями имеет смысл для пространства $\mathscr{L}^1$ абсолютно интегрируемых функций.

□ Далее мы будем обсуждать некоторые свойства функций, которые могут одинаковым образом относиться как к абсолютно интегрируемым, так и к квадратично интегрируемым функциям. В таких случаях для краткости мы будем писать эти два типа через знак '/' и использовать обозначение $\mathscr{L}^{1,2}$, подразумевая под этим обозначением оба этих пространства.

□ Будем называть функцию $f \in \mathscr{F}(\mathbb{Q}_p)$ симметрической ранга k, если она принимает постоянное значение на всех шарах радиуса $1/p^k$. Обозначим далее множество абсолютно/квадратично интегрируемых функций ранга k символом $\mathscr{S}_k^{1,2}$. Обозначим множество абсолютно/квадратично интегрируемых симметрических функций всех рангов символом $\mathscr{S}_\infty^{1,2}$. Пространство $\mathscr{S}_\infty^1$ является нормированным пространством относительно нормы $\| * \|_1$. Пространство $\mathscr{S}_\infty^2$ является евклидовым пространством относительно нормы $\| * \|_2$, индуцированной интегральным скалярным произведением. Каждое из пространств $\mathscr{S}_\infty^{1,2}$ является объединением цепочки своих замкнутых подпространств $\mathscr{S}_k^{1,2}$, где $k \in \mathbb{Z}$:

$$\cdots \subset \mathscr{S}_{-2}^i \subset \mathscr{S}_{-1}^i \subset \mathscr{S}_0^i \subset \mathscr{S}_1^i \subset \mathscr{S}_2^i \subset \ldots,$$

$$\mathscr{S}_\infty^i = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{S}_n^i.$$

Из рисунка 1.15 очевидно, что при фиксированном $k \in \mathbb{Z}$ множество шаров радиуса p^k счетно и может быть пронумеровано натуральными числами. Поэтому каждое из пространств $\mathscr{S}_k^{1,2}$ изометрично одному из пространств счетных последовательностей $l_{1,2}$. При этом $\mathscr{S}_k^1 \simeq l_1$, и $\mathscr{S}_k^2 \simeq l_2$. Пространство l_1 является банаховым, а пространство l_2 гильбертовым (см.[11], глава II). Норма, заданная на этих пространствах, отличается от нормы, определенной на пространствах $\mathscr{S}_k^{1,2}$, на множитель p^k, равный мере p-адического шара

с радиусом p^k. Пространства $\mathscr{S}^1_\infty$ и $\mathscr{S}^2_\infty$ не обладают свойством полноты, однако согласно предложению 1.32 они являются всюду плотными подмножествами в пространствах $\mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_p)$ и $\mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_p)$ соответственно.

Как и во всех наших предыдущих рассуждениях для объяснения происхождения понятия (или метода) MRA мы будем использовать введенные ранее операторы усреднения, действующие на пространствах $\mathscr{L}^{1,2}(\mathbb{Q}_p)$.

$$\mathfrak{av}_k[f](x) = \frac{1}{\mu((p^k))} \int\limits_{(p^k)} f(x+h)\,dh = p^k \int\limits_{(p^k)} f(x+h)\,dh, \quad \text{где} \quad (p^k) = \mathbb{Z}_p \cdot p^k.$$

Согласно леммам 5.11 и 5.13 каждый оператор $\mathfrak{av}_k$ отображает пространства абсолютно интегрируемых и квадратично интегрируемых функций в себя, являясь при этом непрерывным идемпотентным оператором с нормой, не превышающей единицы, осуществляющим ортогональное проектирование этих пространств на их подпространства, состоящие из симметрических функций.

$$\mathfrak{av}_k : \mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_p) \to \mathscr{S}^1_k \subset \mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_p),$$

$$\mathfrak{av}_k : \mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_p) \to \mathscr{S}^2_k \subset \mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_p).$$

Далее нас будут интересовать разложение Фурье-Хаара для следующих функциональных пространств:

(i) Пространство $\mathscr{C}_0(\mathbb{Q}_p)$ финитных функций;

(ii) Пространство $\mathscr{C}(\mathbb{Q}_p) \cap \mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_p)$ непрерывных и абсолютно интегрируемых функций;

(iii) Пространство $\mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_p)$ абсолютно интегрируемых функций;

(iv) Пространство $\mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_p)$ квадратично интегрируемых функций.

На пространстве $\mathscr{C}_0(\mathbb{Q}_p)$ может быть задана любая из норм $\| * \|_n$, где $n \in \{0, 1, 2\}$.

□ Мы будем обозначать совокупность этих подпространств символом $\mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p)$, подразумевая при этом, что $\mathfrak{F}$ есть функциональная переменная, которая может принимать любое значение из множества символов $\{\mathscr{C}_0, \mathscr{C}, \mathscr{C} \cap \mathscr{L}^1, \mathscr{L}^1, \mathscr{L}^2\}$. Символ $\mathfrak{F}(\mathfrak{b})$ будет обозначать функциональное пространство, полученное ограничением функций из пространства $\mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p)$ на измеримое подмножество $\mathfrak{b} \subseteq \mathbb{Q}_p$.

□ В каждом из указанных функциональных пространств можно выделить следующие подпространства:

(i) Подпространство $\mathscr{S}_n$ функций, принимающих постоянное значение на всех p-адических шарах радиуса $1/p^n$.

(ii) Подпространство $\mathscr{A}_n \subset \mathscr{S}_{n+1}$, состоящее из всех функций, среднее значение которых на каждом шаре радиуса $1/p^n$ равно нулю.

(iii) Подпространство $\widehat{\mathscr{A}_n}$, состоящее из всех функций, среднее значение которых на каждом шаре радиуса $1/p^n$ равно нулю.

Будем называть функции, принадлежащие пространствам $\mathscr{A}_n$ и $\widehat{\mathscr{A}_n}$, асимметрическими, а функции из пространств $\mathscr{S}_n$ будем называть симметрическими. Чтобы не усложнять обозначения, мы будем использовать для $\widehat{\mathscr{A}}, \mathscr{A}, \mathscr{S}$-подпространства каждого из перечисленных выше четырех функциональных пространств одни и те же обозначения, предполагая что выбор одного из этих пространств будет понятен из контекста.

Поскольку каждый оператор $\mathfrak{av}_k$ является идемпотентным, то имеет место следующее разложение каждого из четырех вышеперечисленных пространства $\mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p)$ в прямую сумму векторных подпространств, представляющих собой образ и ядро оператора усреднения $\mathfrak{av}_k$:

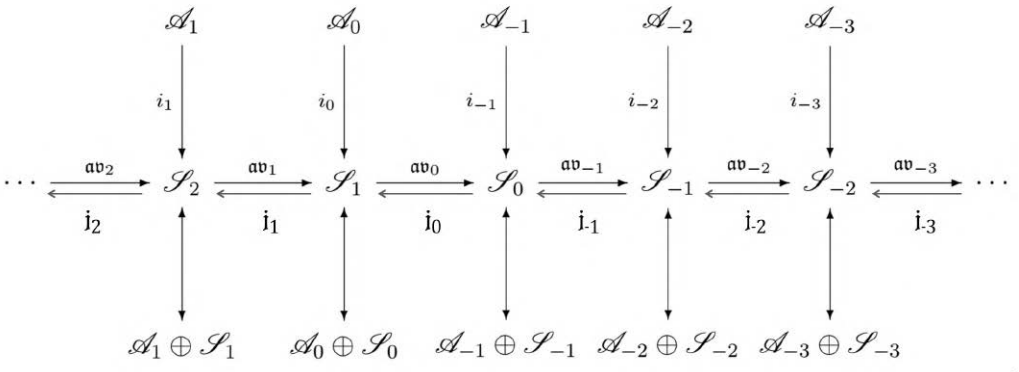
$$\begin{array}{ccccc} \widehat{\mathscr{A}_k} & \xrightarrow{i_k} & \mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p) & \xrightarrow{\mathfrak{av}_k} & \mathscr{S}_k \\ & & \updownarrow & & \\ & & \widehat{\mathscr{A}_k} \oplus \mathscr{S}_k & & \end{array} \tag{127}$$

Имеет место также следующее разложение пространства $\mathscr{S}_{k+1}$ в прямую сумму векторных подпространств, представляющих собой образ и ядро оператора $\mathfrak{av}_k|\mathscr{S}_{k+1}$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{A}_k & \xrightarrow{i_k} & \mathscr{S}_{k+1} & \xrightarrow{\mathfrak{av}_k} & \mathscr{S}_k \\ & & \updownarrow & & \\ & & \mathscr{A}_k \oplus \mathscr{S}_k & & \end{array} \tag{128}$$

Продолжая данное разложение рекурсивно в обе стороны, мы получим бесконечную в обе стороны цепочку разложений векторных пространств, приведенную ниже.

(129)

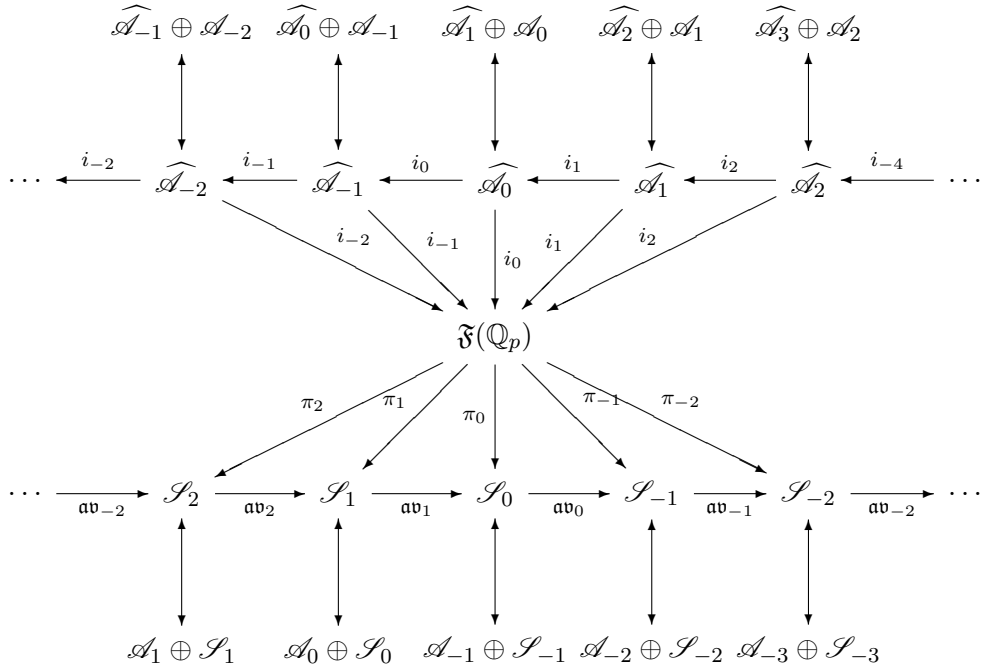


Так же как и в случае функций, определенных на компактном кольце $\mathbb{Z}_p$, данное разложение может быть интерпретировано двояким образом. Прочтение цепочки (129) слева направо дает нам символическое представление в p-адической арифметике процесса диффузии, а прочтение этой цепочки в обратном направлении является символическим отображением в p-адической арифметике процесса формообразования.

Если ограничить оператор усреднения $\mathfrak{av}_{k+1}$ на подпространства асимметрических функций ранга k, тогда мы получим следующее разложение:

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{\mathscr{A}_{k+1}} & \xrightarrow{i_{k+1}} & \widehat{\mathscr{A}_k} & \xrightarrow{\mathfrak{av}_{k+1}} & \mathscr{A}_k \\ & & \updownarrow & & \\ & & \widehat{\mathscr{A}_{k+1}} \oplus \mathscr{A}_k & & \end{array} \tag{130}$$

Это разложение дает нам следующую диаграмму, которая наиболее полным образом характеризует принцип построения разложения Фурье-Хаара:



(131)

Символ $\mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p)$ на данной диаграмме может обозначать любое из четырех перечисленных выше функциональных пространств. Используя диаграмму (131), мы получаем следующую последовательность разложений:

$$\mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p) = \widehat{\mathscr{A}_0} \oplus \mathscr{S}_0,$$

$$\mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p) = \widehat{\mathscr{A}_1} \oplus \mathscr{A}_0 \oplus \mathscr{A}_{-1} \oplus \mathscr{S}_{-1},$$

$$\mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p) = \widehat{\mathscr{A}_2} \oplus \mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{A}_0 \oplus \mathscr{A}_{-1} \oplus \mathscr{A}_{-2} \oplus \mathscr{S}_{-2},$$

$$\dots$$

Продолжая это разложение дальше и раскрывая его как справа, так и слева, мы видим, что цепочки (129) и (131) позволяют для любого $n \in \mathbb{N}$ написать разложение функционального пространства $\mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p)$ в прямую сумму подпространств асимметрических функций:

$$\mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p) = \widehat{\mathscr{A}_{n+1}} \oplus \sum_{k=-\infty}^{n} \mathscr{A}_k = \Big(\sum_{k=-n}^{\infty} \mathscr{A}_k \Big) \oplus \mathscr{S}_{-n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathscr{A}_k.$$

В случае пространства финитных функций данное разложение очевидно является сходящимся. Его сходимость для остальных трех перечисленных выше функциональных пространств мы рассмотрим далее. Диаграмма (131) позволяет для любого из четырех перечисленных выше функциональных пространств, а также для любых $n, m \in \mathbb{N}$, построить следующее конечное разложение:

$$\mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p) = \widehat{\mathscr{A}_m} \oplus \Big(\sum_{k=-n}^{m-1} \mathscr{A}_k \Big) \oplus \mathscr{S}_{-n}. \tag{132}$$

При этом для каждой функции $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p)$, интерпретируемой как плотность некоторой субстанции, ее проекция на подпространство $\mathscr{S}_{-n}$ дает нам результат диффузии этой субстанции на «бесконечно большие» шары, а проекция на подпространство $\widehat{\mathscr{A}_m}$ представляет собой разницу между функцией f и ее усреднением по шарам «бесконечно малого радиуса». При $n, m \to \infty$ данное разложение приобретает следующий вид:

$$\mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathscr{A}_k. \tag{133}$$

Покажем, что проектирование пространства $\mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p)$ на подпространство $\mathscr{A}_k$ задается оператором $\pi_k = \mathfrak{av}_{k+1} - \mathfrak{av}_k$. Включение шаров $(p^{k+1}) \subset (p^k)$ влечет за собой операторное равенство:

$$\mathfrak{av}_{k+1} \circ \mathfrak{av}_k = \mathfrak{av}_k \circ \mathfrak{av}_{k+1} = \mathfrak{av}_k,$$

поскольку последовательное выполнение двух таких операций усреднения в результате дает усреднение по шарам большего радиуса. Отсюда следуют следующие равенства, выполняющиеся для любой функции $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p)$:

$$\mathfrak{av}_k \circ (\mathfrak{av}_{k+1} - \mathfrak{av}_k)[f] = (\mathfrak{av}_{k+1} \circ \mathfrak{av}_k - \mathfrak{av}_k \circ \mathfrak{av}_k)[f] = (\mathfrak{av}_k - \mathfrak{av}_k)[f] = 0,$$

$$\mathfrak{av}_{k+1} \circ (\mathfrak{av}_{k+1} - \mathfrak{av}_k)[f] = (\mathfrak{av}_{k+1} \circ \mathfrak{av}_{k+1} - \mathfrak{av}_{k+1} \circ \mathfrak{av}_k)[f] = (\mathfrak{av}_{k+1} - \mathfrak{av}_k)[f],$$

которые показывают, что функция $(\mathfrak{av}_{k+1} - \mathfrak{av}_k)[f]$ принадлежит пространству $\mathscr{A}_k$. Таким образом, для любой функции $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p)$ мы получаем следующее разложение

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \pi_k[f] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k,$$

вопрос о сходимости которого мы рассмотрим в следующем параграфе.

Диаграмма (131) вместе с диаграммой дерева p-адических шаров показывают происхождение аксиом MRA в p-адическом случае. Роль пространства $\mathscr{V}_i$ выполняют пространства $\mathscr{S}_k$ симметрических функций, а структура сдвигов, о которых идет речь в аксиомах (iv)-(v) в точности соответствует дереву p-адических шаров, которое показано нижу на рисунке 5.10 для случая, когда $p = 2$. При этом мультипликативные сдвиги на степени p соответствуют сдвигам между уровнями дерева шаров, а аддитивные сдвиги на элементы $q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ соответствуют сдвигам внутри одного уровня дерева. Роль функции $\mathfrak{I}$ играет характеристическая функция единичного шара с центром в нуле (то есть множества $\mathbb{Z}_p$), а все мультипликативные и аддитивные сдвиги этой функции дают множество характеристических функций всех p-адических шаров. При этом характеристические функции всех шаров радиуса p^k составляют ортогональный базис пространства $\mathscr{S}_k$.

Как мы видели выше, кратномасштабный анализ определяется в евклидовом пространстве $\mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_p)$ квадратично интегрируемых функций. Выбор евклидова пространства не случаен. Евклидовость некоторого функционального пространства с выполняющимся в нем равенством Парсеваля (аналог теоремы Пифагора) превращает все разложения по ортогональным базисам такого пространства в абсолютно сходящиеся. Как известно, абсолютно сходящиеся ряды обладают переместительным свойством ([17], том 2, глава 11), что избавляет нас от необходимости заботиться о порядке суммирования таких рядов. Это является особенно важным при суммировании рядов, индексированных счетным набором мультииндексов, что, в частности, имеет место для вейвлетов Хаара, которые индексируются множеством p-адических шаров, образующих структуру в форме бесконечного p-адического дерева, которое можно обходить в различном порядке. В простейшем случае этот процесс выглядит как процесс распространения по ветвям такого дерева некоторой «волны», которая может распространяться по различным ветвям дерева с различной скоростью. Если вещественный числовой ряд сходится неаболютно, то, как утверждает известная теорема Римана, «какое бы ни взять наперед число $\mathfrak{c}$ (конечное или равное $\pm\infty$), можно так переставить члены в этом ряде, чтобы преобразованный ряд имел своей суммой именно $\mathfrak{c}$.»([17],том 2, глава 11). Поэтому результат суммирования как числового, так и функционального неабсолютно сходящего ряда зависит от порядка суммирование его членов. В случае поля $\mathbb{Q}_p$ рассмотрение кратномасштабного анализа в пространстве $\mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_p)$ содержит в себе некоторое смысловое противоречие, которое состоит в том, что по смыслу данный процесс связан с p-адической диффузией и с соответствующим ему функционалом интегрирования, который, однако, не является непрерывным в квадратичной метрике. Мы детально рассмотрим этот вопрос в следующем параграфе.

5.5 Разложение по асимметрическим функциям в $\mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p)$

В этом параграфе мы распространим метод разложения по вейвлетам Хаара с компактного пространства $\mathbb{Z}_p$ на некомпактное пространство $\mathbb{Q}_p$. Как мы видели выше, разложение по вейвлетам Хаара по своему смыслу непосредственно связано с процессом p-адической диффузии, при котором функция f интерпретируется как плотность диффундирующей субстанции. Естественной математической средой для моделирования такого процесса является пространство непрерывных и абсолютно интегрируемых вещественных функций, определенных на множестве $\mathbb{Q}_p$, с заданными на этом пространстве нормами $\| * \|_0$ или $\| * \|_1$. Проблема, однако, состоит в том, что данное пространство не является евклидовым, так как для него не имеет смысла норма $\| * \|_2$, представляющая собой по своему смыслу энергию, а не массу. Кроме того множество вейвлетов Хаара не является полной системой функций в пространстве $\mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_p)$, что делает процесс бесконечного разложения Хаара в этом пространстве мало осмысленным. Как показал С.В.Козырев ([10]), множество вейвлетов Хаара является ортогональным базисом в пространстве $\mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_p)$. Однако в этом пространстве не имеет смысла говорить о диффузии, так как в квадратичной метрике даже функционал интегрирования не является непрерывным. В этом параграфе мы покажем, что переход от компактного кольца $\mathbb{Z}_p$ к локально компактному полю $\mathbb{Q}_p$ в части вейвлетов Хаара не привносит ничего принципиально нового. Разложение Фурье-Хаара для поля $\mathbb{Q}_p$ по сути дела сводится к этому разложению на кольце $\mathbb{Z}_p$ и отличается от последнего только на бесконечно малую поправку. При этом роль кольца $\mathbb{Z}_p$ играет p-адический шар $\mathfrak{b}$ достаточно большого радиуса, в котором сосредоточена почти вся энергия или масса,

которая соответствует функции f при ее содержательной интерпретации, а разложение по вейвлетам Хаара семантически кодифицирует процесс диффузии, распространяющийся в этой области. Перед тем как перейти к доказательству этого утверждения, докажем одну простую лемму, которая формулирует интуитивно очевидный факт, состоящий в том, что операция усреднения интегрируемой функции по p-адическим шарам малого радиуса коммутирует с операцией взятия ограничения этой функции на p-адический шар большего радиуса.

Лемма 5.29 Пусть $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p)$ и $\mathfrak{b}$ есть p-адический шар радиуса $1/p^k$, тогда для любого $m \geqslant k$ имеет место соотношение:

$$\mathfrak{av}_m[f]|\mathfrak{b} = \mathfrak{av}_m[f|\mathfrak{b}].$$

Доказательство. Данное утверждение проверяется непосредственным интегрированием по шару (p^m) такому, что $(p^m) \subseteq (p^k)$. $\boxtimes$

Теорема 5.30a Пусть $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_p)$ есть абсолютно интегрируемая функция и

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p} |f|\, d\mu = \mathfrak{c}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует p-адический шар $\mathfrak{b}$ радиуса $p^k > 1$ с центром в нуле такой, что

$$|\int\limits_{\mathfrak{b}} |f|\, d\mu - \mathfrak{c}\,| \leqslant \varepsilon,$$

и функция f раскладывается в ряд по асимметрическим функциям

$$f = \sum_{n=-k}^{\infty} f_n + \mathfrak{av}_{-k}[f], \quad f_n \in \mathscr{A}_n, \quad \mathfrak{av}_{-k}[f] \in \mathscr{S}_{-k},$$

который на шаре $\mathfrak{b}$ сходится в среднем к функции $f|\mathfrak{b}$.

Доказательство. Существование p-адического шара $\mathfrak{b}$ с центром в нуле, интегрирование по которому с точностью до ε дает значение $\mathfrak{c}$ вытекает из определения интеграла. Пусть радиус такого шара равен p^k. Без ограничения общности можно предполагать, что $k > 0$.

$$f = f|\mathfrak{b} + f|\overline{\mathfrak{b}},$$

Поскольку $\pi_n = \mathfrak{av}_{n+1} - \mathfrak{av}_n$, то в соответствии с леммой 5.29 для любого $n \geqslant -k$ справедливо соотношение

$$\pi_n[f]|\mathfrak{b} = \pi_n[f|\mathfrak{b}].$$

Используя следствие 5.28 применительно к p-адическому шару $\mathfrak{b}$ и к функциональному пространству $\mathscr{L}^1(\mathfrak{b})$, мы получаем для каждой функции $f|\mathfrak{b} \in \mathscr{L}^1(\mathfrak{b})$ следующие сходящееся в среднем разложение

$$f|\mathfrak{b} = \mathfrak{av}_{-k}[f|\mathfrak{b}] + \sum_{n=-k}^{\infty} \pi_n[f|\mathfrak{b}] = (\mathfrak{av}_{-k}[f] + \sum_{n=-k}^{\infty} \pi_n[f])|\mathfrak{b}. \tag{134}$$

Отсюда следует, что

$$f = (\mathfrak{av}_{-k}[f] + \sum_{n=-k}^{\infty} \pi_n[f])|\mathfrak{b} + f|\overline{\mathfrak{b}}, \qquad \|f|\overline{\mathfrak{b}}\| < \varepsilon$$

что и требовалось доказать. $\boxtimes$

С учетом замены функциональных пространств доказательство двух других теорем 5.30b и 5.30c практически дословно повторяют доказательство теоремы 5.30a.

Теорема 5.30b Пусть $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_p) \cap \mathscr{C}(\mathbb{Q}_p)$ есть абсолютно интегрируемая непрерывная функция и

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p} |f|\, d\mu = \mathfrak{c}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует p-адический шар $\mathfrak{b}$ радиуса $p^k > 1$ с центром в нуле такой, что

$$|\int\limits_{\mathfrak{b}} |f|\, d\mu - \mathfrak{c}\,| \leqslant \varepsilon,$$

и функция f раскладывается в ряд по асимметрическим функциям

$$f = \sum_{n=-k}^{\infty} f_n + \mathfrak{av}_{-k}[f], \quad f_n \in \mathscr{A}_n, \quad \mathfrak{av}_{-k}[f] \in \mathscr{S}_{-k},$$

который на шаре $\mathfrak{b}$ равномерно сходится к функции $f|\mathfrak{b}$.

Теорема 5.30c Пусть $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_p)$ есть квадратично интегрируемая функция и

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p} f^2\, d\mu = \mathfrak{c}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует p-адический шар $\mathfrak{b}$ радиуса $p^k > 1$ с центром в нуле такой, что

$$|\int\limits_{\mathfrak{b}} f^2\, d\mu - \mathfrak{c}\,| \leqslant \varepsilon,$$

и функция f раскладывается в ортогональный ряд по асимметрическим функциям

$$f = \sum_{n=-k}^{\infty} f_n + \mathfrak{av}_{-k}[f], \quad f_n \in \mathscr{A}_n, \quad \mathfrak{av}_{-k}[f] \in \mathscr{S}_{-k},$$

который на шаре $\mathfrak{b}$ сходится в среднем квадратичном к функции $f|\mathfrak{b}$.

Поскольку каждое из пространств $\mathscr{A}_n$ имеет своим базисом множеством вейвлетов $\mathfrak{w}(\mathfrak{c}, k)$, где $\mathfrak{c}$ есть шар радиуса $1/p^n$, а $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, то каждое из разложений по асимметрическим функциям, которые фигурируют в приведенных выше трех теоремах, могут быть продолжены далее до разложений по отдельным вейвлетам.

$$f|\mathfrak{b} = \sum_{\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{b}} \sum_{k=1}^{p-1} f_{\mathfrak{c},k} \cdot \mathfrak{w}(\mathfrak{c}, k) + \mathfrak{av}_{-k}[f]|\mathfrak{b}.$$

В случае $\mathfrak{F} \neq \mathscr{L}^2$ канонический порядок суммирования этого ряда определяется последовательностью уровней корневого p-ичного дерева, образованного шарами, лежащими внутри шара $\mathfrak{b}$.

Разложение по вейвлетам Хаара характеристической функции единичного шара

Как мы видели в предыдущем разделе, каждая абсолютно/квадратично интегрируемая функция, определенная на поле $\mathbb{Q}_p$, с точностью до бесконечно малой поправки разлагается в ряд по базису, состоящему из вейвлетов Хаара и характеристической функции p-адического шара, в котором сосредоточена большая часть энергии/массы, соответствующей данной функции при ее содержательной интерпретации. В случае квадратично интегрируемых функций это разложение можно продолжить дальше. Центральным моментом данного продолжения является разложения по вейвлетам Хаара характеристической функции единичного шара с «центром в нуле», который совпадает с множеством целых p-адических чисел. Перед тем как рассмотреть это разложение, вернемся еще раз к кодировке вершин дерева шаров поля $\mathbb{Q}_p$, рассматривая ее на примере поля $\mathbb{Q}_2$. Как было показано в параграфе 1.13, элементы поля $\mathbb{Q}_p$ можно интерпретировать как пути проходящие по дереву шаров и идущие из бесконечности в бесконечность. При этом множество шаров можно закодировать элементами декартова произведения $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}_{01}(p^\infty) \sim \mathbb{Q}_{[p]}$.

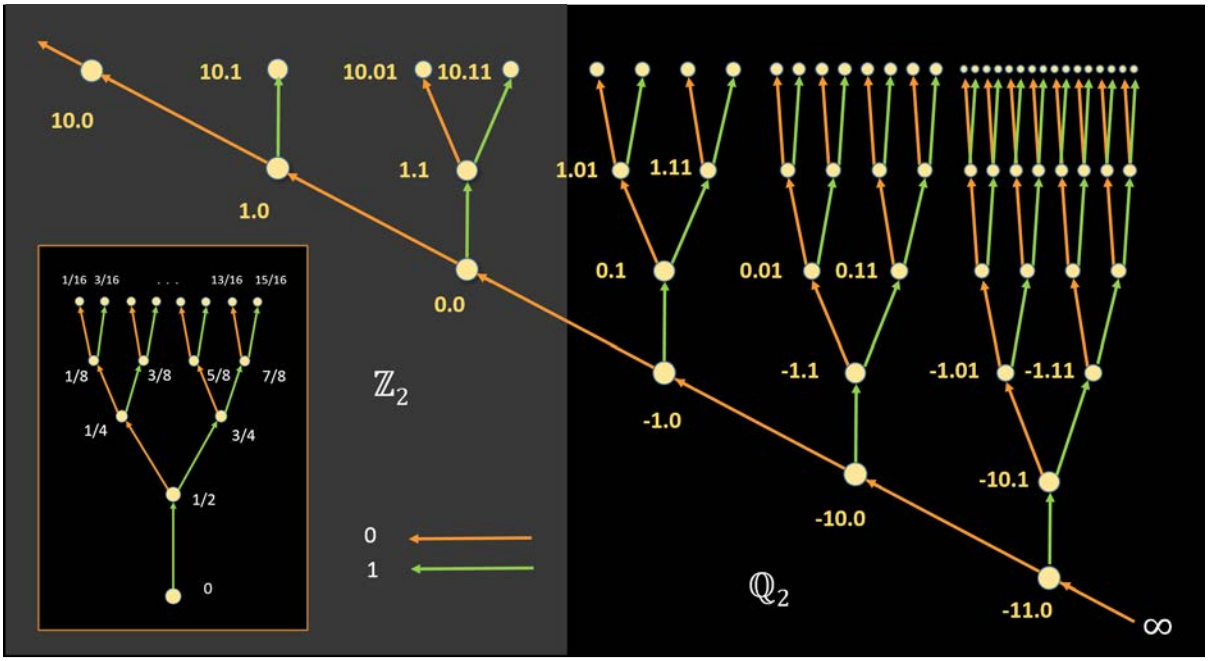


Рисунок 5.9 Двоичная кодировка 2-адических шаров поля 2-адических чисел.

Если шару $\mathfrak{b}$ соответствует пара $\langle n, q\rangle = n.q$, то целому числу $n \in \mathbb{Z}$ соответствует уровень дерева (или радиус соответствующего шара), на котором располагается данный шар, а p-ичной дроби $q \in \mathbb{Q}_{01}(p^\infty)$ соответствует конечный p-ичный путь, соединяющий данный шар с вершиной дерева, лежащей на наклонной прямой, как это показано на рисунке 5.9 для случая поля $\mathbb{Q}_2$. Этот путь по своему смыслу представляет собой маску, определяющую принадлежность p-адических чисел к данному шару. Мы нумеруем уровни дерева

снизу вверх, поэтому целочисленный индекс маленьких шаров является положительным, а целочисленный индекс больших шаров является отрицательным. Если шар $\mathfrak{b}$ содержит ноль (такие шары на рисунке 5.9 лежат на наклонной линии), то он имеет код $n.0$, а переход от этого шара к двум его дочерним шарам выглядит следующим образом:

$$n.0 \to (n+1).0 \quad \& \quad (n+1).1.$$

Для шара $\mathfrak{b} = n.q$, который не содержит нуля, подобный переход выглядит следующим образом

$$n.q \to (n+1).0q \quad \& \quad (n+1).1q.$$

Путь символ $\mathfrak{J}(n.q)$ далее обозначает характеристическую функцию шара $n.q$. Рассмотрим указанное выше разложение для 2-адического случая. Пусть 2-адический шар $\mathfrak{b}$ является объединением двух дочерних шаров вдвое меньшего радиуса: $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_0 \cup \mathfrak{b}_1$, тогда соответствующий ему вейвлет Хаара записывается следующим образом:

$$\mathfrak{w}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{I}(\mathfrak{b}_0) - \mathfrak{I}(\mathfrak{b}_1).$$

Попробуем построить разложение по вейвлетам Хаара для функции $\mathfrak{I}(0.0) = \mathfrak{I}(\mathbb{Z}_2)$. В принятых нами обозначениях первые три шага разложения характеристической функции единичного шара с «центром в нуле» будут выглядеть следующим образом:

$$\mathfrak{I}(0.0) = \frac{1}{2}\mathfrak{I}(0.0) - \frac{1}{2}\mathfrak{I}(-1.1) + \frac{1}{2}\mathfrak{I}(-1.0),$$
$$\frac{1}{2}\mathfrak{I}(-1.0) = \frac{1}{4}\mathfrak{I}(-1.0) - \frac{1}{4}\mathfrak{I}(-10.1) + \frac{1}{4}\mathfrak{I}(-10.0),$$
$$\frac{1}{4}\mathfrak{I}(-10.0) = \frac{1}{8}\mathfrak{I}(-10.0) - \frac{1}{8}\mathfrak{I}(-11.1) + \frac{1}{8}\mathfrak{I}(-11.0).$$

Данное разложение схематически показано на рисунке 5.10, где 2-адическим шарам соответствуют полуоткрытые интервалы вещественной полупрямой, которые образуют двоичное дерево, изоморфное дереву 2-адических шаров.

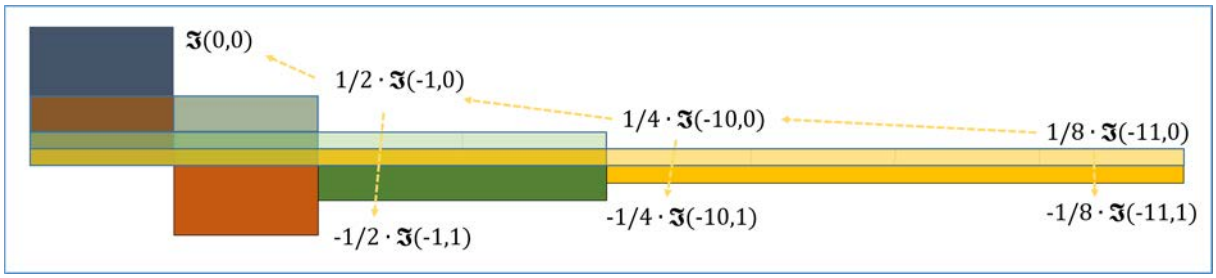


Рисунок 5.10 Разложение функции $\mathfrak{I}(0,0)$ по вейвлетам Хаара.

В общем случае мы получаем следующее соотношение:

$$\frac{1}{2^n}\mathfrak{I}(n.0) = \frac{1}{2^{n+1}}\mathfrak{I}(n.0) - \frac{1}{2^{n+1}}\mathfrak{I}(n-1.1) + \frac{1}{2^{n+1}}\mathfrak{I}(n-1.0).$$

Схема этого разложения почти идентична для 2-адических шаров и для интервалов вещественной прямой и может быть проиллюстрирована диаграммой на рисунке 5.10. Это дает нам следующее разложение

$$\mathfrak{I}(0.0) = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^{k+1}}[\mathfrak{I}(k.0) - \mathfrak{I}(k-1.1)] + \frac{1}{2^{k+1}}\mathfrak{I}(k-1.0) =$$

$$= \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \mathfrak{w}(k-1.0) + \frac{1}{2^{k+1}} \mathfrak{I}(k-1.0). \tag{135}$$

Оценим остаточный член этого разложения в равномерной, интегральной и в квадратичной метрике:

$$\begin{aligned}
\|\frac{1}{2^{k+1}} \mathfrak{I}(k-1,0)\|_0 &= \sup\{\frac{1}{2^{k+1}} \mathfrak{I}(k-1,0)\} = \frac{1}{2^{k+1}}. \\
\|\frac{1}{2^{k+1}} \mathfrak{I}(k-1,0)\|_1 &= \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \frac{1}{2^{k+1}} \mathfrak{I}(k-1,0)\, d\mu = \frac{1}{2^{k+1}} \cdot 2^{k-1} = \frac{1}{4}. \\
\|\frac{1}{2^{k+1}} \mathfrak{I}(k+1,0)\|_2 &= \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \frac{1}{2^{2k+2}} \mathfrak{I}(k-1,0)\, d\mu = \frac{1}{2^{2k+2}} \cdot 2^{k-1} = \frac{1}{2^{k+3}}.
\end{aligned}$$

Из этих соотношений следует, что:

(i) при $k \to \infty$ разложение (135) сходится на множестве $\mathbb{Q}_2$ по квадратичной норме и расходится по интегральной, из чего также следует, что интегральная норма не непрерывна относительно квадратичной;

(ii) разложение (135) равномерно сходится на любом компактом подмножестве $K \subset \mathbb{Q}_2$, из чего следует, что оно также сходится на этом подмножестве как в среднем, так и в средне квадратичном.

