Василенко С.Л.

Расширение разновидности математической пропорции – «мета-золотого отношения» на общую модель порождающего гномона

Как корабль назовешь, так он и поплывет...
(древняя мудрость)

Перипетии с корабельным названием ярко отображены в рисованном мультсериале (1976-1979) по мотивам юмористической повести советского писателя А.С.Некрасова о невероятных приключениях капитана Врунгеля (1937) во время кругосветной парусной регаты. – Своеобразный морской аналог барона Мюнхгаузена с его небылицами.

Кораблик "Золотое сечение" (ЗС) веками уверенно плывет в безбрежном океане математических вод. По пути следования гребной винт часто наматывает словесную траву в виде надуманных терминологических наслоений. Среди них: обобщенные золотые сечения и константы, ЗС первого, второго рода и т.д.

Теперь очередь дошла до ЗС с приставкой *мета*.

Как на картине Л.Г. Соловьева «Не туда заехали монахи» (1897), с более известной крылатой фразой-идиомой «картина Репина *Приплыли*». Одним словом, противоречивая и малопродуктивная ситуация. Ибо после префикса *мета*, как будто и "усиливать" дальше нечем и некуда.

Основываясь на художественных интерпретациях, американский профессор искусств К.Бартлетт заново "выявил"-определил математическую константу, называемую «мета-золотым сечением» [1–3]. Несколькими годами ранее она была лаконично описана американским математиком К.Кимберлингом, который также выделил «дважды золотой треугольник», имеющий две стороны и два угла в золотом отношении [4].

Бартлетт именовал её «пропорцией хи» и обозначил буквой $\chi \approx 1.356$, следующей в греческом алфавите за Ф – константой золотого отношения.

Пусть будет хи. Как самостоятельное число. Только причем здесь мета-ЗС (meta-golden ratio chi)? Даже если параметр χ образован с применением золотой константы Ф. – Видимо, для красного словца, эффектности звучания. А, по сути, означает "обобщение" ЗС новой константой, более всестороннее ЗС или превышение-пребывание над ЗС.

Тем не менее, отношение χ любопытно как число, с приятными геометрическими свойствами. Построение Бартлеттом пропорциональных прямоугольников с использованием перпендикулярных диагоналей имеет интересные ссылки в архитектуре и искусстве.

С другой стороны, применимость математической пропорции χ в практических задачах можно подвергать сомнению и/или критиковать, подобно известным "разоблачениям" золотого сечения там, где оно часто-густо, что называется «притягивается за уши» без достаточных оснований. Только потому, что просто захотелось.

Гномоны прямоугольника, равенства и подобие.

Предложение о гномоне (др.-греч. *указатель*) применительно к параллелограммам описано в первой книге Евклида [5, с. 54] под номером 43, но без использования самого термина *гномон*, который вводится уже во второй книге [5, с. 61].

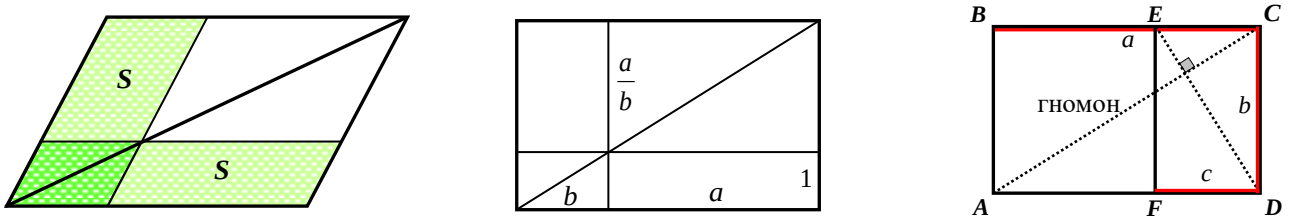
Более широкое представление дал древнегреческий математик и великий инженер-механик Герон Александрийский (I век н.э.):

гномоном называется всё, что прибавленное к числу или геометрической фигуре делает целое подобным тому, к чему прибавляется.

Например, всякое нечетное число $2n + 1$ – гномон: его присоединение к квадрату дает снова квадрат: $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

Геометрический гномон Евклида – это *L*-образная фигура, состоящая из двух параллелограммов, и согласно теореме, два параллелограмма в гномоне имеют равную площадь S (рис. 1-а).

