С.Л. Василенко

Золотой калейдоскоп. Часть 9. Квадраты.

> В жизни, как в геометрии, важно не только наличие сторон, но и правильное их сочетание, чтобы получился квадрат – символ гармонии и завершенности...

Простая геометрическая форма квадрата олицетворяет человеческое знание и науку, так как представляет собой правильную (идеальную) фигуру, редко встречающуюся в природе. Форма квадрата искусственная, а значит, это цивилизация.

В отличие от форм, близких к кругу, которые имеют природное происхождение-начало, со своими естественными прообразами в биологии, астрономии.

Вкупе с золотым сечением квадрат раскрывает свои неповторимые свойства гармонии.

Мы уже обращались к теме гармоничного сочетания квадратов в своей работе [1] под общей рубрикой деления выбранных объектов пополам и золотой пропорции.

Продолжим выбранную направленность под ракурсом калейдоскопа – прозаического и одновременно физико-математического объекта, который хорошо знаком с детства и как нельзя ладно подходит в качестве общего систематизатора, объединяющего разноплановые проявления золотой пропорции с её константой Ф. – В переносном смысле означает разнообразие проявлений и фактов определенной направленности.

Общие представления о квадрате.

Квадрат – равносторонняя геометрическая фигура, ставшая одной из распространенных универсалий архаических культур, отраженных в мифологии, мировоззрении, религии [2].

Уникальная форма и семантика квадрата ярко выражены в давних описаниях мироздания, задавая подоснову всеобщего порядка и стабильности.

Прямые углы характеризуют устойчивость, долговечность и непоколебимость.

Равные стороны символизируют равенство, порядок, прямоту, простоту, целостность.

В целом это символ равновесия и пропорциональности, стабильности и постоянства, безопасности, защиты и ограничения.

Квадрат выступает как основная модель структурирования мира и упорядочения четырех элементов: 4 стихии, 4 стороны света, 4 времени года, 4 периода суток, 4 стадии человеческой жизни и т.п.

В системе этических представлений с квадратом связываются истина, справедливость и мудрость. В психологическом отношении он ассоциируется с прочностью и устойчивостью, объясняя его использование в различных процессах преобразования природных форм и создавая образ стабильной структуры, статической целостности.

Квадрат отражает человеческие процессы и материальную составляющую бытия, рациональность и меру. Подчеркивает значимость баланса и порядка в различных аспектах существования.

Сварогов квадрат (звезда Руси) – славянский символ бога-творца Сварога.

Магический квадрат концентрирует в себе энергию, связанную с лежащим в его основе числом. Наиболее простой магический квадрат – композиция из девяти цифр: сложение трех чисел в любом прямолинейном направлении дает одинаковую сумму 15:

4	**9**	**2**
3	**5**	**7**
8	**1**	**6**

Квадратная форма воспринималась как идеальная и типовая форма для планов культовых сооружений: зиккураты, пирамиды, церкви, пагоды и др.

«Черный квадрат» Малевича – икона постмодернизма и, возможно, самый известный словесный символ, связанный с этой геометрической фигурой.

Квадратная клетка присутствует в школьных тетрадях и является одной из самых удобных и совершенных модульных систем, которая ассоциируется с математикой, точностью и порядком.

Шахматная доска состоит из чередования черных и белых квадратов. Так же, как всемирно узнаваемое обозначение такси. Квадрат, разделённый греческим крестом, напоминает окно и служит эмблемой Microsoft Windows.

В аспекте четырехчастности символические значения квадрата совпадают с крестом, который тоже отражает четыре стихии, стороны света, времена года и т.п.

Треугольники, круги, квадраты...

"Конспирология" банкиров.

Банкноты многих валют мира имеют продавленные тактильные обозначения, по которым слабовидящие люди могут понять номинал купюры. Среди них особо выделяются три базовые геометрические фигуры: круг, квадрат и равносторонний треугольник.

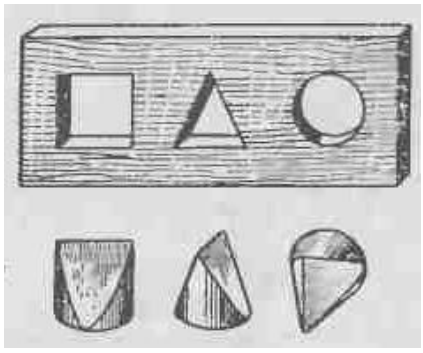
Такие знаки, с присущим им сакральным смыслом, присутствуют на ходовых белорусских, украинских, польских и других банкнотах, в частности:

- *треугольник* (20 гривен) – символ власти и контроля – его три угла олицетворяют три силы-столпа правления: финансы, политику и медиа;
- *круг* (50 гривен) – знак бесконечности и объединения – символизирует замкнутый цикл власти, где никто извне не может проникнуть внутрь;
- *квадрат* (100 гривен) – символ стабильности и структуры – подчеркивает свою незыблемость и контроль над всеми процессами.





Каждой дырке – по затычке.



Как говорят, не в каждой бочке найдется свой Диоген, но в каждой найдется своя затычка. – Но ещё лучше, одна общая на все.

На эту тему есть любопытная задачка.

Определить форму затычки, которую можно втискивать и поочередно закрывать три отверстия: квадратное, треугольное и круглое [3, с. 125].

Нетрудно догадаться, что затычка имеет форму цилиндра с диаметром основания, равным высоте, и обрезанными боками.

Важные вехи квадрата в математике.

Квадрат – пожалуй, наиболее любимая геометрическая фигура древнегреческих математиков. Именно на его основе построена знаменитая теорема Пифагора – одна из базовых геометрических теорем. В её первоначальной формулировке: квадрат, построенный на гипотенузе, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах.

Можно позволить каламбур, что круг – это тоже квадрат, только ему вскружили голову.

Квадрат – устойчивая геометрическая фигура, и как визуальный образ он воспринимается полностью статичным.

Несоизмеримость. Длина многих отрезков, например, диагонали квадрата с единичной стороной, не выражается в виде отношения двух целых чисел.

Это открытие античных времен перевернуло сознание и бросило вызов пифагорейцам на их представления о числах и гармонии, ибо существовал священно-религиозный культ вокруг целых и рациональных чисел (*ratio* – отношение), выражаемых обыкновенными дробями в виде отношения натуральных чисел и/или конечной десятичной дробью.

Казалось, обнаружение несоизмеримости в целых числах "сломало" всю математику.

Но в итоге открыло дверь в огромный мир теории иррациональных чисел, представимых в виде бесконечной непериодической десятичной дроби. Как варианта или частный случай переменной величины, выражаемой конечным числом с любой выбранной точностью представления.

Некоторые математические операции позволяют избежать иррациональности, например, умножение одинаковых радикалов с индексом (степенью корня) 2.

Так, соединив середины сторон квадрата, получаем квадрат вдвое меньшей площади.

К слову, в среде математиков и преподавателей до сих пор наличествует скептическое отношение к иррациональным числам, например "√2 не число" [4].

Здесь важно исходить из общих представлений:

величина – свойство объекта, которое можно измерить;

число – понятие для количественной характеристики объектов и/или результат (значение) измерения величины при выбранной единице измерения;

переменная – величина (символ, буква) с изменяемым значением в зависимости от контекста;

константа – величина, значение которой не меняется в рамках конкретного контекста;

несоизмеримость касается отношения между величинами, например, длинами геометрических отрезков, у которых нет общей меры.

Поэтому √2 – это число и константа, как частный случай величины, несоизмеримой с единицей, а значит, в определенном смысле и варианта-переменная.

Квадратура круга (кругатура квадрата).

Нахождение способа вычерчивания квадрата и круга по равновеликости их площади (квадратуры круга) относится к классу неразрешимых задач на построение с помощью циркуля и линейки, и стало синонимом-метафорой невыполнимости задачи как таковой.