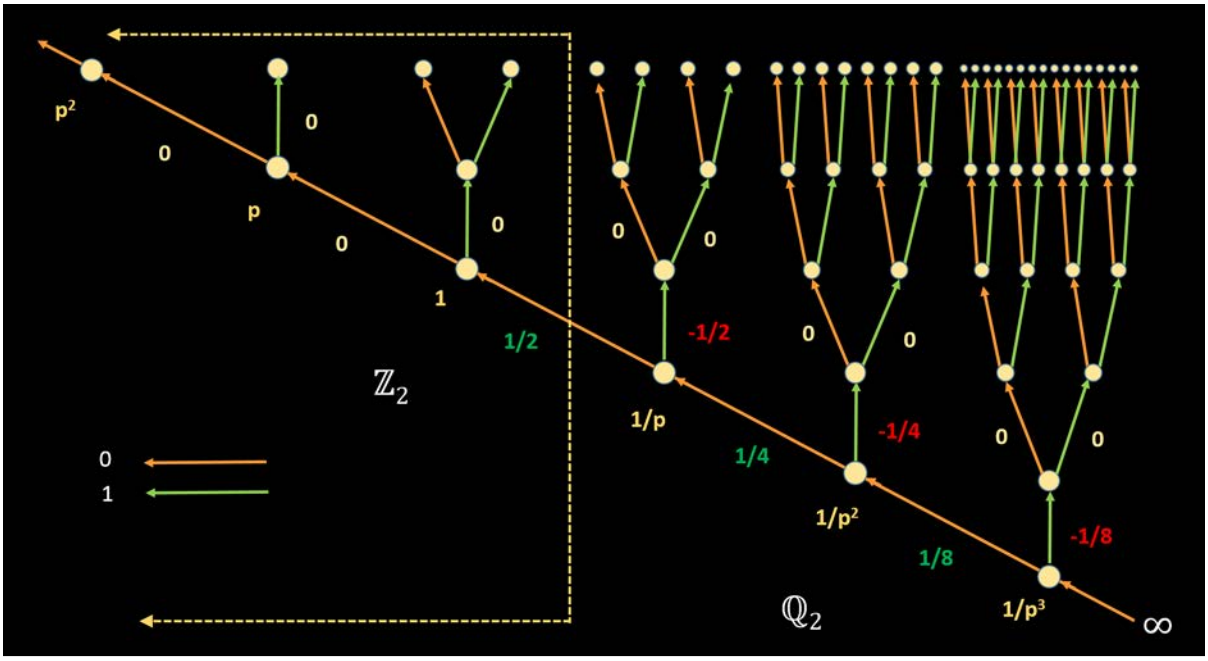


Рисунок 5.11 Разложение функции функции $\mathfrak{I}(0,0)$ по вейвлетам Хаара в поле $\mathbb{Q}_2$.

Каждому вейвлету Хаара $\mathfrak{w}(\mathfrak{b})$ соответствуют два ребра дерева 2-адических шаров, исходящие из вершины $\mathfrak{b}$ и направленные к двум ее дочерним вершинам/шарам. Поэтому все коэффициенты в разложении Хаара можно отобразить на ребра дерева 2-адических шаров. Соответствующее разложению (135) распределение коэффициентов Хаара по дереву 2-адических шаров поля $\mathbb{Q}_2$ показано на рисунке 5.11.

Рассмотрим, как действуют аддитивные и мультипликативные сдвиги на характеристические функции и на вейвлеты Хаара .

$$I_k : \mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p) \to \mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p), \qquad I_k[f](x) = f(p^k x), \quad k \in \mathbb{Z} \tag{136}$$

$$D_v : \mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p) \to \mathfrak{F}(\mathbb{Q}_p), \qquad D_v[f](x) = f(x+v), \quad v \in \mathbb{Q}_p. \tag{137}$$

Нетрудно проверить справедливость следующих соотношений

$$I_k[\mathfrak{I}(\mathfrak{b})] = \mathfrak{I}(p^{-k}\mathfrak{b}), \qquad I_k[\chi_m(\mathfrak{b})](x) = \chi_m(\mathfrak{b})(p^k x) = \chi_m(p^{-k}\mathfrak{b})(x).$$

$$D_v[\mathfrak{I}(\mathfrak{b})] = \mathfrak{I}(\mathfrak{b} - v), \qquad D_v[\chi_m(\mathfrak{b})](x) = \chi_m(\mathfrak{b})(x+v) = \chi_m(\mathfrak{b} - v)(x).$$

В данных формулах используются очевидные соотношения $x + v \in \mathfrak{b} \leftrightarrow x \in \mathfrak{b} - v$ и $p^k x \in \mathfrak{b} \leftrightarrow x \in p^{-k}\mathfrak{b}$, а также тот факт, что аддитивные и мультипликативные сдвиги p-адических шаров также являются p-адическими шарами.

Теорема 5.31 [10] Множество вейвлетов Хаара $\mathfrak{H}(\mathbb{Q}_p)$ является ортогональным базисом в гильбертовом пространстве $\mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_p)$.

Доказательство. Как было нами ранее показано, множество вейвлетов Хаара $\mathfrak{H}(\mathbb{Q}_p)$ является ортогональной системой функций. Гильбертово пространство $H \subseteq \mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_p)$, порождаемое множеством ортогональных функций $\mathfrak{H}(\mathbb{Q}_p)$ является замкнутым. Как было показано в начале данного параграфа $\mathfrak{I}(\mathbb{Z}_p) \in H$, то есть подпространство H содержит характеристическую функцию единичного шара с центром в нуле. Из формул (136) и (137) следует, что характеристические функции всех p-адических шаров могут быть получены из характеристической функции $\mathfrak{I}(\mathbb{Z}_p)$ с помощью аддитивных и мультипликативных сдвигов D_v и I_k. Из формул (136) и (137) следует также то, что пространство H инвариантно относительно этих сдвигов, так как они переводят элементы множества $\mathfrak{H}(\mathbb{Q}_p)$ друг в друга, сохраняя при этом линейные соотношения между функциями. Отсюда следует, что пространство H содержит характеристические функции всех p-адических шаров и, следовательно, совпадает со всем пространством $\mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_p)$, так как множество финитных функций, представляющих собой конечные линейные комбинации характеристических функций p-адических шаров, является всюду плотным в пространстве $\mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_p)$. ⊠

В заключение этого параграфа мы рассмотрим критерий разложения по вейвлетам Хаара для произвольной непрерывной функции.

Разложение Хаара для непрерывных функций

Определение среднего в смысле Чезаро. Пусть f есть непрерывная комплекснозначная функция, определенная на поле $\mathbb{Q}_p$ и

$$\mathfrak{av}[f](n,q) = \frac{1}{\mu(\mathfrak{b}(n,q))} \int\limits_{\mathfrak{b}(n,q)} f \, d\mu.$$

есть оператор усреднения этой функции по p-адическому шару $\mathfrak{b}(n,q)$. Число $\mathfrak{c} \in \mathbb{C}$ называется средним функции f в смысле Чезаро если

$$\lim_{n \to -\infty} \mathfrak{av}[f](n,0) = \mathfrak{c}.$$

Далее нас будут интересовать непрерывные комплекснозначные функции с нулевым чезаровским средним. Если среднее в смысле Чезаро функции f равно $\mathfrak{c}$, то функция $f-\mathfrak{c}$, очевидно, является функцией с нулевым чезаровским средним. К числу функций с нулевым чезаровским средним относятся все интегрируемые функции.

□ Пусть $\mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}(\mathfrak{b}(-n,0))$, $n \in \mathbb{Z}$

Теорема 5.32 Любая непрерывная комплекснозначная функция f с нулевым чезаровским средним, определенная на поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, однозначным образом разлагается в функциональный ряд по множеству $\mathfrak{H}(\mathbb{Q}_p)$ вейвлетов Хаара:

$$f = \sum_{\mathfrak{w}\in\mathfrak{H}(\mathbb{Q}_p)} f_{\mathfrak{w}} \cdot \mathfrak{w} = \lim_{n\to-\infty} \sum_{\mathfrak{w}\in\mathfrak{H}_n} f_{\mathfrak{w}} \cdot \mathfrak{w}.$$

Данный ряд равномерно сходится к функции f на любом компактном подмножестве $K \subset \mathbb{Q}_p$ при указанном порядке его суммирования.

Доказательство. Рассмотрим следующую цепочку p-адических шаров, объединение которых составляет все множество $\mathbb{Q}_p$:

$$\mathbb{Z}_p = \mathfrak{b}(0,0) \subset \mathfrak{b}(-1,0) \subset \mathfrak{b}(-2,0) \subset \cdots \subset \mathfrak{b}(-n,0) \subset \ldots.$$

Каждый из этих шаров является компактным топологическим пространством и функциональное пространство определенных на нем непрерывных функций изометрично пространству $\mathscr{C}(\mathbb{Z}_p)$. Согласно следствию 5.28 для каждой функции $f|\mathfrak{b}(n,0)$ имеет место разложение:

$$f|\mathfrak{b}(n,0) = \sum_{\mathfrak{w}\in\mathfrak{H}_n} f_{\mathfrak{w}} \cdot w + \mathfrak{av}[f](n,0) \cdot \mathfrak{I}(n,0), \tag{138}$$

из которого следует, что

$$\|f|\mathfrak{b}(n,0) - \sum_{\mathfrak{w}\in\mathfrak{H}_n} f_{\mathfrak{w}} \cdot w\|_0 = \mathfrak{av}[f](n,0). \tag{139}$$

Поскольку коэффициенты $f_{\mathfrak{w}}$ получаются посредством интегрирования

$$f_{\mathfrak{w}} = \frac{1}{p^k} \int\limits_{\mathbb{Q}_p} f \cdot \mathfrak{w}\, d\mu, \quad \mathfrak{w} \in \mathfrak{H}_k,$$

то коэффициенты $f_{\mathfrak{w}}$, соответствующие одному и тому же вейвлету $\mathfrak{w}$ в разложениях по различным шарам $\mathfrak{b}(n,0)$ совпадают. Поскольку $\mathfrak{av}[f](n,0) \to 0$ при $n \to -\infty$, то из формулы (139) следует, что при $n \to -\infty$ суммы $\sum f_{\mathfrak{w}} \cdot \mathfrak{w}, \mathfrak{w} \in \mathfrak{H}_n$ равномерно сходятся к функции f на каждом шаре вида $\mathfrak{b}(m,0)$, а следовательно и на любом компактном множестве K, поскольку оно целиком лежит в одном из таких шаров. ⊠

□ Пусть $\mathfrak{sp}_k = \mathfrak{b}(k,0) - \mathfrak{b}(k+1,0)$. Множество $\mathfrak{sp}_k$ является p-адической сферой радиуса p^k.

Заметим, что в этих обозначениях указанную в теореме 5.23 сумму можно переписать следующим образом

$$f|\mathfrak{b}(n,0) = \sum_{\mathfrak{w}\in\mathfrak{H}_n} f_{\mathfrak{w}} \cdot \mathfrak{w} = \sum_{\mathfrak{w}\in\mathfrak{H}_0} f_{\mathfrak{w}} \cdot \mathfrak{w} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\mathfrak{w}\in\mathfrak{H}(\mathfrak{sp}_{-k})} f_{\mathfrak{w}} \cdot \mathfrak{w}$$

При $n \to \infty$ данное разложение принимает вид

$$f = \sum_{\mathfrak{w} \in \mathfrak{H}_n} f_{\mathfrak{w}} \cdot \mathfrak{w} = \sum_{\mathfrak{w} \in \mathfrak{H}_0} f_{\mathfrak{w}} \cdot \mathfrak{w} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{w} \in \mathfrak{H}(\mathfrak{sp}_{-k})} f_{\mathfrak{w}} \cdot \mathfrak{w}.$$

Из этой формулы следует, что указанное в теореме 5.23 разложение представляет собой суммирование вейвлетов Хаара по системе концентрических сфер, в центре которой находится единичный шар, представляющий собой множество целых p-адических чисел.

VI. Дихотомическое деление и морфогенетические поля

6.1 Формальная модель дихотомического деления

Хорошо разработанное в математике понятие дуальности в случае процессов диадического деления выступает в форме дуализма между процессом и его результатом/состоянием. Рассмотрим абстрактный дихотомический процесс, который происходит в дискретном времени и начинается с некоторого исходного объекта, который обладает определенным набором атрибутов и потенциально может до бесконечности делится пополам, порождая при этом аналогичные себе объекты, обладающие аналогичными атрибутами. Очевидно, что события деления образуют двоичное дерево. Существует несколько тесно связанных между собой математических структур, которые хорошо подходят для математического описания такого процесса. Основным атрибутом события является момент времени, в который это событие произошло. К числу атрибутов события может также относиться направление, вдоль которого происходит деление объекта, а также факт изменения типа объекта или его некоторое преобразование.

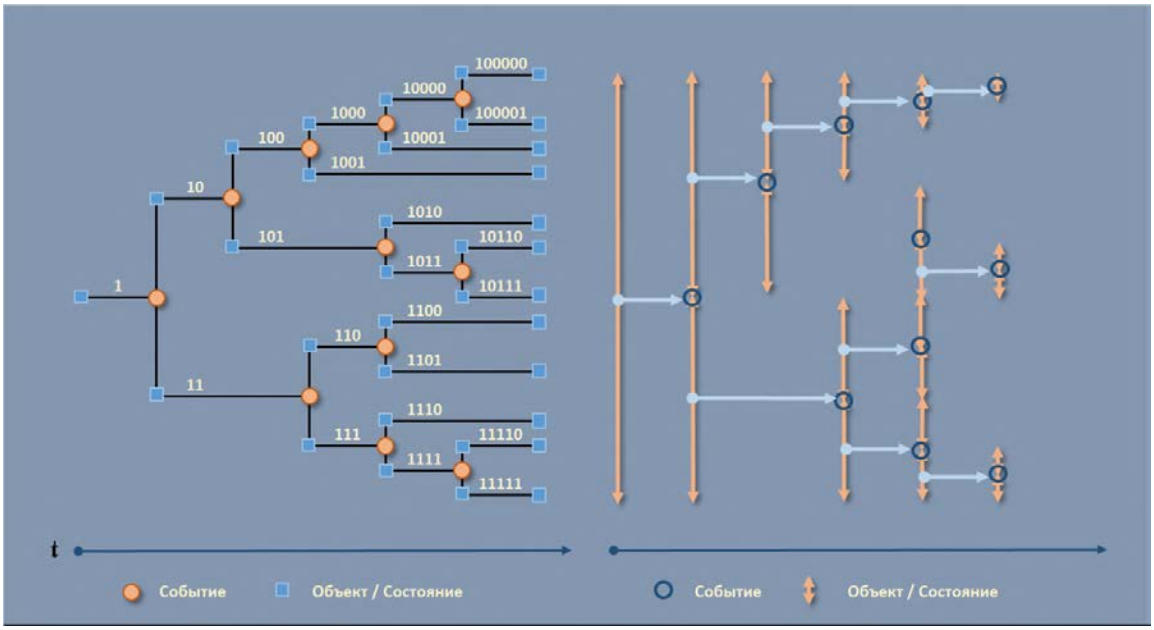


Рисунок 6.1 Формальная схема процесса дихотомического деления: события и состояния.

Примером этого является дифференциация клеток в процессе роста биологического организма. Атрибуты объекта наследуются от исходного объекта, а также могут получаться их них путем некоторого преобразования, связанного с событием. В качестве таких атрибутов может выступать количество субстанции, энергии или информации, носителями которой являются рассматриваемые объекты, и которое некоторым образом перераспределяется или распространяется в процессе их деления. При условии стационарности объектов, в качестве их атрибутов могут также выступать их пространственные координаты. Под данную схему также подходит любой алгоритм бинарный кластеризации, который на каждом шаге по определенному принципу рекурсивно распределяет некоторый массив данных на две части. В описанную схему также укладываются процессы диффузии и случайного блуждания по двоичному дереву. При этом событиями являются все прохождения через вершины,

в которых происходит распределение, а состоянием является результат такого распределения. Атрибут «номер поколения» является общим для событий и объектов.В работе ([42]) автором была предложена модель морфогенеза, при которой клетки моделируются 2-адическими шарами, а их состояния описываются функциями, определенными на этих шарах. Развивая эту модель далее и опираясь на дуализм, существующий между группой $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty)$ и кольцом целых 2-адических чисел, мы рассмотрим модель, при которой события кодируются элементами группы $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty)$, а объекты, подвергающиеся дихотомическому делению, описываются шарами кольца $\mathbb{Z}_2$ целых 2-адических чисел. В силу взаимно однозначного соответствия, которое существует между этими двумя множествами, каждому возможному событию соответствует некоторый объект, который в результате данного события подвергается делению, как это показано на рисунке 6.1.

Рассуждая более формально, рассмотрим набор функций $\Psi = \langle \psi_1, \psi_2, \dots \psi_k \rangle$, определенных на группе $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty)$ и принимающих соответственно значения в декартовом произведении множеств $\mathbf{V} = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k$, где элементы множеств V_i кодируют атрибуты событий дихотомического деления. Будем считать, что функции описывают атрибуты событий дихотомического деления, $\psi_n \in \mathscr{F}(\mathbb{Q}_{01}(2^\infty); V_n)$.

$$\Psi = \langle \psi_1, \psi_2, \dots \psi_k \rangle : \mathbb{Q}_{01}(2^\infty) \to \mathbf{V} = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k.$$

Предположим также, что каждое из множеств V_i содержит некоторое значение типа $\{\emptyset\}$, которое означает отсутствие физически значимых значений и позволяет определить понятие «финитности» для функции $\psi_n \in \mathscr{F}(\mathbb{Q}_{01}(2^\infty); V_n)$. Функция считается финитной, если принимает физически значимые значения только в конечном числе точек. Аналогично будем считать, что набор функций $\Psi = \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_m \rangle$, определенных на кольце $\mathbb{Z}_2$ и принимающих соответственно значения в декартовом произведении множеств $\mathbf{U} = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_m$, где элементы каждого множества U_i кодируют некоторый атрибут объектов объектов, возникающих в результате данного процесса дихотомического деления $\varphi_n \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}_2; U_n)$.

$$\Phi = \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_m \rangle : \mathbb{Z}_2 \to \mathbf{U} = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_m.$$

Рассмотрим проистекающий в дискретном времени дихотомический процесс, который порождается некоторым начальным объектом и характеризуется следующим свойствами:

(i) На каждом шаге данного процесса (или в каждый дискретный момент времени) любой его объект может претерпевать деление на два аналогичных объекта;

(ii) Каждое событие деления характеризуется набором атрибутов, принимающих значения в множествах V_i;

(iii) Каждый возникающий объект обладает набором атрибутов, принимающих значения в множествах U_i.

Кодировку каждого элементарного события можно представить диаграммой, показанной на рисунке 6.2. Будем ассоциировать исходный объект с 2-адическим шаром $\mathfrak{b}$ единичного радиуса, который совпадает с множеством $\mathbb{Z}_2$ всех целых 2-адических чисел. Атрибутам исходного объекта будет соответствовать множество постоянных функций ψ_i, определенных на этом шаре. Делению каждого объекта на два дочерних объекта в момент t будет соответствовать деление 2-адического шара $\mathfrak{b}$ на два дочерних шара $\mathfrak{b}_0$ и $\mathfrak{b}_1$. Атрибутам

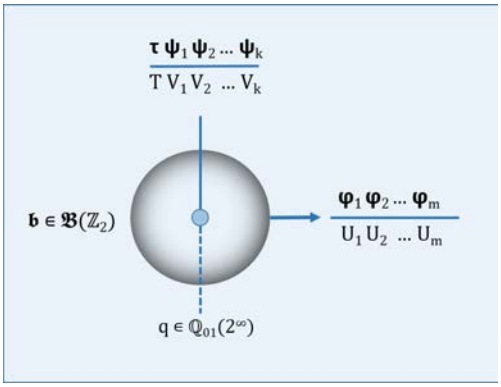


Рисунок 6.2

дочерних шаров будут соответствовать переопределение функций ϕ_i и присвоение им новых значений, соответствующих атрибутам дочерних объектов. Поскольку множество шаров кольца $\mathbb{Z}_2$ находится во взаимно однозначном соответствие с множеством $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty)\backslash\{0\}$, то каждому шару $\mathfrak{b}$ соответствует некоторый элемент $q \in \mathbb{Q}_{01}(2^\infty)$. Поэтому данному событию деления будет соответствовать определение функции времени τ и функций атрибутов события ψ_i в точке q. В результате данный дихотомический процесс феноменологически полностью описывается двумя финитными функциями, определенными на дискретной временной оси $\mathbf{T}$:

$$\mathscr{M}_\Phi : \mathbf{T} \to \mathscr{F}_0(\mathbb{Z}_2; \mathbf{U}),$$

$$\mathscr{M}_\Psi : \mathbf{T} \to \mathscr{F}_0(\mathbb{Q}_{01}(2^\infty); \mathbf{V}).$$

Функция $\mathscr{M}_\Psi$ описывает поток событий, управляющий процессом дихотомического деления, а функция $\mathscr{M}_\Phi$ описывает поток состояний, при этом процесс дихотомического деления можно представлять себе, как распространение некоторой «структурной волны» по единичному 2-адическому шару. Использование единичного 2-адического шара имеет то преимущество перед использованием, например, интервала [0,1) вещественных чисел, что на 2-адическом шаре определена структура компактного нормированного кольца, а все результаты дихотомического деления этого объекта можно представить как локально постоянные функции, определенные на этом кольце. При этом различные объекты p-адической математики, представляя собой некоторую комбинацию непрерывного и дискретного, имеют гораздо более общего с объектами биологии, чем объекты, дифференциальной геометрии, пришедшие из евклидовой геометрии и механики. Кроме того, использование вещественных двоичных дробей для кодировки процесса дихотомического деления имеет недостаток, связанный с неоднозначностью представления вещественного числа такой дробью. Этот недостаток приводит к необходимости делать при таком кодировании специальные оговорки, исключать множество меры ноль и т.д. p-Адическая математика свобода от этих неудобств.

6.2 2-Адическая модель морфогенеза

В этом параграфе мы рассмотрим 2-адическую модель морфогенеза, основанную на моделировании клеток 2-адическими шарами кольца $\mathbb{Z}(2^n)$ и представлении процесса деления клетки, как перехода от 2-адического шара к двум его дочерним шарам вдвое меньшего радиуса. Рассматривая процесс клеточного деления с точки зрения 2-адической арифметики, нужно сделать одно важное предположение относительно кодировки делящихся клеток. Это предположение является необходимым условием применения 2-адической арифметики к описанию морфогенеза. 2-адическая арифметика построена на четком разделении между 0 и 1, поэтому пытаясь применить ее к процессу клеточного деления, мы должны предположить, что у нас есть некоторый механизм, который позволяет при каждом делении клетки, связать одну дочернюю клетку с нулем, а другую с единицей. Это теоретически

можно сделать, если предположить, что у каждой клетки есть своего рода «физический центр координат», который привязан к некоторой внутриклеточной структуре. Та дочерняя клетка, в которую он попадает после деления, считается нулевой, в то время как другая дочерняя клетка считается единичной.

□ Рассуждая пока несколько неформально, мы будем понимать под ***клеточной структурой*** множество клеток, полученных путем деления некоторой первичной клетки. При этом клетки можно считать трехмерными телами, которые имеют приблизительно одинаковый линейный размер, и каждое из которых ограничено гладкой поверхностью, гомеоморфной сфере. Множество центров тяжести такой совокупности клеток будем называть ***точечной клеточной структурой***.

Мы ограничимся этим неформальным определением, так как дальнейшая формализация этих понятий в стиле «бурбакистской математики» только затемнит суть предмета и не стоит затраченных на нее усилий. Более строгие определения будут даны ниже. Мы будем использовать понятие лимита Хейфлика введенное Хейфликом в статье ([35]). Лимит Хейфлика означает максимальное возможное количество делений, через которые может пройти некоторая первичная клетка. В статьях ([41],[42]) автором рассматривались p-адические спектры числовых рядов и последовательностей и было показано, что такие спектры могут представлять собой достаточно сложные биоморфные формы. Следующая теорема представляет собой взгляд на этот предмет в обратном направлении.

Теорема 6.1 Каждую точечную клеточную структуру в $\mathbb{R}^3$, полученную путем двоичного деления клеток одинакового размера с пределом Хейфлика $\mathfrak{H}$, можно представить как образ 2-адического спектра некоторой функции $\mathcal{F} : \mathbb{Z}(2^{\mathfrak{H}+1}) \to \mathbb{C}^3$.

Доказательство. Рассмотрим с точки зрения геометрии процесс формирования организма $\mathfrak{O}$, возникающего путем последовательного двоичного деления клеток из единственной первичной клетки $\mathfrak{C}$ с лимитом Хейфлика $\mathfrak{H}$. Будем моделировать клетки нашего гипотетического организма шарами метрического пространства $\mathbb{Z}(2^{\mathfrak{H}+1})$, снабженного 2-адической метрикой. Будем оперировать с дискретным временем, состоящим из конечного набора равноотстоящих друг от друга моментов времени $\mathbf{T}$, пронумерованных натуральными числами, начиная с нуля. На нулевом шаге будем отождествлять клетку $\mathfrak{C}$ с 2-адическим шаром единичного радиуса $\mathbb{Z}(2^{\mathfrak{H}+1})$. В случае деления некоторой клетки $\mathfrak{c} \in \mathfrak{O}$ будем отождествлять ее дочерние клетки с соответствующими дочерними шарами того шара, который соответствует клетке $\mathfrak{c}$. При таком отождествлении множество всех клеток, которые могут возникнуть из первоначальной клетки $\mathfrak{C}$ в результате ее двоичного деления, очевидным образом соответствует множеству всех шаров $\mathfrak{B}(\mathbb{Z}(2^{\mathfrak{H}+1}))$. Будем предполагать клетку $\mathfrak{C}$ вложенной в некоторое векторное пространство $\mathfrak{V}$ с заданной на нем евклидовой метрикой. Для содержательных биологических и математических примеров можно ограничиться случаем, когда $\mathfrak{V}$ есть $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Такое вложение будем понимать как идентификацию этой клетки с некоторой точкой $v \in \mathfrak{V}$, из которой начинается рост нашего гипотетического организма. Математически эта идентификация определяется постоянной функцией:

$$\mathscr{M}_V : \mathbb{Z}(2^{\mathfrak{H}+1}) \to \mathfrak{V}, \quad f(n) = v, \text{ для любого } n \in \mathbb{Z}(2^{\mathfrak{H}+1}),$$

которая соответствует вложению клетки $\mathfrak{C}$ в пространство $\mathfrak{V}$. Мы будем предполагать, что

все клетки организма $\mathfrak{O}$ имеют средний размер δ, и в каждый момент времени каждая из клеток может разделится на две дочерние клетки. Процесс деления клетки $\mathfrak{c}$ сопровождается исчезновением соответствующей ей точки v и возникновением вместо нее двух новых точек v_0 и v_1, а также смещением всех остальных точек так, чтобы среднее расстояние между ними было приблизительно равно δ. При этом функция $\mathscr{M}_V$ переопределяется таким образом, что она принимает значения v_0 и v_1 на шарах, являющихся дочерними по отношении к шару, соответствующему клетке $\mathfrak{c}$. Таким образом, на каждом этапе процесса роста нашего гипотетического организма его положение в пространстве определяется некоторой функцией, которая является «кусочно постоянной» в 2-адической метрике. Мы можем ввести еще одну функцию $\mathscr{M}_T$, которая на каждом шаре принимает значение равное моменту времени $t \in \mathbf{T}$, в который возникла соответствующая этому шару клетка. Эти простые предположения позволяют нам уйти он всех проблем связанных с упаковкой клеток в пространстве, в том случае, если они рассматриваются как трехмерные тела сложной формы, соприкасающиеся друг с другом. Таким образом, в рамках указанной математической модели процесс морфогенеза феноменологически полностью описывается следующими двумя функциями:

$$\mathscr{M}_T : \mathfrak{B}(\mathbb{Z}(2^{\mathfrak{H}+1})) \cong \mathbb{Z}(2^{\mathfrak{H}+2}) \to \mathbf{T}.$$

$$\mathscr{M}_V : \mathbf{T} \times \mathbb{Z}(2^{\mathfrak{H}+1}) \to \mathfrak{V},$$

При этом множество клеток описывается 2-адическими шарами кольца $\mathbb{Z}(2^{\mathfrak{H}+1})$, функция $\mathscr{M}_T$ описывает порядок возникновения клеток, а функция $\mathscr{M}_V$ их вложение в пространство $\mathfrak{V}$. Будем называть пару функций $\langle \mathscr{M}_T, \mathscr{M}_V \rangle$ ***морфологической разметкой***. На основе этих двух функций можно задать еще одну функцию:

$$\mathscr{M}_G : \mathfrak{B}(\mathbb{Z}(2^{\mathfrak{H}+1})) \to \{0, 1\},$$

которая принимает значение 1 на шарах, которые соответствуют клеткам, участвовавшим в процессе деления (включая каждую разделившеюся клетку и две ее дочерние) и 0 на оставшихся клетках.

Пусть $\mathfrak{V} = \mathbb{R}^3$, тогда функцию $\mathscr{M}_V$ можно в каждый момент времени $t \in \mathbf{T}$ представить в виде триплета функций

$$\mathscr{M}_V(t) = \langle \mathscr{M}_V^1(t), \mathscr{M}_V^2(t), \mathscr{M}_V^3(t) \rangle.$$

Взяв обратное преобразование Фурье

$$\mathbf{F}^{-1}[\mathscr{M}_V(t)] = \langle \mathbf{F}^{-1}[\mathscr{M}_V^1(t)], \mathbf{F}^{-1}[\mathscr{M}_V^2(t)], \mathbf{F}^{-1}[\mathscr{M}_V^3(t)] \rangle,$$

мы получим триплет функций $\mathbf{F}^{-1}[\mathscr{M}_V^k(t)]$, принадлежащих множеству $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(\mathbf{2}^{\mathfrak{H}+\mathfrak{1}}); \mathbb{C}^3)$. Очевидно, что множество точек пространства $\mathfrak{V}$, составляющих в момент времени t рассматриваемый нами организм, представляет собой образ 2-адического спектра функции $\mathbf{F}^{-1}[\mathscr{M}_V(t)]$. Что и требовалось доказать. $\boxtimes$

К приведенному выше описанию процесса «2-адического морфогенеза» следует добавить несколько комментариев. Очевидно, что на каждом шаге данного процесса организм $\mathfrak{O}$ представлен некоторым множеством непересекающихся шаров $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{Z}(2^{\mathfrak{H}+1}))$, объединение которых совпадает с множеством $\mathbb{Z}(2^{\mathfrak{H}+1})$. В каждый момент времени t функция $\mathscr{M}_V(t)$

представляет собой кусочно постоянную функцию, принимающую одинаковое значение на каждом из шаров из множества $\mathfrak{C}$. Таким образом, доказательство теоремы 6.1 по сути дела представляет собой формализацию процесса морфогенеза и описывает его как некоторую функцию

$$\mathscr{M} : \mathbf{T} \to \mathscr{F}(\mathbb{Z}(2^{\mathfrak{H}+1}); \mathbb{R}^3)$$

или как функцию

$$\mathscr{M}_F : \mathbf{T} \to \mathscr{F}(\mathbb{Z}(2^{\mathfrak{H}+1}); \mathbb{C}^3),$$

где

$$\mathscr{M}_F(t) = \mathbf{F}^{-1}[\mathscr{M}(t)].$$

Может возникнуть вопрос, зачем здесь вообще нужны 2-адические спектры и преобразование Фурье? Почему нельзя ограничиться просто функцией $\mathscr{M}_V(t)$? Как было показано в статье ([41]) очень сложные формы могут представлять собой образы p-адических спектров достаточно простых числовых или векторных последовательностей или рядов. Такие формы могут быть получены из этих рядов путем последовательного применения к ним инверсного преобразования $\mathbf{I}$ и преобразования Фурье $\mathbf{F}$. Это дает основание полагать, что применение к функции $\mathscr{M}_V$ обратного преобразования Фурье может привести к более простым последовательностям, чем сама функция $\mathscr{M}_V$.

Теорема 6.1 является по сути дела тривиальной в части ее доказательства, но является не столь тривиальной по вытекающим из нее методологическим следствиям. Поскольку на множестве функций $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(2^{\mathfrak{H}+1})); \mathbb{C}^3)$ естественным образом действуют некоторые группы, например, группа $\mathbb{Z}(2^{\mathfrak{H}+1})^\times$ или группа 2-адических изометрий кольца $\mathbb{Z}(2^{\mathfrak{H}+1})$, то такой подход позволяет по новому поставить вопрос о гомологиях и о внутренних симметриях или корреляциях, которые существуют в мире трехмерных клеточных форм, а также позволяет применить к таким формам весь математический аппарат обработки одномерных сигналов и 2-адического анализа, а сами ***такие формы интерпретировать как результат «излучения» некоторого одномерного векторного сигнала***.

6.3 Клеточные структуры

В этом параграфе мы дадим некоторые определения, которые позволят нам привнести больше математического формализма в предыдущие рассуждения, а также позволят нам провести аналогию между ростом биологических организмов и развертыванием числовых рядов и бесконечных произведений.

Определение клеточной структуры. Формальная статическая 2-адическая модель организма $\mathfrak{O}$, построенного из клеток и вложенного в евклидово векторное пространство $\mathfrak{V}$ над полем $\mathbb{R}$, представляет собой отображение

$$f : \mathbb{Z}(2^n) \to \mathfrak{V},$$

множества уровней которого являются 2-адическими шарами. Будем называть такое отображение точечной клеточной структурой, определенной на кольце $\mathbb{Z}(2^n)$ или для краткости просто клеточное структурой. Векторное пространство $\mathfrak{V}$ можно при этом понимать как морфологическое пространство, предназначенное для фиксации идеальной структуры данного организма.

Множество шаров $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{Z}(2^n))$, являющихся множествами уровня отображения f, определяет разделение организма $\mathfrak{O}$ на клетки. Естественное вложение этих шаров в пространство $\mathfrak{V}$, выполняемое отображением f, определяет расположение этих клеток относительно друг друга. Если предположить, что все клетки должны иметь примерно одинаковый размер, то к приведенной выше конструкции следует добавить еще одно условие: $\|f(\mathfrak{b}_0) - f(\mathfrak{b}_1)\| \leqslant \delta$ для любых различных $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1 \in \mathfrak{C}$, где δ - средний размер клетки.

□ Обозначим символом $\mathfrak{C}_\delta(\mathbb{Z}(2^n); \mathfrak{V})$ множество всех клеточных структур, определенных на 2-адическом кольце $\mathbb{Z}(2^n)$, которые принимают значение в векторном пространстве $\mathfrak{V}$ и имеют размер ячейки не более δ.

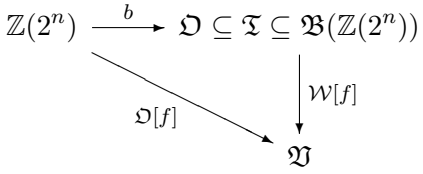
Определение оператора $\mathcal{W}$. Пусть $f : \mathbb{Z}(p^n) \longrightarrow \mathfrak{V}$ есть некоторая функция, определенная на множестве $\mathbb{Z}(p^n)$ и принимающая значения в векторном пространстве $\mathfrak{V}$ над полем $\mathbb{R}$. Определим функцию $\mathcal{W}[f] : \mathfrak{B}(\mathbb{Z}(p^n)) \longrightarrow \mathfrak{V}$ следующим образом:

$$\mathcal{W}[f](\mathfrak{b}) = (1/|\mathfrak{b}|) \sum_{n \in \mathfrak{b}} f(n),$$

где $|\mathfrak{b}|$ есть количество элементов в шаре $\mathfrak{b}$. Значение $\mathcal{W}[f](\mathfrak{b})$ представляет центр тяжести образа шара $\mathfrak{b}$ в векторном пространство $\mathfrak{V}$ при отображении f.

Очевидно, что с любым фиксированным $\delta > 0$ и с любой функцией $f : \mathbb{Z}(2^n) \longrightarrow \mathfrak{V}$ можно естественным образом связать некоторую точечную клеточную структуру $\mathfrak{O}_\delta[f]$ с размером ячейки не более δ. Для этого можно использовать для значений функции f обычный алгоритм иерархической бинарной кластеризации, работающий в обратном направлении. и выполняюший иерархическое усреднение значений функции f по двоичным шарам, объединяя затем полученные значения функции f в кластеры, расстоянием между центрами тяжести которых составляет не более δ. Данный алгоритм работает следующим образом. На первом шаге этот алгоритм проходит по дереву шаров $\mathfrak{B}(\mathbb{Z}(2^n))$ и вычисляет среднее значение функции f для каждого шара, определяя таким образом функцию $\mathcal{W}[f] : \mathfrak{B}(\mathbb{Z}(2^n)) \longrightarrow \mathfrak{V}$. На втором шаге он проходит по дереву шаров сверху вниз, рекурсивным образом создавая клеточную структуру $\mathfrak{O}_\delta[f]$ путем рекурсивно применяемого деления клеток/шаров. На начальном этапе данная структура состоит из единственной клетки, которая совпадает с единичным 2-адическим шаром, местоположение которого в пространстве $\mathfrak{V}$ равно среднему значению функции f на множестве $\mathbb{Z}(2^n)$. Пусть $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}(\mathbb{Z}(2^n))$ есть некоторый 2-адический шар, и пусть $\mathfrak{b}_0$ и $\mathfrak{b}_1$ есть два дочерних шара вдвое меньшего радиуса, расположенные внутри шара $\mathfrak{b}$. Очевидно, что $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_0 \cup \mathfrak{b}_1$. Если для родительского шара $\mathfrak{b}$ расстояние между центрами тяжести его дочерних шаров $\mathfrak{b}_0$ и $\mathfrak{b}_1$ больше чем δ, то шар $\mathfrak{b}$ должен быть разделен на два дочерних шара половинного радиуса. В результате применения данного рекурсивного алгоритма для всего дерева шаров $\mathfrak{B}(\mathbb{Z}(2^n))$ мы получим дерево $\mathfrak{T}$, которое включает в себя каждый разделенный шар и два его дочерних шара. Если мы интерпретируем образы 2-адических шаров как клетки, а процесс перехода от родительского кластера к двум дочерним кластерам - как процесс клеточного деления, то описанный выше процесс обратной бинарной кластеризации приобретает очевидное сходство с процессом морфогенеза. В этом случае процесс прямой бинарной кластеризации представляет собой своего рода «морфогенез наоборот», поскольку он идет в противоположном направлении и объединяет клетки, а не разделяет их. Дерево $\mathfrak{T}$, полученное в результате описанного

выше процесса обратной бинарной кластеризации, отражает весь процесс 2-адического морфогенеза. Множество $\mathfrak{O}$ его конечных шаров соответствует набору клеток 2-адического организма в его конечном состоянии, и отображение этих шаров в пространство $\mathfrak{V}$ дает нам положение этих клеток в пространстве $\mathfrak{V}$. Очевидно, что множество непересекающихся шаров $\mathfrak{O}$ образует покрытие множества $\mathbb{Z}(2^n)$. Рассмотрим следующую диаграмму, где отображение b ставит в соответствие каждому элементу $n \in \mathbb{Z}(2^n)$ 2-адический шар $b(n) \in \mathfrak{O}$, к которому этот элемент принадлежит.



