ДОКАЗАНА ли ТЕОРЕМА ПИФАГОРА для НЕСОИЗМЕРИМЫХ СТОРОН ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Я прихожу все более к рассуждению, что необходимость нашей геометрии не может быть доказана, по крайней мере человеческим рассудком и для человеческого рассудка .

К. Ф. Гаусс

Далее рассматривается принципиальный вопрос: ДОКАЗАНА ЛИ ТЕОРЕМА ПИФАГОРА ДЛЯ НЕСОИЗМЕРИМЫХ ВЕЛИЧИН СТОРОН ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

I. Как известно, существует не менее 400 доказательств теоремы Пифагора (тП) различными способами: методом подобия, методом площадей, методом равнодополняемости, алгебраическими методами.

Д. Гильберт в “Основаниях геометрии”, обсуждая тП, подчеркивает, что: ***” …в евклидовом доказательстве теоремы Пифагора используются только конгруентность одинаково расположенных треугольников и, следовательно, что это доказательство опирается на аксиому о конгруентности треугольников только в ее узкой трактовке”*** [1]

Таким образом, увлекшись перестановками геометрических фигур, почему то мало обсуждается вопрос о доказательствах с использованием числовых величин катетов и гипотенузы и их соизмеримости. С самого начала стороны задавались натуральными числами пифагоровых троек. Вполне возможно, что и формулировка тП впервые возникла на этом материале. А в дальнейшем она доказывалась уже для соизмеримых отрезков, т.е. в рациональных числах. Действительно, читаем в [2]: ***”В противовес такому графическому доказательству, основанному на теории пропорций Пифагора, - теории несовершенной, так как она применима только к***

соизмеримым количествам ”.

Если тройка натуральных чисел (a_0, b_0, c_0) удовлетворяет уравнению $a^2 + b^2 = c^2$, то по теореме, обратной к теореме Пифагора, из отрезков длины a_0, b_0 *и* c_0 можно сложить ***пифагоров*** **треугольник**. Причем это верно также и для троек рациональных чисел, например, $(3/2, 20/3, 41/6)$. Что самое важное, в этом случае **выполняется свойство соизмеримости катетов и гипотенузы** такого треугольника, как это и заложено в Началах Эвклида .

Именно так и сформулирована тП в учебнике А.П.Киселева “Геометрия”: “***Если стороны прямоугольного треугольника измерены одной и той же единицей,*** *то квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов*” [3]. И далее приводится пример треугольника со сторонами 3, 4 и вычисления гипотенузы, равной 5, а не треугольника с длинами сторон, равными 1.

Использование идеи соизмеримости при доказательстве тП подчеркнуто и в книге [4] ***: “Арифметическую теорию пропорций, приложимую к соизмеримым величинам, Пифагор скорее всего использовал и при доказательстве своей знаменитой теоремы”.***

Таким образом, **прямоугольные треугольники и их применение имеют место быть только для пифагоровых рациональных троек**.

Для сторон треугольника с несоизмеримыми длинами, то есть с иррациональными значениями доказательства тП не существует, т.к. не существует такого прямоугольного треугольника [5,6].

Действительно, поскольку гипотенуза является иррациональным числом, то в качестве длины гипотенузы берется приближенное значение $\sqrt{2}$ с любой степенью точности, хотя бы, с = 1.4142135623730950488. Тогда c^2 = 1.99999999999999999999, что меньше $1^2 + 1^2$, поэтому вместо прямоугольного треугольника и получился остроугольный. И так будет всегда, какое бы огромное число разрядов ни взять. Других вариантов нет, поскольку $\sqrt{2}$ иррациональное число и записывается БЕСКОНЕЧНОЙ (?) десятичной дробью и в качестве длины гипотенузы взять что-то другое,

кроме невообразимо огромного числа, не представляется возможным. Равенство $(\sqrt{2})^2 = 2$ является в данном случае бессмысленным, т.к. $\sqrt{2}$ всего лишь символ, не имеющий отношения к вычислениям. Таким образом угол между катетами остается остроугольным.

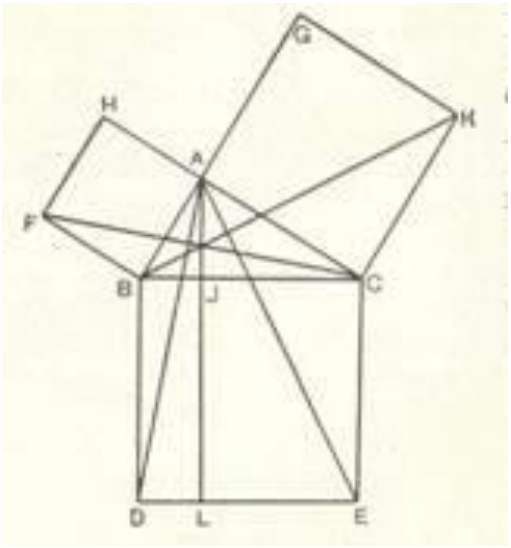
Вопрос этот в современном математическом мире не обсуждается, хотя представлены не менее 400 ее доказательств и почти все в картинках, т.е. для рациональных значений катетов и гипотенузы.

Но об этом, оказывается, думал за нас почти 2500 лет назад древнегреческий философ Демокрит: *"…по учению Демокрита все линии, плоскости и тела благодаря наличию общей меры* ***должны быть соизмеримы между собой****. Но против этой теории служили возражением такие факты, как несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной. В сочинении " Об иррациональных линиях и телах, посвященном разрешению этого вопроса, Демокрит проводил ту мысль, что* ***несоизмеримость подобных линий с точки зрения атомистической философии свидетельствует об их нереальности: такие линии не существуют в природе, они являются фикциями****…"*[7].