Немецкий математик Ф.Линдеманн доказал (1882), что квадратуру круга невозможно решить с помощью классических идеальных инструментов. Неразрешимость этой проблемы следует из "мерзко-негодной" трансцендентности числа π.

Позже польско-американский математик А.Тарский изменил правила задачи (1925): можно ли разрезать круг на конечное число частей и путем перемещения на плоскости собрать из них квадрат такой же площади?

Другими словами, квадратура круга Тарского – задача о равносоставленности круга и равновеликого квадрата.

Более формально: можно ли разбить круг на конечное количество попарно непересекающихся подмножеств и передвинуть их так, чтобы получить разбиение квадрата такой же площади на попарно непересекающиеся подмножества?

Венгерский математик М.Лацкович доказал (1989) возможность такого разбиения, разделив круг на ~10^{50} частей и применяя только их параллельный перенос, без поворотов и отражений. Однако доказательство было "некоструктивным", без визуализации.

В 2021 году ученые Мате, Пихурко и Ноэль показали конструктивное решение квадратуры круга с разбиением на ~10^{200} борелевских кусков (открытых подмножеств топологического пространства). Вариант содержит астрономическое число фрагментов, но в теории, их можно изобразить.

"Оригинальный" подход к «кругатуре квадрата» изложен в работе [5] на основе изменения числа "пи" (!?) с новой альтернативной константой $\pi_C \approx 3{,}1446 > \pi \approx 3{,}1416$, взяв за основу произведение двух математических констант $\pi \cdot \sqrt{\Phi} \approx 3{,}9962$, которое весьма близко к целому числу 4, где Ф – константа золотого отношения.

Всего-то и надо: подправить фундаментальную константу $\pi \rightarrow \pi_C$ во имя квадрирования и/или круглирования, что детально проанализировано в нашей статье [6].

Более занимательно иное... В подтверждение псевдонаучной идеи автор недавно (2025) привлек к сотрудничеству чат-бот ChatGPT с искусственным интеллектом (ИИ), который в подобных ситуациях-условиях, как известно, услужливо микрирует под интересы пользователя и оказывает медвежью услугу. Дабы не разочаровывать и обижать честным отзывом, ИИ прощупывает предпочтения собеседника, "скармливает" их обратно и выдает ответы, соответствующие убеждениям клиента. Проявляет себя как льстец-прислужник, с бессодержательным "одобрямс", вопреки научной точности и полезности результата.

Целочисленное квадрирование квадрата.

Разрезание квадратов, в частности, рассмотрено в книгах [7, 8].

Среди прочих вариантов представляет интерес *квадрирование квадрата* (squaring the square) – задача о разбиении квадрата на конечное число меньших квадратов с целочисленными сторонами [9, с. 275–292].

В более узком смысле – задача разбиения квадрата на конечное число *попарно неравных* между собой квадратов. Такой квадрат называется *совершенным* (perfect square) или идеальным. Разбиение квадрата, когда никакое подмножество составных квадратов не образует прямоугольник (не считая отдельных квадратов), называют *простым*.

Голландский математик A.Duijvestijn с помощью компьютера нашел (1978) разбиение квадрата на подмножество из 21 неравных квадратов (рис. 1) [10, 11].

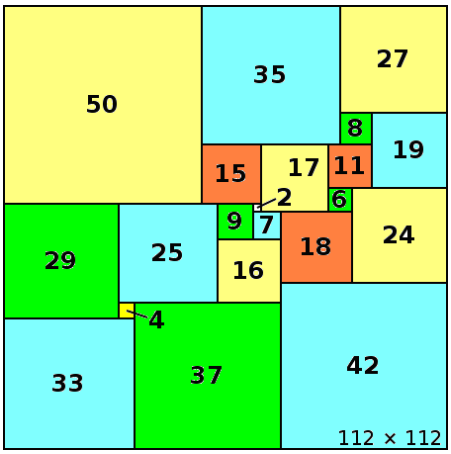


Рис. 1. Уникальное и единственное разбиение квадрата на минимальное подмножество из 21 неравных квадратов с целыми сторонами

Это минимальное количество различных квадратов, которыми можно замостить квадрат. Целое число внутри каждого квадрата означает длину его стороны.

Соответственно, длина стороны исходного большого квадрата равна суммам длин сторон крайних квадратов:

$$50+35+27 = 50+29+33 = 33+37+42 = 27+19+24+42 = 112.$$

Ученый также обосновал следующие положения (n = 2):

- не существует совершенного квадрата меньшего порядка;
- найденное разбиение – единственно возможное для разбиения **21**-го порядка.

В математике также доказано, что невозможно произвести разбиение куба (n = 3) на конечное число попарно неравных между собой кубов, то есть "кубирование куба", а также "гиперкубирование" для всех $n>3$.

Из всех комбинаций остается только квадрат минимальной сложности, который разрезается единственным решением в точности на подмножество 21 попарно неравных квадратов. Такое разбиение уникально и не повторяется в других евклидовых пространствах.

Геометрия золотого сечения на основе квадрата.

Обычно демонстрируемые геометрические построения на тему золотого сечения (ЗС) сводятся к сопоставлению меньшего и большего отрезков, причем чаще всего безотносительно от единичной меры.

Распространенные способы отображения золотого сечения основаны на прямоугольных фигурах (треугольниках, прямоугольниках) с соотношением сторон $1:2$.

По теореме Пифагора это приводит к квадратному корню из пяти – иррациональной составляющей числа золотого сечения:

$$\Phi = \left(\sqrt{5}+1\right)/2 \quad \text{или} \quad \phi = \Phi^{-1} = \left(\sqrt{5}-1\right)/2 .$$

Пожалуй, наиболее простой и эффективный способ построения ЗС состоит в дополнении единичного квадрата до золотого прямоугольника со стороной, равной Φ.

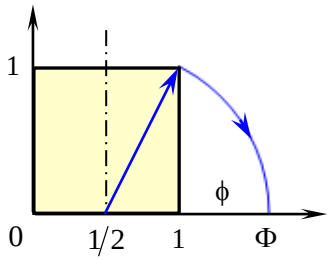


Рис. 2. Формирование золотой константы

В частности, представляет интерес [12] комбинированная интерпретация ЗС (рис. 2):

Делим основание квадрата 1×1 пополам.

Проводим дугу радиусом $\sqrt{5}/2$, заключенным между серединой основания и вершиной квадрата, до продолжения стороны квадрата. Всё!

Получаем отрезок длиной $1+\phi=\Phi$.

Довольно наглядно и очевидно. Число Ф определяется одним поворотом циркуля относительно середины квадрата.

С одной стороны, отрезок с константой ЗС располагается на линии, содержащей единичный отрезок, имея с ним общую точку отсчёта (левый нижний угол).

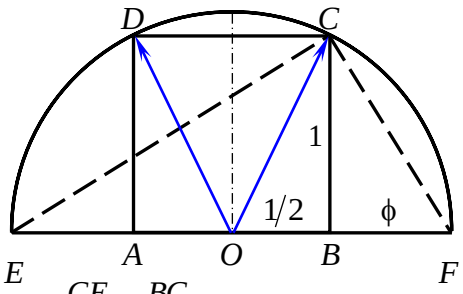
С другой стороны, образуется аналогичный инвариант относительно плоских фигур: квадрата 1×1 и прямоугольника 1×Ф.

Рассматривая теперь большой прямоугольник, построенный по принципу ЗС, и отрезая от него слева квадрат, мы получаем новый, уменьшенный прямоугольник с тем же отношением сторон $1:\Phi=\phi:1$.

И такой инвариантно-фрактальный процесс бесконечен!

Данное построение имеет адекватное представление в виде полукруга, описанного вокруг квадрата.