Очевидно, что композиция отображений $\mathfrak{O}[f] = \mathcal{W}[f] \circ b$ определяет клеточную структуру на множестве $\mathbb{Z}(2^n)$ в смысле приведенного выше определения. Следовательно, алгоритм обратной двоичной кластеризации можно рассматривать как оператор:

$$\mathfrak{O}_\delta : \mathscr{F}(\mathbb{Z}(2^n); \mathfrak{V}) \to \mathfrak{C}_\delta(\mathbb{Z}(2^n); \mathfrak{V}),$$

который преобразует произвольную функцию из множества $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(2^n); \mathfrak{V})$ в соответствующую ей клеточную структуру, принимающую значения в векторном пространстве $\mathfrak{V}$. Будем называть «клетками» образы соответствующих 2-адических шаров. Если мы соединим в пространстве $\mathfrak{V}$ центр тяжести каждой клетки с центрами тяжести двух ее дочерних клеток отрезком, то получим двоичное дерево, вложенное в пространство $\mathfrak{V}$. Это дерево представляет собой визуализацию процесса кластеризации или визуализацию соответствующего метафорического 2-адического морфогенеза.

□ Мы будем называть такое дерево ***морфологическим деревом*** соответствующей клеточной структуры.

Если мы имеем множество функций $\{f[t] \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}(2^n); \mathfrak{V})\}$, зависящих от некоторого непрерывного или дискретного параметра $t \in \mathbb{R}$, интерпретируемого как время, то указанный алгоритм кластеризации порождает соответствующее множество клеточных структур $\{\mathfrak{O}[t]\}$, которое можно интерпретировать, как морфологическое изменение некоторого организма $\mathfrak{O}$ во времени. Более строго этот процесс описывается следующим образом.

Предположим, что

(i) δ есть положительное вещественное число;

(ii) $\mathfrak{V}$ есть конечномерное векторное пространство над полем вещественных чисел с заданной на нем евклидовой метрикой;

(iii) $\{f[t]\}$ есть семейство функций, отображающих кольцо $\mathbb{Z}(2^n)$ в векторное пространство $\mathfrak{V}$ и зависящих от параметра t, интерпретируемого как время;

(iv) параметр t принимает значения из множества $\mathbf{T}$, состоящего из конечного набора равноотстоящих друг от друга моментов времени, пронумерованных натуральными числами, начиная с нуля.

Тогда существует следующий простой алгоритм построения на основе этих данных зависящей от времени клеточной структуры $\mathfrak{O}[t]$, а также алгоритм вычисления соответствующей морфологической разметки $\langle \mathscr{M}_T, \mathscr{M}_V \rangle$:

$$\mathscr{M}_T : \mathfrak{B}(\mathbb{Z}(2^n)) \to \mathbf{T},$$

$$\mathscr{M}_V : \mathbf{T} \times \mathbb{Z}(2^n) \to \mathfrak{V},$$

которая описывает изменение данной клеточной структуры во времени с учетом лимита Хейфлика $\mathfrak{H}$. Данный алгоритм является хорошо известным алгоритмом бинарной кластеризации. Он работает следующим образом:

(i) В нулевой момент времени наш организм состоит из единственной клетки, которая совпадает с кольцом $\mathbb{Z}(2^n)$: $\mathfrak{O} = \{\mathbb{Z}(2^n)\}$. При этом $\mathscr{M}_T(m) = 0$, при любом $m \in \mathbb{Z}(2^n)$, и $\mathscr{M}_V(0, m) = \mathcal{W}_f(\mathbb{Z}(2^n))$, то есть весь организм сосредоточен в центре тяжести образа 2-адического шара единичного радиуса.

(ii) В каждый последующий момент времени t мы рассматриваем все существующие на данный момент клетки организма и для каждой клетки b вычисляем расстояние между центрами тяжести двух дочерних клеток b_0 и b_1:

$$d = \mathrm{Dist}(\mathcal{W}_{f[t]}(b_0), \mathcal{W}_{f[t]}(b_1)).$$

(iii) Если $d \geqslant \delta$, то клетка b считается разделившейся и (1) значения $\mathcal{M}_T(b_0)$ и $\mathcal{M}_T(b_1)$ полагаются равными t; (2) клетки b_0 и b_1 заменяют в организме место материнской клетки b, а функция $\mathcal{M}_V(t, m)$ принимает на шарах b_0 и b_1 значения равные $\mathcal{W}_{f[t]}(b_0)$ и $\mathcal{W}_{f[t]}(b_1)$ соответственно.

(iv) Если предел $\mathfrak{H}$ еще не достигнут, то переходим к следующему шагу.

На выходе описанного выше алгоритма мы получаем наш организм $\mathfrak{O}$, разбитый на клетки, вложенные в векторное пространство $\mathfrak{V}$, а также две функции $\mathscr{M}_T$ и $\mathscr{M}_V$, определяющие морфологическую и временную разметку процесса роста организма $\mathfrak{O}$.

Как было показано в статье ([41]), сложные многомерные формы могут представлять собой образы p-адических спектров достаточно простых числовых или векторных последовательностей или рядов. Приведенные выше рассуждения показывают, что трансформацию таких форм в процессе изменения исходного ряда в зависимости от параметра t можно метафорически интерпретировать как трансформацию биологического организма, состоящего из отдельных клеток. Если в процессе 2-адического морфогенеза последовательно соединять центр каждой клетки с центрами двух ее дочерних клеток, то получится вложенное в морфологическое пространство двоичное дерево. Будем называть это дерево ***морфологической траекторией или морфологическим путем***, так как оно представляет собой визуализацию морфологической трансформации организма. Пример морфологических путей приведены ниже.

Рассмотрим несколько примеров обратных 2-адических спектров, полученных их функции Эйлера, представляющей собой бесконечное произведение вида:

$$\phi(q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^n), \qquad q \in \mathbb{C} \text{ и } \|q\| < 1.$$

Эта знаменитая функция рассматривалась Леонардом Эйлером (1707-1783), который показал, что она связана обратным отношением с производящей функцией, определяющей количество возможных разбиений $p(n)$ натурального числа n:

$$1/\phi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n,$$

а также вывел пентагональную формулу, которая выражает функцию ϕ через «пентагональные числа» вида $(3n^2 - n)/2$:

$$\phi(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(3n^2-n)/2}.$$

В соответствии с так называемой основной теоремой алгебры любой комплексный многочлен $f \in \mathbb{C}[x]$ степени n имеет вид

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n),$$

и может быть представлен в форме

$$f(x) = x^n(1 - \frac{a_1}{x})(1 - \frac{a_2}{x})\dots(1 - \frac{a_n}{x}).$$

В соответствии с логикой, описанной в главе III, каждому такому многочлену может быть поставлена в соответствие функция:

$$\mathbf{Inv}[f](x) : \mathbb{Z}(2^n) \to \mathbb{C},$$

которая получается разворачиванием указанного выше произведения с последующим отображением его членов на вершины $n+1$-уровневого двоичного дерева. Этой функции соответствуют ее прямой и обратный 2-адические спектры

$$\mathrm{Spec}[f] : \mathbb{Z}(2^n) \to \mathbb{C}, \qquad \mathrm{Spec}_R[f] = 1/\mathrm{Spec}[f] : \mathbb{Z}(2^n) \to \mathbb{C},$$

полученные путем применения к функции $\mathbf{Inv}[f](x)$ преобразования Фурье. Каждая из функций $\mathrm{Spec}[f](x)$ и $\mathrm{Spec}_R[f](x)$ порождает континуальное множество образов, индексированное точками комплексной плоскости, из которой выброшен ноль. Если все корни многочлена $f(x)$ являются вещественными, то каждый образ спектра $\mathbf{Im}(\mathrm{Spec}[f])$ или $\mathbf{Im}(\mathrm{Spec}_R[f])$ является билатерально симметричным. В общем случае билатерально симметричные образы можно получить, беря вещественную или мнимую части функции $\mathbf{Inv}[f](x)$. Полученные таким способом образы очевидным образом зависят от порядка перечисления корней многочлена, на множестве которых действует симметрическая группа $\mathfrak{S}_n$ (или группа перестановок множества из n элементов). На рисунке 6.3 показано несколько изображений, представляющих собой морфологические пути обратных спектров, порожденных функцией a также ее перестановками

$$\phi_n(a, q) = \prod_{k=1}^{n}(1 - a \cdot q^k), \quad \sigma[\phi_n](a, q) = \prod_{k=1}^{n}(1 - a \cdot q^{\sigma(k)}), \quad q \in \mathbb{C} \text{ и } \|q\| < 1.$$

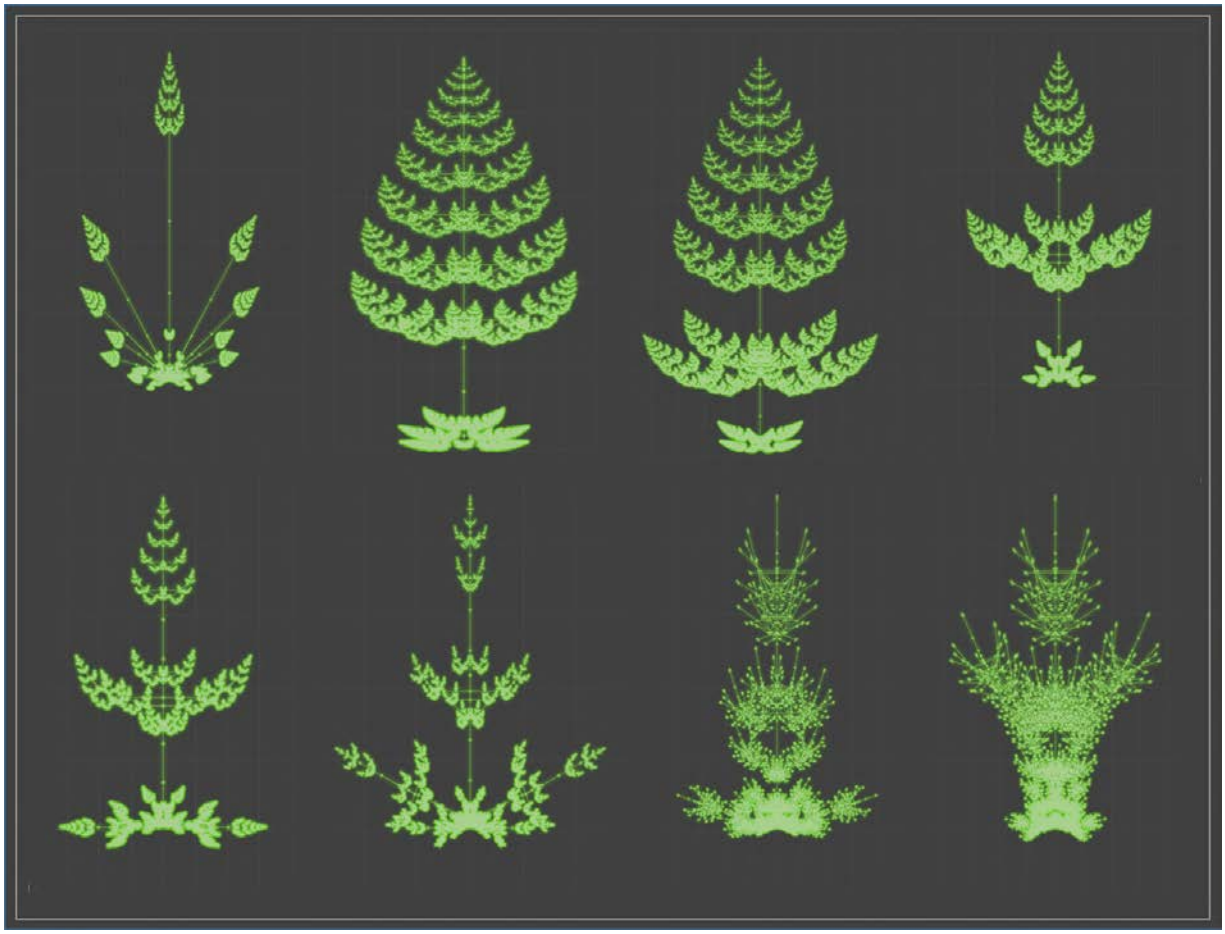


Рисунок 6.3 Примеры морфологических траекторий для спектральных образов $\mathrm{Spec}_R(\sigma[\phi_{14}](a,q),2,14)$, полученных при $q = 0.7$ и $a = 1.0$.

При определенном сочетании параметров морфологические траектории данных спектров представляют собой хорошо структурированные изображения древовидной структуры. При варьировании перестановки σ эти структуры могут постепенно деградировать, как это видно на примере двух последних изображений, представленных на рисунке 6.3. Интерес этих изображений состоит не столько в содержащихся в них древовидных структурах - в компьютерной графике существует множество искусственных/имитационных алгоритмов, которые порождают деревья ([24]), сколько в замечательном факте, состоящем в естественном происхождении этих структур из формул, определяющих одну из классических теоретико числовых функций.

Вейвлеты Хаара и морфологический путь

Из самого метода построения 2-адических вейвлетов Хаара с очевидностью следует, что промежуточные данные, которые возникают в процессе рекурсивного усреднения исходной последовательности, соответствуют 2-адическим шарам, поэтому, если интерпретировать точки комплексной последовательности как координаты элементов, составляющих некоторый геометрический объект, то алгоритм вычисления преобразования Хаара представляет собой ни что иное, как отображение морфологического пути, который соответствует дан-

ному объекту. На рисунке 6.4 показан отрезок такого пути, ведущий из корня морфологического дерева к одной из его терминальных вершин.

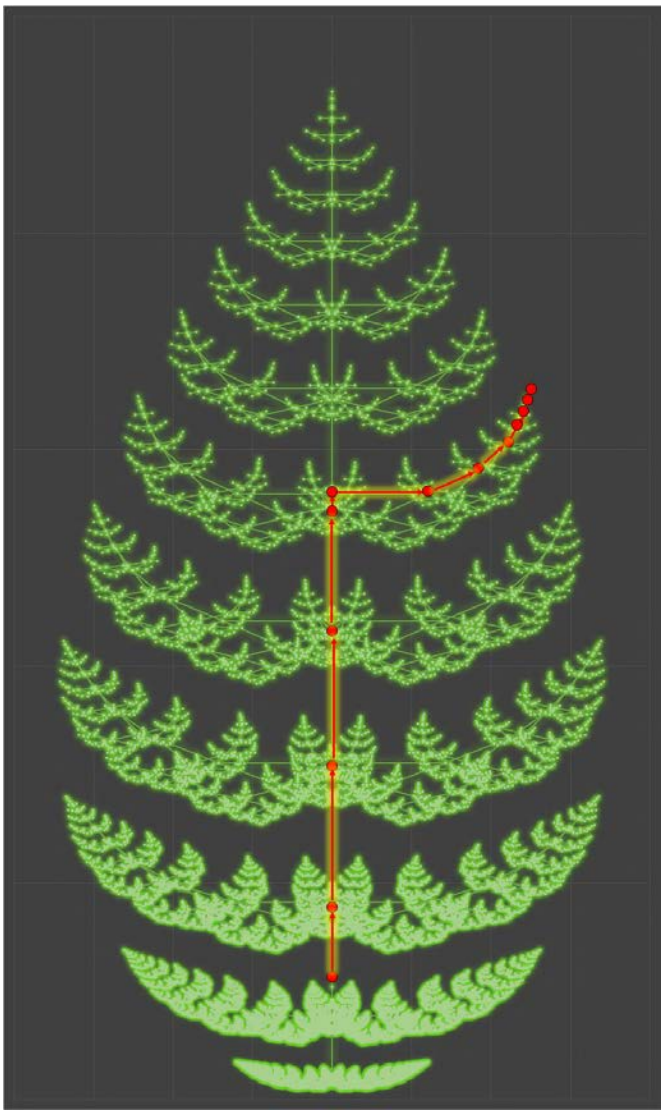


Рисунок 6.4 Пример морфологического пути для функции $\mathrm{Spec}_R(\eta(q), 2, 16)$, когда $q = 0.7$, $a = 1$.

6.4 4-Адический морфогенез сферы

В этом разделе мы предпримем попытку синтезировать p-адическую и евклидову геометрию в рамках одной геометрической модели. Мы используем эту модель, чтобы проиллюстрировать концепцию p-адического морфогенеза, представленную в предыдущих разделах. В качестве модельных объектов возьмем два объекта классической геометрии: тетраэдр и сферу. Мы предполагаем, что с точки зрения биологии сочетание евклидовой и фрактальной геометрии в рамках одной и той же модели имеет смысл, и что реалистичная модель органической формы должна включать в себя различные типы геометрий, поскольку тело как человека, так и высших животных состоит из десяти или более различных подсистем, каждая из которых характеризуется своими собственными принципами организации и своей собственной геометрией. Некоторые из них, например, кровеносная и нервная система, лучше описываются в терминах фрактальной геометрии.

В параграфе 6.2 было показано, что каждая клеточная структура представляет собой образ 2-адического спектра определенного числового ряда. Не имея возможности на данном этапе вычислить этот ряд, а также связанные с ним функции $\mathcal{M}_T$ и $\mathcal{M}_V$, для реальных организмов, мы попытаемся решить обратную задачу, а именно определить этот спектр на основе модельного примера, который представляет собой определенную аналогию с процессом биологического морфогенеза. Попутно это даст нам еще одну иллюстрацию аналогий, которые существуют между ростом биологических организмов и трансформацией геометрических структур. В качестве такого примера мы рассмотрим классический математический объект, а именно сферу. Чтобы определить морфогенез сферы, мы возьмем поверхность триангулированного тетраэдра, который проецируется на расширяющуюся сферу. В данном случае мы имеем 4-адический морфогенез, первичная ячейка которого расположена в центре тетраэдра. На первом этапе эта ячейка порождает четыре ячейки, расположенные в центрах граней тетраэдра. Далее каждая ячейка генерирует из себя четыре дочерние ячейки в соответствии со схемой, показанной на рисунке 6.8 ниже. Очевидно, что этот процесс также может быть описан в терминах L-систем ([45]).

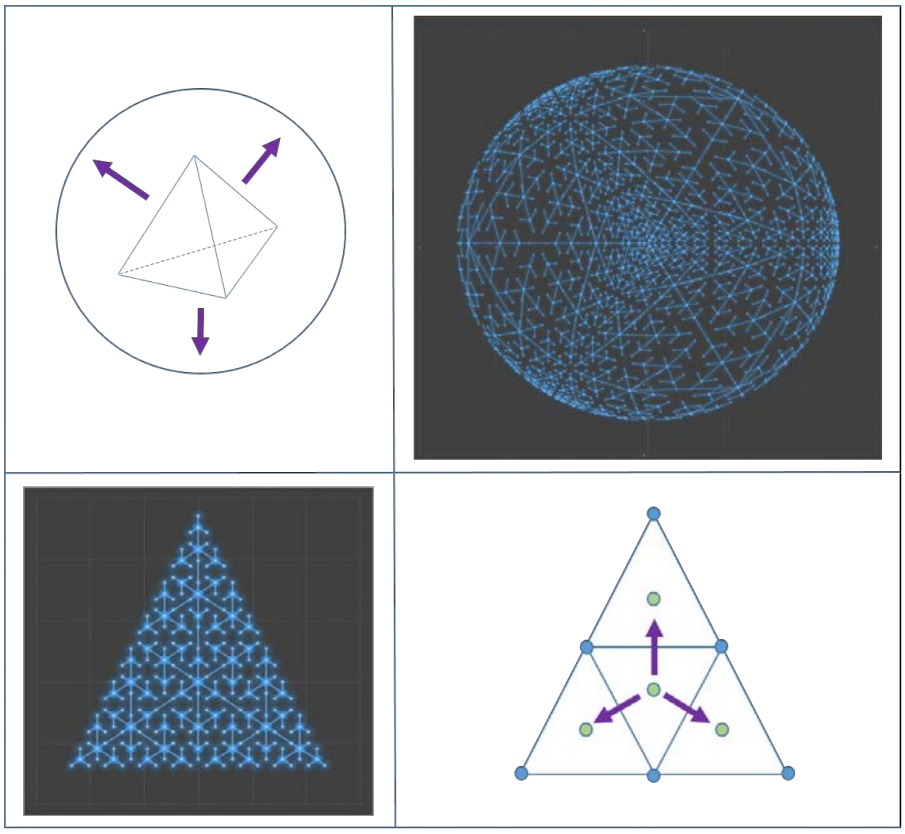


Рисунок 6.5 Схема 4-адического морфогенеза сферы.

На каждом шаге радиус сферы следует увеличивать, чтобы линейный размер ячеек оставался постоянным и приблизительно равным δ. Продолжая таким образом, мы на каждом шаге получим функцию

$$\pi_n : \mathbb{Z}(4^n) \to \mathbb{R}^3,$$

образ которой представляет собой множество точек на сфере, при этом расстояние между соседними точками будет приблизительно равно δ. Очевидно, что большинство концепций

и конструкций, перечисленных в главах III и IV, применимы к этому процессу 4-адического морфогенеза, и что отображение π_n является клеточной структурой в смысле определения, данного в настоящей главе. Одномерный векторный сигнал, образ спектра которого в соответствии с теоремой 6.1 создает разделенную на ячейки сферическую поверхность, показан на рисунке 6.6.

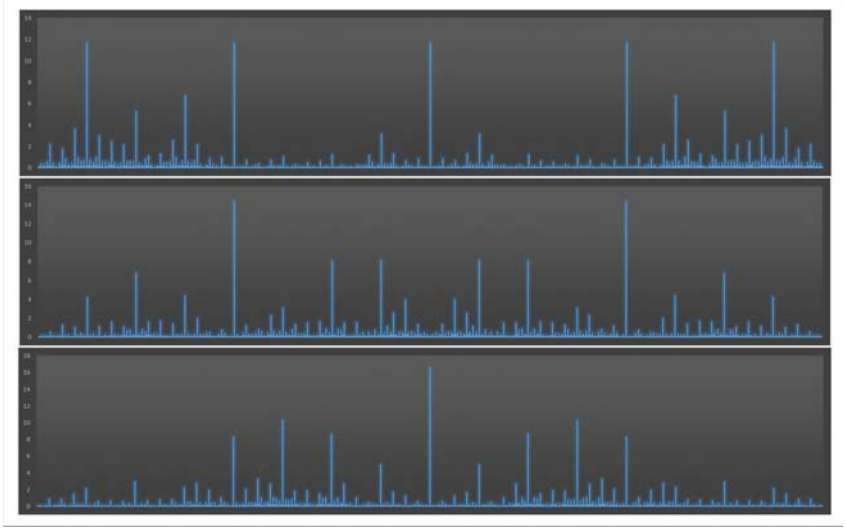
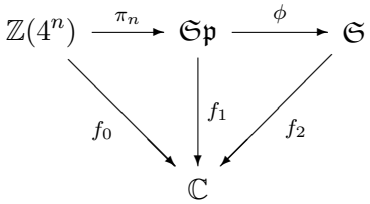


Рисунок 6.6 Графики модуля обратного преобразования Фурье для функции $\pi_8 : \mathbb{Z}(4^8) \to \mathbb{R}^3$.

Клеточная структура π_n представляет собой вложение циклической абелевой группы $\mathbb{Z}(4^n) \cong \mathbb{Z}(2^{2n})$ в трехмерное пространство, при котором образы соответствующих точек расположены в центрах треугольников, образующих триангуляцию гладкой замкнутой сферической поверхности $\mathfrak{Sp}$. Следовательно функции, определенные на этой поверхности, переносятся в группу $\mathbb{Z}(4^n) \cong \mathbb{Z}(2^{2n})$ и могут быть объектом одномерного анализа Фурье. Это также верно для любой поверхности $\mathfrak{S}$, которая является гомеоморфным образом сферы $\mathfrak{Sp}$ и на которую может быть перенесена указанная дискретная параметризация с помощью кольца $\mathbb{Z}(4^n)$, как это показано на следующей коммутативной диаграмме:



Аналогичные примеры могут быть построены для отрезка, треугольника, квадрата, куба и других правильных геометрических тел и фигур. В заключение мы затронем два вопроса, не имеющих отношения к биологии, однако представляющих некоторый математический интерес: (1) преобразование Хаара на многомерных объектах сложной формы и (2) отображение классических рядов на фрактальные множества.

6.5 Пространственное разложение Хаара и морфогенез

Как правило, разложение Хаара применяется для числовых последовательностей и для изображений. Однако его с равным успехом можно применить к пространственным объектам, где оно оказывается естественным образом связанным с таким биологическим процессом как морфогенез. Процесс морфогенеза, то есть процесс развития целого организма из одной клетки, является, вероятно, самым сложным и загадочным процессом среди всех процессов, изучаемых естественными науками. Процесс морфогенеза изучается в рамках дисциплины под названием «Биология развития», которая включает в себя изучение биологических процессов роста, размножения, регенерации и метаморфоза. Морфогенез включает в себя действие как генетических, так и эпигенетических факторов, которые действуют параллельно, сложным образом взаимодействуя и переплетаясь друг с другом. В процессе морфогенеза генетические сети клеток сложным образом взаимодействуют между собой, инициируя синтез необходимых для построения организма белков, а сами клетки обмениваются между собой химическими, электрическими и механическими сигналами. В процессе морфогенеза можно выделить четыре компонента: генетический код организма, выявление движущих сил формирования организма, описание формирующейся органической формы, а также описание процесса ее трансформации. В современной науке существует несколько моделей морфогенеза. ([2],[29],[30],[31],[56]). Одну из самых последовательных теорий морфогенеза развивал русский и советский биолог А.Г.Гурвич (1874-1954). Гурвич ставил целью построение теоретической биологии на основе единой концепции «биологического поля»([7],[8]). Идея «биологического поля» сформировалась у Гурвича в начале 20-х годов, однако в силу внутренних политических проблем, существовавших в советской науке того времени, книга Гурвича вышла в свет только в 1944 году, когда полевые концепции в биологии стали маргинализироваться в основном по той причине, что в отличие от физических полей, для биологических полей не нашлось формального математического аппарата, пригодного для их описания. Последовавшие затем открытия в области молекулярной генетики окончательно привели к сдвигу интереса биологов с макро- на микроуровень и к потере интереса к синтетическим теориям. В современной биологии концепция «биологического поля» редуцировалась до понятия «морфогенетического поля», обзор концепций которого можно найти в работе ([55]).

Для того, чтобы показать связь между дискретными вейвлетами Хаара и процессом морфогенеза, рассмотрим некоторое множество $\mathfrak{P}$, состоящее из 2^n точек, расположенных в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. Будем называть такое множество дискретным телом (для этого объекта также используется термин «облако точек»). Построим отображение $f : \mathbb{Z}(2^n) \to \mathbb{R}^3$, таким образом, чтобы образ этого отображения совпадал с множеством $\mathfrak{P}$, и чтобы оно было «непрерывным» в 2-адической метрике. Слово «непрерывным» взято в кавычки, так как в дискретном случае все отображения являются непрерывными, однако в данном случае под непрерывным понимается такое отображение, при котором близкие в 2-адической метрике индексы $n_0, n_1 \in \mathbb{Z}(2^n)$ отображаются в лежащие рядом друг с другом точки $f(n_0)$ и $f(n_1)$. Такое отображение можно построить с помощью двоичной кластеризации множества $\mathfrak{P}$. Наивный алгоритм такой кластеризации выглядит следующим образом. Выберем произвольную точку $v \in \mathfrak{P}$ и ближайшую к ней точку $w \in \mathfrak{P}$. Сформируем двухточечный кластер $\{v, w\}$ и положим $f(0) = v, f(1) = w$. Далее продолжим действовать таким же образом с множеством $\mathfrak{P}\backslash\{u, v\}$, постепенно

увеличивая счетчик точек. В результате такой процедуры множество $\mathfrak{P}$ разобьется на 2^{n-1} пар, которые состоят из лежащих рядом друг с другом точек множества $\mathfrak{P}$, проиндексированных последовательно идущими парами чисел из множества $\mathbb{Z}(2^n)$. Множество центров тяжести этих двухточечных кластеров можно рассматривать как новое дискретное тело $\overline{\mathfrak{P}}$, которое состоит из 2^{n-1} точек, и к которому можно далее применить описанную процедуру разбиения на двухточечные кластеры, продолжая ее рекурсивно до тех пор, пока не получиться кластер, состоящий из единственной точки. Применив к области индексов инверсное преобразование, которое преобразует пары последовательно идущих индексов в диаметры 2^n-угольника $\mathbb{Z}(2^n)$, мы получим требуемое отображение. При большом количестве точек, для того чтобы избежать квадратичного роста количества вычислений и оптимизировать размер формирующихся пар, к данному наивному алгоритму следует добавить предварительную кластеризацию множества $\mathfrak{P}$, а также некоторую стратегию упорядочивания возникающих при этом служебных кластеров. Построенную таким образом функцию f можно рассматривать как тройку $\langle f_1, f_2, f_3\rangle$ вещественных функций, заданных на множестве $\mathbb{Z}(2^n)$, поэтому к отображению f можно применить все рассуждения и построения приведенные в предыдущих параграфах. Пример описанной выше кластеризации множества из восьми точек показан на рисунке 6.7. Зеленым цветом выделены номера исходных точек, нумерация которых продолжается/распространяется на двоичные кластеры возникающие в процессе описанной выше кластеризации. Индексы точек и кластеров в кольце $\mathbb{Z}(2^n)$ показаны оранжевым цветом. Соответствующие им двоичные коды (записанные слева направо) выделены розовым цветом. Отбрасывание старшего значащего разряда дает изоморфное отображение дерева кластеров на корневое двоичное дерево.

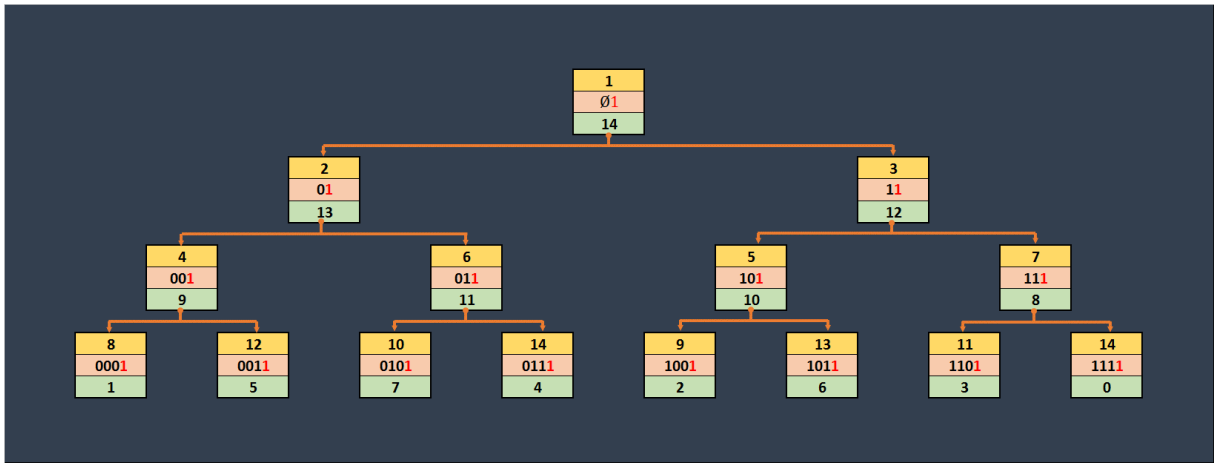


Рисунок 6.7 Двоичная кластеризация дискретного тела, как «непрерывное» отображение.

При этом операторы усреднения и вейвлеты Хаара приобретают следующую очевидную интерпретацию.

(i) Оператору усреднения $\mathfrak{a}$ соответствует процесс перехода от дискретного тела $\mathfrak{P}$ к дискретному телу $\overline{\mathfrak{P}}$ вдвое меньшей мощности, состоящему из центров тяжести двухточечных кластеров, на которые тело $\mathfrak{P}$ разбивается в результате двоичной кластеризации.

(ii) Обратный переход $\overline{\mathfrak{P}} \to \mathfrak{P}$ можно интерпретировать как возникновение тела $\mathfrak{P}$ из

тела $\overline{\mathfrak{P}}$ путем двоичного деления точек/клеток последнего. При этом пара точек $\langle u, v\rangle$ возникает из точки $(u+v)/2$, а векторы $\overrightarrow{w} = (u-v)/2$ и $-\overrightarrow{w} = (v-u)/2$, которые соответствуют преобразованию Хаара, определяют направление деления исходной точки/клетки.

(iii) Векторное поле $\overrightarrow{w}(p)$, определенное для всех точек $p \in \overline{\mathfrak{P}}$, можно интерпретировать как морфогенетическое поле, определяющее направление деления клеток тела $\overline{\mathfrak{P}}$.

Данную процедуру кластеризации можно продолжать дальше, порождая таким образом дискретные тела, количество точек в которых убывает в геометрической прогрессии. Если присвоить исходному дискретному телу, состоящему из 2^n точек, индекс n, то последовательность дискретных тел, возникающих в процессе данной рекурсивной кластеризации исходного тела можно описать следующей диаграммой.

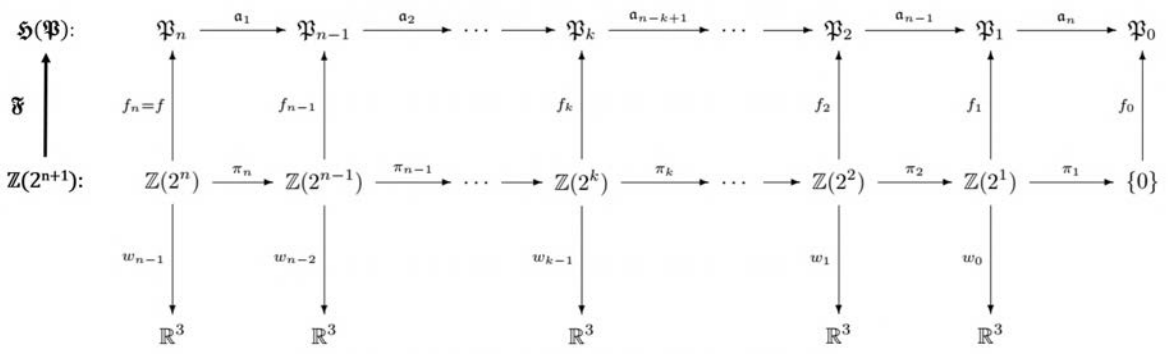


Рисунок 6.8 Диаграмма 2-адического морфогенеза.

Заметим, что в области индексов переход от дискретного тела $\mathfrak{P}_m$ к множеству двухточечных кластеров, являющихся образами диаметров правильного 2^m-угольника $\mathbb{Z}(2^m)$, в точности соответствует алгебраической операции факторизации кольца $\mathbb{Z}(2^m)$ по идеалу, порожденному элементом 2^{m-1}. Функция f_m естественным образом определяет функцию $f_{m-1} : \mathbb{Z}(2^{m-1}) \to \mathfrak{P}_{m-1}$, которая на каждом кластере принимает значение, равное центру тяжести входящих в него точек или, что то же самое, их среднему арифметическому. Функция f_{m-1} естественным образом поднимается до функции, определенной на кольце $\mathbb{Z}(2^m)$, которую мы будем обозначать тем же символом. Функция смещения определяется как разность $w_{m-1} = f_m - f_{m-1}$. Формулы вычисления центра тяжести и векторов смещения относительно него точек двухточечного кластера в точности соответствуют формулам преобразования Хаара. При этом весь процесс сжатия исходного дискретного тела $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_n$ в одноточечное/одноклеточное тело $\mathfrak{P}_0$, а также обратный обратный процесс возникновения тела $\mathfrak{P}_n$ из одноточечного/одноклеточного тела $\mathfrak{P}_0$ в результате n-шагового морфогенетического процесса описывается коммутативной диаграммой, показанной на рисунке 6.8.

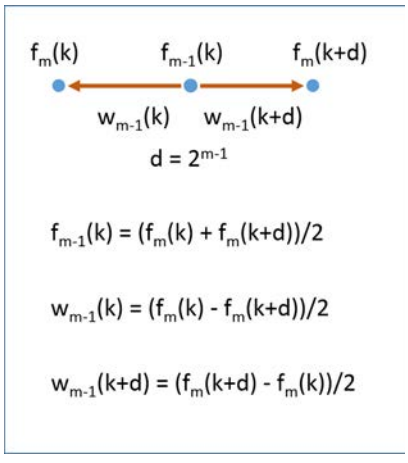


Рисунок 6.9

Поскольку $f_k = f_{k-1} + w_{k-1}$ и все функции f_k и w_k естественным образом поднимаются до функций, определенных на кольце вычетов $\mathbb{Z}(2^n)$, то имеет место следующее разложение

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} w_k + \mathfrak{av}(f).$$

Как было показано в предыдущих главах, последовательность связанных естественными гомоморфизмами колец вычетов $\mathbb{Z}(2^k)$, где $0 \leqslant k \leqslant n$, можно объединить в одно двоичное дерево $\mathbb{Z}(2^{n+1}) \simeq \mathbb{T}(2^{n+1})$. В этом случае все функции f_k объединяются в одну функцию $\mathfrak{F}$, которая отображает вершины этого двоичного дерева в трехмерное пространство.

$$\mathfrak{F} : \mathbb{Z}(2^{n+1}) \to \mathfrak{H}(\mathfrak{P}) = \bigcup_{k=0}^{n} \mathfrak{P}_k. \tag{140}$$

Функции смещения w_k естественным образом переносятся на ребра этого дерева и объединяются в одну функцию $\mathfrak{W}$. Пара функций $\langle \mathfrak{F}, \mathfrak{W} \rangle$, определенных соответственно на вершинах и ребрах дерева $\mathbb{T}(2^{n+1})$, кодирует всю историю как сжатия, так и обратного порождения дискретного тела $\mathfrak{P}$. Мы дальше будем называть данное дерево ***морфогенетическим деревом*** тела $\mathfrak{P}$, а пару функций $\langle \mathfrak{F}, \mathfrak{W} \rangle$ будем называть морфогенетической функцией. Каждая точка тела $\mathfrak{P}$ однозначно идентифицируется идущим к ней путем γ на морфогенетическом дереве. Сложение всех векторов смещения вдоль пути γ определяет финальное положение данной точки. В векторах смещения можно выделить четную и нечетную часть, которые соответствуют смещению вдоль четных и нечетных ребер дерева, которые соответствуют нулю и единице соответственно.