На основании этого утверждения, с помощью линейки и циркуля можно построить новый параллелограмм (прямоугольник), равный площади заданной фигуры, представить деление двух чисел в геометрических терминах (рис. 1-б), что является важным для переопределения геометрических задач в алгебраической форме и др.



а) *L*-образный (закрашенный) гномон параллелограмма

б) Геометрическое представление деления числа a на b

в) Прямоугольный гномон: $ABCD \sim CDFE$, $c = b^2/a$

Рис. 1. Пример гномона в геометрии

Прямоугольный гномон, подобие и пропорция.

В прямоугольнике *ABCD* (рис. 1-в) с отношением сторон $\lambda = a/b > 1$ проведем диагональ *AC*, перпендикуляр $DE \perp AC$ и параллельный отрезок $EF \parallel AB$.

Полученный прямоугольник *ABEF* – гномон – в геометрии фигура, которая при добавлении к некоторой заданной фигуре дает фигуру, подобную этой фигуре.

Другими словами, прямоугольник *CDFE* имеет такое же отношение сторон λ – коэффициент подобия, как и в исходном прямоугольнике *ABCD*: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \lambda$.

Действительно, повернем исходный прямоугольник *ABCD* на 90 градусов, и уменьшим его так, чтобы большая сторона стала равной b, то есть $a \to b$. Совместим меньшую сторону большого и большую сторону малого прямоугольника. При этом диагонали прямоугольников (после поворота 90^o) естественно будут перпендикулярны $AC \perp DE$.

Параметры прямоугольника, порожденного гномоном.

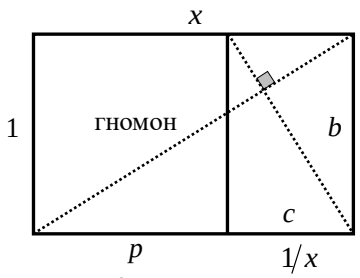


Рис. 2. От гномона к прямоугольнику

Гномоном классического золотого прямоугольника с отношением сторон $\lambda = \Phi : 1$ является квадрат.

После удаления этого квадрата оставшаяся часть остается золотым прямоугольником (ЗП). И наоборот: присоединение гномона-квадрата к ЗП дает снова ЗП большего масштаба.

В целом такой подход приемлем для любого прямоугольника с произвольным отношением сторон λ.

1) Возьмем прямоугольник размером $1 \times x$, в котором без потери общности меньшая сторона принята равной 1 (рис. 2).

Сторона x пока считается неизвестной.

Выделим гномон $1 \times p$, путем проведения диагонали и перпендикуляра к ней.

При этом $b=1,\ c=1/x$. Очевидное равенство $x=p+1/x$ приводит к квадратному уравнению $x^2-px-1=0$ с положительным корнем:

$$x=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+1}=\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}. \qquad (1)$$

Так, если гномон – квадрат, то есть $p = 1$, то $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$, и получаем традиционный золотой прямоугольник.

2) Наоборот, если сторона x задана априори, то из уравнения находим $p=x-x^{-1}$.

Например, для $x=\Phi$ величина $p=\Phi-\Phi^{-1}=\Phi-1=\phi$.

3) Частный случай. Пусть $p=\phi$. Тогда $x=\frac{\phi+\sqrt{\phi^2+4}}{2}=\chi$. – Именно эта величина названа *meta-golden ratio chi*.

Что здесь мета-, мега- или сверх золотого, остается только догадываться.

Разве что прямоугольник $1\times\chi$, в котором гномон – золотой прямоугольник.

Приведенный анализ показывает, что эпитет *мета-* сильно преувеличен и напоминает возвышенно-поэтический слог.

Похожее стремление к мета-терминологии хорошо прослеживается на примере наименования одним автором "мета-треугольника", который на поверку оказывается заурядным масштабированием замечательного прямоугольного треугольника Кеплера с отношением сторон $\left(1:\sqrt{\Phi}:\Phi\right)$, о чём с разных позиций отмечалось в наших работах [6–9].

"Мета-золотое" отношение.

Как отмечено выше, в ряде работ рассматривается "мета-золотое отношение" с числом χ, в основе образования которого лежит константа золотого сечения Ф, и соответствующий ему "мета-золотой" прямоугольник.

Без потери общности примем одну из сторон прямоугольника равной 1, а сам прямоугольник будем именовать по длине большей стороны.