Геометрическое решение квадратного уравнения с единичными коэффициентами (алгебраического прообраза ЗС) в этом случае приводит к простой схеме построения согласно алгоритму Евклиду (рис. 3 – рис. 4).



$$\frac{CE}{CF}=\frac{BC}{BF}=EB=AF=\Phi$$

$$EF=\sqrt{5}=\Phi+\phi=\Phi+\Phi^{-1}$$

Рис. 3. Числовые параметры ЗС согласно алгоритму Евклида

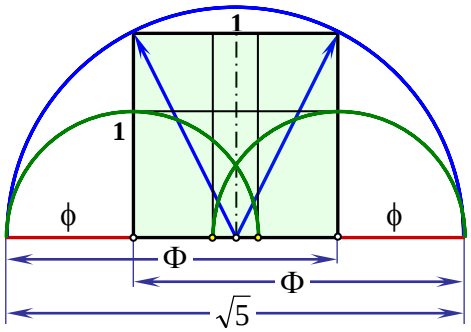


Рис. 4. Абсолютная симметрия построений-решений ЗС, вытекающих из "Начал" Евклида: предложение 2.11

Данная модель приращений имеет целый ряд неоспоримых преимуществ [13] по сравнению с обычным или традиционным делением отрезка.

1) Константа Ф приобретает *четкую метрику* и содержательный геометрический смысл. Это новый увеличенный отрезок. Или новое увеличенное (подросшее) целое в результате увеличения исходного единичного отрезка на величину приращения ϕ. В тех же самых единицах, что исходный отрезок 1 и добавка к нему ϕ.

Другими словами, все величины в равенстве $1+\phi=\Phi$ имеют одинаковую метрику.

Очень важное методологическое расширение!

Ибо в задаче на евклидово деление отрезка величина Ф метрики не имела и определялась, как отношение большей части к меньшей. То есть, само сечение мы проводили, а геометрически представить величину Ф не могли.

Теперь у нас золотое число Ф – «новая созидательная единица», образуемая из обычной единицы 1 в золотой пропорции.

2) Имеем *минимальную форму* в записи пропорции по количеству наличия в ней неизвестной величины $\frac{1+x}{1}=\frac{1}{x}$. – Это верный признак правильности выбранного нами пути решения и осмысления!

3) Имеем *минимальное количество операций* (с помощью циркуля и линейки) для решения геометрической задачи на построение. Чтобы выполнить сечение отрезка, нам нужно было ещё дополнительно провести дугу радиусом ϕ с центром в правой нижней вершине квадрата. Задача на золотое увеличение-приращение (приумножение) решается всего лишь одним поворотом циркуля.

Так поступает и природа. Этот момент является определяющем в синтезе и развитии растений с их вездесущим филлотаксисом. Одним движением поворота, образуя спираль.

Именно формирование, рост, созревание являются главными посылами. Но не пресловутое золотое деление, которое в природе практически не встречается.

4) Можно сформулировать пропорцию в категориях *динамического изменения состояния*: новое так относится к старому, как оно – к приращению.

При этом становится более понятной и отчетливой связь возрастающих чисел Фибоначчи приблизительно в геометрической прогрессии с константой-аттрактором Ф.

Или те же кролики... С их рождением-ростом-созреванием. Но никак не умерщвлением-вырезанием-гибелью. Допустимая операция в математике, с её расчленением и разбиением, становится мало востребованной аналогией в теории жизни.

5) Если изначально взять за основу задачу деления (целого, отрезка), то она таковой и остаётся. То есть всё заканчивается анализом.

В задаче на приращение всё обстоит иначе.

В рамках одной проблематики мы можем проводить *одновременно анализ и синтез*.

Дело лишь в определении направления движения-приращения.

В последнем можно лишь изменить ориентацию, и тогда образуется не наращивание, а урезание (деление).

Таким образом, привычное *золотое сечение – модель анализа и разрушения*. Причем более сложная конструкция в реализации и построении.

Золотое приращение или равновесное развитие – модель синтеза и созидания.

Модель простая, наглядная и жизненно востребованная.

От квадрата – к терминологии.

К слову, часто употребляемый в русскоязычной математике термин «Ф – золотое сечение» не верен, с какой бы стороны мы к нему ни подходили.

Ни *геометрически*, когда в задаче на сечение мы его не можем наглядно представить.

Ни *словесно*, ведь число – не есть сечение. Ни *онтологически*.

Так совпало, что его проявление впервые обнаружили в задаче на деление геометрического отрезка. На самом деле, это число не сечения, ибо там оно прямо не выражается. Константа Ф (золотого сечения) – *это число золотого роста и приумножения*.

Именно поэтому оно обычно проявляется-встречается в живых системах-творениях. А его искусственное "внедрение-насаждение" в костные конструкции и объекты больше походит на игру воображения и фантазии. Ввиду исключительно слабой аргументации.

В англоязычной литературе основное распространение имеет термин «золотого отношения» (golden ratio). – И это терминологически верно.

Значимость квадрата в золотом прямоугольнике.

Модель золотого отношения многогранна в своем проявлении. В силу своих замечательных свойств она сочетает в себе конечные и бесконечные проявления, интерпретации, толкования. Среди них: золотое деление целого на бесконечное число частей, золотое самоподобие и бесконечномерное деление пополам и др.

Так, классическое толкование золотого прямоугольника с отношением сторон $1:\Phi$ сводится к тому, что при отрезании-удалении квадрата от данной геометрической фигуры, оставшаяся часть остается золотым прямоугольником, подобным исходному аналогу.

Таким образом, *золотой прямоугольник* – такой прямоугольник, при отрезании от которого квадрата с меньшей стороны или добавлении квадрата с большей стороной образуется прямоугольник, подобный исходному аналогу.

В обоих случаях площади квадратов соотносятся как $1:\Phi^2$.

Теперь возьмем в качестве исходной фигуры квадрат 1×1 [14] (рис. 5).

На его диагонали выберем точку O, через которую проведем горизонталь и вертикаль.

Выделенный слева прямоугольник $1\times x$ становится подобным нижнему желтому прямоугольнику в единственном случае, согласно пропорции:

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x} \quad \rightarrow \quad x^2+x-1=0 \quad \rightarrow \quad x=\phi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

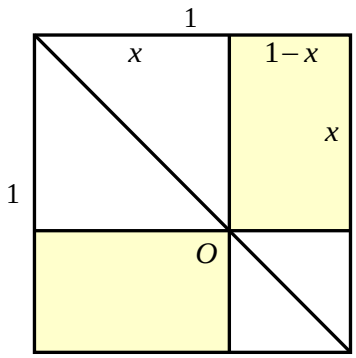


Рис. 5. Образование золотых прямоугольников на базе квадрата

В результате такого пропорционального разбиения образуются три подобных золотых прямоугольника, из которых два желтых равны. Примечательно, что прямоугольник справа от вертикальной линии имеет соотношение сторон $1:\phi^2$.

То есть, квадрат делится на два прямоугольника: *золотой* с соотношением сторон $1:\Phi$ и "*квадратично-золотой*" с отношением сторон $1:\Phi^2$.

Продолжим бесконечно отрезать квадраты от каждого следующего золотого прямоугольника, и каждый раз будем проводить в них диагонали.

Все диагонали ложатся на одну из двух основных диагоналей, которые пересекаются под прямым углом в одной и той же предельно-сходящейся точке (рис. 6) с координатами

$$\left(\phi^2;\ \phi\right)/\sqrt{5}\ \approx\ (0{,}171;\ 0{,}276),$$

которые образуют между собой золотое отношение.

Таким образом, диагонали всех прямоугольников перпендикулярны.

Место их пересечения вполне допустимо сравнить с некой «геометрической черной дырой, точкой притяжения, куда уходит бесконечная последовательность "золотых" прямоугольников» [15, с. 58].

Вершины сопряженных квадратов (они же вершины золотых прямоугольников) образуют золотую логарифмическую спираль с коэффициентом роста $q=\Phi^4$ и постоянным углом $\theta\approx 72^o=\arccos(\phi/2)$ между касательной к спирали и радиус-вектором (рис. 6).