Для того, чтобы придать приведенным выше рассуждениям необходимую математическую строгость, нужно рассмотреть случай, когда исходное дискретное тело, а также результаты его последовательного сжатия, содержат пространственно совпадающие точки. Строго говоря, под дискретным телом следует понимать не само тело в трехмерном пространстве, а его параметризацию с помощью кольца вычетов $\mathbb{Z}(2^n)$.

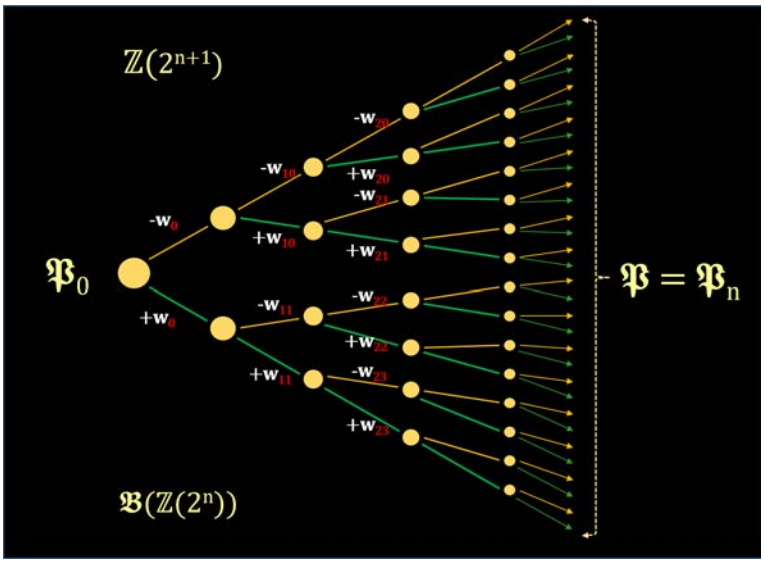


Рисунок 6.10 Морфогенетическое дерево, порождающее тело $\mathfrak{P}_n$ из точки $\mathfrak{P}_0$.

В этом случае вопрос с совпадающими точками решается естественным путем, так как каждой пространственной точке/клетке соответствует виртуальная точка, состоящая из пространственной точки и ее индекса. Это также позволяет уйти от предположения, что на каждом шаге все клетки должны разделится. Если какая-то клетка не делится, то можно считать, что она порождает две виртуальные клетки, пространственно совпадающие между собой. Для включения механизма уничтожения точек/гибели клеток нужно добавить к пространству $\mathbb{R}^3$ бесконечную точку $\{\infty\}$ и считать, что исчезающие точки уходят в бесконечность.

Дальнейшее развитие данного метода предполагает три возможных варианта:

(i) экспериментальное изучение реальных морфогенетических процессов с регистрацией их пространственных и временных параметров;

(ii) изучение программных моделей морфогенеза, которые претендуют на биологическую реалистичность и порождают биологически реалистические структуры, позволяя при этом регистрировать их пространственные и временные параметры;

(iii) создание математических «биоморфных объектов» и отработка на них чисто математических методов.

В рамках данной книги мы пойдем по третьему пути. Наличие морфогенетической функции наводит на мысль изучить 2-адический спектр отображений $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{W}$. Однако спектральный анализ, который является столь эффективным в одномерном случае, в данном не имеет биологического смысла, так как ритмичность роста биологических организмов носит сложный характер и не сводится к наложению круговых движений. Однако мы можем подойти к этому вопросу, начав наше рассмотрения с более простого случая формирования тела с осевой симметрией.

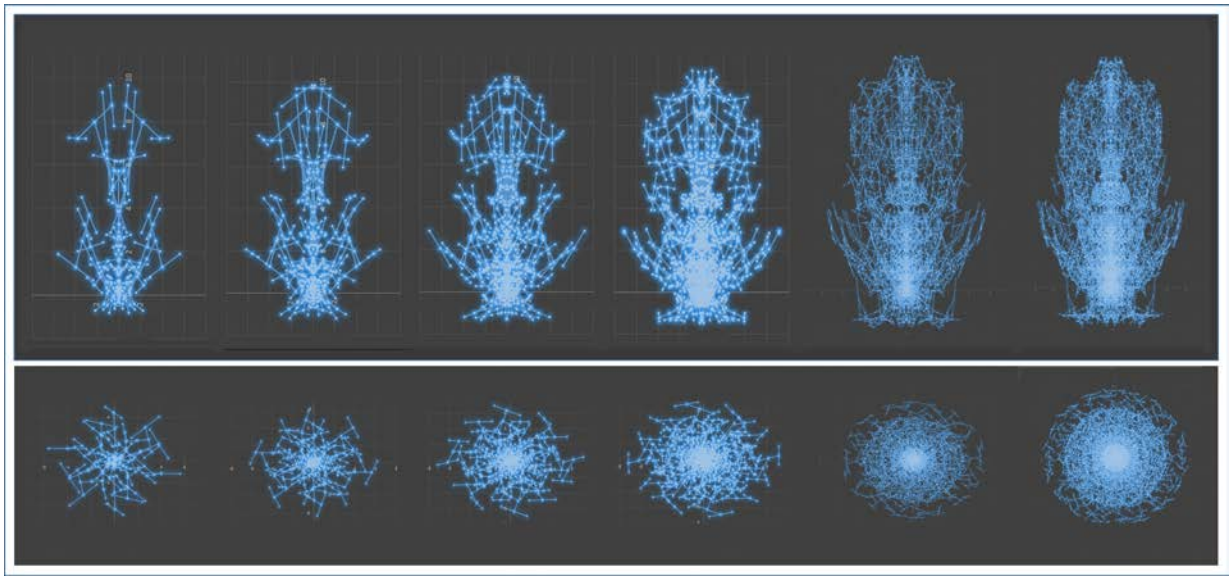


Рисунок 6.11 Пример 2-адического морфогенеза биоморфного тела вращения.

Такое тело можно рассматривать в цилиндрических координатах $\langle h, r, \phi \rangle$, при этом пару $\langle r, \phi \rangle$ можно объединить в одно комплексное число, полагая данное тело вложенным в

пространство $\mathbb{R}\oplus\mathbb{C}$, а его 2-адический Фурье спектр состоящим из двух комплекснозначных функций. На рисунках 6.11 и 6.12 приведены примеры проекции образа морфогенетического дерева на координатные плоскости по мере возрастания количества шагов для двух биоморфных объектов, полученных из некоторых кватернионных последовательностей.

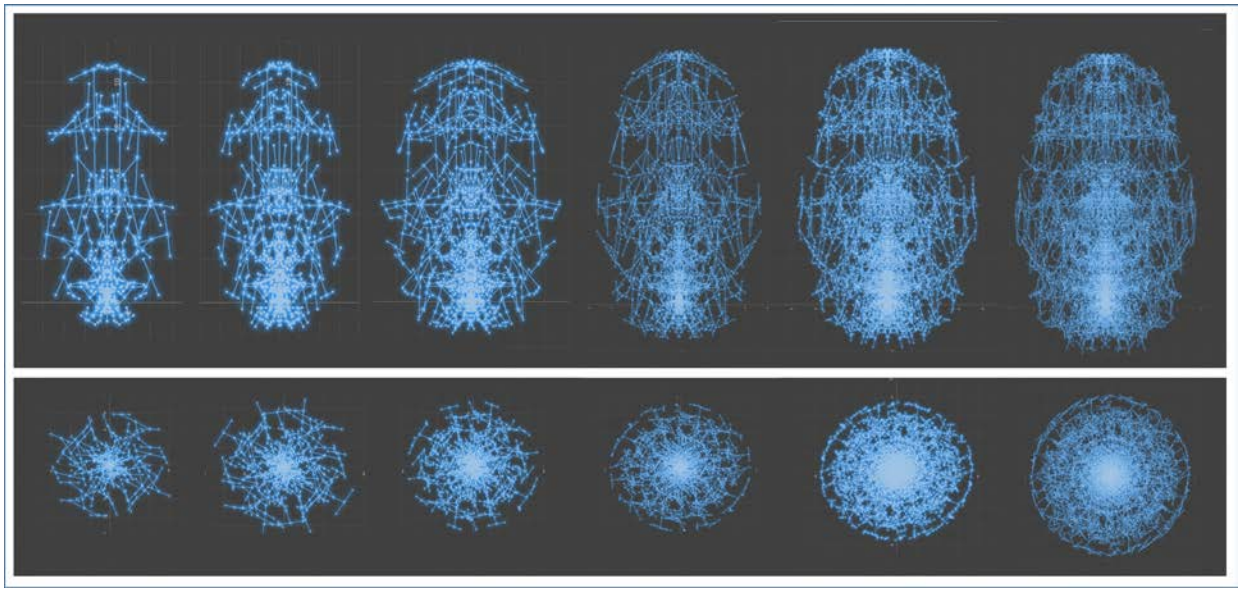


Рисунок 6.12 Пример 2-адического морфогенеза биоморфного тела вращения.

6.6 Символизм алгебраических формул

В этом параграфе мы рассмотрим физический символизм некоторых алгебраических формул, однако речь пойдет не о том их символизме, который относится к их содержанию, в том его смысле, в котором формула $y = v \cdot x$ является выражением равномерного движения по прямой со скоростью v, а о том символизме, который содержится внутри самой формулы и в самом способе ее раскрытия и разворачивания. Наиболее характерным случаем такого символизма является так называемый «бином Ньютона» и связанный с ним треугольник Паскаля. Нетрудно видеть, что в этой формуле в символическом виде закодирован процесс диффузии или процесс распространения тепла. Оба этих процесса описываются одним и тем же уравнением и наряду с процессом распространения волн относятся к числу наиболее фундаментальных физических процессов. Раскрытие формулы $(a + b)^n$ дает последовательность биномиальных коэффициентов, которые будучи отображены на графике в зависимости от показателя степени k при мономе $a^k b^{n-k}$ дают хорошо знакомую всем математикам картину, показанную на рисунке 6.13. Если положить в формуле бинома Ньютона $a = p$ и $b = 1 - p$, а затем раскрыть эту формулу, то коэффициенты при мономах $p^k(1-p)^{n-k}$, умноженные на значения этих мономов, дадут нам так называемое биномиальное распределение, то есть распределение вероятностей некоторой случайной величины, которая выражает собой вероятность k-кратного успеха при проведения серии из n независимых случайных испытаний, вероятность успеха каждого их которых равна p.

$$\mathscr{B}(p,n) = \{C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \mid k = 0, 1, \ldots, n\}.$$

Наглядной геометрической интерпретацией такой случайной величины является одномерная схема дискретного случайного блуждания, при котором некоторая частица совершает

в дискретные моменты времени случайные перемещения по прямой, при этом вероятность ее смещения на единицу вправо равна или влево равна соответственно p и $1-p$.

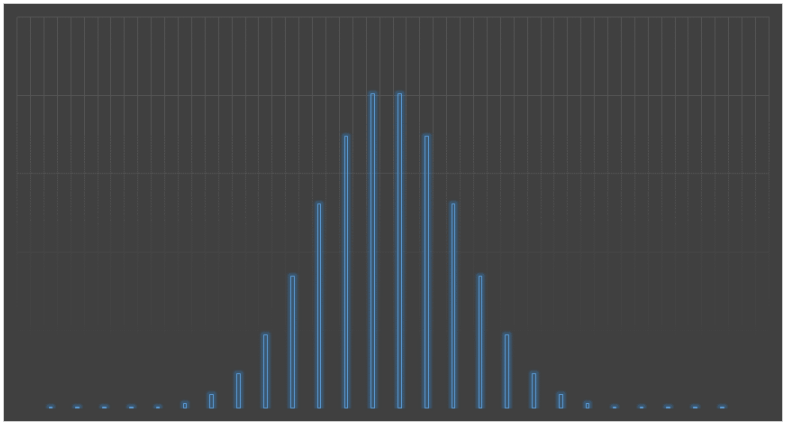


Рисунок 6.13 Диаграмма биномиального распределения при $n = 27$.

В этом случае k-кратный успеха означает смещение данной частицы на расстояние, равное $k-(n-k) = 2k-n$, а диаграмма распределения вероятностей на рисунке 6.13, показывает вероятность нахождения данной частицы в момент времени n в целочисленных точках из интервала $[-n, n]$. При возрастании показателя n данное дискретное распределение приближается к непрерывному нормальному распределению с плотностью распределения вероятности $\varrho(x, \mu, \sigma)$

$$\mathscr{B}(p, n) \to \mathscr{N}(np, np(1-p)),$$
$$\mathscr{N}(\mu, \sigma^2) : \varrho(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\big[-\frac{1}{2} \cdot \big(\frac{x-\mu}{\sigma}\big)^2\big],$$

что составляет содержание известной теоремы Муавра-Лапласа. Если в это выражение ввести параметр времени, то получившаяся функция от двух переменных t и x, которая является фундаментальным решением уравнения теплопроводности, то есть решением, которое удовлетворяет условию

$$\partial_t u(t, x) = a^2 \cdot \partial_{xx} u(t, x), \quad u(0, x) = \delta(x_0), \quad t \geqslant 0.$$
$$u(x, t, x_0, a) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \exp\big(-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{a\sqrt{2t}} \cdot \exp\big[-\frac{1}{2} \cdot \big(\frac{x-x_0}{a\sqrt{2t}}\big)^2\big].$$
$$u(x, t, x_0, a) = \varrho(x, x_0, a\sqrt{2t}).$$

Если это выражение перевести со сложного языка теории обобщенных функций на обычный язык, то данная формула означает, что при мгновенном впрыскивании некоторой субстанции в одномерную среду в точке с координатой x_0 (или что эквивалентно при прикосновении раскаленной иглой к натянутой проволоке) распределение субстанции/тепла по указанной одномерной среде будет описываться функцией $\varrho(x, x_0, a\sqrt{2t})$, где x и t есть соответственно пространственные и временные координаты рассматриваемого события. Входящая в приведенные выше формулы функция $e^{-x^2/2}$ знаменательна также тем, что она является неподвижной точкой одного из наиболее фундаментальных преобразований математики - преобразования Фурье:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} e^{-x^2/2} dx = e^{-\omega^2/2}.$$

Еще одной интересной особенностью бинома Ньютона и порождаемого им треугольника Паскаля является их фрактальность, которая проявляется, если привести все биномиальные коэффициенты по модулю некоторого числа n. На рисунке 6.14 показаны фрактальные структуры, которые возникают, когда число n меняется от 2 до 13.

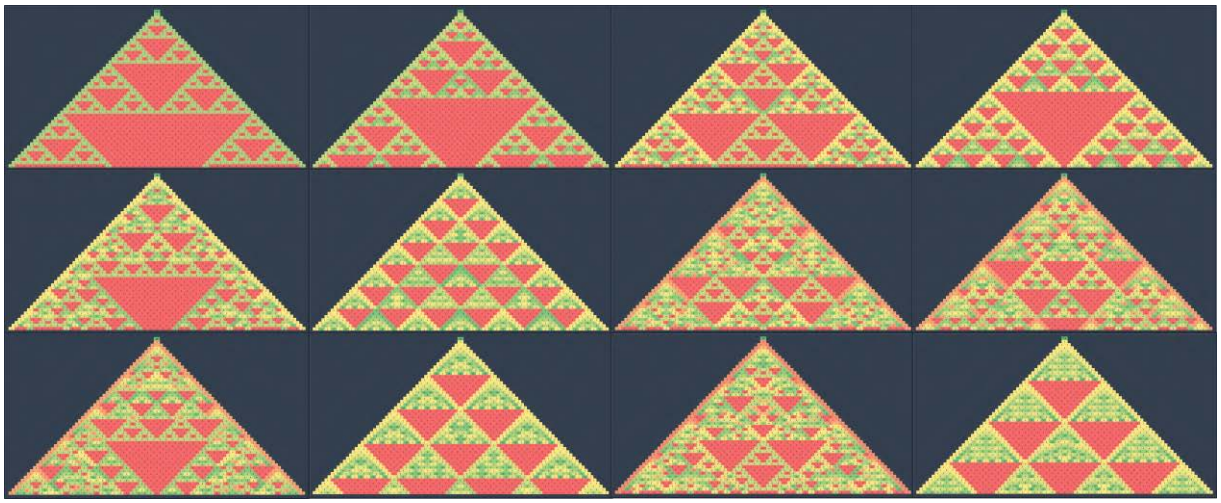


Рисунок 6.14 Треугольники Паскаля, приведенные по модулю n, где $2 \leqslant n \leqslant 13$.

6.7 Биоморфные формы и отображение рядов на фракталы

Термин «биоморфная форма» вряд ли может быть предметом точного определения, а само такое определение является скорее задачей психологии зрения. Мы будем понимать под «биоморфной формой» любой геометрический объект, который вызывает отчетливые ассоциации с формой биологических организмов или их отдельных органов.

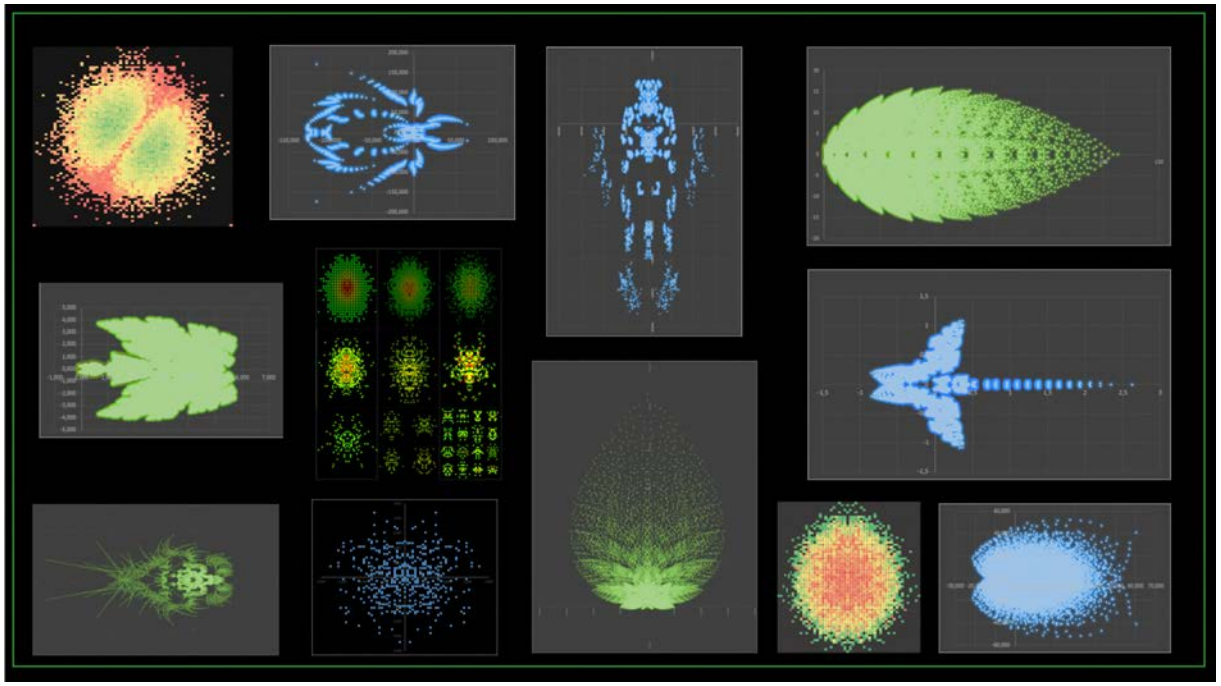


Рисунок 6.15 Примеры биоморфных форм.

Ввиду огромного разнообразия природного мира круг таких объектов оказывается достаточно широким. Примеры изображений, которые могут быть отнесены к биоморфным приведены на рисунке 6.15. Эти изображения объединяет то, что все они получены с помощью применения 2-адической арифметики. Приведенный в III главе пример отображения натурального ряда на двоичное дерево является частным случаем общей конструкции, которую можно назвать отображением числовых рядов и последовательностей на фракталы и которая является богатым источником различных (в том числе и биоморфных) геометрических форм. Данные формы могут быть получены за счет применения к данным объектам различных алгоритмов включая:

(1) двоичную кластеризацию;

(2) преобразование Фурье и

(3) преобразование Хаара.

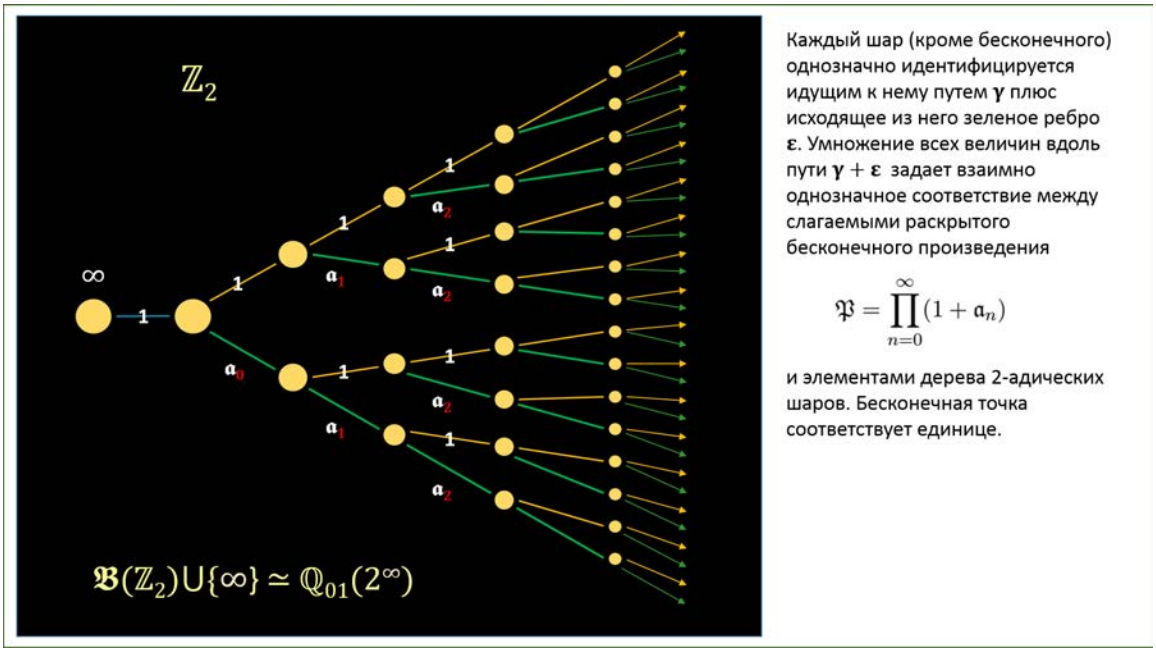


Рисунок 6.16 Отображение бесконечного произведения на кольцо $\mathbb{Z}_2$.

Примеры построения таких форм будут далее приведены в настоящей книге. Друге примеры можно найти в статьях ([41]) и ([42]). Богатым источником клеточных структур являются 2-адические спектры бесконечных произведений и бесконечных сумм, а также 2-адические спектры числовых рядов, которые с помощью инверсного отображения преобразуются в функции определенные на двоичном дереве. При выборе подходящих объектов такого рода среди их спектров часто встречаются биоморфные формы. Механизм конструирования таких форм включает в себя несколько шагов:

(i) Отображение элементов выбранной структуры на множество вершин двоичного дерева или, что тоже самое, на множество 2-адических шаров. В случае произведений это осуществляется с помощью их раскрытия. В случае рядов используется инверсное отображение;

(ii) Отождествление множества вершин двоичного дерева с элементами группы $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty)$ и преобразование исходного объекта в функцию $f : \mathbb{Q}_{01}(2^\infty) \to \mathbb{C}$;

(iii) Вычисление преобразования Фурье: $\mathbf{F}[f] : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}$ от самой функции f или от ее действительной или мнимой части;

(iv) Выбор подходящего параметра δ и преобразование полученного результата в клеточную структуру с помощью оператора $\mathfrak{O}_\delta$, описанного выше.

Процесс отображения бесконечных произведений на двоичное дерево более подробно показан на рисунке 6.16.

VII. Инварианты процессов дихотомического деления

В 1872 году молодой Феликс Клейн (1849-1925) выступил в Эрлангенском университете с методологическим докладом, который назывался «Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen» (Сравнительный обзор новых геометрических исследований) и был посвящен утверждению Клейна в должности профессора этого университета. Основные тезисы этого доклада вошли в историю математики как Эрлангенская программа Клейна ([43]). Согласно тезисам Клейна: (1) каждая геометрия характеризуется своей группой преобразований; (2) геометрическое свойство объекта это то его свойство, которое сохраняется при действии преобразований из данной группы; (3) геометрия занимается изучением тех свойств объектов, которые являются инвариантными относительно определенной группы преобразований. В этом параграфе мы посмотрим с точки зрения Эрлангенской программы на объекты, возникающие в результате процессов дихотомического деления. Мы также предпримем попытку посмотреть с этой точки зрения на понятие «гомологии», не претендуя, однако, на его математическую формализацию. В соответствии с описанной выше моделью дихотомического деления, этот процесс в самой его общей форме можно описать с помощью функций, определенных на группе $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty)$ и на кольце $\mathbb{Z}_2$. Мы построим инварианты морфологических процессов как объекты, инвариантные относительно действия группы изометрий кольца целых 2-адических чисел. В отличие от инвариантов механики, которые представляют собой функции, определенные на фазовом пространстве системы, ***морфологические инварианты будут определены нами как изображения, последовательности изображений или даже как последовательности знаков***.

7.1 2-Адические гештальты

Пусть $\mathfrak{G}$ обозначает группу изометрических отображений метрического пространства $\mathbb{Z}_2$ в себя. Очевидно, что действие группы $\mathfrak{G}$ переставляет 2-адические шары между собой, сохраняя при этом их радиус. Поскольку дерево 2-адических шаров изоморфно полному планарному бинарному дереву $\mathbb{T}_2$, то группа $\mathfrak{G}$ также действует автоморфизмами на дереве $\mathbb{T}_2$. Легко доказывается тот факт, что каждый автоморфизм планарного дерева $\mathbb{T}_2$ порождает некоторую изометрию метрического пространства $\mathbb{Z}_2$. Таким образом, группа изометрий метрического пространства $\mathbb{Z}_2$ совпадает с группой автоморфизмов планарного двоичного дерева $\mathbb{T}_2$. Группу $\mathfrak{G}$ можно представить как проективный предел последовательности групп:

$$\mathfrak{G}_0 \xleftarrow{\pi_0} \mathfrak{G}_1 \xleftarrow{\pi_1} \mathfrak{G}_2 \xleftarrow{\pi_2} \cdots \xleftarrow{\pi_{n-1}} \mathfrak{G}_n \xleftarrow{\pi_n} \cdots \xleftarrow{\{\rho_k\}} \mathfrak{G}, \tag{141}$$

где группа $\mathfrak{G}_n$ представляет собой группу изометрий кольца $\mathbb{Z}(2^n)$, которая тождественна группе автоморфизмов полного двоичного дерева, имеющего $n+1$ уровень (см. Предложение 8.1 ниже). На группе $\mathfrak{G}$ естественным образом определяется метрика, которая превращает $\mathfrak{G}$ в некоммутативную топологическую группу. В качестве множества шаров, являющихся окрестностями единицы, выступают подгруппы группы $\mathfrak{G}$, тождественным образом действующие на всех уровнях дерева $\mathbb{T}_2$ до n-ого уровня включительно. Радиус такого шара полагается равным $1/2^n$. Группы $\mathfrak{G}_n$ представляют собой один из самых быстро растущих объектов физически реальной математики. Мощность множества $\mathfrak{G}_n$ равна 2^{2^n-1}. Группа $\mathfrak{G}$ естественным образом действует на множестве функций $\mathscr{F}(\mathbb{Z}_2;\mathbb{V})$ по принципу $\mathfrak{g}[f](x) = f(\mathfrak{g}x)$, где $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$, а $\mathbb{V}$ есть некоторое числовое кольцо. Под действием этой группы множество функций $\mathscr{F}(\mathbb{Z}_2;\mathbb{V})$ естественным образом разбивается на

классы эквивалентности $\mathscr{F}(\mathbb{Z}_2;\mathbb{V})/\mathfrak{G}$. Далее нас будет в основном интересовать множество *финитных* функций $\mathscr{F}_0(\mathbb{Z}_2;\mathbb{V})$ и его фактор множество $\mathscr{F}_0(\mathbb{Z}_2;\mathbb{V})/\mathfrak{G}$. Поскольку функции множества $\mathscr{F}_0(\mathbb{Z}_2;\mathbb{V})$ описывают финальный результат некоторого процесса дихотомического деления, то функции, эквивалентные относительно действия группы $\mathfrak{G}$, описывают морфологически идентичные объекты, а сами классы эквивалентности соответствуют всем возможным результатам течения такого процесса. Вполне естественным является вопрос об инвариантах этого процесса, которые характеризуют данные классы эквивалентности. Мы построим эти инварианты в виде «k-мерных изображений», то есть в виде финитных функций, определенных на k-мерных целочисленных сетках/решетках $\mathbb{Z}^k$ и принимающих значения в множестве натуральных чисел. Двумерную целочисленную решетку $\mathbb{Z}^2$ мы будем рассматривать как дискретную плоскость с координатными осями $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$. Поскольку речь идет о финитных функциях, то очевидно достаточно ограничиться рассмотрением эквивалентности функций из множества $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(2^n);\mathbb{V})$ под действием группы $\mathfrak{G}_n$.

Пусть $f, g \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}(2^n);\mathbb{Z})$. Легко видеть, что подпространства $\mathscr{C}_k$ и $\mathscr{A}_k$ симметрических и асимметрических функций, введенные нами выше, инвариантны относительно действия группы $\mathfrak{G}_n$, поэтому необходимым (но не достаточным) условием эквивалентности двух функций f и g относительно действия группы $\mathfrak{G}_n$ является эквивалентность относительно действия этой группы проекций этих функций на любые подпространства $\mathscr{C}_k$ и $\mathscr{A}_k$. Пусть функции f и g эквивалентны и

$$f = \sum_{k=1}^{n} f_k/2^{k+1} + \mathfrak{av}(f), \qquad g = \sum_{k=1}^{n} g_k/2^{k+1} + \mathfrak{av}(g) \tag{142}$$

есть соответствующие разложения Фурье-Хаара. Тогда функции $f_k, g_k \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}(2^n);\mathbb{Z})$ эквивалентны для любого индекса k, где $1 \leqslant k \leqslant n$, и

$$f_k, g_k \in \mathscr{A}_k, \quad \mathfrak{av}(f), \mathfrak{av}(g) \in \mathscr{C}_0.$$

Напомним, что это условие означает, что функции f_k и g_k постоянны на шарах радиуса $1/2^k$ и имеют нулевое среднее по любому шару большего радиуса.

Пусть $f \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}(2^n);\mathbb{Z})$ и $J = \langle 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n\rangle$ есть упорядоченный по возрастанию индексов k-мерный мультииндекс, все индексы которого различны. Определим функцию f_J следующим образом

$$f_J = \langle f_{i_1}, f_{i_2}, \ldots f_{i_k}\rangle : \mathbb{Z}(2^n) \to \mathbb{Z}^k,$$

$$f_J(x) = \langle f_{i_1}(x), f_{i_2}(x), \ldots f_{i_k}(x)\rangle,$$

где функции $\{f_{i_k}\}$ есть компоненты функции f в ее разложении Фурье-Хаара вида (142).

Определение. 2-адическим гештальтом типа I функции f относительно мультииндекса J будем называть множество значений функции f_J в $\mathbb{Z}^k$. Будем обозначать этот объект символом $\Omega_f(J)$. В определенных случаях мы будем отождествлять множество $\Omega_f(J)$ с его характеристической функцией и понимать этот объект как отображение:

$$\Omega_f(J) : \mathbb{Z}^k \to \{0, 1\}.$$

В частности, в случае двумерного мультииндекса J мы будем трактовать $\Omega_f(J)$ как черно-белое растровое изображение. Обозначение $\Omega_f(\langle i,j\rangle)$ будет далее сокращаться до $\Omega_f(i,j)$.

Определение. 2-адическим гештальтом типа II функции f относительно мультииндекса J будем называть множество значений функции f_J в $\mathbb{Z}^k$ с учетом их кратности. Будем обозначать этот объект символом $\mathfrak{N}_f(J)$. Другими словами, $\mathfrak{N}_f(J)$ представляет собой отображение:

$$\mathfrak{N}_f(J) : \mathbb{Z}^k \to \mathbb{N},$$

где $\mathfrak{N}_f(J)[m]$ обозначает количество раз, которое функция f_J принимает значение m. В случае двумерного мультииндекса J, мы также будем иногда трактовать $\mathfrak{N}_f(J)$ как цветное изображение, представление которого может меняться, в зависимости от кодировки цветовой шкалы. Имеет смысл также говорить о гештальтах типа I и II любых подмножеств в $\mathbb{Z}(2^n)$, понимая под ними гештальты характеристических функций этих подмножеств. Отметим, что для анализа данных изображений может быть использован весь существующий инструментарий теории анализа и обработки изображений. Имеет место следующая теорема.

Теорема 7.1 Пусть f и g есть функции из множества $\mathscr{F}(\mathbb{Z}(2^n);\mathbb{Z})$, и пусть

$$J = \langle 1 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_k \leqslant n\rangle$$

есть упорядоченный по возрастанию индексов k-мерный мультиндекс, все индексы которого различны. Если функции f и g эквивалентны относительно действия группы $\mathfrak{G}_n$ изометрий кольца $\mathbb{Z}(2^n)$, то для любого мультииндекса J их гештальты типа I и типа II совпадают, то есть

$$\Omega_f(J) = \Omega_g(J) \text{ и } \mathfrak{N}_f(J) = \mathfrak{N}_g(J).$$

Для любой функции $f \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}(2^n);\mathbb{Z})$ все изображения в последовательностях

$$\Omega_f(1,2), \Omega_f(2,3), \Omega_f(3,4), \ldots, \Omega_f(n-1,n)$$

и

$$\mathfrak{N}_f(1,2), \mathfrak{N}_f(2,3), \mathfrak{N}_f(3,4), \ldots, \mathfrak{N}_f(n-1,n)$$

являются билатерально симметричными относительно прямой $\mathfrak{X} = 0$. При этом эквивалентные относительно действия группы $\mathfrak{G}_n$ функции порождают идентичные последовательности изображений.

Доказательство. Пусть $f \sim g$ обозначает эквивалентность функций f и g относительно действия группы $\mathfrak{G}_n$. Если для функций f и g дано разложение Фурье-Хаара (142), то как было показано выше, условие $f \sim g$ влечет за собой $f_k \sim g_k$ для любого $1 \leqslant k \leqslant n$. Следовательно, для любого мультииндекса J имеет место эквивалентность $f_J \sim g_J$, из которой очевидно следует совпадение множеств $\Omega_f(J)$ и $\Omega_g(J)$. Билатеральная симметричность этих множеств в случае двумерного мультииндекса $J = \langle k, k+1\rangle$ очевидным образом следует из рассмотрения рисунка 4.12, из которого видно, что множество $\Omega_f(J)$ состоит из пар точек вида $\{(-x,y),(x,y)\}$. ⊠

Если интерпретировать функцию f как функцию, определяющую распределение субстанции, массы или информации, то указанные выше последовательности изображений представляют собой визуализацию на плоскости процесса распределения по двоичному дереву субстанции, массы или информации, которое определяется функцией f.

Определение. Пусть $f \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}(2^n);\mathbb{Z})$, S есть некоторое подмножество в $\mathbb{Z}(2^n)$, и J есть мультииндекс размерности k. Будем называть сигнатурой типа I множества S относительно мультиндекса J и функции f образ множества S, возникающий при отображении $f_J : \mathbb{Z}(2^n) \to \mathbb{Z}^k$. Будем обозначать этот объект символом $\Omega_f(J|S)$. Аналогичным образом определим сигнатуру типа II с учетом кратности значений, принимаемых функций f_J. Будем обозначать соответствующую сигнатуру типа II символом $\mathfrak{N}_f(J|S)$.

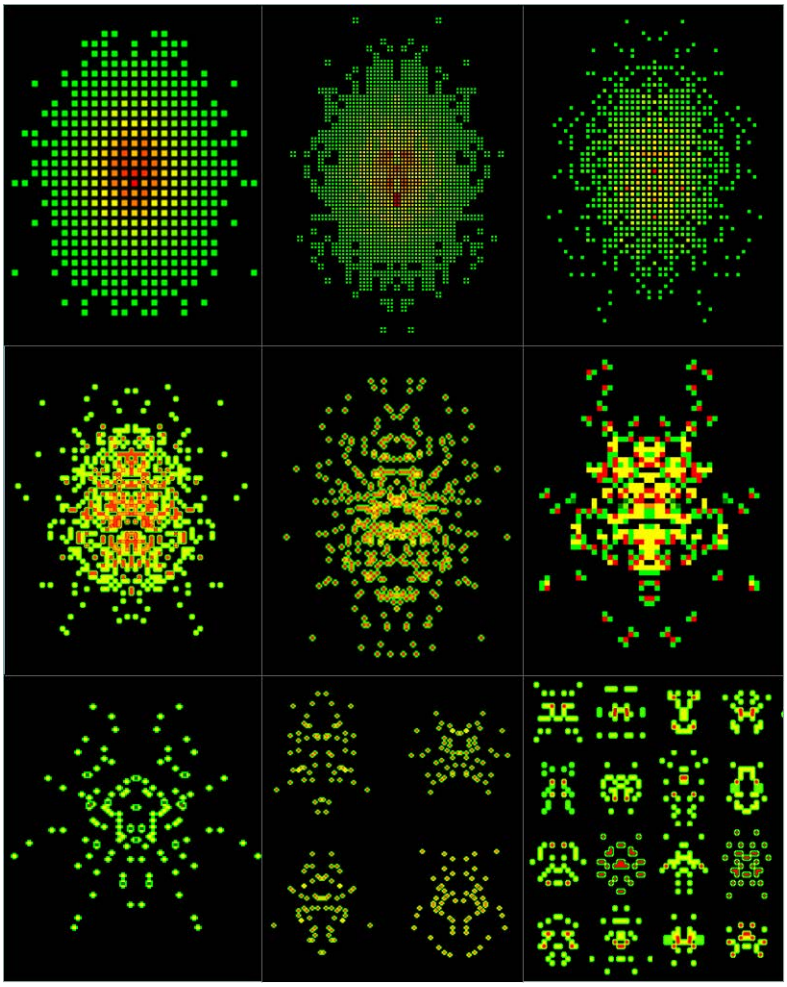


Рисунок 7.1 Примеры морфологических инвариантов.