Еще раз, в [5] поясняется, что **прямоугольных треугольников с иррациональными катетами или гипотенузой равно как и соответствующих квадратов не существует**. Все они являются псевдопрямоугольными и на их основе **принципиально невозможно доказательство теорем**, но, тем не менее, продолжаются доказательства утверждений не соответствующих истине.

Насмотревшись различных доказательств тП с картинками, приведем арифметическую иллюстрацию тП для пифагорова треугольника, сначала на числовом примере (II), а потом в общем виде (III).

II. Рассмотрим пифагоров треугольник со сторонами (33, 56, 65). Рассуждение следует классическому доказательству Эвклида, кн. I, предл. 47 с тем же рисунком



Докажем равенство площадей квадрата ABFH и прямоугольника BJLD. Введем вначале общую меру отрезков, а именно 1/65. Далее вычислим длины отрезков BJ и JC: BJ= $\frac{33^2}{65}$, JC = $\frac{56^2}{65}$. Остается подсчитать количество квадратных единиц ($1/65^2$) в этих двух фигурах: в квадрате ABFH со стороной 33 их $(33 \times 65)^2$, а в прямоугольнике BJLD со сторонами BJ= $\frac{33^2}{65}$ и BD=$\frac{65^2}{65}$ их $33^2 \times 65^2$, т.е. полное совпадение. Подобным же вот образом доказывается, что число квадратных единиц в квадрате AGHC совпадает с число квадратных единиц в прямоугольнике JCEL. Значит квадрат на стороне BC равен вместе взятым квадратам на сторонах BA, AC.

III. Общий случай повторяет пункт II: рассмотрим прямоугольный треугольник со сторонами (k, l, m). В качестве общей меры отрезков выбирается 1/m часть, далее следуют равенства BJ = $\frac{k^2}{m}$ и JC = $\frac{l^2}{m}$. В квадрате ABFH со стороной k число квадратных единиц равно $(k \times m)^2$, а в прямоугольнике BJLD их $k^2 \times m^2$, т.е. опять полное совпадение. Дальнейший ход соответствует п. II в результате чего доказано, что $k^2 + l^2 = m^2$.

Таким образом, **для пифагоровых троек и рациональных чисел, производных от них, выполняются условия прямой и обратной тП**.

IV. Так и продолжались бы вычисления на основе пифагоровых

треугольников тем более, что с их помощью можно было все вычисления производить рациональными числами. Но потом, нарушив условия тП, взяв НЕ пифагоров, якобы прямоугольный, треугольник со сторонами 1 и 1, незаконно применив тП, в результате чего и получился ЭТОТ НЕВООБРАЗИМЫЙ БЕЗГРАНИЧНЫЙ МОНСТР

$\sqrt{2}$ = 1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317… , а на его примере и весь класс так называемых *ломаных, немых* или *глухих* (справедливые названия) иррациональных чисел.

Какова же природа этого феномена, созданного неадекватным применением тП. Выше было подчеркнуто, что треугольник с единичными сторонами не является прямоугольным и поэтому для получения прямого угла приходится стороне, лежащей против псевдопрямого угла неограниченно изменять свою длину. За конечное число шагов этого не сделать, иначе получили бы пифагоров треугольник, но таких со сторонами 1 и 1 не бывает. Поэтому длина “гипотенузы” не став рациональным числом, превратилась в псевдоразумное число “бесконечно” приближающееся к недоступному $\sqrt{2}$.

А ведь на роль псевдопрямоугольного треугольника (1, 1, $\sqrt{2}$) претендуют истинные пифагоровы треугольники вида (n, n+1, m), аппроксимирующие треугольник со сторонами (1, 1, $\sqrt{2}$):
(119, 120, 169); (4059, 4060, 5741); (803760, 803761, 1136689);
(20281784253021193250349397670530002142278981637826 0,
20281784253021193250349397670530002142278981637826 1,
28682774359747644253733243407452026047810661916406 1).

Для последнего треугольника отношение гипотенузы к катету m/n отличается от точного значения $\sqrt{2}$ на величину 10^{-50}, которую можно неограниченно улучшать и при этом **не требуется** даже **корень извлекать**. По этому поводу читаем у Тимердинга: *” Иррациональное отношение сводится таким образом к отношению двух бесконечно больших чисел,*

которое не может быть выражено отношением двух конечных чисел. В действительности, иррациональное отношение может быть выражено как угодно точно отношением двух конечных чисел, стоит лишь выбрать эти числа достаточно большими, а эта мысль уже очень близка к заключению, что иррациональные числа могли бы быть и точно выражены, если бы имелись в распоряжении бесконечно большие числа" [8].

Конечно, иррациональные числа в результате развития математических методов, появились и другими способами, но применение тП показывает природу их возникновения для случая $\sqrt{2}$ и, самое главное, сам способ некорректного применения самой теоремы Пифагора, не говоря уже о способах ее доказательства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гильберт Д., Основания геометрии, М.-Л., 1948.
2. Маркос Жан Санчес, Тайна за тремя стенами. Пифагор, М., 2015.
3. Киселев А.П., Геометрия, ч.1, М., 1962.
4. Жмудь Л.Я., Пифагор и его школа, Л., 1990.
5. А существует ли прямоугольный треугольник со сторонами 1, 1, $\sqrt{2}$ // «Академия Тринитаризма», М., Эл№77-6567, публ.29213, 11.11.2024.
6. О возможности построения отрезков иррациональной длины // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.29608, 30.07.2025.
7. Маковельский А.О., Древнегреческие атомисты, Баку, 1946.
8. Тимердинг Г.Е., Золотое сечение, М., 2005.

М.Пирожков pisigma@mail.ru