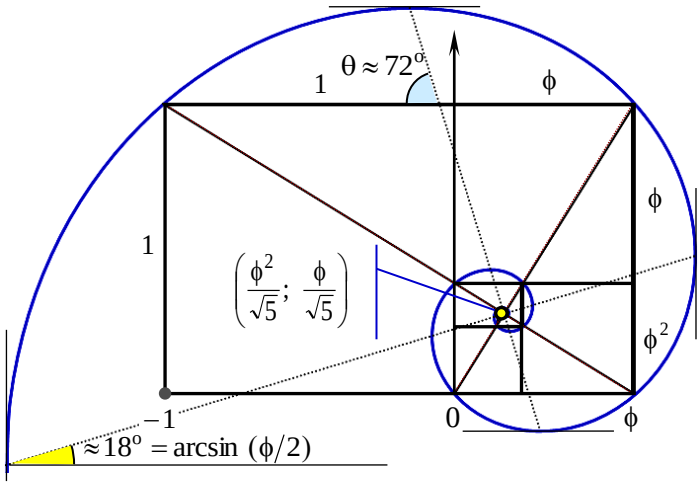
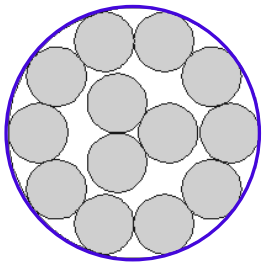


Рис. 6. Схождение бесконечной последовательности квадратов и золотых прямоугольников в точку притяжения – геометрически черную дыру

Упаковки и покрытия.

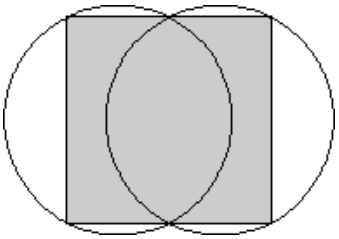
В работе [16] представлены разные виды упаковок: квадраты в квадрате, круге, правильном треугольнике, круги в квадрате и др. В частности, плотные упаковки n = 1÷323 единичных квадратов внутри наименьшего квадрата с длиной стороны s =1÷18.

В ряде задач проявляется константа золотого сечения.



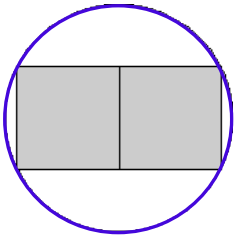
Например, на диаграмме слева показано, как 13 единичных кругов пакуются внутри минимально возможного круга радиусом $r = 2 + \sqrt{5} = \Phi^3$.

Правая диаграмма отображает два единичных круга, которые покрывают наибольший квадрат со стороной

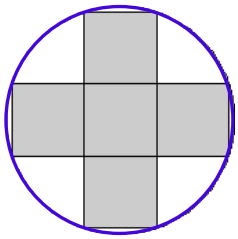


$$s = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\Phi + \phi}.$$

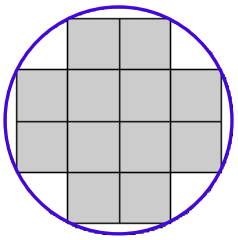
На рисунке 7, показаны упаковки единичных квадратов внутри круга наименьшего радиуса r.



$$r = \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\Phi + \phi}{2}$$



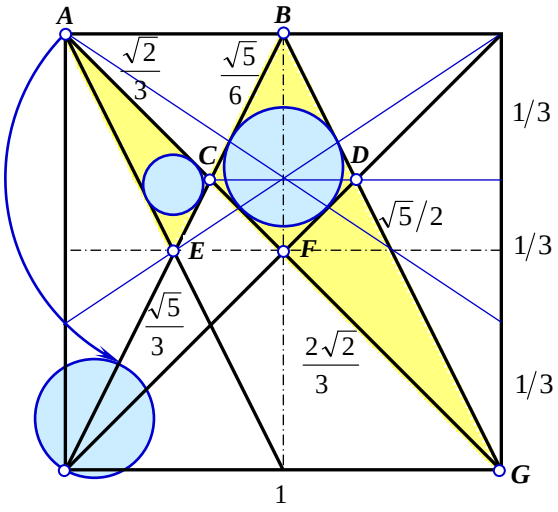
$$r = \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\Phi + \phi}{\sqrt{2}}$$



$$r = \sqrt{5} = \Phi + \phi$$

Рис. 7. Примеры упаковки 2, 5 и 12 единичных квадратов внутри наименьшего круга радиусом r

Дельтоид и треугольник в квадрате.



В квадрате 1×1 проведены диагонали и два отрезка, соединяющие левые вершины квадрата с серединами сторон.

В дельтоид *BCFD* (четырехугольник с равными смежными сторонами) и треугольник *ACE* вписаны окружности.

Покажем, что их радиусы относятся, как 1:2.

В желтых треугольниках *ACE* и *BCG* большие стороны параллельны *AE* || *BG*, поэтому они имеют равные углы и подобны.

Большие стороны относятся как 1:2, то есть, коэффициент подобия равен 2, а значит, и радиусы вписанных окружностей находятся в той же пропорции.

Диагональ квадрата – $\sqrt{2}$.

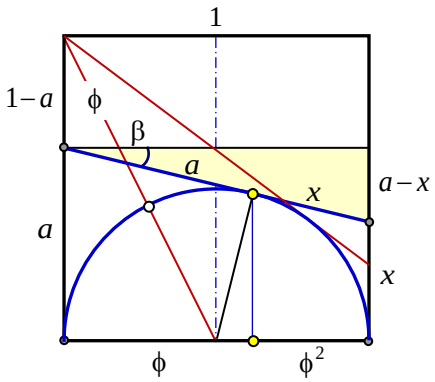
Стороны б*о*льшего треугольника равны $\left(\frac{\sqrt{5}}{2};\ \frac{2}{3}\sqrt{2};\ \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, площадь = $1/6$ кв. ед.;

диаметр б*о*льшего круга – $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}$;

стороны дельтоида – $\sqrt{5}/6,\ \sqrt{2}/6$;

угол между неравными сторонами – $\pi/4+\operatorname{arctg}2\approx 108,44^{\circ}$.

Касательная к полуокружности в квадрате.



В квадрате 1×1 на одной стороне, как на диаметре, проведена полуокружность радиусом $1/2$, а к ней – касательная линия из точки, отстоящей от нижней вершины квадрата на величину a.

Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны, поэтому в закрашенном прямоугольном треугольнике имеем:

$$(a+x)^2=1^2+(a-x)^2 \quad\Rightarrow\quad x=1/4a.$$

Если касательная исходит из верхней вершины (a = 1), то её длина равна $1+1/4=5/4$.

Расстояние от верхней вершины квадрата до полуокружности численно равно малой константе золотого сечения $\sqrt{1^2+(1/2)^2}-1/2=\phi\approx 0{,}618$.

Определим также условия и параметры, при которых точка касания делит золотым сечением наклонную касательную линию, а значит и проекции на основании квадрата:

$$\frac{a}{x}=\Phi \quad\Rightarrow\quad a=\frac{\sqrt{\Phi}}{2},\quad x=\frac{\sqrt{\phi}}{2},\quad a+x=\frac{\Phi^{1,5}}{2},\quad \beta=\arccos\left(2\cdot\phi^{1,5}\right),$$

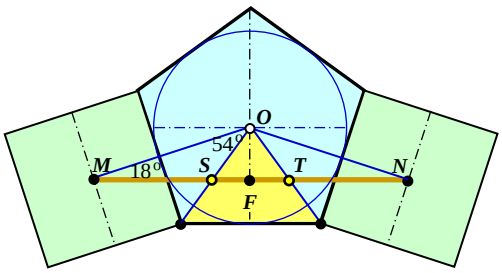
$$(a,\ x,\ \beta)\approx\left(0.636,\ 0.393,\ 13.7^{\circ}\right).$$

Два квадрата и пентагон.