Из определения морфологических инвариантов очевидно следует, что любой функции $f \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}(2^n);\mathbb{Z})$ и любому разложению некоторого подмножества $\mathrm{S} \subseteq \mathbb{Z}(2^n)$ на непересекающиеся подмножества $\{S_i\}$ соответствует разложение соответствующих сигнатур функции f в систему накладывающихся друг на друга бинарных изображений.

$$S = \bigvee_{i\in I} S_i \;\; \to \;\; \Omega_f(J|S) = \bigvee_{i\in I} \Omega_f(J|S_i),$$

где знак $\bigvee$ обозначает логическое «или», применяемое к бинарным изображениям. Это позволяет анализировать с помощью сигнатур распределения значений функции f на этих подмножествах. Имеет смысл также говорить о сигнатурах самих подмножеств в $\mathbb{Z}(2^n)$, понимая под ними сигнатуры характеристических функций этих подмножеств. Для проведения такого анализа может быть использован весь существующий инструментарий анализа и обработки изображений.

В дальнейшем мы будем употреблять термин «2-адический гештальт» в обобщенном смысле, понимая под этим терминам образы различных множеств, возникающие при отображениях вида $f_J : \mathbb{Z}(2^n) \to \mathbb{Z}^L$. В дальнейшем нам в основном будут интересовать 2-адические гештальты (или сигнатуры), возникающие при действии функций f_J с двумерным мультииндексом $J = \{k, k+1\}$ на 2-адические шары радиуса $1/2^m$, где $k < m+1$. Пусть J_1 и J_2 есть два мультиндекса. Будем говорить, что между ними имеет место соотношение $J_1 \leqslant J_2$, если $j_1 \leqslant j_2$ для любых $j_1 \in J_1$ и $j_2 \in J_2$. Если шар $\mathfrak{b}$ имеет радиус $1/p^k$, то для любого L-мерного индекса J, такого, что $J \leqslant k$ сигнатура $\Omega(J|\mathfrak{b})$ шара $\mathfrak{b}$ состоит из единственной точки целочисленной решетки $\mathbb{Z}^L$. Если $k \leqslant J$, то сигнатура шара $\Omega(J|\mathfrak{b})$ представляет собой L-мерное изображение. В частности если 2-адический шар $\mathfrak{b}$ представляется в виде объединения нескольких 2-адических шаров $\{\mathfrak{b}_i\}$ радиуса $1/2^k$, то для любого мультииндекса J, такого, что $k \leqslant J$, определены соответствующие сигнатуры $\Omega_f(J|\mathfrak{b}_i)$ и $\Omega_g(J|\mathfrak{b}_i)$. Данные последовательности изображений отличаются только перестановкой в том случае, если $f|\mathfrak{b} \sim g|\mathfrak{b}$. Аналогичным образом можно сравнивать и анализировать с помощью сигнатур ограничения $f|\mathfrak{b}_0 \sim f|\mathfrak{b}_1$ одной и той же функции f на различные шары одинакового радиуса. Рассмотрим целочисленную функцию f, заданную на кольце $\mathbb{Z}(2^n)$, которое представлено в виде объединения 2-адических шаров радиуса $1/2^l$ в количестве 2^{n-l}. Путь $J = \{k, k+1\}$ есть двумерный мультииндекс и $k+1 < l$. Тогда 2-адический гештальт $\Omega_f(k, k+1)$ можно представить в виде объединения 2^{n-l} 2-адических гештальтов типа I, соответствующих отдельным 2-адических шарам:

$$\Omega_f(k, k+1) = \bigvee_{i=0}^{2^{n-l}-1} \Omega_f(k, k+1|\mathfrak{b}_i).$$

Аналогичное соотношение имеет место для гештальтов типа II:

$$\mathfrak{N}_f(k, k+1) = \sum_{i=0}^{2^{n-l}-1} \mathfrak{N}_f(k, k+1|\mathfrak{b}_i).$$

Мы рассмотрим примеры таких разложений в следующем параграфе. Данный вопрос также подробно рассматривается в статье ([41]).

Теорема 7.1 была сформулирована нами для целочисленных функций, однако она легко обобщается на случай функций, принимающих любые рациональные или вещественные значения. Для этого нужно заменить разложение (142) на разложение

$$f = \sum_{k=1}^{n+1} \overline{f}_k, \quad \overline{f}_k = f_k/2^{k+1}, \overline{f}_{n+1} = f_{n+1}/2^n.$$

Далее предположим, что $|f| \leqslant \mathrm{M}$, тогда очевидно, что $|\overline{f}_k| \leqslant \mathrm{M}$ при любом k, так как все функции f_k получаются усреднением разбитых на блоки значений функции f, взятых

со знаком ± 1. Выберем далее некоторое разрешение res и будем округлять все значения наших функций с точностью до величины M/res. Пусть функция $\widehat{f}_k$ есть результат такого округления. Тогда заменяя функцию f_J на функцию

$$\widehat{f}_J = \langle \widehat{f}_{i_1}, \widehat{f}_{i_2}, \dots \widehat{f}_{i_k} \rangle : \mathbb{Z}(2^n) \to \mathbb{L}^k,$$

мы получим функцию, принимающую значения в дискретной решетке $\mathbb{L}^k$ с размером ячейки равным M/res. Такая решетка изоморфна решетке $\mathbb{Z}^k$. Таким образом, общий случай сводится с целочисленному.

Определение. Будем называть две функции $f, g \in \mathscr{F}(\mathbb{Z}(2^n); \mathbb{R})$ ε-гомологичными, если существует такая изометрия $\mathfrak{g}$ кольца $\mathbb{Z}(2^n)$, что

$$|\mathfrak{g}(x) - f(\mathfrak{g}(x))| \leqslant \varepsilon \quad \text{для любого } x \in \mathbb{Z}(2^n).$$

Теорема 7.1 дает необходимый критерий ε-гомологичности любых двух последовательностей, состоящих их 2^n вещественных чисел. Очевидно, что суммы значений двух гомологичных последовательностей должны совпадать. Если это не так, то последовательность, сумма которой по модулю минимальна, можно умножить на соответствующий коэффициент, а затем сравнивать последовательности с одинаковой суммой. Можно также сравнивать две последовательности разной длины, при условии, что оба этих значения являются степенью двойки. Для этого нужно продублировать каждый член более короткой последовательности необходимое количество раз, чтобы длины обеих последовательностей совпадали. Теорема 7.1 также дает необходимый критерий гомологичности подпоследовательностей одной и той же последовательности, а также необходимый критерий гомологичности функций, определенных на ребрах или на вершинах двоичных деревьев. Если $f : T \to \mathbb{R}$ есть некоторая функция, определенная на вершинах дерева двоичного дерева T, а T_0 и T_1 есть два подмножества вершин, состоящие из 2^n вершин, являющихся потомками в n-ом поколении двух вершин v_0 и v_1, то можно также говорить о гомологичности последовательностей $f(T_0)$ и $f(T_1)$, а также о гомологичности тех структур, которые эти последовательности порождают.

Определения 2-адических гештальтов первого и второго рода была нами даны применительно к кольцу $\mathbb{Z}(2^n)$ с определенной на нем 2-адической метрикой и с соответствующей этой метрике группой изометрий $\mathfrak{G}_n$, а также для определенных на этом кольце пространств симметрических и асимметрических функций. В параграфе 3.2 мы определили на кольце $\mathbb{Z}(2^n)$ блочную 2-адическую метрику, шарами которой являются последовательно идущие блоки чисел, состоящие из 2^k элементов, где $0 \leqslant k \leqslant n$. Данной метрике также соответствует аналогичная группа изометрий $\mathfrak{G}'_n$ и пространства симметрических и асимметрических функций. Эти два метрических пространства связаны изометрическим инверсным отображением **Inv**, которое индуцирует изоморфизм групп $\mathfrak{G}_n$ и $\mathfrak{G}'_n$, действующий по принципу $\mathfrak{g} \to \mathbf{Inv}^{-1} \circ \mathfrak{g} \circ \mathbf{Inv}$. Все определения, рассуждения и доказательства из этой главы без изменений переносятся на блочно 2-адический случай с заменой 2-адических шаров на 2-адические блоки и с соответствующей интерпретацией асимметрических и симметрических функций.

Даже поверхностное изучение литературы, посвященной обработке и классификации изображений, наводит на мысль о том, что единого метода распознавания и классификации

изображений не существует. Поэтому вовлечение в математику инвариантов в форме изображений, приводит нас к вопросам психологии зрения и семиотики, а также и напоминает об известном «споре» между Гете и Ньютоном о природе света. Этот спор имел под собой глубокую философскую основу и породил в истории философии обширную комментаторскую литературу. Методология интеллектуального созерцания - Intellectualle Anschauung ([38]), которую Гете в свое время весьма успешно применил в области биологии, может быть сегодня переосмыслена по новому в области визуализации данных, так как наличие большого количество технических и алгоритмических средств визуализации данных позволяет увидеть некоторые явления еще то того, как они будут математически формализованы.

7.2 2-Адические гештальты псевдослучайных последовательностей

В этом параграфе мы рассмотрим 2-адические гештальты, порождаемые псеводослучайными двоичными последовательностями, которые получаются разложением некоторого иррационального числа в двоичную дробь. Рассмотрим изображение, представленное на рисунке 7.2.

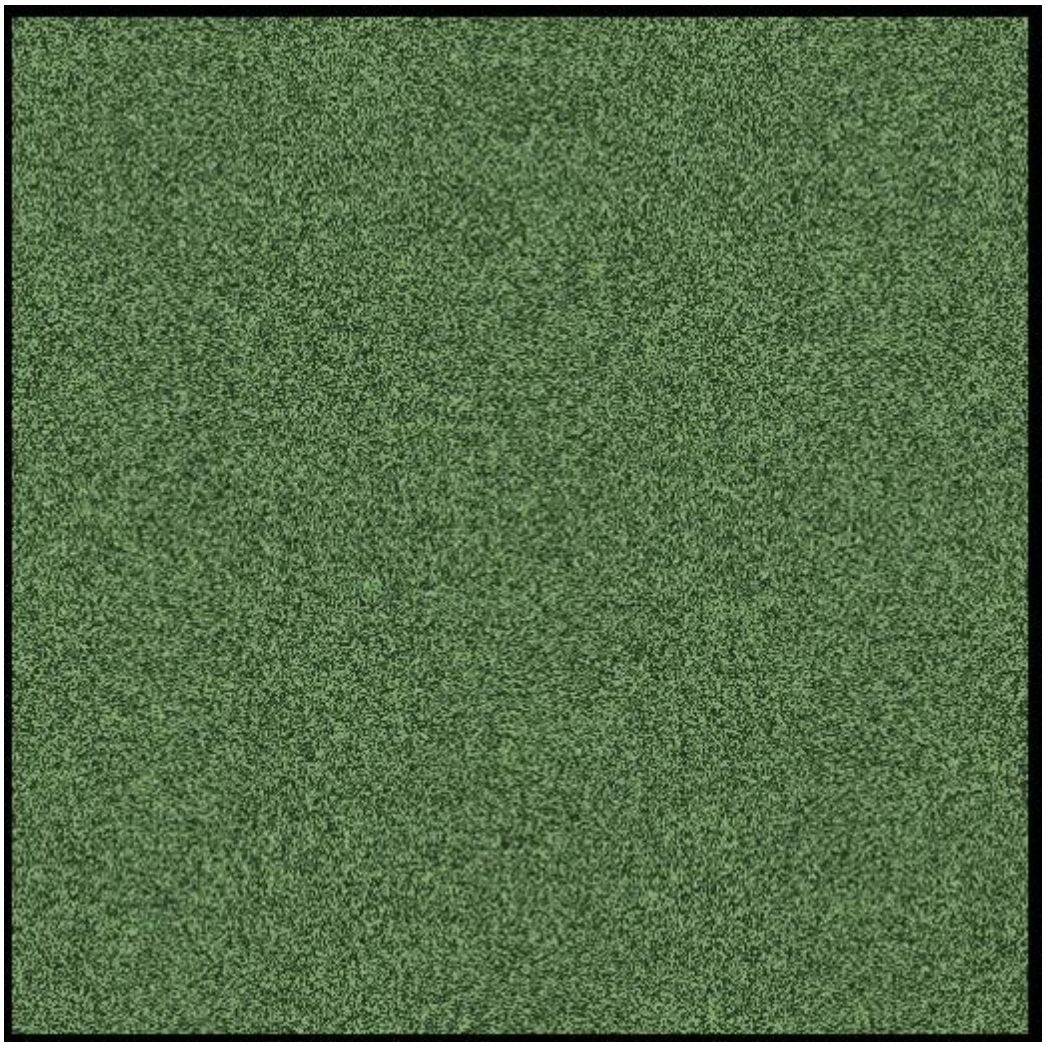


Рисунок 7.2 Дробная часть числа $\sqrt{5}$, вычисленная с точностью до $2^{22} = 4\ 194\ 304$ двоичных знаков после запятой.

В зависимости от его расцветки так могла бы выглядеть какая-нибудь природная текстура, например, поверхность камня, песчаный берег или участок тундры, снятый с высоты птичьего полета. Однако эта, на первый взгляд, хаотическая и случайная последовательность точек представляет собой четырехградационное монохроматическое изображение размера 512×512, которое содержит 2^{22} битов информации, полученных путем разложения в двоичную дробь дробной части числа $\sqrt{5}$. Данная битовая строка упакована в двухбитовые слова, которые представлены четырьмя градациями цвета и записаны построчно в матрицу размера 512×512.

□ Двоичную последовательность, полученную разложением вещественного числа ξ в двоичную дробь с точностью до n знаков после запятой будем обозначать символом $\mathscr{D}(\xi, n)$.

В соответствии с этим обозначим описанную выше строку символом $\mathscr{D}(\{\sqrt{5}\}, 2^{22})$. Со строкой $\mathscr{D}(\{\sqrt{5}\}, 2^{22})$ можно связать движение гипотетической броуновской частицы, которая в нулевой момент времени находится в точке 0, а затем в каждый момент времени n перемещается на единицу вперед или назад в зависимости от значения n-ого двоичного знака после запятой в разложении числа $\sqrt{5}$ в двоичную дробь, полагая при этом, что ноль соответствует движению назад, а единица - движению вперед. Зависимость положения такой частицы от времени за первые 2^{22} такта показана на рисунке 7.3.

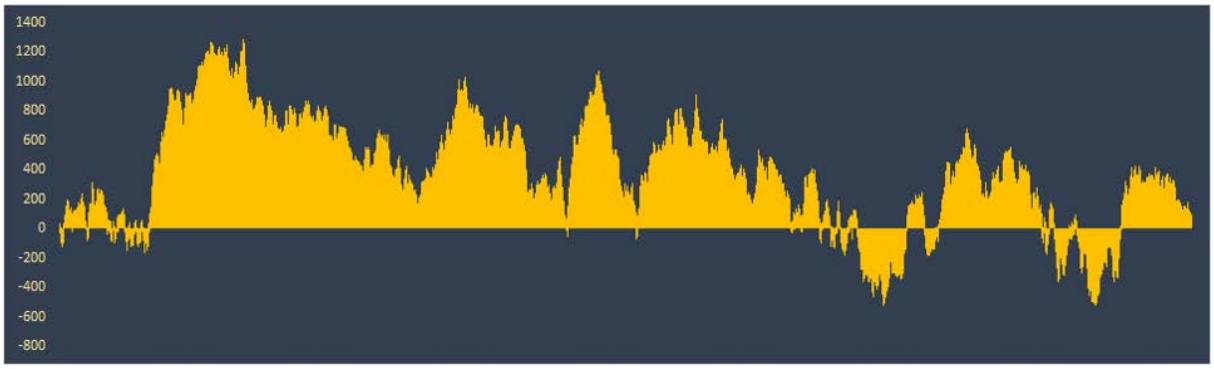


Рисунок 7.3 График движения «броуновской частицы», которая соответствует дробной части числа $\sqrt{5}$, вычисленной с точностью до 2^{22} двоичных знаков после запятой.

Зафиксируем некоторый дискретный интервал времени τ и посмотрим, на какое расстояние перемещается наша частица за τ тактов, то есть за каждый интервал времени протяженности τ, который принадлежит промежутку $[1, 2^{22}]$. Каждому такому интервалу соответствует двоичное слово длины τ, являющееся подсловом в слове $\mathscr{D}(\{\sqrt{5}\}, 2^{22})$. Существует всего 2^τ таких слов, которые можно проиндексировать натуральными числами от 0 до $2^\tau - 1$. Диаграмма частоты вхождения этих слов в слово $\mathscr{D}(\{\sqrt{5}\}, 2^{22})$ при $\tau = 10$ показана на рисунке 7.4. Величину смещения нашей частицы за τ тактов можно рассматривать как дискретную случайную величину. Обозначим ее символом $\mathrm{Sq5}(\tau, 2^{22})$. Диаграмма на рисунке 7.4 показывает, что все двоичные слова длины τ входят в слово $\mathscr{D}(\{\sqrt{5}\}, 2^{22})$ приблизительно с одинаковой частотой, откуда следует, что величина $\mathrm{Sq5}(\tau, 2^{22})$ приблизительно подчиняется биномиальному распределению $\mathscr{B}(\tau, 1/2)$, которое получается группировкой одинаковых степеней переменных p и q в разложении

$$(p+q)^\tau = \sum_{k=0}^{\tau} C_\tau^k p^k q^{\tau-k}, \qquad p = q = \frac{1}{2}. \tag{143}$$

Действительно, если провести сопоставление $p \to 0$ и $q \to 1$, то каждому моному в разложении (143) будет соответствовать некоторое двоичное слово, например,

$$p^3q^3p^4q \to 00011100001.$$

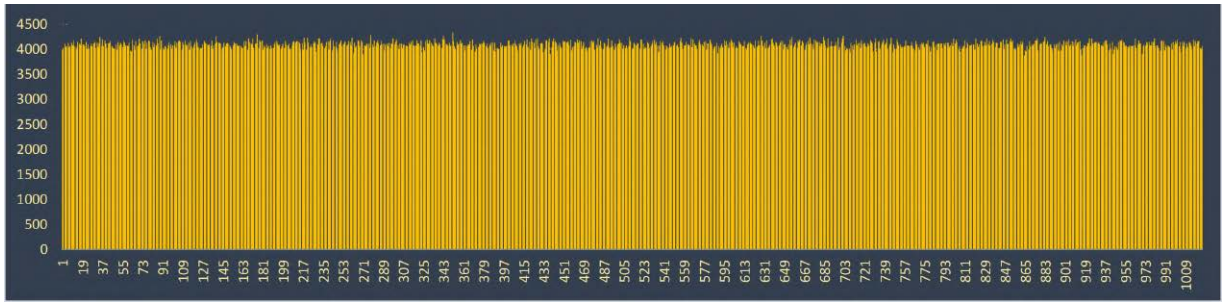


Рисунок 7.4 Частота вхождений двоичных слов длины 10 в слово $\mathscr{D}(\{\sqrt{5}\}, 2^{22})$.

При этом словам, которые приводятся к одинаковым степеням переменных p и q, будет соответствовать одинаковое смещение нашей частицы. Каждому приведенному выражению вида $p^kq^{\tau-k}$ будет соответствовать движение частицы на k единиц назад и на $\tau - k$ единиц вперед. Сравнительный график плотности распределения дискретных случайных величин $\mathrm{Sq5}(\tau = 10, 2^{22})$ и $\mathscr{B}(10, 1/2)$ показан на рисунке 7.5.

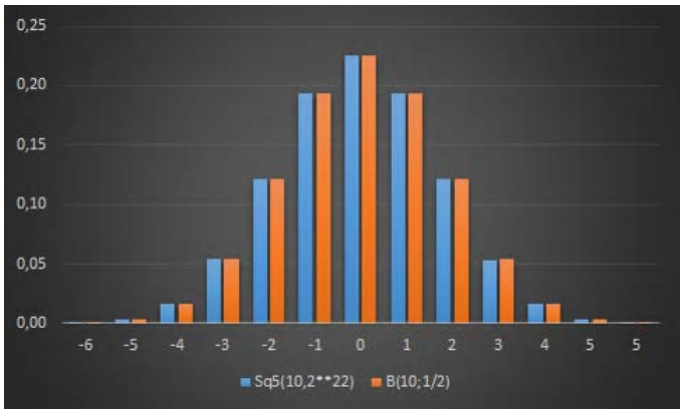


Рисунок 7.5 Сравнение плотности распределения случайных величин $\mathrm{Sq5}(10, 2^{22})$ и $\mathscr{B}(10, 1/2)$.

Убедившись в случайном характере распределения нулей и единиц в последовательности $\mathscr{D}(\{\sqrt{5}\}, 2^{22})$, применим к анализу этой последовательности технику построения 2-адических гештальтов, описанную в предыдущем параграфе. Мы будем рассматривать 2-адические гештальты, соответствующие блочно 2-адической метрике, определенной на кольце вычетов $\mathbb{Z}(2^{22})$. В этом случае в качестве шаров радиуса $1/2^m$ выступают блоки, состоящие из последовательно идущих 2^{n-m} элементов кольца $\mathbb{Z}(2^{22})$.

$\square$ 2-адические гештальты типа I или II, соответствующие 2-адическим блокам, мы далее будем кодировать несколько громоздкими символами $\Omega_f(J\,|\,m, l)$ или $\mathfrak{N}_f(J\,|\,m, l)$, где f обозначает функцию, для которой вычисляются эти гештальты, J - соответствующий мультиндекс, m - логарифмический размер 2-адического блока (то есть двоичный логарифм от количества элементов в блоке), а l - его порядковый номер. При этом символы $\Omega_f(J\,|\,m)$

или $\mathfrak{N}_f(J\,|\,m)$ будут обозначать тип такого гештальта безотносительно номера блока, к которому данный гештальт относится.

Если мы рассматриваем 2-адические гештальты типа $\Omega_f(k, k+1\,|\,m)$ для последовательности, состоящей из 2^n элементов, то количество таких 2-адических гештальтов очевидно будет равно 2^{n-m}. На серии рисунков 7.6-7.11 показаны 2-адические гештальты типа II последовательностей, полученных разложением в двоичную дробь дробной части чисел $\sqrt{5}$ и $\sqrt{37}$. Для выявления существующей в этих изображениях структуры они подвергнуты дополнительным преобразованиям:

(i) усреднение по пяти точкам, включая саму точку и четырех ее соседей;

(ii) укрупнение, то есть замена одно пиксела на матрицу размера $2^k \times 2^k$;

(iii) сжатие, то есть замена матрицы 2x2 на один пиксел, содержащий ее среднее значение;

(iv) двухкратное растяжение вдоль оси $\mathfrak{Y}$.

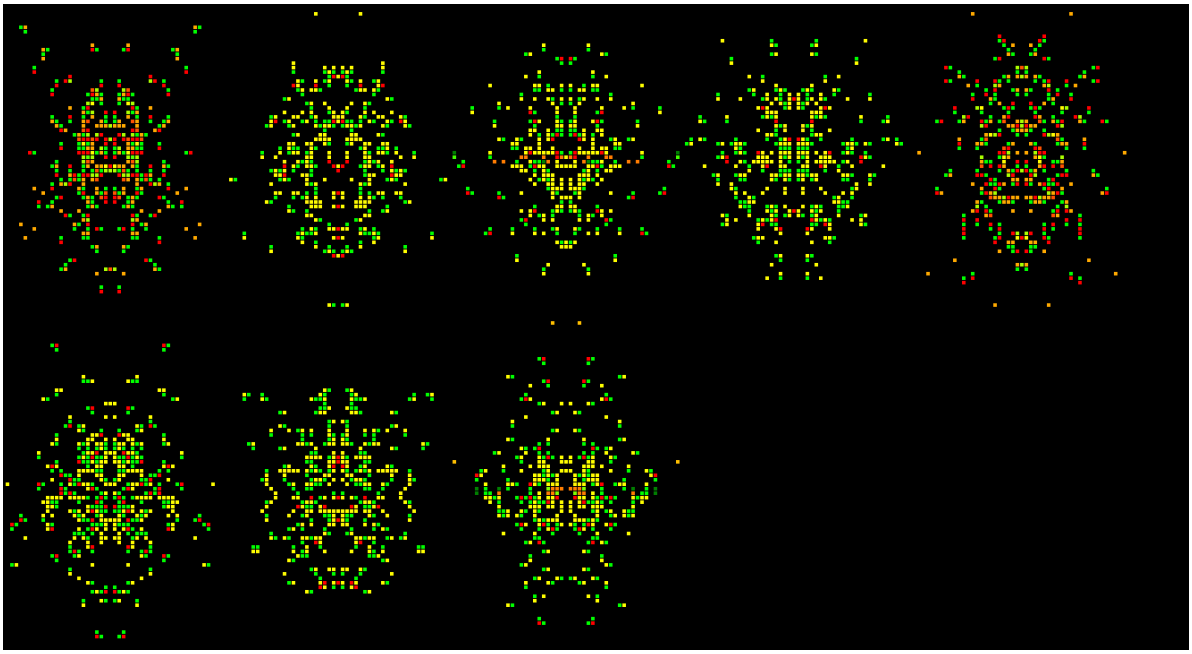


Рисунок 7.6 2-адические гештальты типа $\Omega_\psi(12, 13\,|\,20)$, порожденные последовательностью $\mathscr{D}(\{\sqrt{37}\}, 2^{22})$.



Рисунок 7.7 2-адические гештальты типа $\Omega_\phi(14, 15\,|\,20)$, порожденные последовательностью $\mathscr{D}(\{\sqrt{5}\}, 2^{22})$.

Изображения визуализированы в трехцветной палитре, в которой возрастанию значений соответствует направление от красного цвета к зеленому. Приведенные изображения можно

комбинировать между собой, например, применяя к ним операцию свертки. Возможно также превратить двумерные структуры в трехмерные путем их вращения вокруг вертикальной оси симметрии.

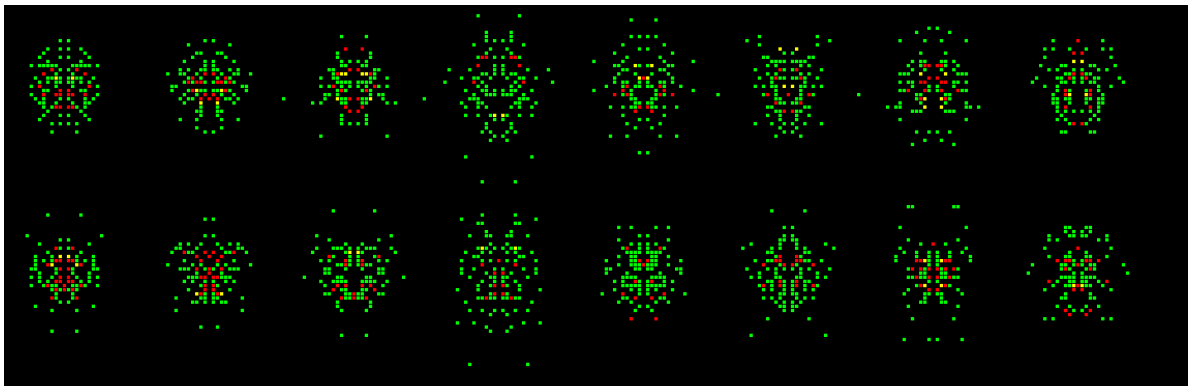


Рисунок 7.8 2-адические гештальты типа $\Omega_\phi(12, 13\,|\,19)$, порожденные последовательностью $\mathscr{D}(\{\sqrt{5}\}, 2^{22})$.

Несмотря на кажущийся случайным характер распределения нулей и единиц в последовательности $\mathscr{D}(\{\sqrt{5}\}, 2^{22})$ и не менее случайный характер распределения этих цифр в последовательности $\mathscr{D}(\{\sqrt{37}\}, 2^{22})$, 2-адические гештальты обоих типов, порождаемые этими последовательностями, выглядят как последовательности изображений, в строении которых человеческий глаз сразу фиксирует наличие некоторой структуры. Среди этих структур можно условно выделить два класса, первый из которых состоит из гештальтов, напоминающих форму насекомого, а второй состоит из гештальтов, напоминающих продольное сечение цветка.

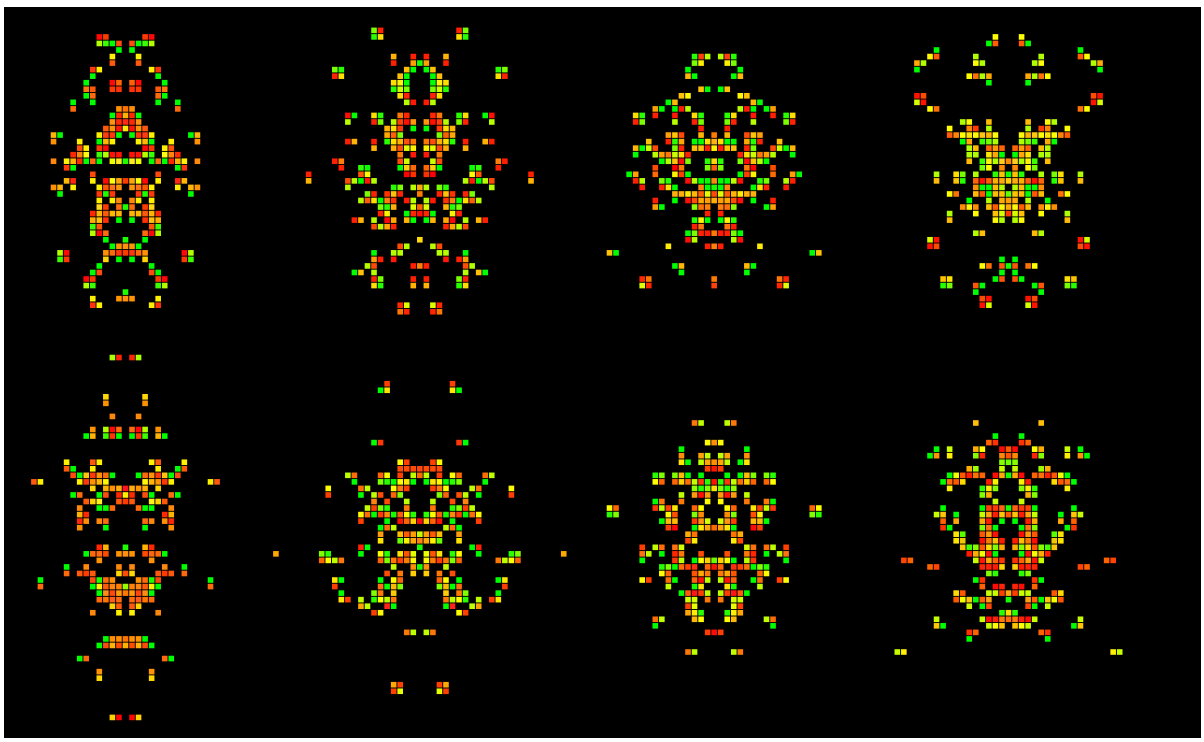


Рисунок 7.9 2-адические гештальты типа $\Omega_\phi(13, 14\,|\,20)$, порожденные последовательностью $\mathscr{D}(\{\sqrt{5}\}, 2^{22})$.

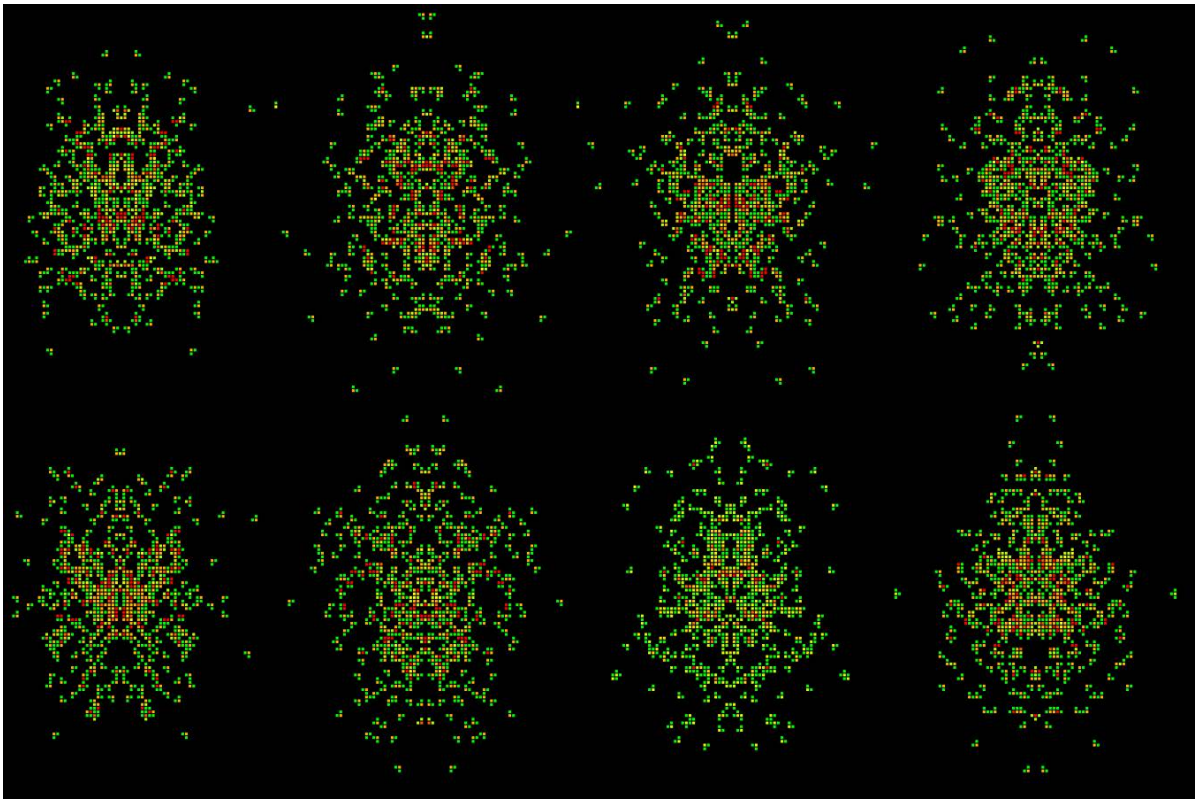


Рисунок 7.10 2-адические гештальты типа $\Omega_\phi(11, 12\,|\,20)$, порожденные последовательностью $\mathscr{D}(\{\sqrt{5}\}, 2^{22})$.

Аналогичные структуры выявляются в других псевдослучайных последовательностях, полученных, например, с помощью функции дискретного логарифмирования в полях Галуа, имеющих большую размерность над полем вычетов по модулю два. Вопрос о том, присутствуют ли данные структуры в этих последовательностях онтологически или привносятся туда человеческим сознанием в результате явлений, изучаемых гештальт психологией, мы пока выносим за рамки настоящей книги.

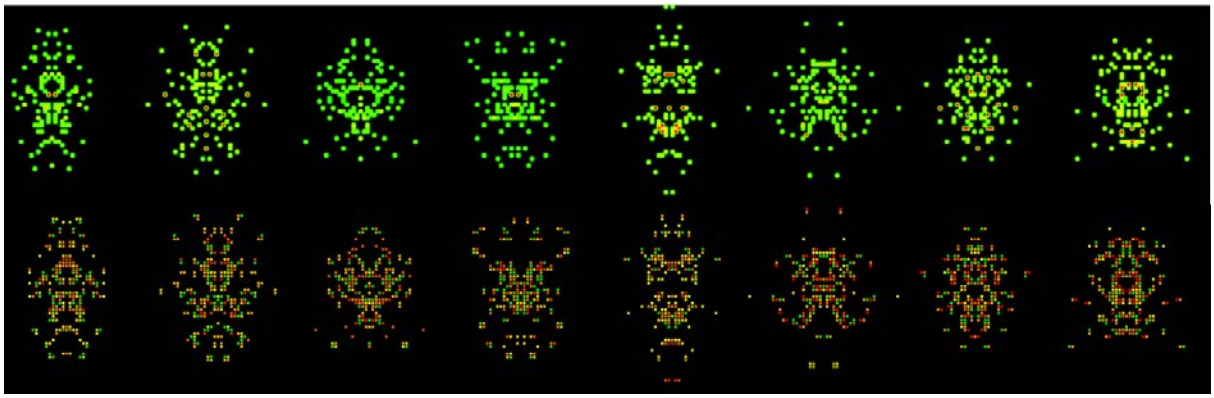


Рисунок 7.11 2-адические гештальты типа $\Omega_\phi(13, 14\,|\,20)$, порожденные последовательностью $\mathscr{D}(\{\sqrt{5}\}, 2^{22})$.

