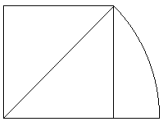
О возможности построения отрезков иррациональной длины



Вопрос, а **можно ли построить отрезок иррациональной длины**, возник из размышлений о существовании прямоугольных треугольников с иррациональными сторонами [1].

I.1. Дальнейшее развитие вопроса о построении отрезка иррациональной длины читаем в книге Я.С.Дубнова [2], где автор утвердительно отвечает на поставленный вопрос***:***

" Пусть теперь дано произвольное вещественное положительное число α; покажем, как построить отрезок, длина которого выражается именно этим числом α ". И дальше дается алгоритм построения числа α (а все дело сведется к точке зрения на восприятие, понимание и трактовку понятий *ИРРАЦИОНАЛЬНОЕ ЧИСЛО и КЛАССИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ)*. В начале построения там строятся рациональные приближения вещественного числа α по недостатку $\frac{\alpha_k}{2^{m+k}}$ и по избытку $\frac{\alpha_k+1}{2^{m+k}}$, как будто этот безграничный процесс когда-либо может завершиться получением точного значения α. Это невозможно, во-первых, в силу безграничности самого процесса и, во-вторых, предел не вычислим в силу неисчерпаемости континуума и получения в результате сколь угодно малого интервала вместо единственного значения α. И вот на этих сомнительных предположениях начинается построение второго этапа: ***" Имея теперь в своем распоряжении последовательность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$*** (вместо α) ***начнем строить искомый отрезок"*** [2]. На луче OM начинается откладывание отрезков с вышеприведенными значениями по недостатку и избытку. Естественно, числа $\frac{\alpha_k}{2^{m+k}}$ монотонно возрастают, а $\frac{\alpha_k+1}{2^{m+k}}$ монотонно убывают. На основании теоремы о стягивающейся последовательности (аксиома Кантора) найдется единственная точка R, принадлежащая всем этим отрезкам, поэтому

" $\frac{\alpha_k}{2^{m+k}} \leq$ дл. **OR** $< \frac{\alpha_k+1}{2^{m+k}}$, $\lim \frac{\alpha_k}{2^{m+k}} = \lim \frac{\alpha_k+1}{2^{m+k}} = \alpha$, ***следовательно, дл.OR = α***, *чем доказательство завершено"* [2].

Только нигде не указано, что стягивающаяся последовательность никогда не укажет единственную точку, опять же в силу неисчерпаемости континуума. Действительно, для того чтобы безгранично уменьшающаяся последовательность интервалов закончилась вдруг одной точкой,

необходимо, чтобы существующая на всем протяжении окрестность чисел вокруг этой точки где-то в “бесконечности” мгновенно испарилась, оставив одну нужную точку. Да еще *ПРЕДЕЛ* не вычислит истинное значение α поскольку он скрыт целым интервалом вещественных чисел сколь бы угодно долго не продолжать вычисления. Вообще задача завершения бесконечных процессов невыполнима ввиду отсутствия в них ПОСЛЕДНЕГО ЗАВЕРШАЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТА.

I.2. Тем не менее, аналогичные рассуждения, находим и в учебнике Перепелкина [3]. В теореме под номером 100 читаем:***” Если измерение отрезков возможно, то длиной отрезка может быть только предел последовательности приближенных значений длины отрезка с точностью до*** $\frac{1}{n^k}$ $(k = 0, 1, 2 \ldots)$***”.*** Тем самым роль предела сводится к пустой констатации, которой не соответствует никакое числовое значение в силу его недостижимости, а вот длина должна вычисляться с определенной точностью, но и она никогда не дотянется до бесконечного иррационального результата. А дальше обратная задача: ***“ для всякого ли числа x найдется отрезок, имеющий это число своей длиной. Утвердительный ответ для рационального числа получается без труда. В случае иррационального числа x ответ не получается столь просто”*** [3]**.** Оказывается, что для положительного решения нужна еще аксиома Кантора, смысл и применение которой разобран выше. И в результате якобы доказана теорема с номером 102: ***“ Каждому положительному числу соответствует отрезок, имеющий это число своей длиной”*** [3]**.** А в результате вывод о том, что т.102 лежит в основе установления взаимно однозначного соответствия между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек прямой, а именно этот результат красной нитью проходит во всех учебниках математического анализа.

II. В фундаментальной монографии [4] изложены основные результаты алгоритмической теории измерения, что “*сразу же приводит к появлению* ***принципиально неустранимой погрешности измерения, обусловленной конечностью измерительного акта, - погрешности квантования по уровню****, которая не имела места при теоретико-множественном подходе к измерению. Отсюда вытекает* ***вывод о невозможности измерения любой величины с абсолютной, бесконечной*** *(в актуальном смысле)* ***точностью****; точность измерения, определяемая погрешностью квантования по уровню, на каждом шаге измерительного акта всегда является конечной величиной, которая принципиально может быть сделана как угодно большой при увеличении времени измерения”*.

И что самое главное: *“ следует обратить внимание на внутреннюю*

противоречивость (в диалектическом смысле) теоретико-множественной теории измерения (и как следствие теории действительных чисел) , допускающей в своих исходных положениях (аксиомы непрерывности) сосуществование диалектически противоречивых представлений о бесконечном (актуальной, завершенной бесконечности - в аксиоме Кантора (и Дедекинда) и бесконечности потенциальной, незавершенной - в аксиоме Архимеда)" [4] .

III. Вот такой получился абсурдный результат, следующий из работ [2, 3] раздела I: оказывается на оси можно отложить любое иррациональное число. Только вот спрашивается с помощью какого такого циркуля или микроскопа можно добраться до $10^{100^{100}}$ или еще большего количества знаков после запятой, да все еще на них не остановиться, а идти дальше как того требует иррациональность.

Абсурдность построения отрезка иррациональной длины отмечал еще Ф.Клейн : ***"…утверждение, что две точки отстоят друг от друга на расстояние, выражающееся иррациональным числом миллиметров, фактически не имеет никакого смысла, так как десятичные знаки дальше шестого не имеют реального значения"*** [5]**.** Что подтверждается и в книге [6]: ***"Так как рациональные числа расположены на прямой всюду плотно, то никакая физическая операция …не позволит различить, является ли данная длина рациональной или же иррациональной".***

Таким образом, предложенная реализация построения отрезка иррациональной длины НЕРЕАЛИЗУЕМА. Таких отрезков не существует естественно ни в физическом мире, ни даже в идеальном, математическом (платоновском) мире. А самое главное, **не должны ли эти доказательства привести к полному переосмыслению и теории вещественных чисел и теории пределов в их существующих построениях.**

ЛИТЕРАТУРА

1. А существует ли прямоугольный треугольник со сторонами 1,1,√2 // " Академия тринитаризма", М., Эл. №77-6567, публ.29213, 11.11.2024.
2. Дубнов Я.С., Измерение отрезков, М., 1962.
3. Перепелкин Д.И., Курс элементарной геометрии, ч.1, М.-Л., 1948.
4. Стахов А.П., Введение в алгоритмическую теорию измерения, М., 1977.
5. Клейн Ф., Элементарная математика с точки зрения высшей, т.1, М.,1987.
6. Курант Р., Роббинс Г., Что такое математика, М.,1967.

М.Пирожков pisigma@mail.ru