Просто и симпатично смотрятся квадраты в сочетании с другими правильными многоугольниками, в частности, треугольниками, пентагонами.

Например, пристроим к сторонам правильного пентагона два квадрата [17].

Центры трех геометрических фигур соединим между собой.



По теореме синусов:

$\Delta\ OSF$: $\frac{FS}{OS}=\sin 54^{\circ}$;

$\Delta\ OMS$: $\frac{OS}{MS}=\frac{\sin\angle OMS}{\sin\angle MOS}=\frac{\sin 18^{\circ}}{\sin 54^{\circ}}$.

Перемножим два равенства:

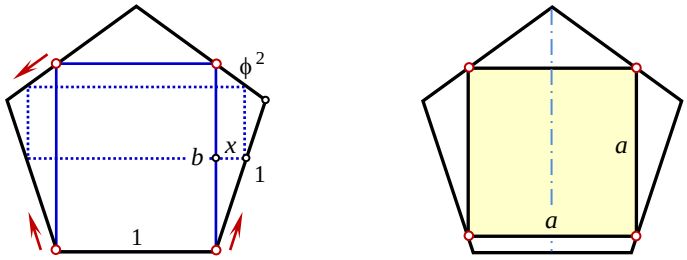
$$\frac{FS}{MS}=\frac{ST/2}{MS}=\sin 18^{\circ}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{\phi}{2}\ \rightarrow\ \frac{ST}{MS}=\phi:$$

$S=g(MT)$, $T=g(NS)$ – точки золотого сечения.

Квадрат в правильном пятиугольнике.

В задачнике В.В.Прасолова [18, с. 156, 171] есть утверждение:
в правильный пятиугольник можно вписать квадрат с вершинами на четырех сторонах пятиугольника; доказательство – логически-описательное.

Дадим аналитику решения и одновременно упростим доказательство [18].



В пятиугольнике на его нижней стороне единичной длины достроим прямоугольник.

Внутренний угол пентагона тупой ($\cos 108^\circ = -\phi/2$), поэтому его высота больше 1 и по теореме косинусов равна

$$b = \sqrt{\phi^4 + 1 + \phi^3} = \sqrt{2 - \phi} = q^{-1} \approx 1{,}176.$$

Сужаем прямоугольник по вертикали и одновременно расширяем по горизонтали так, чтобы вершины непрерывно скользили вдоль четырех боковых сторон пентагона, пока прямоугольник не превратится в линию – диагональ длиной $\Phi = 1 + \phi$.

Естественно, что найдется некое положение, когда прямоугольник станет квадратом.

Обозначим сдвиг нижней точки вправо через x, $0 \le x \le \phi/2$.

Ширина прямоугольника увеличивается $1 + 2x$, высота уменьшается $b(1 - 2\Phi x)$.

Квадрат образуется, если $1 + 2x = b(1 - 2\Phi x)$, откуда $x = 0{,}5\dfrac{1-q}{\Phi + q} \approx 0{,}030$.

Окончательно, сторона вписанного квадрата $a = \dfrac{1+\phi}{1+q\phi} \approx 1{,}060$.

Квадрат в треугольнике.

Квадрат вписывается в треугольник просто (рис. 8-а) [19].

В квадрате 4 вершины, в треугольнике – 3 стороны, поэтому две вершины квадрата должны лежать на одной из сторон треугольника.

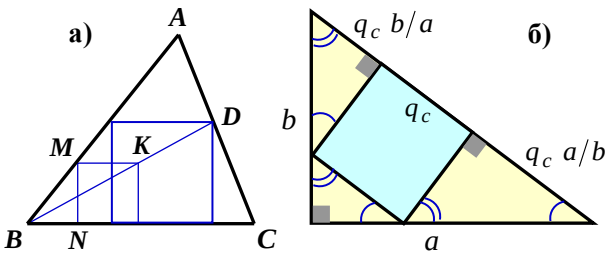


Рис. 8. Квадрат вписан в треугольник

Из произвольной точки M на стороне AB опустим перпендикуляр $MN \perp BC$, на котором построим квадрат.

Проведем прямую BK. Тогда D – точка искомого квадрата. Дальше дело техники.

Далее ограничимся прямоугольным треугольником со сторонами (a, b, c) и впишем квадрат, который опирается вершинами на каждую из сторон треугольника (рис. 8-б).

Находим его сторону $q_c = q$.

Квадрат отделяет три треугольника поменьше с взаимно перпендикулярными сторонами острых углов.

По теореме о равенстве углов они подобны между собой и исходному треугольнику.

Из подобия следует, что на гипотенузе c отсекаются отрезки $q\cdot a/b$ и $q\cdot b/a$, то есть

$$q\cdot a/b + q + q\cdot b/a \;=\; c \quad \Rightarrow \quad q = \frac{abc}{a^2+b^2+ab} = \frac{abc}{ab+c^2}.$$

Из формулы для площади находим $h_c = ab/c$, тогда $q_c = \dfrac{ch_c}{c+h_c} = \dfrac{abc}{ab+c^2}$.

Аналогично $h_b = a$, $q_b = \dfrac{bh_b}{b+h_b} = \dfrac{ab}{a+b}$.

Так, в *египетском* треугольнике (*a*, *b*, *c*) = (3, 4, 5) сторона квадрата $q_c = 60/37$.

Заметим, что:

60 – наименьшее число, имеющее своими делителями все числа от 1 до 6, почему и приглянулось древним ученым в качестве систем счисления, единиц измерения и др.;

37 – максимальное количество 5-х степеней чисел, необходимое для выражения их суммой любого числа.

Согласно теории рационального золотого сечения в целочисленных переменных [20] числа 60, 37 можно отнести к рациональному золотому сечению и восстановить адекватную двучленно-аддитивную последовательность $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$: 3, 1, 4, 5, 9, 14, 23, 37, 60, ...

Числовой ряд a_n имеет начальные условия $(a_0,\, a_1) = (3,\, 1)$ и связан с числами Фибоначчи $(F_0, F_1) = (0,\, 1)$ и числам Люка $(L_0, L_1) = (2,\, 1)$: $a_n = 3F_{n-1} + F_n = F_{n-1} + L_n$.

В треугольнике *Кеплера* $(a,\, b,\, c) = \left(\sqrt{\phi},\, 1,\, \sqrt{\Phi}\right)$ длина стороны вписанного квадрата равна $q_c = \left(\Phi - \sqrt{\phi}\right)/2 \approx 0{,}4159$.

Данному числу отвечает важная историческая система из трех уравнений, имеющая два вещественных решения в зависимости от знака *y*:

$$\begin{cases} x+y+z = p; \\ x^2+y^2 = z^2; \\ xz = y^2. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{p}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 \mp \phi\sqrt{\phi} \\ \pm\sqrt{\Phi} - \phi \\ \Phi \mp \sqrt{\phi} \end{pmatrix}.$$

Данная задача впервые появляется в «Книге Абу Камиля по алгебре» в конце первого тысячелетия. Естественно, способ представления и методы решения соотносились с подходами и традициями того времени.

Положительное вещественное решение (*x*, *y*, *z*) ≈ (2.571, 3.270, 4.159) описывается в работе [21, с. 58-60], с константой $p = 10$ согласно оригиналу.

Абу Камил (ок. 850 – ок. 930) – величайший арабский математик (после аль-Хорезми) из Египта. В частности, с помощью алгебраических методов он вычислял стороны вписанного и описанного правильного 5-угольника и 10-угольника. Работы Абу Камила хорошо знал Фибоначчи и применял в своем сочинении «Практика геометрии».

По сути, три уравнения означают алгебраическое описание "золотого" треугольника специального вида. Первое уравнение устанавливает масштаб (размер) в виде периметра трех сторон. Второе – фиксирует прямоугольность через теорему Пифагора. Третье соотношение определяет геометрическую прогрессию для длин сторон $x/y = y/z$.