В параграфе 1.1 мы рассмотрели пример вложения в круг корневого двоичного дерева,

образованного стандартной цепочкой гомоморфизмов колец вычетов (см. Рисунок 1.1).

$$\{0\} \xleftarrow{\pi_0} \mathbb{Z}(2^1) \xleftarrow{\pi_1} \mathbb{Z}(2^2) \xleftarrow{\pi_2} \mathbb{Z}(2^3) \xleftarrow{\pi_3} \cdots \xleftarrow{\pi_{n-1}} \mathbb{Z}(2^n) \qquad (144)$$

В соответствии с рассуждениями параграфа 6.1 такое дерево $\mathbb{T}(2^{n+1})$, содержащее $n+1$ уровней можно «отождествить» с кольцом вычетов $\mathbb{Z}(2^{n+1})$, из которого выброшен ноль. При этом кольцо $\mathbb{Z}(2^n)$ можно отождествить с терминальным уровнем этого дерева, а все остальные кольца можно отождествить с множеством 2-адических блоков или 2-адических шаров в зависимости от прочтения двоичных кодов элементов этих колец. Пусть f есть некоторая целочисленная функция, заданная на множестве $\mathbb{Z}(2^n)$, которое интерпретировано как множество терминальных вершин описанного выше дерева. Тогда множество 2-адических гештальтов $\Omega_f(k, k+1\,|\,l)$, количество которых равно 2^{n+1-l} можно отобразить на множество вершин дерева $\mathbb{T}(2^{n+1})$, которые располагаются на его $(n+1-l-1)$-ом уровне (при условии, что нумерация уровней начинается с нуля), как это показано на рисунке 7.12. При этом каждая блочная изометрия терминального уровня будет переставлять эти гештальты между собой, а каждая изометрия, которая отображает в себя множество терминальных вершин принадлежащих одному из блоков, располагающихся на этом уровне, будет оставлять соответствующий этому блоку гештальт без изменения.

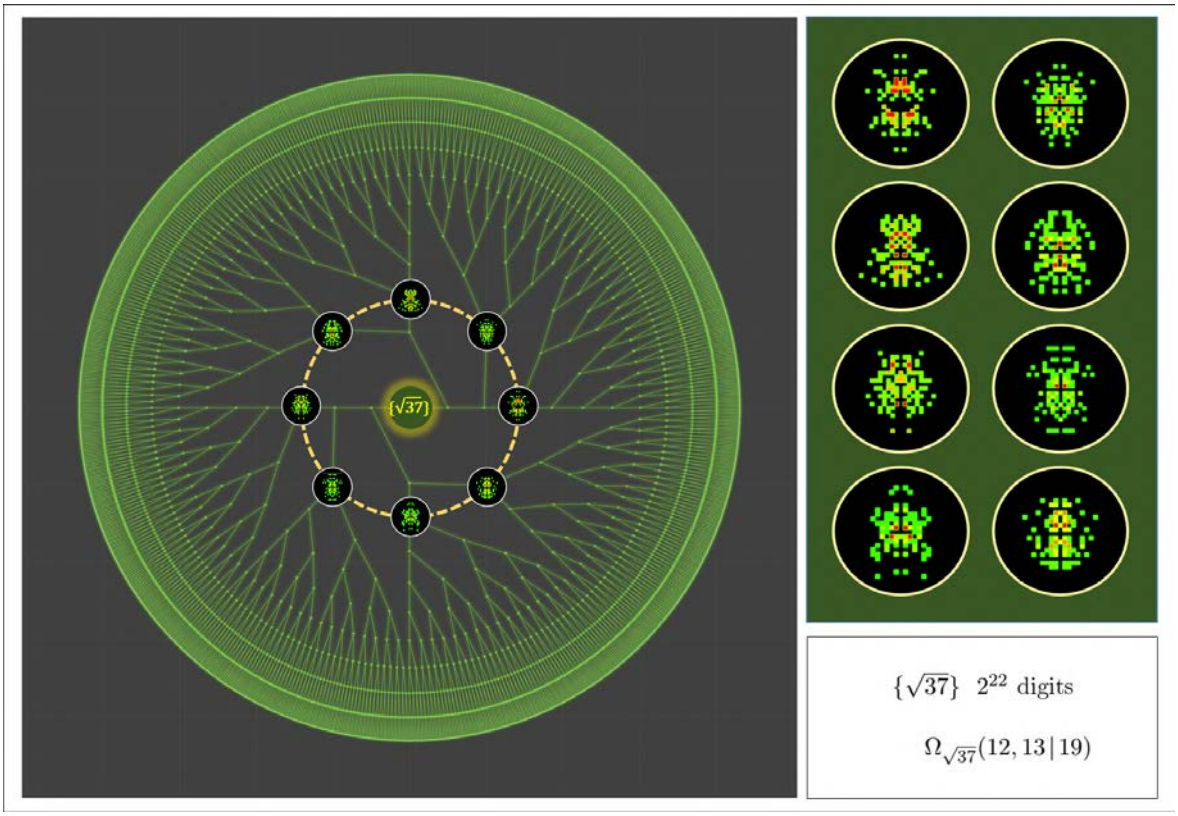


Рисунок 7.12 Инварианты двоичного разложения числа $\{\sqrt{37}\}$, отображенные на двоичное дерево.

Данные изображения позволяют вообще поставить под сомнение понятие «хаоса», поскольку они наводят на мысль о том, что внутри любого хаоса могут скрываться пронизывающие этот хаос осмысленные структуры, которые могут быть в нем обнаружены путем применения соответствующих математических методов.

7.3 2-Адические гештальты множества простых чисел

Наш следующий пример 2-адических гештальтов будет связан с последовательностью простых чисел. Рассмотрим характеристическую функцию $\wp$ множества простых чисел $\wp : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, значение которой равно единице для простых чисел и равно нулю для составных чисел и для единицы. В соответствии со знаменитой теоремой о простых числах количество простых чисел, не превышающих заданного числа n, приблизительно описывается функцией $n/ln(n)$. Поэтому асимптотическая плотность распределения простых чисел при стремлении n к бесконечности стремится к нулю и в соответствии с теоремой 5.19 функция $\wp$ разлагается в поточечно сходящийся ряд:

$$\wp = \wp_1 + \wp_2 + \wp_3 + \ldots,$$

порождающий соответствующие 2-адические гештальты различных размерностей. На рисунке 7.14 показаны соответствующие 2-адические гештальты типа $\Omega_{\wp}(14, 15\,|\,23)$.

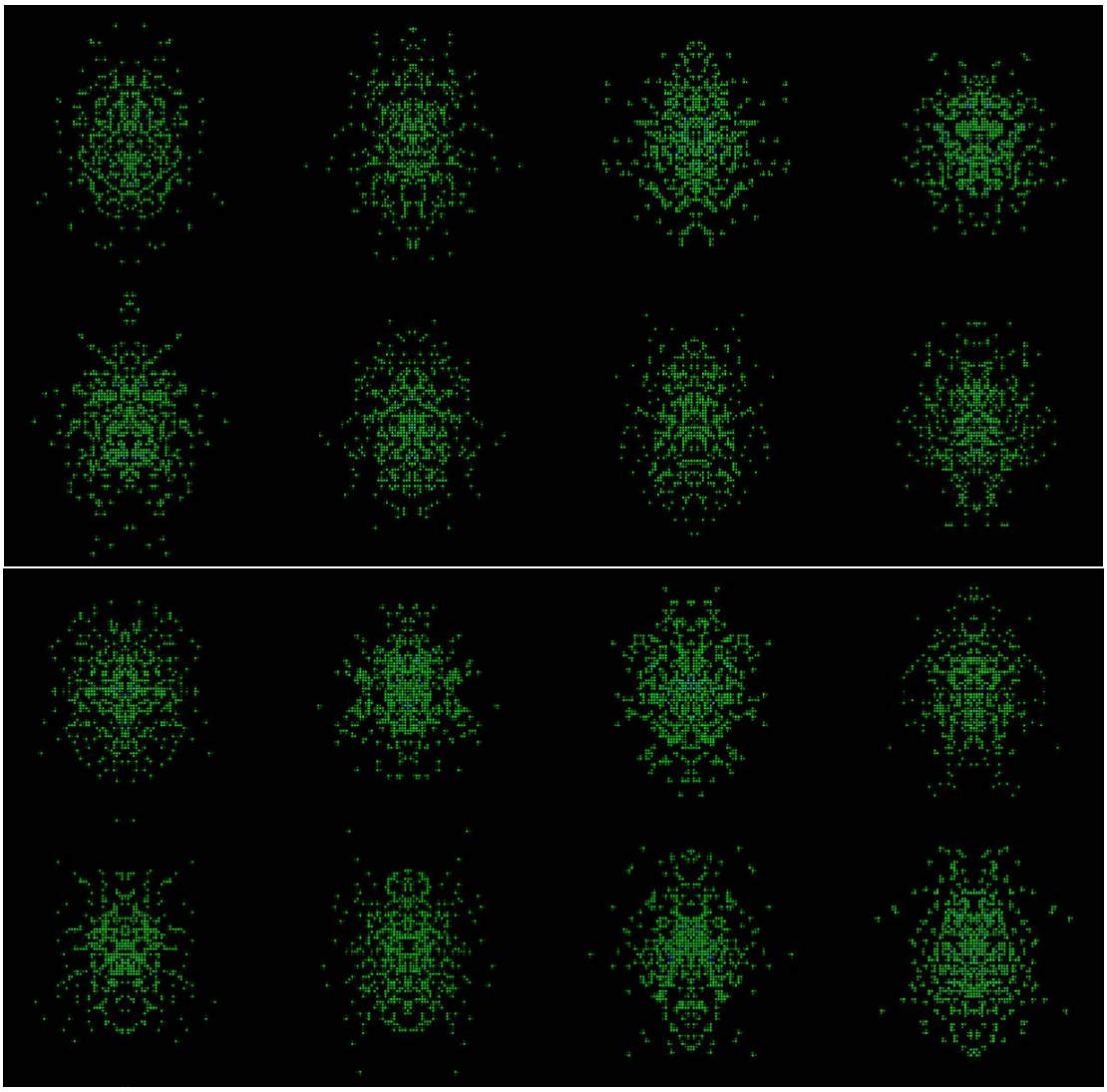


Рисунок 7.14 2-адические гештальты типа $\Omega_{\wp}(14, 15\,|\,23)$.

Так же как и в случае с двоичными представлениями иррациональных чисел мы видим в среди этих гештальтов изображения, похожие на контур насекомого или на продольный

срез цветка. При возрастании характеризующих их индексов получающиеся изображения начинают напоминать иероглифическую письменность.

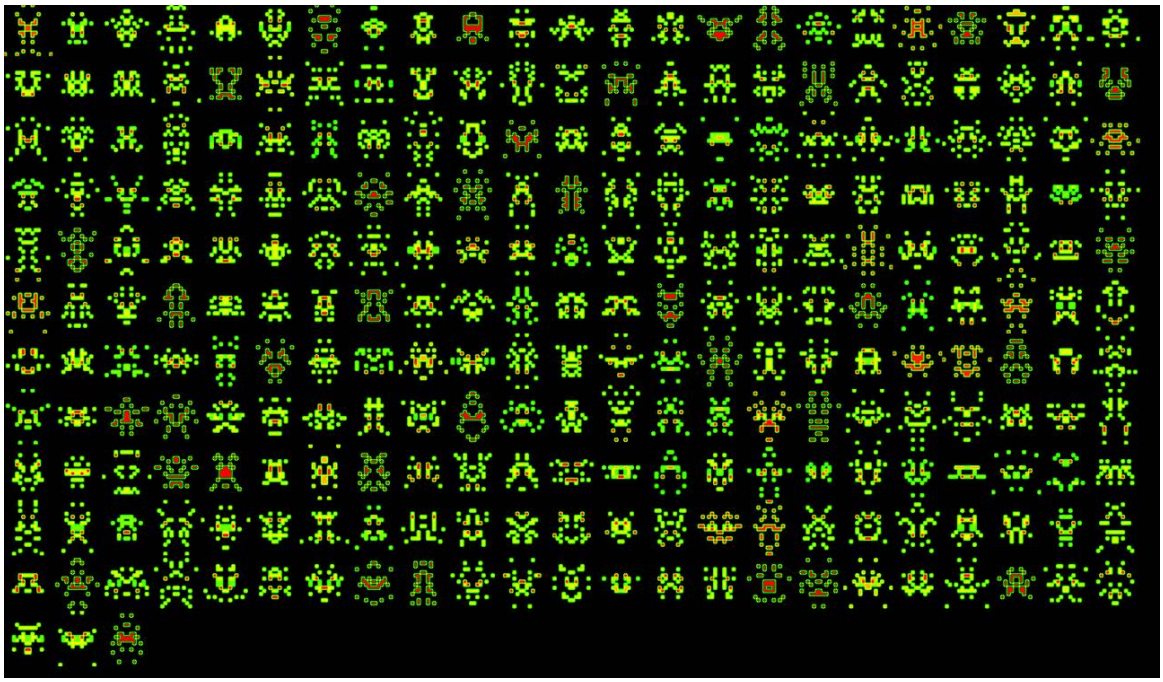


Рисунок 7.15 2-адические гештальты типа $\Omega_{\wp}(15, 16\,|\,20)$.

7.4 Интерпретация 2-адических гештальтов с помощью нейронных сетей

В этом параграфе мы рассмотрим процесс интерпретации 2-адических гештальтов с помощью нейронных сетей. Под такой интерпретацией, схема которой показана на рисунке 7.16, мы будем понимать превращение с помощью нейронной сети разреженного пиксельного изображения, содержащего намеченные контуры объекта, в полноценное изображение.

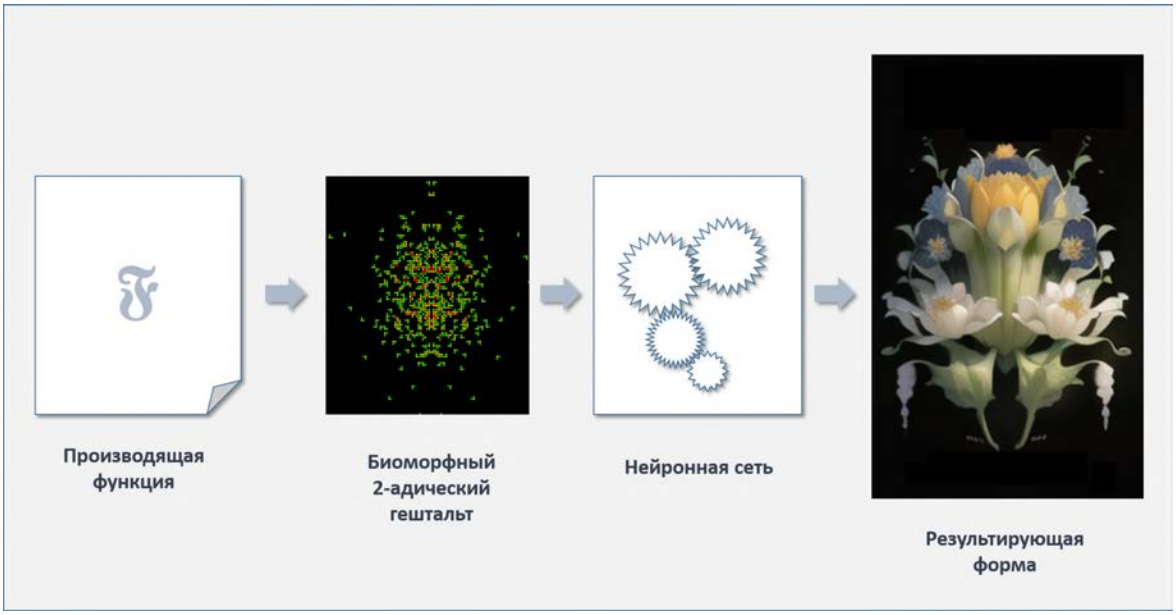


Рисунок 7.16 Схема интерпретации 2-адического гештальта с помощью нейронной сети.

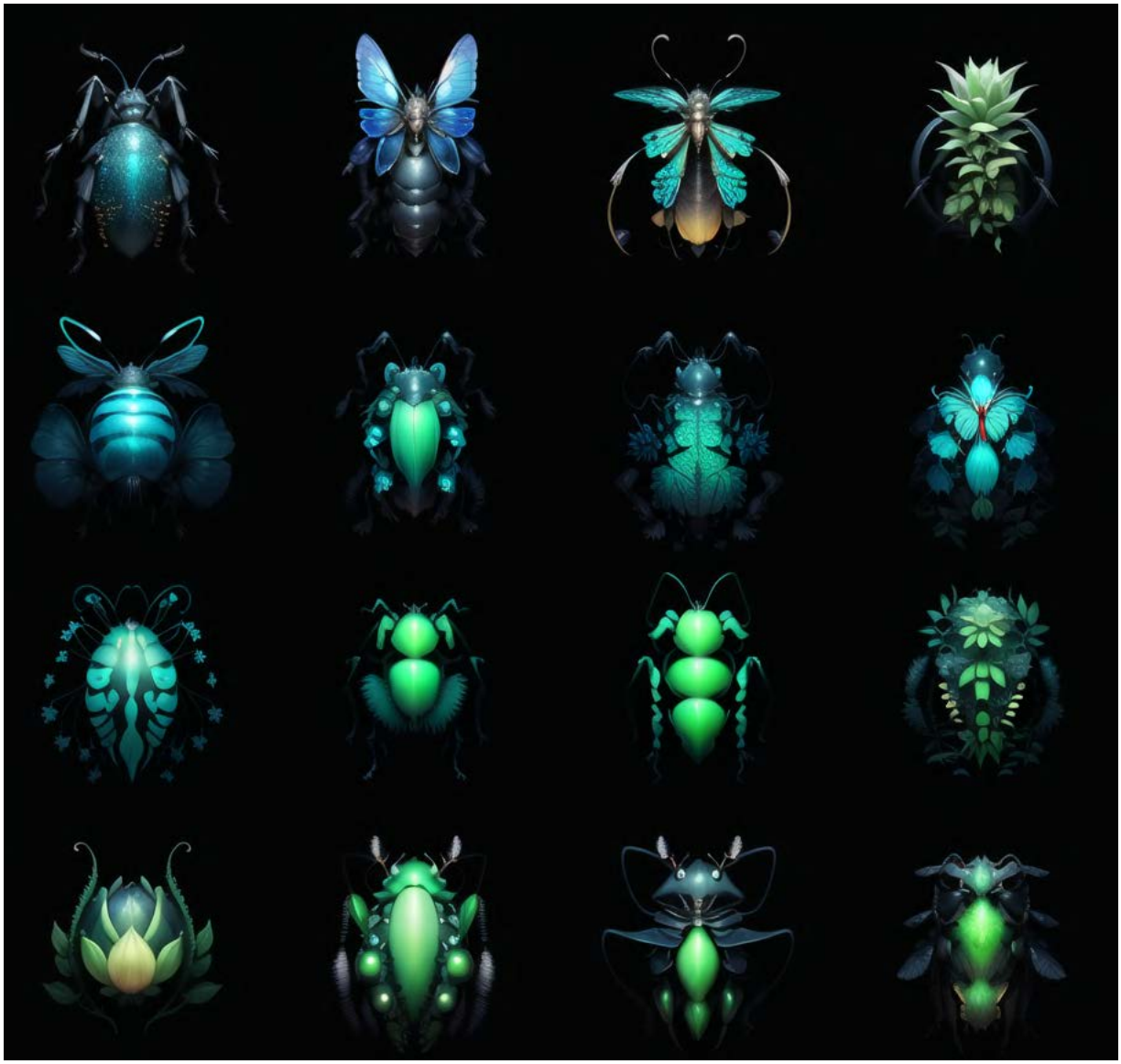


Рисунок 7.17 Фантастические организмы, полученные нейросетевой интерпретацией 2-адических гештальтов типа $\Omega_{\wp}(14, 15\,|\,23)$, порожденных функцией $\wp$.

На рисунке 7.17 выше показаны фантастические организмы, полученные нейросетевой интерпретацией 2-адических гештальтов типа $\Omega_{\wp}(14, 15\,|\,23)$, порожденных характеристической функцией $\wp$ множества простых чисел. Инерпретация выполнена с помощью нейронной сети **Stable Diffusion**. На рисунке 7.18 ниже показаны фантастические насекомые, полученные нейросетевой интерпретацией 2-адического гештальта типа $\Omega_{\wp}(12, 13\,|\,22)$, полученного из двоичного разложения дробной части числа $\sqrt{37}$. Интерпретируемый 2-адический гештальт показан в центре рисунка.

Конечно, фантастические организмы, подобные изображенным на рисунках 7.17 и 7.18, содержат в себе многочисленные несуразицы и по этой причине не могут существовать в реальной природе, однако это нисколько не влияет на суть излагаемой нами методологии генерации сложных биоморфных форм на основе информации, которая скрытым образом присутствует в числовых последовательностях и рядах. Более того, если мы немного

пофантазируем и представим себе нейронную сеть, аналогичную сети Stable Diffusion, но обученную не на двумерных изображениях, а на трехмерных структурах, то предложенный нами механизм генерации мгновенно обобщается на трехмерные структуры и может быть дополнен трехмерной печатью.

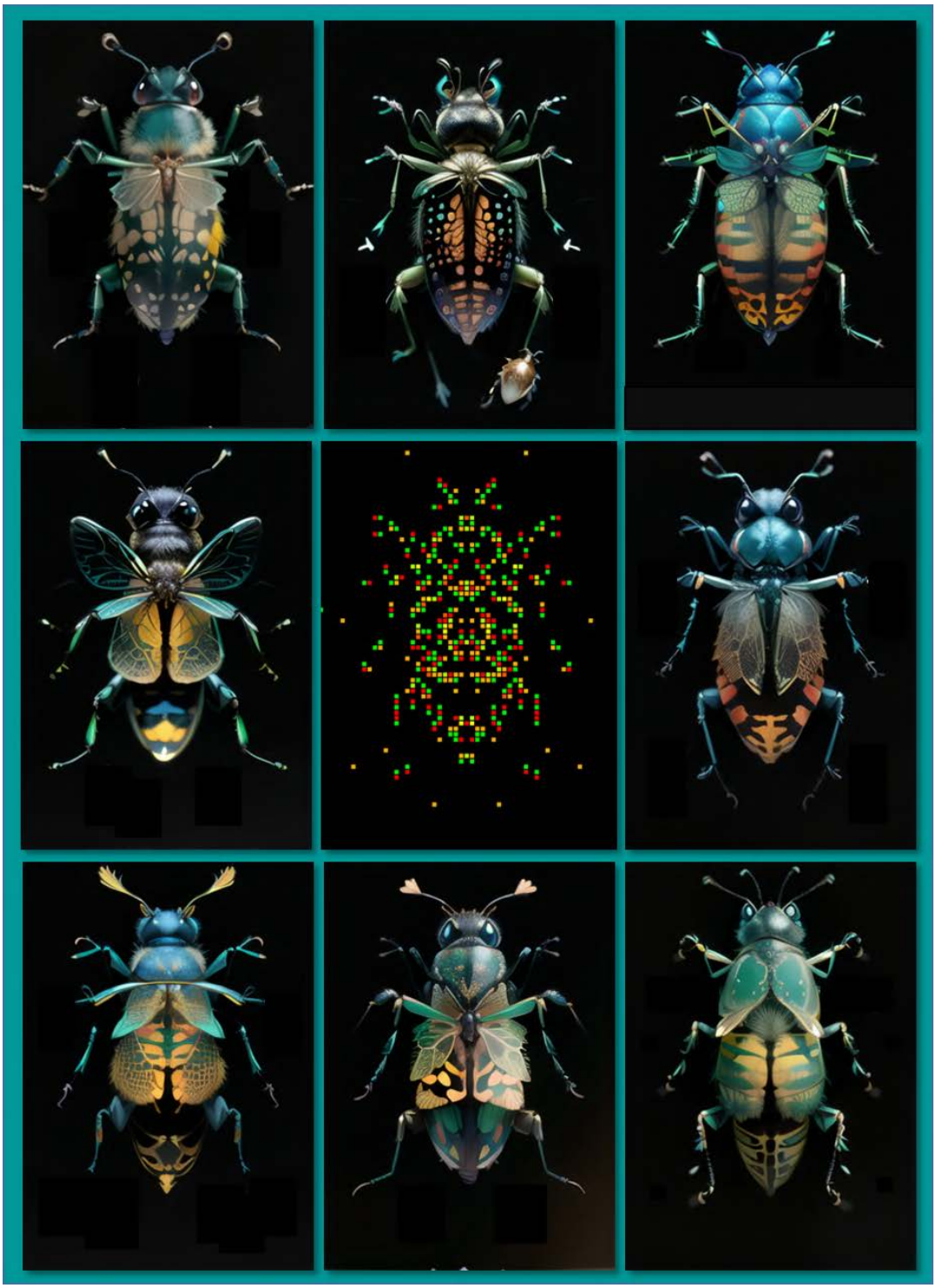


Рисунок 7.18 Фантастические насекомые, полученные нейросетевой интерпретацией гештальта типа $\Omega_{\wp}(12, 13\,|\,20)$, порожденного последовательностью $\mathscr{D}(\{\sqrt{37}\}, 2^{22})$.

При этом в качестве входной структуры могут быть использованы трехмерные 2-адические гештальты или трехмерные образы p-адических спектров векторных последовательностей или рядов, описанные в этой книге.

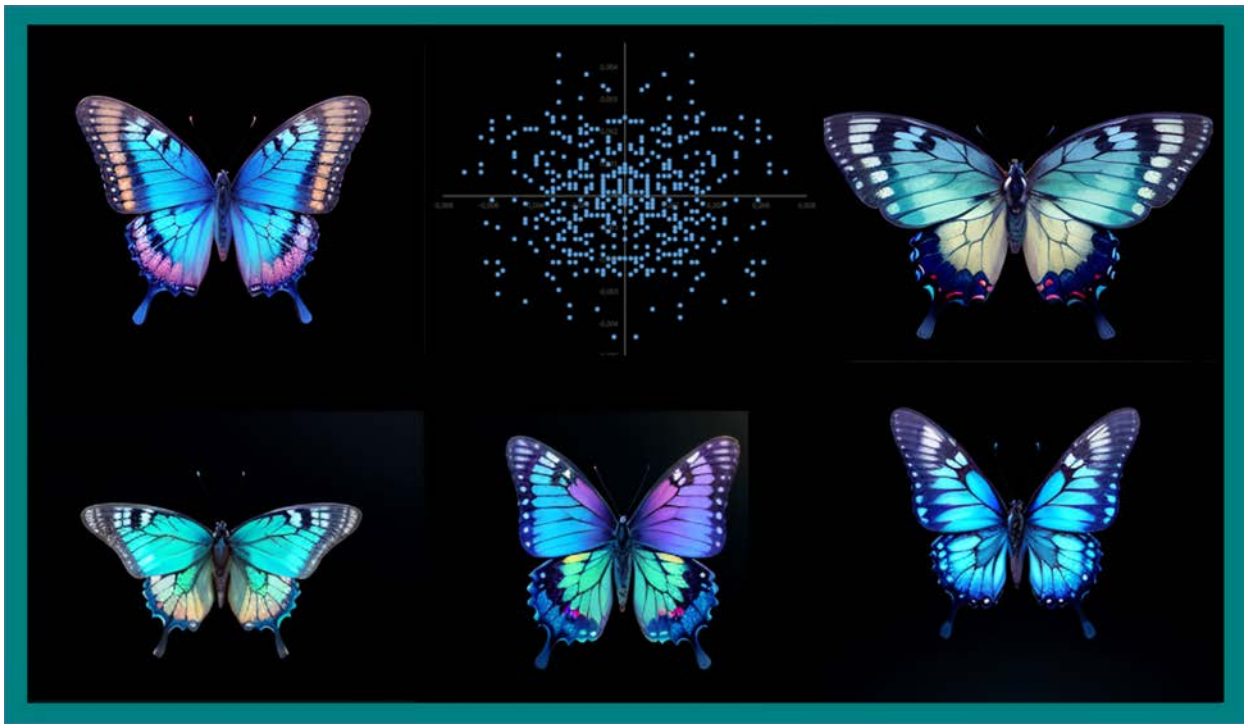


Рисунок 7.19 Изображения, полученные нейросетевой интерпретацией гештальта типа $\Omega_{\wp}(11,12\,|\,20)$, порожденного характеристической функцией множества простых чисел.

Другие примеры биоморфных изображений и методов из построения можно найти в статьях ([41],[42]).

VIII. Автоморфизмы двоичного дерева и простые числа

8.1 Изометрии кольца целых p-адических чисел

В этой главе мы рассмотрим изометрические отображения, действующие на ультраметрических пространствах, имеющих структуру планарных двоичных деревьев. Как мы видели в параграфе 1.5, простейшим примером ультраметрического пространства является множество вычетов $\mathbb{Z}(p^n)$. Мы начнем этот параграф с описания того, как устроены изометрии пространства/кольца $\mathbb{Z}(2^n)$.

Предложение 8.1 Существует каноническое взаимно однозначное соответствие между следующими объектами:

(i) Функции $f : \mathbb{Q}_{01}(2^n) \setminus \{0\} \to \{0, 1\}$;

(ii) Функции $f : \mathbb{Z}(2^n) \setminus \{0\} \to \{0, 1\}$;

(iii) Функции $f : \mathrm{V}(\mathbb{T}(2^n)) \to \{0, 1\}$;

(iv) Изометрии пространства/кольца вычетов $\mathbb{Z}(2^n)$;

(v) Автоморфизмы планарного дерева $\mathbb{T}(2^{n+1})$.

Доказательство. Эквивалентность пунктов (i) и (ii) следует из отождествления множеств $\mathbb{Q}_{01}(2^n) \simeq \mathbb{Z}(2^n)$. Функции $f : \mathbb{Z}(2^n) \setminus \{0\} \to \{0, 1\}$ можно интерпретировать как функции, определенные на полном двоичном дереве, имеющем n уровней, так как множество $\mathbb{Z}(2^n) \setminus \{0\}$ можно отождествить с деревом $\mathbb{T}(2^n)$, как это показано на рисунке 8.1. Каждая такая функция преобразуется в набор из n функций

$$f_k : \mathbb{Z}(2^n) \setminus \{0\} \to \{0, 1\}, \quad 0 \leqslant k < n,$$

определенных для каждого уровня этого дерева, как это показано на третьем блоке диаграммы на рисунке 8.1. Эти функции можно представить в виде матрицы T размера $n \times 2^n$. В виде такой же матрицы N можно представить последовательность всех чисел множества $\mathbb{N}(2^n)$ в их разрядном представлении, которые упорядочены в соответствии с инверсным отображением, как это показано на четвертом блоке все той же диаграммы. Сложение таких матриц по модулю 2 задает перестановку

$$P(f) : \mathbb{Z}(2^n) \to \mathbb{Z}(2^n), \quad P(f)[\mathrm{N}] = \mathrm{N} \oplus \mathrm{T},$$

которая является изометрией кольца $\mathbb{Z}(2^n)$. При этом все изометрии получаются таким образом, так как матрицу каждой изометрии P можно получить путем обратной операции

$$\mathrm{T} = P[\mathrm{N}] \oplus \mathrm{N}.$$

Пошаговая схема реализации этого алгоритма показана на диаграмме на рисунке 8.1. Этим доказывается эквивалентность пунктов (ii), (iii) и (iv). Каждая изометрия кольца вычетов $\mathbb{Z}(2^n)$ определяет автоморфизм дерева шаров $\mathfrak{B}(\mathbb{Z}(2^n))$ данного кольца. Данное дерево изоморфно дереву $\mathbb{T}(2^{n+1})$, поэтому каждая изометрия кольца вычетов определяет автоморфизм соответствующего дерева. Используя представление числа в двоичной системе счисления, каждый элемент $m \in \mathbb{Z}(2^n)$ можно интерпретировать как путь по дереву

шаров $\mathfrak{B}(\mathbb{Z}(2^n)) \cong \mathbb{T}(2^{n+1})$, ведущий из корня дерева к одной из его терминальных вершин. Это соответствие взаимно однозначно. Перестановка вершин дерева $\mathfrak{B}(\mathbb{Z}(2^n))$ индуцирует соответствующую перестановку путей, которую можно интерпретировать как изометрию кольца $\mathbb{Z}(2^n)$. Этим доказывается эквивалентность пунктов (iv) и (v). ⊠

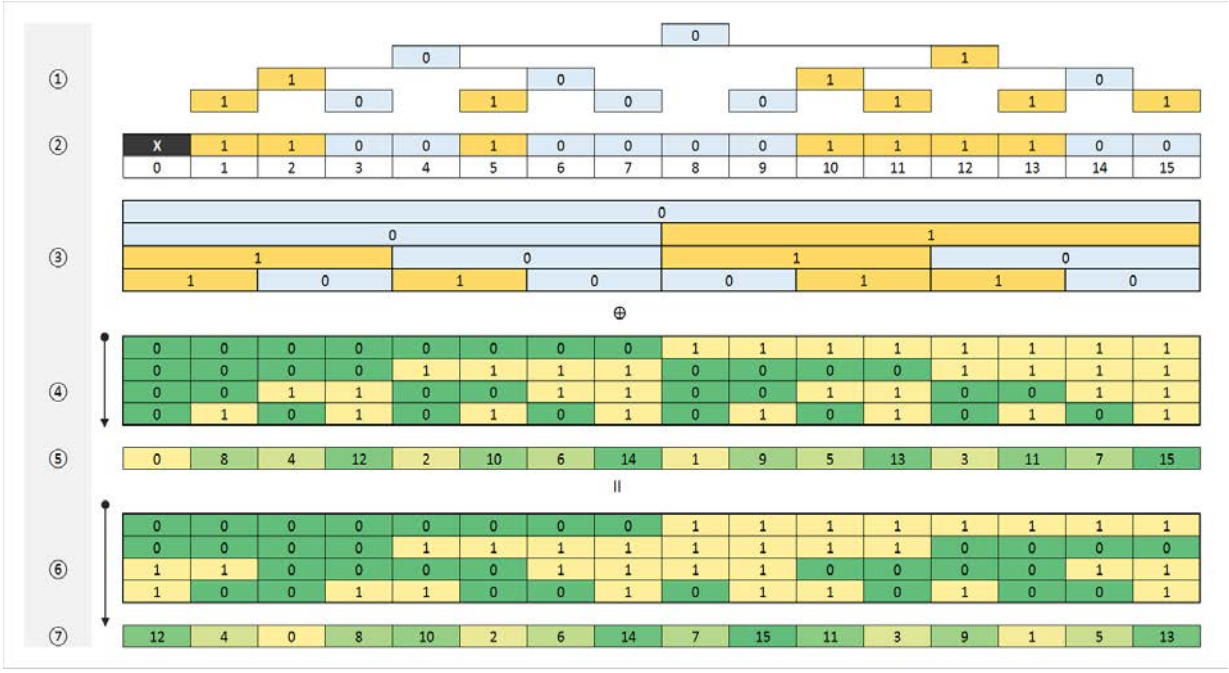


Рисунок 8.1 Детальная схема изометрий пространства/кольца $\mathbb{Z}(2^4)$. Схема к доказательству предложения 8.1. Стрелки указывают направление возрастания разрядов.

Несмотря на то, что основные моменты, относящиеся к диаграмме, показанной на рисунке 8.1, были описаны нами в доказательстве предыдущего предложения, мы еще раз остановимся на описании числовых структур, показанных на данной диаграмме, которая иллюстрирует стандартную кодировку изометрий кольца вычетов $\mathbb{Z}(2^4)$ и которая очевидным образом распространяется на случай любого кольца $\mathbb{Z}(2^n)$.

(i) В строчках 1 и 2 диаграммы показано кольцо вычетов $\mathbb{Z}(2^4)$, представленное с виде дерева (строка 1) и в виде строки чисел. Данное кольцо рассматривается как множество индексов, на котором определяются логические функции, кодирующие изометрии кольца $\mathbb{Z}(2^4)$. Значения функции отмечены цифровой и цветовой маркировкой.

(ii) В строке 3 показана таблица/матрица, которая получается перекодировкой из дерева, показанного в строке 1. При этой перекодировке каждому уровню дерева соответствует строка матрицы, значения в которой зависят от значений определяющей изометрию логической функции. Зависимость этих значений от значений функции на двоичном дереве с очевидностью усматривается из самого рисунка.

(iii) В строчках 4 и 5 показано кольцо вычетов $\mathbb{Z}(2^4)$, на котором действует изометрия, представленная строками 1,2 и 3. Элементы данного кольца указаны в их разрядном представлении и записаны в лексикографическом порядке, при котором порядок разрядов возрастает сверху вниз.

(iv) В строчках 6 и 7 показан результат действия соответствующей изометрии. Данный результат получается поэлементным сложением по модулю 2 матриц, стоящих в строчках 3 и 4, с последующей интерпретацией получившейся матрицы, как последовательности чисел из кольца $\mathbb{Z}(2^4)$, заданных своим разрядным представлением, при котором порядок разрядов возрастает сверху вниз.

При стремлении n к бесконечности, мы получаем следующее предложение.

Предложение 8.2 Существует каноническое взаимно однозначное соответствие между следующими объектами:

(i) Подмножества множества положительных натуральных чисел $\mathbb{N}$;

(ii) Функции $f : \mathbb{Q}_{01}(2^\infty) \setminus \{0\} \to \{0, 1\}$;

(iii) Функции $f : \mathbb{Z}(2^\infty) \setminus \{0\} \to \{0, 1\}$;

(iv) Функции $f : \mathrm{V}(\mathbb{T}_2) \to \{0, 1\}$;

(v) Изометрии кольца $\mathbb{Z}_2$ целых 2-адических чисел;

(vi) Изоморфизмы планарного двоичного дерева $\mathbb{T}_2$.

Доказательство. Доказательство предложения 8.2 аналогично доказательству предложения 8.1. В соответствии с предложением 3.1 мы имеем отождествление $\mathbb{N} \cong \mathbb{Z}(2^\infty) \setminus \{0\}$, которое позволяет нам отождествлять подмножества множества $\mathbb{N}$ и функции из пункта (ii) выше. $\boxtimes$

Автоморфизмам двоичного дерева можно дать еще одну интерпретацию, которая связана с маршрутизацией путей по двоичному дереву. Как мы видели выше, множество $\mathbb{Q}_{01}(2^\infty)\setminus\{0\}$ можно отождествить с двоичным деревом $\mathbb{T}_2$, а каждое целое 2-адическое число можно представить как бесконечный путь $\gamma : \mathbb{T}_2 \to \mathbb{Z}(2)$, проходящий по этому дереву и начинающийся с его корня. При этом дерево $\mathbb{T}_2$ интерпретируется (или реализуется) как дерево 2-адических шаров. Пусть $f : \mathrm{V}(\mathbb{T}_2) \to \mathbb{Z}(2)$ есть заданная на вершинах дерева $\mathbb{T}_2$ функция, которая задает изометрию $\widehat{f}$ кольца $\mathbb{Z}_2$. Мы предполагаем, что все ребра дерева $\mathbb{T}_2$ помечены нулем и единицей, как левое и правое соответственно. Тогда функция f определяет функцию $f_E : \mathrm{E}(\mathbb{T}_2) \to \mathbb{Z}(2)$, которая определена на ребрах дерева $\mathbb{T}_2$ и инвертирует разметку тех ребер, которые выходят из вершины v, для которой $f(v) = 1$. Каждое целое 2-адическое число можно представить как бесконечный путь γ проходящий по дереву $\mathbb{T}_2$ и начинающийся из его корня. На множестве путей естественным образом определена операция $\oplus$ сложения по модулю 2, которой соответствует поразрядное сложение по модулю 2 соответствующих 2-адических чисел. Тогда действие изометрии $\widehat{f}$ на 2-адических числах задается следующей формулой:

$$\widehat{f}(\gamma) = f_E(\gamma) \oplus \gamma,$$

где $f_E(\gamma)$ обозначает путь, полученный путем ограничения функции f_E на путь γ. Данное выражение просто означает, что функция f осуществляет двоичное переключение пути γ во всех вершинах, для которых имеет место равенство $f(v) = 1$.

8.2 Множества натуральных чисел как автоморфизмы двоичного дерева

Из предложения 8.2 вытекает следующее следствие.

Следствие 8.3 Существует каноническое взаимно однозначное соответствие между:

(i) автоморфизмами дерева $\mathbb{T}_2$;

(ii) подмножествами множества вершин дерева $\mathbb{T}_2$;

(iii) и подмножествами множества натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Данное следствие позволяет интерпретировать каждое подмножество $\mathscr{A} \subseteq \mathrm{V}(\mathbb{T}_2)$ как элемент $\mathfrak{g}(\mathscr{A})$ группы $\mathfrak{G}$, что в свою очередь позволяет определить на подмножествах множества вершин дерева $\mathbb{T}_2$ операции композиции, взятия целой степени, а также операцию действия одного подмножества на другое. Формальное определение этих операций можно записать с помощью операторов $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^{-1}$, преобразующих подмножества вершин $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ дерева $\mathbb{T}_2$ в его автоморфизмы и наоборот автоморфизмы дерева в подмножества его вершин.

Определение. Пусть $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ есть подмножества вершин дерева $\mathbb{T}_2$, а $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^{-1}$ есть операторы, которые преобразуют подмножества вершин дерева $\mathbb{T}_2$ в его автоморфизмы и наоборот автоморфизмы дерева в подмножества его вершин. Примем следующие обозначения:

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\mathscr{A}\circ\mathscr{B} = \mathfrak{g}^{-1}(\mathfrak{g}(\mathscr{A})\circ\mathfrak{g}(\mathscr{B})), & \mathscr{A}^{k+1} = \mathscr{A}\circ\mathscr{A}^{k}.\\
\mathscr{A}^{-1} = \mathfrak{g}^{-1}(\mathfrak{g}(\mathscr{A})^{-1}), & \mathscr{A}^{-k} = (\mathscr{A}^{-1})^{k},\\
\bigtriangledown\mathscr{A} = \mathscr{A}\cap\mathscr{A}^{-1}, & \bigtriangledown^{k+1}\mathscr{A} = \bigtriangledown(\bigtriangledown^{k}\mathscr{A}),\\
\mathscr{A}[\mathscr{B}] = \mathfrak{g}(\mathscr{A})(\mathscr{B}), & \bigtriangleup\mathscr{A} = \mathscr{A}^{-1}[\mathscr{A}],\\
\bigtriangleup^{k+1}\mathscr{A} = \bigtriangleup(\bigtriangleup^{k}\mathscr{A}). &
\end{array}} \tag{145}$$

Открытым остается вопрос относительно осмысленности выражений вида $\mathscr{A}^{n/m}$ или даже $\mathscr{A}^{\xi}$, где $\xi \in \mathbb{R}$.

В силу естественного отождествления $\mathbb{N} \cong \mathrm{V}(\mathbb{T}_2)$ все перечисленные выше операции можно перенести на подмножества множества натуральных чисел. Формальное определение таких операций можно записать с помощью операторов $\mathscr{B} \to \overline{\mathscr{B}}$ и $\mathscr{B} \to \widehat{\mathscr{B}}$, которые обозначают соответственно подмножество натуральных чисел и подмножество вершин дерева $\mathbb{T}_2$, которые возникает при естественных отождествлениях $\mathrm{V}(\mathbb{T}_2) \to \mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \to \mathrm{V}(\mathbb{T}_2)$. Например, левая формула в предпоследней строчке выше будет выглядеть следующим образом:

$$\mathscr{A}[\mathscr{B}] = \overline{\mathfrak{g}(\widehat{\mathscr{A}})(\widehat{\mathscr{B}})}.$$

где $\mathscr{A}, \mathscr{B} \subseteq \mathbb{N}$. Для простоты обозначений мы будем использовать естественное отождествление множества натуральных чисел с бесконечным двоичным деревом и будем использовать символ $\mathfrak{g}(\mathscr{A})$ для обозначения автоморфизма множества $\mathbb{N}$ (с индуцированной на нем структурой двоичного дерева), определяемого подмножеством $\mathscr{A} \subseteq \mathbb{N}$.

Мы также будем использовать конечный вариант следствия 8.3, который формулируется следующим образом.

Следствие 8.4 Пусть k есть натуральное число большее 1, тогда существует каноническое взаимно однозначное соответствие между:

(i) автоморфизмами дерева $\mathbb{T}(2^k)$;

(ii) подмножествами множества вершин дерева $\mathbb{T}(2^{k-1})$;

(iii) подмножествами множества нетерминальных вершин дерева $\mathbb{T}(2^k)$;

(iv) и подмножествами множества $\{1, 2, 3, \dots 2^k - 1\} = \mathbb{N}(2^k) \setminus \{0\}$ натуральных чисел.

Все рассуждения настоящего параграфа, а также система обозначений (145) полностью применимы к конечному случаю. Если $\mathscr{A}$ есть некоторое подмножество множества нетерминальных вершин дерева $\mathbb{T}(2^k)$ или некоторое множество положительных натуральных чисел меньших 2^k, то $\mathfrak{g}(\mathscr{A})$ есть элемент группы $\mathfrak{G}_k$, и для таких множеств имеют смысл все операции из списка (145). Заметим также, что все операции из списка (145) можно применять не только к самим множествам, но также к их характеристическим функциям, которые можно отождествлять с соответствующими множествами.

8.3 Множество натуральных чисел как «лес»

Очевидно, что все орбиты, возникающие при действии циклических подгрупп группы $\mathfrak{G}$ на любом из трех отождествляемых друг с другом множествах $\mathbb{N} \simeq \mathbb{T}_2 \simeq \mathfrak{B}(\mathbb{Z}_2)$ являются конечными, так как это действие переводит каждый уровень дерева в себя. Поскольку все фактор группы $\mathfrak{G}_k$ группы $\mathfrak{G}$ имеют порядок 2^{2^k-1}, где $k \in \mathbb{N}$, то количество элементов каждой орбиты также является степенью двойки. Каждую орбиту можно представить как дискретное кольцо $\mathbb{Z}(2^k) \simeq \mathbb{N}(2^k)$. Выбор такого отождествления зависит от выбора начальной точки орбиты. В качестве начальной точки орбиты естественно выбрать наименьшее число. Тогда на каждой орбите естественным образом определяется структура дерева, и множество орбит, возникающих при циклическом действии элемента $\mathfrak{g}(\mathrm{S})$, можно рассматривать как множество деревьев. При этом естественным образом возникают две числовые последовательности. Первая последовательность $\mathfrak{a}(\mathrm{S})$ состоит из минимальных точек всех S-орбит, перечисленных в порядке их естественного порождения. Вторая последовательность $\mathfrak{b}(\mathrm{S})$ состоит из диаметрально противоположных точек. Это понятие имеет смысл, так как каждую S-орбиту можно рассматривать как дискретное кольцо состоящее из 2^k элементов. На последовательностях $\mathfrak{a}(\mathrm{S})$ и $\mathfrak{b}(\mathrm{S})$ естественным образом определена функция, определяющая размер соответствующей орбиты.

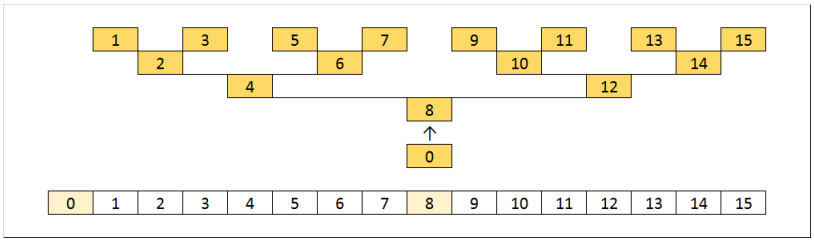


Рисунок 8.2 Структура дерева на кольце $\mathbb{Z}(2^4)$.

Таким образом, при любом множестве $\mathrm{S} \subseteq \mathbb{N}$ множество натуральных чисел разбивается на бесконечное количество бинарных деревьев и метафорически может быть интерпретировано как «лес». Далее нас будет интересовать реализация этой конструкции в случае, когда в качестве структурирующего множества S выступает множество $\wp$ всех простых чисел.

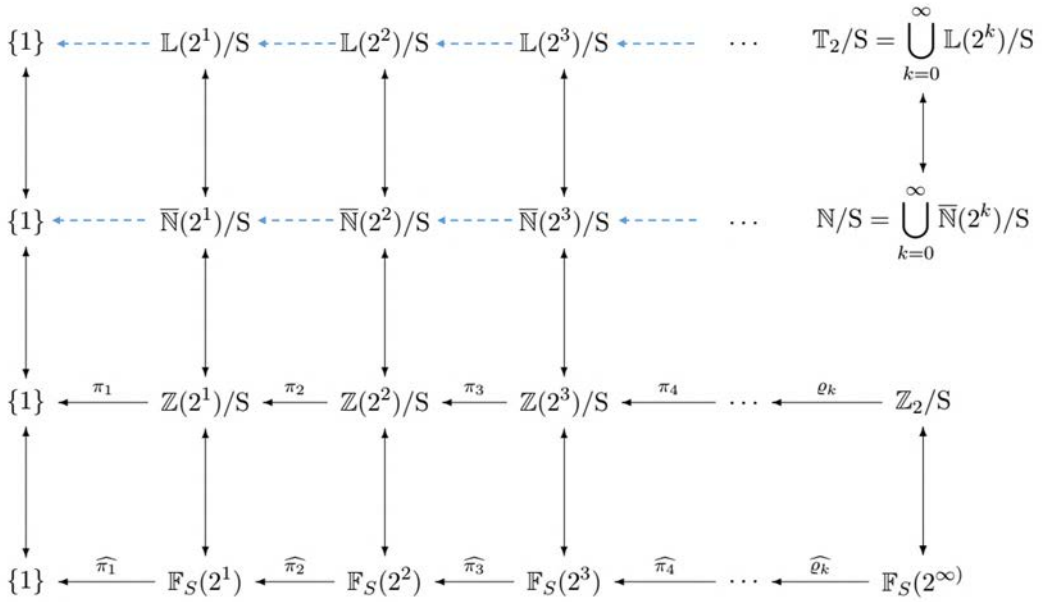


Диаграмма 8.1 Строение орбит возникающих при действии элемента $\mathfrak{g}(\mathrm{S})$ на множествах $\mathbb{T}_2$, $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_2$.

Пояснения к диаграмме.

(i) Множество вершин бесконечного корневого двоичного дерева $\mathbb{T}_2$ состоит из бесконечного числа уровней $\mathbb{L}(2^k)$, каждый из которых состоит из 2^k элементов. Каждый уровень является инвариантным относительно действия группы $\mathfrak{G}$ и разбивается под действием каждой ее циклической подгруппы на конечное количество орбит, количество элементов в которых также равно степени двойки. Множество всех таких орбит представляет собой фактор множество $\mathbb{T}_2/\mathrm{S}$.

(ii) При отождествлении $\mathbb{N} \simeq \mathbb{T}_2$ множествам $\mathbb{L}(2^k)$ соответствуют множества натуральных чисел $\overline{\mathbb{N}}_k$, объединение которых составляет множество $\mathbb{N}$. Объединение фактор множеств $\overline{\mathbb{N}}_k/\mathrm{S}$ дает нам фактор множество $\mathbb{N}/\mathrm{S}$.

(iii) Каждая из конечных орбит, возникающих при циклическом действии элемента $\mathfrak{g}(S) \in \mathfrak{G}$ состоит из 2^m элементов, где $m \geqslant 1$. При определенном выборе начальной точки каждая такая орбита может быть интерпретирована как дерево. Соответственно каждое множество орбит, показанных на рисунке 8.3, может быть интерпретировано как «лес». Поэтому для обозначения фактор множества в нижней строке этой диаграммы используется буква $\mathbb{F}$.

(iv) Гомоморфизмы колец π_k переводят орбиты в орбиты, поэтому последовательность отображений $\{\widehat{\pi}_k\}$ позволяет объединить различные конечные фактор множества из левой части диаграммы в структуру имеющую форму дерева. Вершины этого

дерева также представляют собой деревья. Поэтому данную структуру можно интерпретировать как «бесконечный лес». Если количество уровней каждой орбиты интерпретировать как высоту соответствующего ей дерева, то по мере возрастания номера k максимальная высота деревьев в этом лесу становится все выше и выше.

(v) Множество бесконечных путей по этому «лесу», начинающихся с единицы, находится во взаимно однозначном соответствии с фактор множеством $\mathbb{Z}_2/\mathrm{S}$.

(vi) Прерывистые стрелки на диаграмме обозначают отображения, которые индуцированы отображениями $\widehat{\pi}_k$.

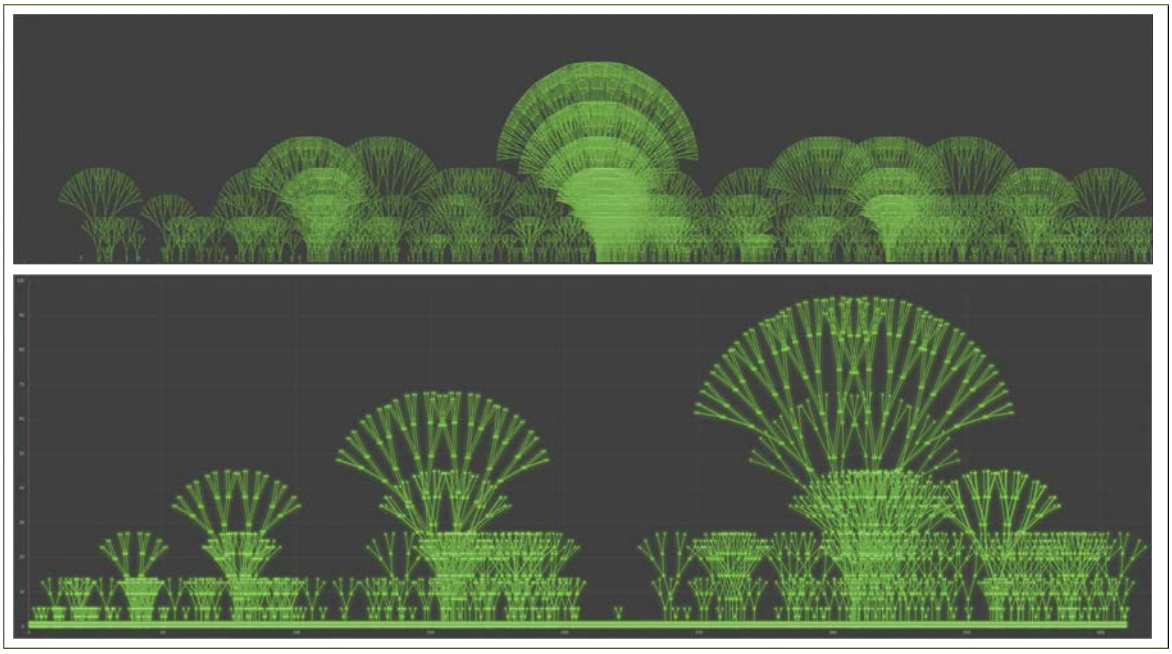


Рисунок 8.3 Натуральные числа, представленные в форме «леса».

В настоящем параграфе мы «вырастили» этот лес на дискретном отрезке. В параграфе 6.5, где мы обсуждали морфогенез сферы, было показано, что дискретный отрезок может быть отображен на «дискретную сферу», поэтому описанный выше «лес» можно с равным успехом построить на сфере.

8.4 Алгоритм вычисления обратного множества

В этом параграфе мы опишем алгоритм вычисления обратного множества для любого подмножества натуральных чисел или, что эквивалентно, для любого подмножества вершин полного корневого двоичного дерева. Рассмотрим разложения множеств $\mathbb{N}$ и $\mathrm{V}(\mathbb{T}_2)$ на уровни:

$$\mathbb{N} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \overline{\mathbb{N}}(2^k), \quad \text{и} \quad \mathrm{V}(\mathbb{T}_2) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbb{L}(2^k).$$

Примем следующие обозначения:

□ Пусть $\mathrm{S} \subseteq \mathbb{N}$. Положим $\mathrm{S}_k = \mathrm{S} \cap \overline{\mathbb{N}}(2^k)$.

$\square$ Пусть $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{V}(\mathbb{T}_2)$. Положим $\mathrm{P}_k = \mathrm{P} \cap \mathbb{L}(2^k)$.

Предложение 8.5 Справедливы следующие утверждения:

(i) Пусть $\mathrm{S} \subseteq \mathbb{N}$. Тогда $|\mathrm{S}| = |\mathrm{S}^{-1}|$, и $|\mathrm{S}_k| = |(\mathrm{S}^{-1})_k|$ при любом $k \geqslant 0$.

(ii) Пусть $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{V}(\mathbb{T}_2)$. Тогда $|\mathrm{P}| = |\mathrm{P}^{-1}|$, и $|\mathrm{P}_k| = |(\mathrm{P}^{-1})_k|$ при любом $k \geqslant 0$.

При отождествлении $\mathbb{N} \simeq \mathrm{V}(\mathbb{T}_2)$ происходит отождествление $\overline{\mathbb{N}}(2^k) \simeq \mathbb{L}(2^k)$ для любого $k \geqslant 0$, поэтому предложение 8.5 достаточно доказать только для случая дерева. Для доказательства этого предложения мы приведем алгоритм построения «обратного множества» P^{-1} для любого подмножества вершин $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{V}(\mathbb{T}_2)$. Для описания этого алгоритма мы рассмотрим более общий класс объектов, а именно двоичные деревья с числовой и логической разметкой. Такое дерево формально можно определить как пару функций

$$\mathscr{N} : \mathrm{V}(\mathbb{T}(2^k)) \to \mathbb{N} \text{ и } \mathscr{B} : \mathrm{V}(\mathbb{T}(2^k)) \to \{0, 1\},$$

из которых первая функция задает числовую разметку вершин дерева и на различных вершинах принимает различные значения, а вторая функция определяет логическую разметку вершин. В приводимых далее рассуждениях цифровая разметка описывает перестановку вершин дерева, а логическая разметка описывает управление процессом такой перестановки. Поскольку каждый автоморфизм дерева переводит его самый нижний уровень в себя, мы будем предполагать, что логическая разметка на самом нижнем уровне дерева всегда принимает значение ноль.

Определение. Пусть k есть положительное натуральное число или $k = \infty$. Логической разметкой дерева $\mathbb{T}(2^k)$ будем называть логическую функцию,

$$\mathscr{B} : \mathrm{V}(\mathbb{T}(2^k)) \to \{0, 1\},$$

определенную на множестве вершин дерева и принимающую значение ноль на всех терминальных вершинах этого дерева в случае, когда $k \neq \infty$. Цифровой разметкой дерева $\mathbb{T}(2^k)$ будем называть числовую функцию

$$\mathscr{N} : \mathrm{V}(\mathbb{T}(2^k)) \to \mathbb{N},$$

определенную на множестве вершин дерева и принимающую различные значения на различных его вершинах.

На дереве $\mathbb{T}(2^k)$ существует каноническая цифровая разметка натуральными числами от 1 до $2^k - 1$, которая описана в главе III. Согласно следствию 8.4 существует взаимно однозначное соответствие между множеством логических разметок дерева $\mathbb{T}(2^k)$ и элементами группы $\mathfrak{G}_k$ его автоморфизмов. Если $\mathscr{N}$ есть цифровая разметка дерева $\mathbb{T}(2^k)$, а $\mathfrak{g}(\mathscr{B})$ есть автоморфизм этого дерева, соответствующий логической разметке $\mathscr{B}$, то отображение $\mathscr{N} \circ \mathfrak{g}(\mathscr{B})$ будет также цифровой разметкой дерева $\mathbb{T}(2^k)$, которую мы далее будем обозначать $\mathscr{B}(\mathscr{N})$. Отображение, которое ставит в соответствие вершине с номером $\mathscr{N}(v)$ вершину с номером $\mathscr{N}(\mathfrak{g}(\mathscr{B})(v))$ является автоморфизмом дерева $\mathbb{T}(2^k)$.

Будем обозначать дерево t, которое состоит из двух поддеревьев, вырастающих из вершины v символом $t = \langle v, t_L, t_R\rangle$. Дерево t с числовой разметкой $\mathscr{N}$ и логической разметкой $\mathscr{B}$ будем обозначать символом $t = \{\mathscr{N}, \mathscr{B}\}$. Для обозначения разметки правого или левого поддерва будем использовать обозначение вида $\mathscr{N}_R$ или $\mathscr{B}_L$.

Рассмотрим два изоморфных преобразования $\mathfrak{T}_0$ и $\mathfrak{T}_1$, которые определены для деревьев с такой разметкой. Пусть t есть дерево с двойной разметкой. Для построения дерева $\mathfrak{T}_0(t)$ нужно пройти по дереву t сверху вниз, начиная с его вершины, и в каждой его вершине v, которая помечена единицей (то есть $\mathscr{B}(v) = 1$), выполнить преобразование

$$\langle v, \{\mathscr{N}_L, \mathscr{N}_R\}, \{\mathscr{B}_L, \mathscr{B}_R\}\rangle \to \langle v, \{\mathscr{N}_R, \mathscr{N}_L\}, \{\mathscr{B}_L, \mathscr{B}_R\}\rangle,$$

которое меняет местами цифровую разметку дочерних деревьев t_R и t_L, вырастающих из вершины v, оставляя без изменения их логическую разметку. Разметка самой вершины v при этом не меняется. Данная операция выполняется рекурсивно путем прохождения всех вершин дерева сверху вниз. Преобразование $\mathfrak{T}_1(t)$ выполняется аналогично, с той лишь разницей, что в вершинах, помеченных единицей, меняется и цифровая и логическая разметка, вырастающих из нее деревьев t_R и t_L. Другими словами, в такой вершине выполняется следующая операция:

$$\langle v, \{\mathscr{N}_L, \mathscr{N}_R\}, \{\mathscr{B}_L, \mathscr{B}_R\}\rangle \to \langle v, \{\mathscr{N}_R, \mathscr{N}_L\}, \{\mathscr{B}_R, \mathscr{B}_L\}\rangle.$$

Пример действия преобразований $\mathfrak{T}_0$ и $\mathfrak{T}_1$ показан на рисунке 8.5.

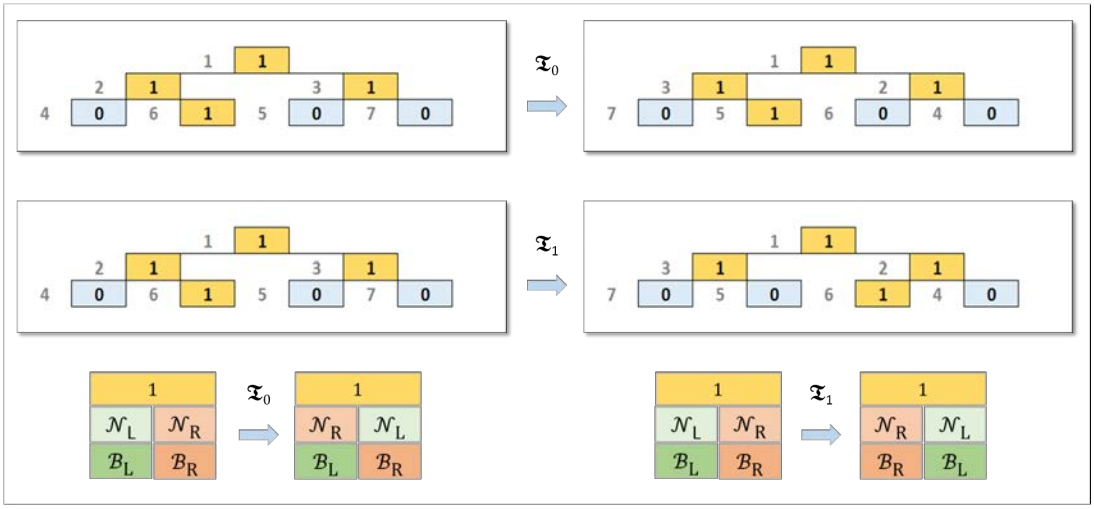


Рисунок 8.4 Правило построения отображений $\mathfrak{T}_0$ и $\mathfrak{T}_1$.

Лемма 8.6 Пусть $t = \{\mathscr{N}, \mathscr{B}\} = \langle\{\mathscr{N}(v), \mathscr{B}(v)\}, \{\mathscr{N}_L, \mathscr{N}_R\}, \{\mathscr{B}_L, \mathscr{B}_R\}\rangle$ есть двоичное дерево с двойной разметкой и корневой вершиной v, изоморфное дереву $\mathbb{T}(2^k)$, тогда справедливы следующие соотношения:

(i) если $\mathscr{B}(v) = 0$, то $\langle 0, \mathscr{B}_L, \mathscr{B}_R\rangle(\langle\mathscr{N}(v), \mathscr{N}_L, \mathscr{N}_R\rangle) = \langle\mathscr{N}(v), \mathscr{B}_L(\mathscr{N}_L), \mathscr{B}_R(\mathscr{N}_R)\rangle$;

(ii) если $\mathscr{B}(v) = 1$, то $\langle 1, \mathscr{B}_L, \mathscr{B}_R\rangle(\langle\mathscr{N}(v), \mathscr{N}_L, \mathscr{N}_R\rangle) = \langle\mathscr{N}(v), \mathscr{B}_L(\mathscr{N}_R), \mathscr{B}_R(\mathscr{N}_L)\rangle$.

Доказательство. Данная лемма доказывается индукцией по количеству уровней дерева k.

Предложение 8.7 Пусть k есть положительное натуральное число большее единицы или $k = \infty$, тогда для любого дерева $\mathbb{T}(2^k)$ с двойной разметкой $t = \{\mathscr{N}, \mathscr{B}\}$ справедливы следующие соотношения:

(i) $\mathfrak{T}_0(\{\mathscr{N}, \mathscr{B}\}) = \{\mathscr{B}(\mathscr{N}), \mathscr{B}\}$;

(ii) $\mathfrak{T}_1(\{\mathscr{N}, \mathscr{B}\}) = \{\mathscr{B}^{-1}(\mathscr{N}), \mathscr{B}^{-1}\}$;

(iii) $\mathscr{B}[\mathscr{B}] = \mathscr{B}^{-1}$.

Доказательство. В случае конечного k данное предложение доказывается индукцией по k. Из справедливости данного предложения для любого конечного k, вытекает его справедливость для случая $k = \infty$. Докажем соотношения (i) и (ii) индукцией по количеству уровней дерева k. При минимальном значении $k = 2$ справедливость данного утверждения легко проверяется непосредственно. Предположим далее, что для всех деревьев, имеющих k уровней, данное утверждение доказано. Пусть у нас есть $(k+1)$-уровневое дерево t с корневой вершиной v, на котором задана числовая и логическая разметка:

$$t = \langle v, t_L, t_R\rangle = \langle\{\mathscr{N}(v), \mathscr{B}(v)\}, \{\mathscr{N}_L, \mathscr{N}_R\}, \{\mathscr{B}_L, \mathscr{B}_R\}\rangle.$$

Начнем с пункта (i) и будем рассматривать более сложный случай, когда $\mathscr{B}(v) = 1$. Пусть

$$t = \langle v, t_L, t_R\rangle, \quad t = \{\mathscr{N}, \mathscr{B}\} \ \text{ и } \ \mathscr{B}(v) = 1.$$

Тогда, используя предположение индукции, лемму 8.6 и определение оператора $\mathfrak{T}_0$, получаем

$$\mathfrak{T}_0(t) = \langle\{\mathscr{N}(v), 1\}, \mathfrak{T}_0(t_R), \mathfrak{T}_0(t_L)\rangle = \langle\{\mathscr{N}(v), 1\}, \mathfrak{T}_0(\{\mathscr{N}_R, \mathscr{B}_L\}), \mathfrak{T}_0(\{\mathscr{N}_L, \mathscr{B}_R\})\rangle =$$

$$= \langle\{\mathscr{N}(v), 1\}, \{\mathscr{B}_L(\mathscr{N}_R), \mathscr{B}_L\}, \{\mathscr{B}_R(\mathscr{N}_L), \mathscr{B}_R\}\rangle = \{\langle\mathscr{N}(v), \mathscr{B}_L(\mathscr{N}_R), \mathscr{B}_R(\mathscr{N}_L)\rangle, \langle 1, \mathscr{B}_L, \mathscr{B}_R\rangle\} =$$

$$= \{\mathscr{B}(\langle\mathscr{N}(v), \mathscr{N}_L, \mathscr{N}_R\rangle), \mathscr{B}\} = \{\mathscr{B}(\mathscr{N}), \mathscr{B}\}.$$

Случай $\mathscr{B}(v) = 0$ рассматривается аналогично. Перейдем к доказательству пункта (ii). Начнем со случая, когда $\mathscr{B}(v) = 1$. Используя предположение индукции, получаем:

$$\mathfrak{T}_1(t) = \mathfrak{T}_1(\{\mathscr{N}, \mathscr{B}\}) = \langle\{\mathscr{N}(v), 1\}, \mathfrak{T}_1(t_R), \mathfrak{T}_1(t_L)\rangle =$$

$$= \langle\{\mathscr{N}(v), 1\}, \mathfrak{T}_1(\{\mathscr{N}_R, \mathscr{B}_R\}), \mathfrak{T}_1(\{\mathscr{N}_L, \mathscr{B}_L\})\rangle =$$

$$= \langle\{\mathscr{N}(v), 1\}, \{\mathscr{B}_R^{-1}(\mathscr{N}_R), \mathscr{B}_R^{-1}\}, \{\mathscr{B}_L^{-1}(\mathscr{N}_L), \mathscr{B}_L^{-1}\}\rangle =$$

$$= \{\{\mathscr{N}(v), \mathscr{B}_R^{-1}(\mathscr{N}_R), \mathscr{B}_L^{-1}(\mathscr{N}_L)\}, \{1, \mathscr{B}_R^{-1}, \mathscr{B}_L^{-1}\}\} = \{\mathscr{B}^{-1}(\mathscr{N}), \mathscr{B}^{-1}\}.$$

В приведенной выше цепочки осталось недоказанным только последнее равенство. Докажем его справедливость. По определению

$$\mathscr{B}(\mathscr{N}) = \{1, \mathscr{B}_L, \mathscr{B}_R\}(\{\mathscr{N}(v), \mathscr{N}_L, \mathscr{N}_R\}) = \{\mathscr{N}(v), \mathscr{B}_R(\mathscr{N}_R), \mathscr{B}_L(\mathscr{N}_L)\}.$$

Если теперь к дереву $\tau = \{\mathscr{N}(v), \mathscr{B}_R^{-1}(\mathscr{N}_R), \mathscr{B}_L^{-1}(\mathscr{N}_L)\}$ применить операцию $\{1, \mathscr{B}_L, \mathscr{B}_R\}$, то мы получим

$$\mathscr{B}(\tau) = \{1, \mathscr{B}_L, \mathscr{B}_R\}(\{\mathscr{N}(v), \mathscr{B}_R^{-1}(\mathscr{N}_R), \mathscr{B}_L^{-1}(\mathscr{N}_L)\}) = \{\mathscr{N}(v), \mathscr{B}_L(\mathscr{B}_L^{-1}(\{\mathscr{N}_L)), \mathscr{B}_R(\mathscr{B}_R^{-1}(\mathscr{N}_R))\} =$$

$$= \{\mathscr{N}(v), \mathscr{N}_L, \mathscr{N}_R\} = \mathscr{N}.$$

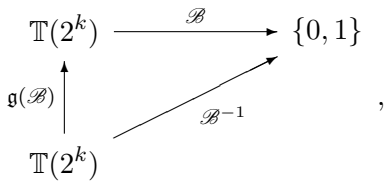
Отсюда мы получаем равенство

$$\tau = \{\mathscr{N}(v), \mathscr{B}_R^{-1}(\mathscr{N}_R), \mathscr{B}_L^{-1}(\mathscr{N}_L)\} = \mathscr{B}^{-1}(\mathscr{N}).$$

Это равенство также доказывает, что

$$\mathscr{B}^{-1} = \{1, \mathscr{B}_L, \mathscr{B}_R\}^{-1} = \{1, \mathscr{B}_R^{-1}, \mathscr{B}_L^{-1}\}.$$

Это завершает рассмотрения случая, когда логическая разметка корневой вершины равна единице. Более простой случай, когда $\mathscr{B}(v) = 0$ рассматривается аналогично. По индукции заключаем, что данное предложение истинно для любого $k \geqslant 2$. Поскольку при преобразовании $\mathfrak{T}_1$ логическая разметка перемещается вместе с цифровой, то доказанное равенство утверждает справедливость следующей диаграммы:



,

из которой следует, что

$$\mathscr{B} \circ \mathfrak{g}(\mathscr{B}) = \mathscr{B}^{-1}, \quad \text{или} \quad \mathscr{B}(\mathscr{B}) = \mathscr{B}^{-1}. \boxtimes$$

8.5 Последовательности, порождаемые простыми числами

Существуют три подмножества натуральных чисел которые играют особую роль в теории чисел:

(i) $\wp$ - множество всех простых чисел;

(ii) $\wp^{\infty}$ - множество всех степеней всех простых чисел;

(iii) $[\wp/2]$ - множество всех чисел вида $[p/2]$, где число p простое.

С точки зрения теории чисел представляет интерес изучение производных от этих множеств, то есть тех множеств, которые можно получить из них путем применения операций из списка (145). В частности представляют интерес следующие вопросы:

(i) Статистика распределения количества их элементов по уровням;

(ii) Формулы асимптотической плотности;

(iii) Соотношение этих плотностей с классическими формулами распределения плотности простых чисел;

(iv) Строение системы орбит, на которые эти множества (а точнее говоря индуцированные ими отображения) разбивают множество натуральных чисел.

Определение. Простое число p называется симметрическим, если оно принадлежит множеству $\bigtriangledown\wp = \wp \cap \wp^{-1}$.

Большое количество работ по теории чисел, включая знаменитый мемуар Римана от 1859 года, посвящено изучению функции $\pi(x)$, определяемой как количество простых чисел, не превышающих число x, то есть

$$\pi(x) = |\{\ p \mid p \in \wp\ and\ p \leqslant x\}|.$$

Очевидно, что аналогичные функции можно определить для других множеств, которые являются производными от множества простых чисел и получаются из этого множества с помощью операций из списка (145). Будем использовать для этих функций аналогичное обозначение, добавив символ множества в квадратных скобах, то есть:

$$\pi[\mathscr{A}](x) = |\{\ n \mid n \in \mathscr{A}\ \&\ n \leqslant x\}|.$$

Таким образом, оказываются определенными функции:

$$\pi[\wp^{-1}](x) = |\{\ p \mid p \in \wp^{-1}\ \&\ p \leqslant x\}|,$$

$$\pi[\bigtriangledown\wp](x) = |\{\ p \mid p \in \wp \cap \wp^{-1}\ \&\ p \leqslant x\}|.$$

Как было доказано выше, при любом натуральном числе n имеет место равенство

$$\pi[\wp](2^n) = \pi[\wp^{-1}](2^n).$$

Естественным образом определяется следующая функция

$$\Delta\pi(x) = \pi[\wp](x) - \pi[\wp^{-1}](x).$$

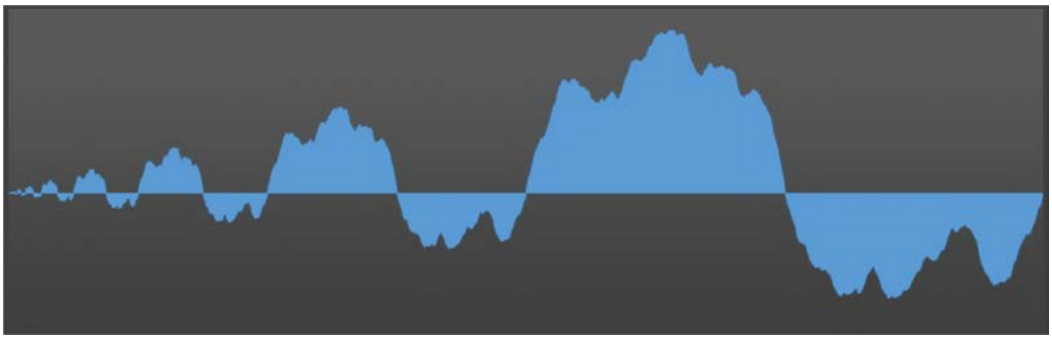


Рисунок 8.5 График функции $\Delta\pi(x)$ на отрезке $[0, 2^{36}]$.