То есть перед нами алгебраическое представление одной из реализаций прямоугольного Δ-Кеплера с целочисленным периметром, влияющим только на масштаб.

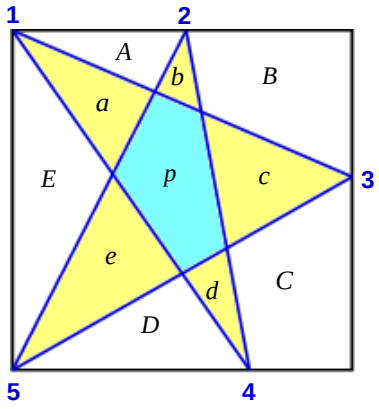
Отсюда появляются радикалы, в частности, $x/y = y/z = \pm\sqrt{\phi}$.

Звезда в квадрате.

В квадрат 1×1 вписана произвольная пятиконечная звезда, две вершины которой совпадают с углами квадрата, а три располагаются на его сторонах.

Пусть площадь её срединного пятиугольника равна p.

Найдем остальную площадь звезды $s = a+b+c+d+e$, сложив два равенства:



$$S_{\Delta 135} = a+c+e+E+p = \frac{1}{2};$$

$$S_{\Delta 145} = S_{\Delta 245} \;\Rightarrow\; e+D+E = b+d+e+D+p \;\rightarrow\; b+d = E-p;$$

$$s = a+b+c+d+e = \frac{1}{2}-2p, \quad \underline{p < \frac{1}{4}}.$$

Суммарная площадь части квадрата за пределами звезды:

$$S_0 = A+B+C+D+E = 1-p-\left(\frac{1}{2}-2p\right) = \frac{1}{2}+p.$$

Площадь самой звезды соответственно равна $S_1 = \frac{1}{2}-p$.

Если $p = \phi - \frac{1}{2} \approx 0{,}1180$, то площадь звезды занимает $1-\phi = \phi^2 \approx 0{,}382$ часть квадрата.

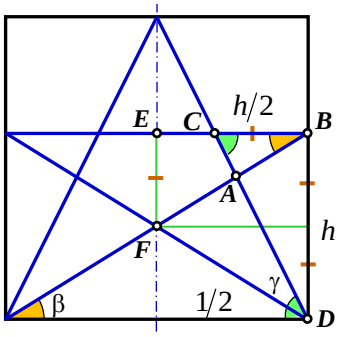
То есть, $\delta_1 = \frac{S_0}{S_1} = \Phi$ – золотое отношение.

Любопытно также сравнение площадей $\delta = \frac{S_0}{s} = \frac{1+2p}{1-4p}$.

Для значений $p^{-1} = 5, 6, 7, 10$ отношение δ – целые числа, которые соответственно равны 7, 4, 3 и 2.

Найдем площадь p, при которой величина δ равна константе золотого сечения:

$$\delta = \frac{S_0}{s} = \frac{1+2p}{1-4p} = \Phi \quad \rightarrow \quad p = \frac{\Phi^{-4}}{2} = \frac{\phi^4}{2} \approx 0{,}073.$$



С целью придания определенной визуальной гармоничности, далее рассмотрим звезду с осевой симметрией и определим площадь p в зависимости от расположения горизонтальной стороны $h = BD$. Отметим отрезки, равные $h/2$.

Площадь p равна удвоенной разности площадей двух треугольников $p = 2\left(S_{\Delta\, BEF} - S_{\Delta\, ABC}\right)$, где $S_{\Delta\, BEF} = \frac{h}{8}$ кв. ед., а площадь треугольника ABC можно рассчитать по формуле

$$S_{\Delta\, ABC} = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2\sin\alpha},$$

где $a = h/2$ – сторона треугольника, β и γ – прилежащие к ней углы, $\alpha = (\pi - \beta - \gamma)$ – противолежащий угол:

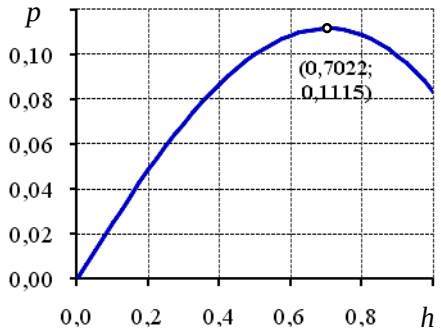
$$\sin\beta = \frac{h}{\sqrt{1+h^2}}, \quad \sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+1/4}} = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\alpha = \pi - \left(\arcsin\frac{h}{\sqrt{1+h^2}} + \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Применяя формулу для суммы арксинусов

$$\arcsin x+\arcsin y=\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right),\quad |x|\le 1,\ |y|\le 1,\ x^2+y^2\le 1,$$

и свойство $\pi-\arcsin x=\arcsin x$, после преобразований находим



$$p(h)=\frac{h}{4}\left(1-\frac{2h^2}{h+2}\right).$$

Максимум площади p достигается в точке

$$4h^3+11h^2-4h-4=0\ \rightarrow\ h_m\approx 0{,}7022,\ p_m\approx 0{,}1115$$

с наибольшим значением $\delta_{1\max}=\dfrac{S_0}{S_1}=\dfrac{1+2p_m}{1+2p_m}\approx 1{,}5739$.

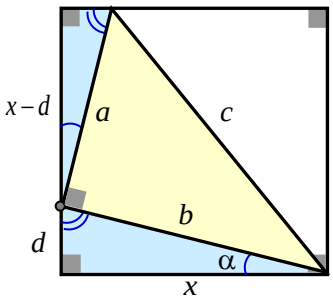
Следовательно, для звезды с осевой симметрией золотое отношение $\delta_1=\Phi\approx 1{,}618$ никак не достигается, поскольку превышает допустимое значение.

К сожалению, так бывает.

Но можно выделить характерные точки:

$$p\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{10}\ \rightarrow\ \delta_1=\frac{3}{2};\qquad p\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}\ \rightarrow\ \delta_1=\frac{11}{7}.$$

Прямоугольный треугольник в квадрате.



Вокруг прямоугольного треугольника со сторонами (a, b, c) описан квадрат. Найдем его сторону x.

В прямоугольных треугольниках стороны углов взаимно перпендикулярны, значит, эти углы α равны, а сами треугольники подобны, откуда следует пропорция

$$(x-d)/a=x/b\quad\Rightarrow\quad d=x(1-a/b)$$ и по теореме Пифагора

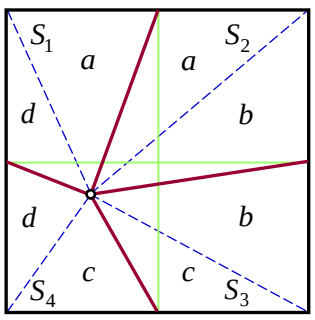
$$d^2+x^2=b^2\quad\Rightarrow\quad x=\frac{b}{\sqrt{1+(1-a/b)^2}}.$$

Например, для египетского треугольника $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ сторона квадрата $x=16/\sqrt{17}$.

Для треугольника Кеплера $(a,\ b,\ c)=\left(\sqrt{\phi},\ 1,\ \sqrt{\Phi}\right)$ сторона $x=\left(\Phi^2-2\sqrt{\phi}\right)^{-1/2}$.

Можно сказать, особо не примечательные числа.

Проявление в квадрате чисел Фибоначчи–Люка.



Дан квадрат $v\times v$, внутренняя точка которого соединена с серединами сторон, образуя 4 четырехугольника. Проведем также линии от точки к вершинам. В итоге квадрат разобьется на 8 треугольников с площадями a, b, c, d, причем:

$$(a+b)+(c+d)=S_2+S_4=S/2$$
$$(a+d)+(b+c)=S_1+S_3=S/2,$$

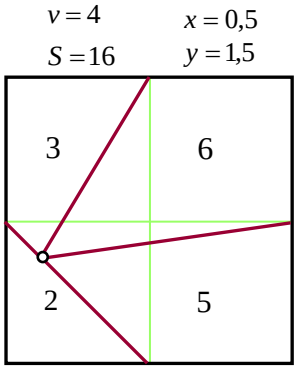
то есть суммы противоположных 4-угольников равны между собой и составляют половину площади квадрата.