Данный график показывает качественную картину распределения простых чисел внутри двоичного дерева натуральных чисел и имеет четко выраженную фрактальную структуры, которая демонстрирует повторение одного и того же профиля на каждом уровне $\overline{\mathbb{N}}(2^k)$.

Интересно отметить, что при $x = 2^n$ имеет место следующее приблизительное равенство

$$\pi[\wp](x) - \pi[\bigtriangledown\wp](x)/2\ \simeq\ x/\ln(x).$$

Данные, приведенные в таблице 8.1 ниже, показывают, что точность данной аппроксимации близка к точности классической аппроксимации функции $\pi(x)$ интегралом от обратного логарифма:

$$\pi[\wp](x) \simeq \int_2^x 1/ln(y)\,dy.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	$x = 2^n$	$\pi[\wp](x)$	$\pi[\nabla\wp](x)$	Li (x)	x/ln(x)	$\pi[\wp](x) - \pi[\nabla\wp](x)/2$	**6 - 7**	**3 - 5**
30	1 073 741 824	54 400 028	5 528 649	54 401 475	51 636 067	51 635 704	363	-1 447
31	2 147 483 648	105 097 565	10 319 469	105 100 230	99 940 774	99 937 831	2 944	-2 665
32	4 294 967 296	203 280 221	19 290 999	203 284 082	193 635 251	193 634 722	529	-3 861
33	8 589 934 592	393 615 806	36 159 039	393 619 392	375 535 031	375 536 287	-1 255	-3 586
34	17 179 869 184	762 939 111	67 915 371	762 944 446	728 979 767	728 981 426	-1 659	-5 335
35	34 359 738 368	1 480 206 279	127 804 114	1 480 216 943	1 416 303 547	1 416 304 222	-675	-10 664
36	68 719 476 736	2 874 398 515	240 927 778	2 874 412 059	2 753 923 564	2 753 934 626	-11 062	-13 544

Таблица 8.1 Сравнительная таблица некоторых функций, зависящих от распределения простых чисел.

IX. Иррациональные числа, двоичные дроби и парадоксы бесконечного

В основании всего здания математики лежит понятие натурального числа. Это понятие следует отнести к первичным понятиям/интуициям математики, которые нельзя свести к чему-то более первичному или более простому, а любая такая попытка приводит к эквивалентным или к еще более сложным объектам (типа классов эквивалентности конечных множеств) и по своей сути представляет собой порочный круг. Самое главное свойство натуральных чисел выражается аксиомой математической индукции, которая с философской точки зрения представляет собой констатацию того, что в области натуральных чисел количество никогда не переходит в качество, то есть из условий $\mathscr{P}(1) = true$ и $(\mathscr{P}(n) = true) \to (\mathscr{P}(n+1) = true)$ следует, что $\mathscr{P}(n) = true$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Никто из известных математиков никогда не ставил аксиому математической индукции под сомнение, за исключение одного известного автору случая. В 1973 году известный советский математик П.К.Рашевский (1907-1983) опубликовал оригинальную философскую статью, которая называлась «О догмате натурального ряда» и проходила в журнале «Успехи математических наук» под рубрикой «Из писем в редакцию»([16]). По глубине поднимаемых и обсуждаемых в ней философский вопросов данную статью Рашевского можно вполне сравнить с историческими работами «золотого века» становления теории множеств, когда лучшие математические умы были вовлечены в метафизические дискуссии, связанные с основаниями математики. В качестве эпиграфа к данной статье Рашевский выбрал знаменитый афоризм Леопольда Кронекера (1823-1891), который в оригинале звучал так: ***«Die ganzen Zahlen hat der lieber Gott gemacht, alles ubrige ist Menschenwerk.»*** (Целые числа создал любимый нами Господь Бог, а все остальное есть дело рук человеческих). Статья Рашевского написана в очень осторожной манере так, что может сложиться впечатление, что автор немного стесняется глубины поднимаемых им вопросов и необычности высказываемых им предположений. Чтобы проиллюстрировать ход мыслей Рашевского приведем несколько цитат из его работы:

- Духу физики более соответствовала бы такая математическая теория целого числа, в которой числа, когда они становятся очень большими, приобретали бы в каком то смысле «размытый вид», а не являлись строго определенными членами натурального ряда, как мы это себе представляем.

- ... пришлось бы отказаться от идеи, что любой член натурального ряда получается последовательным насчитыванием единиц — идеи, которая буквально, конечно, не формулируется в существующей теории, но косвенно провоцируется принципом математической индукции.

- Вероятно, для «очень больших» чисел присчитывание единицы вообще не должно их менять.

- Но если при удалении по натуральному ряду возникает возрастающая размытость его элементов, она передается и дробям с большими знаменателями, и мы доходим до оптимальной возможной точности в оценке (реформированных) вещественных чисел, может быть, раньше, чем знаменатель успеет «устремиться к бесконечности».

В этой короткой главе мы рассмотрим ряд парадоксов, имеющих отношение к теме сверхбольших чисел и призванных проиллюстрировать сложность понятия натурального числа, которое на первый взгляд может показаться столь простым и очевидным. Вернемся к рассмотрению изображения, представленного на рисунке 7.2 и кодирующего последовательность из первых 2^{22} двоичных знаков в разложении числа $\{\sqrt{5}\}$ в бесконечную двоичную дробь. Эту последовательность можно рассматривать как дискретную случайную величину, удовлетворяющую распределению Бернулли. Из приведенных в той же главе рассуждений следует несколько парадоксальных философских выводов.

Первый из них связан с соотнесением понятий случайности и детерминизма. Как мы видим, последовательность $\mathscr{D}(\{\sqrt{5}\})$ выглядит как последовательность независимых случайных испытаний Бернулли, то есть как результат последовательного подбрасывания монеты, при котором единице соответствует орел, а нулю решка. В тоже время данная последовательность является детерминированной, при этом каждый ее последующий член зависит от всех предыдущих и требует для своего вычисления все больше и больше ресурсов, энергии и времени. В этом смысле каждый бит такой последовательности напоминает предмет материального мира, каждый из которых несет в себе всю предыдущую историю вещей и событий, которые должны были существовать и происходить, чтобы сделать существование данного предмета возможным.

Второй, еще более парадоксальный вывод состоит в том, что иррациональное число $\{\sqrt{5}\}$, будучи представлено в виде бесконечной двоичной дроби $\mathscr{D}(\{\sqrt{5}\})$, содержит в себе бесконечное количество информации. Предыдущие рассуждения убеждают нас в том, что данное бесконечное двоичное слово с вероятностью единица содержит в себе любое двоичное слово длины 10. Однако десятка не представляет здесь какого-либо исключения и, совершив акт неполной индукции, можно предположить, что последовательность $\mathscr{D}(\{\sqrt{5}\})$ с вероятностью единица содержит в себе бесконечное количество раз любую конечную двоичную последовательность, вопрос состоит только лишь в том, сколько двоичных знаков нужно вычислить, чтобы такую последовательность найти. Поэтому, если мы представим себе процесс вычисления числа $\{\sqrt{5}\}$ завершившимся, а его результат как реально существующее число со случайным распределением нулей и единиц в его двоичном разложении, то мы будем вынуждены признать, что если бы такое число существовало, то оно содержало бы в себе все мыслимые цифровые вселенные. В нем содержались бы все книги, которые когда-либо кем-либо были, будут или могли бы быть написаны на всех возможных земных языках, в нем содержались бы все картины и изображения, которые когда-либо кем-либо были, будут или могли бы быть нарисованы или созерцаемы, в нем содержались бы все слова и все мысли, которые когда-либо кем-либо были, будут или могли бы быть сказаны или подуманы на всех возможных земных языках, в нем содержались бы все звуки, которые когда-либо кем-либо были, будут или могли бы быть изданы или услышаны, в нем содержались бы формы всех материальных предметов, которые когда-либо кем-либо были, будут или могли бы быть созданы и так далее, и так далее .... К примеру, текст поэмы А.С.Пушкина «Евгений Онегин» содержит порядка 130 000 знаков. При кодировке, в которой одному знаку соответствует один байт, данный текст может быть представлен строкой, содержащей 1 040 000 битов. Для того, чтобы найти данную строку в двоичном разложении числа $\{\sqrt{5}\}$, возможно «потребуется его вычислить» с точностью до $2^{2080000}$ знаков после запятой.

Попытка разрешить этот парадокс приводит к еще более глубоким парадоксам. Автор возьмет на себя смелость утверждать, что у человека нет и не может быть интуиции таких количеств, как $2^{2080000}$, а данное число вообще не является количеством, поскольку во вселенной нет объектов, количество которых может исчисляться подобным числом. Рихард Дедекинд (1831-1916), обсуждая в статье «Was sind und was sollen die Zahlen» (Каковы есть и какими должны быть числа) проблему бесконечности и пытаясь найти бесконечное множество, утверждал, что в качестве такового можно выбрать «множество всех мыслей», а в качестве перехода $n \to n+1$, который необходим для аксиоматики Пеано, Дедекинд предлагал воспользоваться способностью человеческого сознания к рефлексии, то есть к порождению мыслей о мыслях ([25]). Однако, если мы примем во внимание тот факт, что мысли можно объединять только в сознании одного человека, а также то что каждая мысль может быть выражена в некотором языке, а также зафиксируем конечное число языков и примем во внимание конечную продолжительность жизни мыслящего субъекта, то неминуемо придем к мысли, что количество всех возможных мыслей также является конечным.

Если мы задумаемся о способности человека представлять себе большие числа, то имеет смысл посмотреть на Солнце, как на самый большой объект, доступный человеческому восприятию и имеющий непосредственное отношение к человеческой жизни, так как вся окружающая нас живая природа, включая наши тела, представляет собой в некотором смысле трансформированную солнечную энергию. Солнце в основном состоит из двух химических элементов из водорода и гелия. Если мы представим Солнце состоящим из одного водорода, то количество атомов в его составе будет приблизительно равно $2^{175,8}$. Это наверное и есть то максимальное количество, которое человек может себе хоть как-то представить. Согласно последним оценкам количество элементарных частиц в видимой части вселенной составляет величину приблизительно равную 2^{403}. При этом следует признать, что у человека нет и не может быть способности представить себе такое количество. Из приведенных рассуждений следует, что величина $2^{2080000}$ не может быть количеством, так как во вселенной нет предметов, количество которых измерялось бы такой величиной. Поэтому предложению типа: «Рассмотрим множество, которое содержит n элементов, где $n = 2^{2080000} \ldots$» нельзя придать никакого разумного смысла, в силу того, что, во-первых, во вселенной нет объектов, количество которых может исчисляться таким числом, а во-вторых, в силу того, что у человека нет способности «рассматривать» такие количества.

Если мы признаем, что число $2^{2080000}$ не является количеством, то это ставит нас перед двумя новыми проблемами. Первая из них состоит в том, что нарушается аксиома математической индукции (о чем говорил Рашевский), поскольку отрицается справедливость следующей цепочки утверждений:

(1) число 1 представляет собой количество;

(2) если число n представляет собой количество, то число $n+1$ также представляет собой количество;

(3) следовательно все натуральные числа представляют собой некоторые количества.

Вторая проблема состоит в необходимости ответить на вопрос, что из себя представляет собой число $2^{2080000}$, если оно не является количеством. Возможный ответ на этот вопрос

состоит в том, что данное число представляет из себя ***знак***, который можно осмысленно комбинировать с другими знаками в соответствии с правилами арифметики, которые в данной области не имеют смысла как операции с количествами, однако сохраняют смысл в качестве правил оперирования со знаками. Число $2^{2080000}$ можно записать в память вычислительной машины и производить с ним и с другими числами из этого диапазона любые арифметические операции. Приняв этот тезис, мы должны будем предположить, что где-то в диапазоне от 1 до $2^{2080000}$ лежит некоторая размытая граница, при переходе через которую число перестает быть количеством и превращается в чистый знак. Однако даже с этим тезисом возникающие противоречия не заканчиваются. Поскольку знак является промежуточной сущностью между миром реального (или материального) и миром идеального (или умопостигаемого), то на него также накладываются все ограничения пространственно-временного мира. Например, мы не можем производить вычисления с числами, запись которых в двоичном, десятичном или каком-нибудь ином коде включает в себя $2^{2080000}$ знаков. Поэтому, работая с большими числами, мы никогда не сможем использовать полностью унифицированную систему обозначений, и нам все время нужно будет выдумывать новые знаки для обозначения сверхбольших чисел. В своей книге «Парадоксы бесконечного» Бернард Больцано (1781-1848) справедливо утверждает, что в множества можно объединять только те сущности, для которых существует четкое описание, все эти сущности характеризующее ([3]). По этой причине как множества можно рассматривать только те знаковые системы, для которых определены четкие правила построения и интерпретации знаков, входящих в эту систему. Но каждая такая система имеет ограниченную емкость и не может быть использована для обозначения сколь угодно больших чисел. Поскольку «множества всех знаков» просто не существует, мы вынуждены будем признать, что даже интерпретация сверхбольших чисел как знаков не позволяет нам говорить о «множестве всех натуральных чисел», и что мы не можем точно сказать, что же представляет из себя натуральное число.

Из переведенных выше рассуждений мы видим, что определение понятия натурального числа неразрывно связано с понятием бесконечности. Все трудности, связанные с определением понятия натурального числа, органически связаны с тем, что понятие бесконечности не дано человеку в непосредственном чувственном опыте и находится за пределами этого опыта, за пределами которого видимо находится также и безупречное определение понятия «натурального числа».

Послесловие.

Автобиографическое отступление. С разрешения читателя автор завершит эту книгу коротким автобиографическим отступлением. Я начал интересоваться математикой с дошкольного возраста, наверное лет с шести. Мой первый «проект», который мне запомнился, относился к области английской классической литературы и представлял собой попытку восстановить правило, по которому формировалась загадочная последовательность римских цифр на корешках тридцатитомного собрания сочинений весьма плодовитого английского писателя Чарльза Диккенса (1812-1870). Меня всегда интересовал ответ на вопрос: «Что такое число?», ответ на которой не так прост, как это может показаться на первый взгляд. В старших классах математической школы я стал интересоваться числовыми системами и изучать аксиоматические способы их определения и построения. Аспиранты с кафедры дифференциальных уравнений мех-мата, которые вели дополнительные занятия в нашей школе, не воспринимали всерьез мои «пифагорийские вопросы» о природе числа и в ответ лишь недоуменно пожимали плечами: «Число оно и есть число». Мне удалось разобраться с рациональными, вещественными и комплексным числами, но оставалась одна числовая система, которая для меня всегда оставалась загадкой, не столько в части способа ее построения (с ним все было более или менее понятно), сколько в части ее семантики. Это была система так называемых «p-адических чисел». В этой книге я постарался максимально подробно ответить потенциальным читателям и себе на вопрос «Что такое p-адическое число?»

Приложение А.
Системы ортогональных идемпотентов

В этом коротком приложении мы приведем некоторые простые факты из области линейной алгебры, свзывющие разложения в прямые суммы с системами ортогональных идемпотентов.

□ Пусть $\mathbb{V}$ есть (не обязательно конечномерное) векторное пространство над некоторым числовым полем $\mathbb{K}$, и $\mathrm{End}(\mathbb{V})$ есть кольцо линейных операторов, действующих на этом пространстве. Конечной системой ортогональных идемпотентов в кольце $\mathrm{End}(\mathbb{V})$ называется конечное множество линейных операторов $\{\pi_i \in \mathrm{End}(\mathbb{V}) \mid i \in J\}$, $J = \{0, 1, ...n-1\}$, которые удовлетворяют следующим трем условиям:

(i) $\pi_i^2 = \pi_i$, при любом $i \in J$;

(ii) $\pi_i \circ \pi_j = \pi_j \circ \pi_i = 0$, при любых $i, j \in J$, $i \neq j$;

(iii) $\sum_{i\in J} \pi_i = \mathbf{1}$.

Лемма А.1 Пусть $\mathbb{V}$ есть векторное пространство над некоторым числовым полем $\mathbb{K}$ (не обязательно конечномерное). Разложения векторного пространства $\mathbb{V}$ в прямую сумму конечного количества подпространств $\mathbb{V} = \oplus_{i\in J}\mathbb{V}_i$ находятся во взаимно однозначном соответствии с конечными системами ортогональных идемпотентов $\{\pi_i \mid i \in J\}$ в кольце $\mathrm{End}(\mathbb{V})$.

Доказательство. Предположим, что мы имеем разложение $\mathbb{V} = \oplus_{i\in J}\mathbb{V}_i$, тогда каждый элемент $v \in \mathbb{V}$ однозначно представляется в виде $v = \sum_{i\in J} v_i$, где $v_i \in \mathbb{V}_i$. Определим операторы $\{\pi_i \,|i \in J\}$ следующим образом: $\pi_i(v) = v_i$. Очевидно, что множество операторов $\{\pi_i \,|i \in J\}$ является системой ортогональных идемпотентов в кольце $\mathrm{End}(\mathbb{V})$. Обратно, пусть нам дана система ортогональных идемпотентов $\{\pi_i \mid i \in J\}$. Покажем, что в этом случае имеет место разложение в прямую сумму $\mathbb{V} = \oplus_{i\in J}\mathrm{Im}(\pi_i)$, где $\mathrm{Im}(\pi_i)$ есть образ пространства $\mathbb{V}$ при действии оператора π_i. Из условия (iii) следует, что каждый элемент $w \in \mathbb{V}$ раскладывается в сумму $w = \sum_{i\in J} \pi_i(w)$. Покажем, что такое разложение однозначно. Предположим, что

$$w = \sum_{i\in J} u_i = \sum_{i\in J} v_i,$$

где $u_i, v_i \in \mathbb{V}_i$. Применяя к обеим частям этого равенства оператор π_k, и используя соотношения (i-ii), мы получим $\pi_k(w) = u_k = v_k$, что и требовалось доказать. ⊠

Приложение Б.
Замечания к конструктивной теории интеграла

Выдающийся русский и советский математик Н.Н.Лузин (1883-1950) в статье «Функция», написанной им в 1935 году для БСЭ, пишет о непрестанном углублении и эволюции понятия функции, «которые продолжаются до настоящего времени» ([12], том III). Эта загадочная фраза может вызвать у современного читателя недоумение: о каком углублении и эволюции может идти речь, если понятие функции включено в сотни учебников по теории функций и функциональному анализу, в которых оно представлено как вполне однозначное и сформировавшееся, и ни о какой его эволюции или углублении речи не идет. Однако не все так просто, как это может показаться на первый взгляд, и возможно взгляду Лузина открывалось что-то такое, на что мы сейчас не обращаем должного внимания. Поэтому мы затронем в этом параграфе несколько смысловых и методологических вопросов, обсуждение которых авторы большинства современных учебников избегают. Надо сказать, что с функциональными пространствами $\mathscr{L}^1$ и $\mathscr{L}^2$ в математике существует несколько парадоксальная ситуация. С одной стороны, данные пространства являются своего рода вершиной конструкции, в основании которой лежит теория меры и теория интеграла Лебега, отмеченные именами многих выдающихся математиков. С другой стороны, большинство авторов, потратив порой полсотни и более страниц на изложения этой теории, в лучшем случае ограничиваются парой тривиальных примеров функций, которые принадлежат к этим классам, но не являются в то же время кусочно аналитическими. В большинстве случаев такие примеры опускаются вовсе. В задачниках студентам предлагают в качестве примеров функций из классов $\mathscr{L}^1$ и $\mathscr{L}^2$ все те же хорошо знакомые кусочно аналитические функции, для интегрирования которых вовсе не нужно строить теорию меры и теорию интеграла Лебега. У вдумчивого читателя этих учебников может возникнуть вопрос, что же это за неуловимые объекты, для работы с которыми необходимо воздвигнуть столь мощную теорию, но реальные примеры которых никого особенно не интересуют. Ответ на этот вопрос скрывается в самой сути функциональных пространств $\mathscr{L}^1$ и $\mathscr{L}^2$. Их элементами являются не функции, а классы эквивалентности интегрируемых функций, отличающихся на множестве меры ноль. Как правило, авторы учебников по теории функций как бы между делом сообщают читателю, что «при изучении измеримых функций их значением на множестве меры ноль можно пренебречь». Однако из того факта, что любая доступная человеку знаковая система содержит конечное число знаков, следует, что даже при условии бесконечного времени существования человеческой цивилизации количество чисел, доступных человеку для описания с помощью любых имеющихся в его распоряжении знаковых систем, является счетным. Как известно, любое счетное множество имеет меру ноль. Поэтому функция (или класс эквивалентных функций), значениями которой на множестве меры ноль «можно пренебречь», может принимать любые значения в любой точке числовой оси, доступной знаковому описанию. С практической точки зрения такая функция (или класс эквивалентных функций) является бессмыслицей. Такие функции не могут иметь конкретного значения ни в одной конкретной точке и ни на каком счетном множестве точек, а следовательно их значения не могут быть результатом никакого измерения и никакого вычисления, им не соответствует никакая внематематическая реальность, а сами эти объекты являются чистой математической абстракцией, предназначенной только для того, что бы быть терминальной точкой в логической цепочке математических

рассуждений, требующих, чтобы любая фундаментальная по определенной метрике последовательность обычных кусочно аналитических функций к чему-нибудь в конце концов сходилась для того, чтобы это «что-то» могло служить отправной точкой для построения следующих аналогичных логических цепочек. Таким же нефизическим статусом в общем случае обладают и измеримые по Лебегу множества, которые отличаются на множество меры ноль от интуитивно понятных измеримых по Жордану множеств, граница которых имеет меру ноль, и которые могут быть с любой точностью аппроксимированы сверху и снизу счетным множеством отрезков, прямоугольников или n-мерных параллелепипедов в зависимости от количества измерений пространства, для которого мы строим теорию интегрирования. По сути дела теория интегрирования по Лебегу работает не с самими этими множествами, а с их классами эквивалентности, которые возникают при отождествлении двух таких множеств, мера симметрической разности между которыми равна нулю. Так как любое счетное множество имеет меру ноль, то вопрос о принадлежности любой точки к множеству, определенному с точностью до множества меры ноль, является бессмысленным. Как справедливо отмечал Н.Н.Лузин в своей диссертации «Интеграл и тригонометрический ряд»: «Строение нуль множеств не поддается изучению» ([12], том I). Поэтому теория Лебега работает с классами эквивалентных множеств, которые отличаются на множества, строение которых «не поддается изучению». Особенно удивительно, когда пространства $\mathscr{L}^1$ и $\mathscr{L}^2$ начинают упоминать в статьях и книгах по обработке цифровых сигналов и изображений, которое представляют собой конечные массивы рациональных или целых чисел. Читая такие книги, действительно можно подумать, что для обработки матрицы 2000x2000, элементы которой представляют собой 256 градаций каждого из трех основных цветов, сначала нужно построить теорию меры Лебега на плоскости и теорию интеграла Лебега, при этом много раз использовав понятие актуальной бесконечности. Ситуацию несколько спасает наличие понятия базиса и возможность представления элементов функциональных пространств $\mathscr{L}^1$ и $\mathscr{L}^2$ как бесконечных рядов, в которых как базисные функции, так и коэффициенты при них представляют собой конструктивно определяемые последовательности. Однако такие ряды также могут расходится на множестве меры ноль, поэтому определение их значения в некоторой конкретной точке также может представлять из себя проблему. Методологический ответ на поставленный нами вопрос состоит в том, что функции из пространств $\mathscr{L}^1$ и $\mathscr{L}^2$ определены не для точек пространства, на котором определена мера, а только для его измеримых подмножеств. В каком то смысле функции из пространств $\mathscr{L}^1$ и $\mathscr{L}^2$ аналогичны волновой функции квантовой частицы, относительно которой не имеет смысла говорить от вероятности ее нахождения в некоторой конкретной точке, а имеет смысл говорить только о вероятности нахождения этой частицы в некоторой области. Другую аналогию можно привести из теории вероятностей, в которой есть два базовых понятия: элементарный исход и событие. При этом на множестве элементарных исходов определяется мера, а под событием понимается измеримое по этой мере множество элементарных исходов. Говорить о вероятности элементарного исхода не имеет смысла, вероятностью обладает только событие, являющееся множеством элементарных исходов. В зависимости от своих атрибутов каждый элементарный исход можно включить в различные события, каждое из которых имеет свою вероятность. Так, например, не имеет смысл говорить о вероятности выпадания орла или решки для одного конкретного бросания монеты, так как исход такого бросания является детерминированным событием, зависящим от начальных кинематических условий, с которыми осуществляется бросание (высота,

скорость, крутящий момент и т.д.) и от свойств поверхности, на которую падает бросаемая монета. Однако имеет смысл говорить о вероятности этого события при осуществлении большой серии бросаний с различными начальными условиями. Поэтому пространства $\mathscr{L}^1$ и $\mathscr{L}^2$ изначально можно определить как пополнение пространства непрерывных функций $\mathscr{C}$ соответственно по метрикам $\|*\|_1$ и $\|*\|_2$. Сторонником такого подхода к определению этих пространств был В.И.Арнольд. Таким образом, элементами этих пространств являются фундаментальные в соответствующей метрике последовательности непрерывных функций. Предположим, что у нас есть некоторое топологическое пространство S и некоторый класс его подмножеств $\mathfrak{B}$, для элементов которого определено понятие интегрирования и метод вычисления интеграла для любой непрерывной функции f по любому множеству $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$:

$$\int_{\mathfrak{b}} f d\mu.$$

Будем также предполагать, что $S \in \mathfrak{B}$ и мера $\mu(S)$ конечна. Если

$$\phi = \lim_{n\to\infty} f_n,$$

то интеграл от функции ϕ по множеству $\mathfrak{b}$ определяется следующим образом:

$$\int_{\mathfrak{b}} \phi \; d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{b}} f_n d\mu.$$

Последовательность значений этих интегралов является фундаментальной, так как

$$|\int_{\mathfrak{b}} f_n d\mu - \int_{\mathfrak{b}} f_m d\mu| \leqslant |\int_{\mathfrak{b}} (f_n - f_m) d\mu| \leqslant \int_{\mathfrak{b}} |(f_n - f_m)| d\mu \leqslant \varepsilon\mu(\mathfrak{b}).$$

Поэтому функцию ϕ можно считать функцией, определенной на подмножествах из множества $\mathfrak{B}$, определив ее следующим образом:

$$\phi(\mathfrak{b}) = \int_{\mathfrak{b}} \phi \; d\mu : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}.$$

Такое определение превращает функцию ϕ в однозначно определенную функцию, значение которой можно однозначно рассчитать с любой наперед заданной точностью для любых $\phi \in \mathscr{L}^1(S)$ и любого множества $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$. При этом, однако, не имеет смысла говорить о значении $\phi(x)$, где $x \in S$. Если $S = \mathbb{Z}_p$ и $\mathfrak{B}$ есть множество всех p-адических шаров, то функцию ϕ можно продолжить на борелевскую сигма-алгебру пространства $\mathbb{Z}_p$.

Приложение B.
Соотношение между пространствами $\mathscr{L}^1$ и $\mathscr{L}^2$.

Как мы видели выше, в случае измеримого пространства (S, μ) с определенной на нем конечной мерой μ имеет место включение $\mathscr{L}^2(S) \subset \mathscr{L}^1(S)$. Однако, если мера множества S бесконечна, то ни одно из пространств $\mathscr{L}^2(S)$ и $\mathscr{L}^1(S)$ не принадлежит другому, в чем можно легко убедиться, рассмотрев следующие два простых примера, построенных на основе функций, определенных на поле 2-адических чисел.

1) $\mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_2) \nsubseteq \mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_2)$: Выберем в множестве $\mathbb{Q}_p$ счетное множество непересекающихся между собой шаров $\{\mathfrak{b}_n\}$ одинакового радиуса r. Это можно сделать, взяв целиком один горизонтальный срез на дереве шаров, показанном на рисунке 1.15. Определим далее функцию $f : \mathbb{Q}_2 \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, \text{ если } x \in \mathfrak{b}_n \text{ при некотором } n \in \mathbb{N}, \\ 0, \text{ если } x \notin \mathfrak{b}_n \text{ для любого } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_2} |f| d\mu = r^{-1} \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} 1/n = \infty, \qquad \int\limits_{\mathbb{Q}_2} |f|^2 d\mu = r^{-1} \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} 1/n^2 = \frac{\pi}{6r},$$

что и доказывает требуемое утверждение.

1) $\mathscr{L}^1(\mathbb{Q}_2) \nsubseteq \mathscr{L}^2(\mathbb{Q}_2)$: Возьмем все то же множество непересекающихся шаров $\{\mathfrak{b}_n\}$ одинакового радиуса r и объединим их в группы $\{\mathfrak{g}_n\}$, таким образом, чтобы количества шаров в этих группах составляли начинающуюся с четверки геометрическую прогрессию со знаменателем 4: 4,16,64, ... Тогда очевидно, что $\mu(\mathfrak{g}_n) = r^{-1} \cdot 2^{2n}$. Определим функцию $f : \mathbb{Q}_2 \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 2^n, \text{ если } x \in \mathfrak{g}_n \text{ при некотором } n \in \mathbb{N}, \\ 0, \text{ если } x \notin \mathfrak{g}_n \text{ для любого } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_2} |f| d\mu = r^{-1} \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} 1/2^n = 1/r, \qquad \int\limits_{\mathbb{Q}_2} |f|^2 d\mu = r^{-1} \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{2n}/2^{2n} = \infty,$$

что и доказывает требуемое утверждение. $\boxtimes$

Список литературы

[1] Арнольд В. И. Динамика, статистика и проективная геометрия полей Галуа. Москва, МЦНМО, 2005.

[2] Белоусов Л. В. Биологический морфогенез. Москва, Изд-во МГУ, 1987.

[3] Больцано Б. Парадоксы бесконечного. Одесса, Mathesis, 1911.

[4] Варден, Бартел Лендерт ван дер. Алгебра. Москва, Наука, 1976.

[5] Виноградов И.М. Основы теории чисел. Москва, Высшая школа, 1952.

[6] Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И. p-Адический анализ и математическая физика. Москва, Физматлит. 1994.

[7] Гурвич А. Г. Теория биологического поля. Москва, Изд-во Советская наука, 1944.

[8] Гурвич А. Г. Принципы аналитической биологии и теория клеточных полей. Москва, Наука, 1994.

[9] Исаева В.В., Каретин Ю.А., Чернышев А.В., Шкуратов Д.Ю. Фракталы и хаос в биологическом морфогенезе. Владивосток. 2004.

[10] Козырев С. В. Теория всплесков как p-адический спектральный анализ, Известия РАН. Серия математика, 2002, том 66, выпуск 2, 149–158.

[11] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва, Наука, 1976.

[12] Лузин Н.Н. Собрание сочинений в 3-х томах. Москва, Издательство АН СССР, 1953.

[13] Лукомский С.Ф. О рядах Хаара на компактной нуль-мерной группе. Известия Саратовского университета, 2009, том 9, серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 1, 14-19.

[14] Лукомский С.Ф., Водолазов А.М. Ортогональные системы сдвигов в поле p-адических чисел. Известия Саратовского университета, 2016, том 16, серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 3, 256-262.

[15] Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. Москва, Наука, 1973.

[16] Рашевский П.К. О догмате натурального ряда. УМН, 1973, том 28, выпуск 4, 243–246.

[17] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрально исчисления в 3-х томах. Москва, Наука, 1969.

[18] Хренников А.Ю., Шелкович В.М. Современный p-адический анализ и математическая физика. Москва, Физматлит, 2012.

[19] Beck Fabian, Burch Michael, Munz Tanja, Di Silvestro Lorenzo, and Weiskopf Daniel. Generalized Pythagoras Trees for Visualizing Hierarchies. In IVAPP'14 Proceedings of the 5th International Conference on Information Visualization Theory and Applications. 2014.

[20] Berndt Bruce C. Number Theory in the Spirit of Ramanujan. American Mathematical Society, 2006, https://dx.doi.org/10.1090/stml/034.

[21] Bosman A.E. Het wondere onderzoekingsveld der vlakke meetkunde. N.V.Uitgeversmaatschappij Breda, Parcival, 1957.

[22] Cantor Georg. Ueber unendliche, lineare Puncktmannichfaltigkeiten. Mathematische Annalen 1883, Vol 21, S. 545 - 591.

[23] Computational, theoretical, and experimental approaches to morphogenesis. BioSystems. Volume 173, 2018.

[24] Deussen Oliver, Lintermann Bernd. Digital Design of Nature. Computer Generated Plants and Organics. Springer, 2005.

[25] Dedekind Richard. Was sind und was sollen die Zahlen. Braunschweig. 1918.

[26] Dragovich Branko, Khrennikov Andrei Y., Kozyrev Sergei V., Mišić Nataša Ž. p-Adic mathematics and theoretical biology, BioSystems, Volume 199, January 2021, 104288, https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2020.104288.

[27] Fleron Julian F., A Note on the History of the Cantor Set and Cantor Function. Mathematics Magazin, Vol.67, No.2 (Apr.1994), 136-140.

[28] Fourier Joseph. Analytical theory of heat (english translation). 1878.

[29] Gilbert Scott. Developmental Biology. Sinauer Associates Inc., 2006.

[30] Goodwin Brian, Webster Gerry. Form and Transformation. Generative and Relational Principles in Biology. Cambridge University Press, 1996.

[31] Goodwin Brian. How the Leopard Changes its Sports. The evolution of complexity. Prinston University Press, 1994.

[32] Haar Alfred. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Dektorwürde. Georg-August Universität, Göttingen, 1909.

[33] Haar Alfred. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. Mathematische Annalen, 69. Jahrgang, Nr. 3, 1910, S. 331–371.

[34] Haar Alfred. Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen. Annals of Mathematics, Vol. 34, 1933, pp. 147-169.

[35] Hayflick L., Moorhead P.S. The serial cultivation of human diploid cell strains // Experimental Cell Research. 1961, Vol. 25, p. 585—621.

[36] Haeckel Ernst. Kunstformen der Natur / The Art and Science. Taschen. 2017.

[37] Heideman Michael T., Johnson Don H., Burrs Sidney. Gauss and the History of the Fast Fourier Transform. IEEE ASSP Magazine. October 1984. pp. 14-21.

[38] Hennigfeld, Iris. Anschauung, Anschauen (Intuition). Goethe-Lexicon of Philosophical Concepts. Vol.1 No 2(2021): Second Installment. https://goethe-lexicon.pitt.edu/GL/article/view/49.

[39] Hensel Kurt. Theorie der algebraischen Zahlen. Berlin und Leipzig. 1908.

[40] Hensel Kurt. Zahlentheorie. Berlin, 1913.

[41] Ignatov Victor V. p-Adic morphology, biomorphic structures and number theory. BioSystems. Volume 205, July 2021, 104404, https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2021.104404.

[42] Ignatov Victor V. 2-Adic morphogenesis as a metaphorical model of biological growth. BioSystems. Volume 212, February 2022, 104549, https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2021.104594.

[43] Klein Felix. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen, Verlag von Andreas Deichert, 1872. https://www.gutenberg.org/ebooks/38033

[44] Koenderink Jan. The structure of images: 1984–2021. Biological Cybernetics 115, 117–120 (2021). https://doi.org/10.1007/s00422-021-00870-0.

[45] Lindenmayer Aristid, Prusinkiewicz Przemyslaw. The Algorithmic Beauty of Plants. Springer, 2004.

[46] Luong Bao. Fourier Analysis on Finite Abelian Groups. Birkhäuser, Boston,Basel,Berlin. 2009.

[47] Mallat Stephane, Multiresolution representation and wavelets, Ph. D. Thesis, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA. 1988.

[48] Mallat Stephane, An efficient image representation for multiscale analysis, In: Proc. of Machine, Vision Conference, Lake Taho. 1987.

[49] Mallat Stephane, A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way, Academic Press, 1999.

[50] Meyer Y., Ondelettes and fonctions splines, Seminaire EDP. Paris. Decamber 1986.

[51] Monna A.F. Sur une transformation simple des nombres P-adiques en nombres réeles, Indagationes Math., 14, 1952, 1-9.

[52] Rudin Walter. Fourier Analysis on Groups. Interscience publishers. New York, London. 1962.

[53] Shelkovich V. M., Skopina M., P-adic Haar Multiresolution Analysis, http://arxiv.org/abs/0704.0736v1.

[54] Thompson D'Archy Wentworth. On Growth and Form. Cambridge University Press, 1917.

[55] Tyler Sheena. The Work Surfaces of Morphogenesis: The Role of the Morphogenetic Field. Biological Theory volume 9, 2014. pp. 194–208.

[56] Wolpert Lewis. Principles of Development. Oxford University Press, 2002.

Информация об авторе. Игнатов В.В. - советский и российский математик, кандидат физ.-мат. наук (1984). Закончил мах-мат МГУ и аспирантуру кафедры высшей алгебры. В 80-е годы сотрудник лаборатории ЭВМ на новых физических принципах АН СССР. С 2003 по 2019 консультант корпорации IBM.

Отзывы и замечания о данной книге просьба присылать автору по адресу:
victor.ignatov@arimazor.org.ru.

Научное издание

Игнатов Виктор Викторович

Р-АДИЧЕСКАЯ АРИФМЕТИКА, БИОМОРФНЫЕ ФОРМЫ И ДИСКРЕТНЫЕ ВЕЙВЛЕТЫ ХААРА

Монография

Издается в авторской редакции

Издательство «Знание-М»
(654029, г. Новокузнецк, Вокзальная 3-47),
e-mail: id_piar@mail.ru
Объем данных – 35 Mb
Подписано к использованию: 21.02.2024
Тираж 10 экз. Усл. печ. л. – 16,68. Заказ № 10065
Издательство «Знание-М»

Издано в научных и учебных целях.



Смыслим в издательском деле!
Наши книги в Интернет-магазине www.litres.ru/logos

ISBN 978-5-00187-738-7



View publication stats