Совместим левый нижний угол квадрата с началом декартовых координат и обозначим координаты узловой точки (x, y).

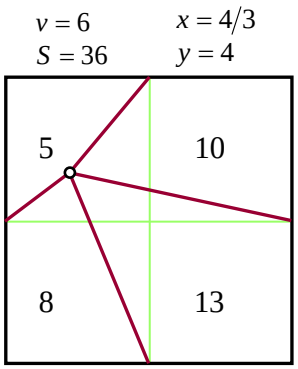
Зная площади S_i, найдем сторону квадрата $v=\sqrt{2(a+b+c+d)}=\sqrt{2(S_1+S_3)}$ и координаты точки (x, y) из двух равенств:

$$\begin{cases} S_4 = c+d = v(x+y)/4, \\ S_1 = a+d = v(x-y+l)/4, \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} x = 2(S_1+S_4)/v - v/2, \\ y = v/2 - 2(S_1-S_4)/v. \end{cases}$$

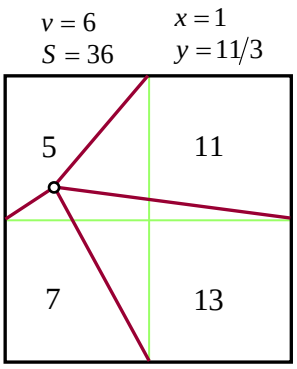
$$\begin{cases} x' = x/v = 2(S_1+S_4)/S - 1/2, \\ y' = y/v = 1/2 - 2(S_1-S_4)/S. \end{cases}$$



Три числа Фибоначчи
2 + 3 = 5



Три числа Фибоначчи
5 + 8 = 13



Числа Фибоначчи 5, 13;
числа Люка 7, 11

Полный квадрат – целое число, представляющее собой квадрат другого целого числа.

Удвоенная сумма чисел Фибоначчи $2(F_{n-1}+F_{n+1})$ является полным квадратом при n = 6 и равна $2(F_5+F_7)=2(5+13)=36=6^2$.

Аналогично удвоенное число Люка $2L_{n+1}=2(L_n+L_{n-1})$ является полным квадратом при n = 6 и равно $2L_7=2(L_6+L_5)=2(11+7)=36=6^2$.

Центр масс плоской квадратной формы с квадратным вырезом.

Если однородную материальную пластину можно разбить на конечное число частей с известными положениями центров тяжести, то координаты (положение) центра масс всей пластины можно вычислить по формулам (метод отрицательных масс) [22]:

$$x_c = S^{-1}\sum\nolimits_i S_i x_i, \qquad y_c = S^{-1}\sum\nolimits_i S_i y_i, \qquad S = \sum\nolimits_i S_i, \tag{1}$$

где x_i, y_i – координаты центра масс центра масс i-й фигуры площадью S_i, которая берется со знаком "минус", если фигура "вырезается".

В работе [23] показано, что центр масс плоской формы, образованной выпуклой фигурой с осевой симметрией, из которой вырезана подобная ей фигура с коэффициентом подобия $k<1$ и совпадающими краями, лежит точно на геометрическом контуре формы, если величина k численно равна константе золотого сечения $\phi=\Phi^{-1}$.

Положения центров масс $(R;r)$ и площади $(S;s)$ составных фигур для квадратной формы $a\times a$ (рис. 9) равны:

$$(R;r)=\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot(1;k); \qquad (S;s)=a^2\cdot\left(1;k^2\right).$$

Приняв $y_c = 0$, находим абсциссу центра масс урезанной фигуры по формулам (1)

$$x_c = \frac{SR - sr}{S - r} = \frac{\sqrt{2}a}{2}\frac{1-k^3}{1-k^2} = \frac{\sqrt{2}a}{2}\frac{k(k+1)+1}{k+1}.$$

Эта точка расположена точно границе фигуры $x_c = \sqrt{2}ak$, если $2k(k+1) = k(1+k)+1$ или $k(k+1)-1 = 0$, откуда $k = \phi$ – малая константа золотого сечения.

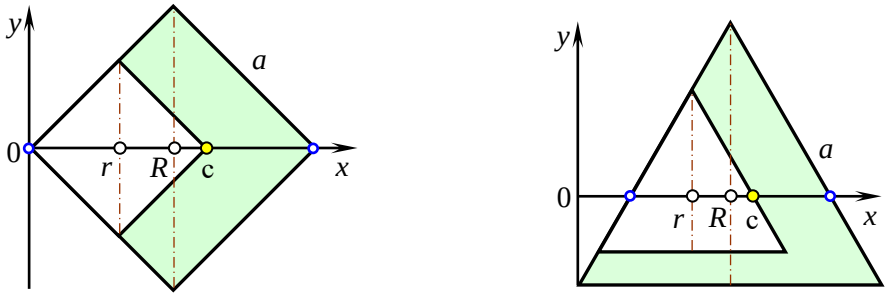


Рис. 9. Примеры вырезов у квадрата и правильного треугольника

Квадрат во фрактальных структурах.

Принято считать, что среди геометрических плоских фигур основным "поставщиком" золотого сечения (ЗС) является правильный пятиугольник или 10-угольник, а также прямоугольный треугольник с катетами в отношении $1:2$.

В математическом смысле фракталом (по Мандельброту) называется множество, для которого дробная размерность Хаусдорфа-Безикевича D строго больше его топологической размерности $\tilde{D}$, выражающейся целым числом.

В этой связи характерной является эволюция размерностей правильных фрактальных многоугольников [24]:

$k=1$	— точка	— $D_1 = 0$,	$\tilde{D}_1 = 0$;
$k=2$	— прямая линия (вертикальный отрезок)	— $D_2 = 1$,	$\tilde{D}_2 = 1$;
$k=3$	— треугольник (салфетка Серпинского)	— $D_3 = 1{,}59$,	$\tilde{D}_3 = 1$;
$k=4$	— квадрат, заполняющий плоскость,	— $\boxed{D_4 = 2}$,	$\tilde{D}_4 = 2$;
$k \geq 5$	— k-угольники,	— $D_k \leq D_8 \approx 1{,}7$,	$\tilde{D}_k = 1$;
$k \to \infty$	— окружность,	— $D_\infty = 1$,	$\tilde{D} = 1$.

Квадрат является центральной фигурой $D_4 = \tilde{D}_4 = 2$.

Пятиугольник, как совершенный многоугольник, который буквально «нашпигован золотыми сечениями», является своеобразным переходным мостиком от заполняющего плоскость квадрата с топологической размерностью $\tilde{D}_4 = 2$ – к линии $(\tilde{D} = 1)$.

То есть в данном случае золотое сечение символизирует, если так можно выразиться, условное отношение между плоскостью и линией (рис. 10).

Если в евклидовом пространстве такая пропорциональность лишена физического смысла, то на языке фрактальной геометрии вполне допустима.

С точки зрения фрактальной геометрии правильный пятиугольник осуществляет пропорциональное разделение (сопоставление) плоскости D_4 линией с фрактальной размерностью $D_5 = \ln 5 \,/\, \ln(1+\Phi) \approx 1{,}67$.

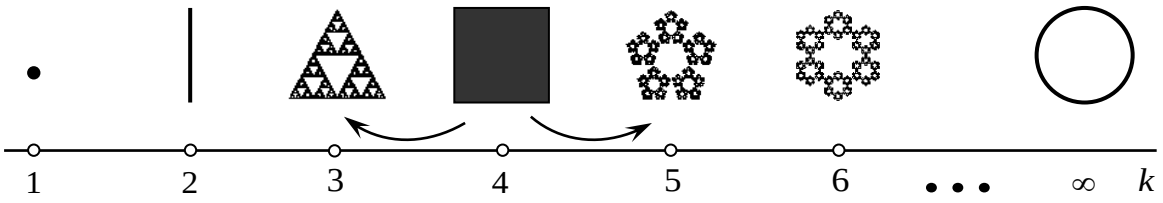


Рис. 10. Переходные формы и эволюция фрактальных структур

Золотое сечение площади квадрата разными функциями.

В работе [25] приведено интегральное представление золотой константы:

$$\Phi \;=\; \int_0^1 \left(\frac{3}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+4}} \right) dx \;=\; \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\, dx\,. \qquad (2)$$

С особым восхищением автор именует как «поистине золотой и позолоченный интеграл» (?) [25, с. 74]. Словно установка на избирательную способность ЗС отражаться в интегральном поле-зеркале.

Что же имеется "в сухом остатке"? – Некоторая линия-функция, которая огибает на единичном отрезке площадь, равную $1\times\Phi$ квадратным единицам.

Подобных функций существует огромное множество. Простых и сложных аналогов, похожих на золотую константу и не очень. Самые элементарные фигуры: прямоугольник $\Phi = \int_0^1 \Phi\, dx$ или прямоугольный треугольник $\Phi = \int_0^1 \left(1+\sqrt{5}\right) x\, dx$. – Сдается, слишком очевидно. Однако не больше и не меньше чем в подынтегральном выражении (2), где закамуфлирован квадратный корень из пяти $\sqrt{x^2+4}\,\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ – предтеча ЗС.

С таким же успехом можно примерить принципиально иные функциональные "маски", например, $\sqrt{x+4}\,\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{4x^2+1}\,\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{1}$, $\sqrt{(x-1)^2+4}\,\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и многие другие [26]:

$$\phi = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\sqrt{x+4}} \right) dx\,; \qquad \boxed{\phi = \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}\, dx}\,;$$

$$\Phi = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} + \frac{1-x}{2\sqrt{(1-x)^2+4}} \right) dx\,;$$

$$\Phi = \frac{3\pi}{5} \int_0^1 \cos\frac{3\pi}{10} x\, dx\,; \qquad \Phi = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{\pi}{5} \sin\frac{\pi}{5} x \right) dx \ldots$$

Представляется, что наиболее выразительной здесь является подынтегральная функция

$$f(x) = 2x \big/ \sqrt{4x^2+1}\,.$$

Она также делит площадь единичного квадрата 1×1 золотым сечением $\phi^2 + \phi = 1$

(рис. 11), но намного эффектнее интеграла (2).

Хотя бы потому, что форма имеет простую запись и обращается в нуль при нулевом аргументе.

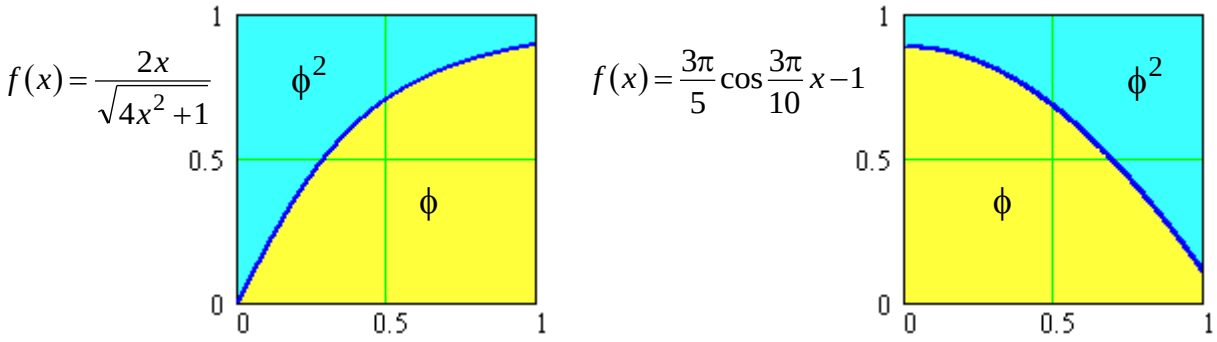


Рис. 11. Золотое сечение площади квадрата разными функциями

Литература:

1. Василенко С.Л. Деление пополам и золотая пропорция. Часть 14. Гармоничное сочетание квадратов // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28463, 12.05.2023. – https://www/trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165321.htm.

2. Дворников Э.П. Квадрат и круг – основные универсалии архаических культур // Мир науки, культуры, образования, 2011, № 6 (31), 228-231.

3. Перельман Я.И. Живая математика: математические рассказы и головоломки. – 8-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1967. – 160 с.

4. Пирожков М.А. √2 не число // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 29546, 13.06.2025. – https://www/trinitas.ru/rus/doc/0016/001k/00165882.htm.

5. Сергиенко П.Я. Алгоритм построения «кругатуры квадрата» и вычисления "Пи" // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 18051, 02.06.2013. – https://www/trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162127.htm.

6. Василенко С.Л. Круглый квадрат когнитивного диссонанса // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 27028, 12.03.2021. – https://www/trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00164651.htm.

7. Яглом И.М. Как разрезать квадрат? – М.: Наука, 1968. – 112 с. – http://ilib.mccme.ru/djvu/yaglom/square.htm.

8. Кордемский Б.А., Русалев Н.В. Удивительный квадрат. – М.: Гостехтеоретиздат, 1952.

9. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения: 2-е изд., исправл. и доп. / Пер. с англ. – М.: Мир, 1999. – 447 с.

10. Dujivestijn A.J.W. Simple perfect squared square of lowest order // J. Combin. Theory. Ser. B 59. No. 2 (1978), 240-243.

11. Dujivestijn A.J.W. Simple perfect squared squares and 2×1 squared rectangles of orders 21 to 24 // J. Combin. Theory. Ser. B 59 (1993), 26-34.

12. Василенко С.Л. Геометрия золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16409, 05.03.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161806.htm.

13. Василенко С.Л., Никитин А.В. От золотого отношения к равновесию, синтезу и созиданию // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 17.01.2013. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=93&sm=2 / http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162094.htm.

14. Василенко С.Л. Конечное и бесконечное в модели золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.22363, 31.07.2016. – https://www/trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163011.htm.

15. Мир математики: в 40 т. Т. 1: Фернандо Корбалан. Золотое сечение. Математический язык красоты: Пер. с исп. – М.: Де Агостини, 2014. – 160 с.

16. Friedman E. Erich's Packing Center. – https://erich-friedman.github.io/packing/.

17. Василенко С.Л. Деление пополам и золотая пропорция. Часть 9. Пентагоны // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28329, 09.02.2023. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165233.htm.

18. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии: Учеб. пособие. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2006. – 640 с.

19. Василенко С.Л. Деление пополам и золотая пропорция. Часть 22. Геометрический коллаж // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 29037, 04.07.2024. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165635.htm.

20. Василенко С.Л. Основы теории рационального золотого сечения в целочисленных переменных // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 15274 от 08.05.2009. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322057.htm.

21. Julian Havil. The IrratiΦnals. The story of the number you can't count on // Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2012, 58-60.

22. Вереина Л.И., Краснов М.М. Техническая механика. – М.: Академия, 2004. – 288 с.

23. Василенко С.Л. Центр масс плоских фигур в точках золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15957, 20.06.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/1661-vs.pdf.

24. Василенко С.Л. Фрактальные многоугольники и "золотое" сечение // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15108, 21.02.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321095.htm.

25. Аракелян Г.Б. Математика и история золотого сечения. – М.: Логос, 2014. – 404 с.

26. Василенко С.Л. Золотое сечение в зазеркалье: размышления о книге Г.Б. Аракеляна «Математика и история золотого сечения» (2014) // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22557, 30.09.2016. – https://www/trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163065.htm.

© ВаСиЛенко, 2025
Украина, Харьков