В традиционном золотом Ф-прямоугольнике после удаления с одного края квадрата 1×1 остается прямоугольник исходной формы (рис. 3-а):

$$\Phi=1+1/\Phi \qquad x^2-x-1=0 \qquad x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi\approx 1{,}618\,.$$

Поступим аналогичным образом, только теперь удаляя-отрезая золотые прямоугольники с отношением сторон $1:\phi$ или $1:\Phi$.

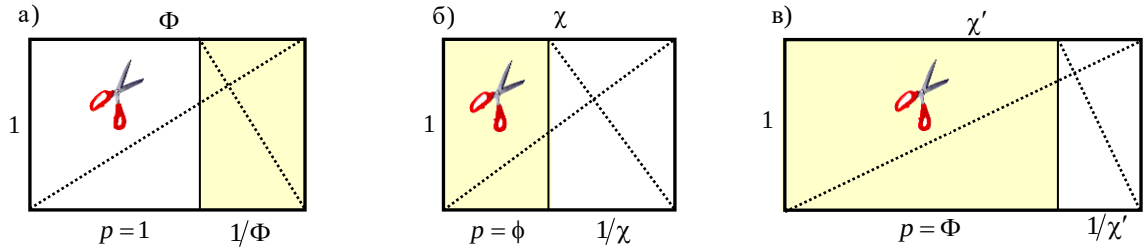


Рис. 3. Варианты разделения прямоугольника с применением константы золотого сечения: условно-отрезаемые фигуры – гномоны

Так, в χ-прямоугольнике (рис. 3-б) удаление прямоугольника $1\times\phi$ с одного края оставляет прямоугольник исходной формы:

$$\chi=\phi+1/\chi \qquad x^2-\phi x-1=0 \qquad x=\frac{\phi+\sqrt{\phi^2+4}}{2}=\chi\approx 1{,}356\,.$$

В χ'-прямоугольнике (рис. 3-в) удаление Ф-прямоугольника $1\times\Phi$ с одного края оставляет прямоугольник исходной формы:

$$\chi'=\Phi+1/\chi' \qquad x^2-\Phi x-1=0 \qquad x=\frac{\Phi+\sqrt{\Phi^2+4}}{2}=\chi'\approx 2{,}095\,.$$

Как видим, в основе длин фигур на рис. 3 лежит константа золотого сечения $\Phi=\phi^{-1}$, поэтому все они терминологически являются "золотыми", только в разных модификациях.

Напыщенные дефиниции из серии мета-, ультра- или мега-золотые числа оставим адептам-приверженцам высокопарного языка, – на их усмотрение.

Вольному воля. Пиару жить не запретишь!

Что касается самой величины $\chi\approx 1.356$, то это вполне симпатичное число с геометрически приметными генеративными (порождающими) свойствами [3], как и в целом золотое отношение.

Число χ принадлежит квадратичному замыканию поля рациональных чисел, поэтому его можно построить с помощью классических инструментов: циркуля и линейки.

Исходной является известная модель золотого роста [10]: построение Ф-прямоугольника (рис. 4) путем деления квадрата 1×1 пополам и проведения дуги радиусом $\sqrt{1+(1/2)^2}$.

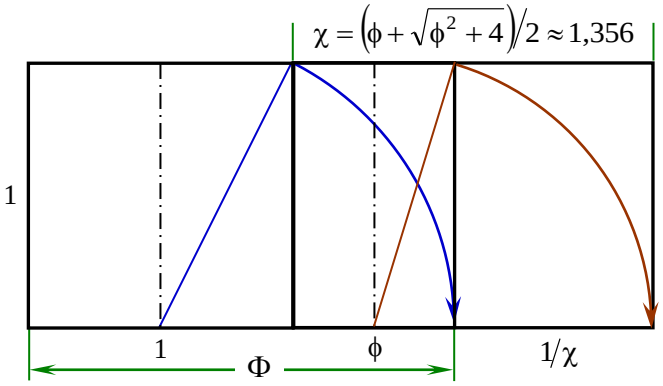


Рис. 4. Построение χ-прямоугольника на базе Ф-прямоугольника

Далее аналогичным образом делится пополам прямоугольник $1\times\phi$ и проводится дуга радиусом $\sqrt{1+(\phi/2)^2}$. Сформированный таким образом χ-прямоугольник включает прямоугольник $1\times\phi$ и еще один уменьшенный χ-прямоугольник.

Этот метод также иллюстрирует геометрическую связь между величинами χ и $\Phi=\phi^{-1}$.

На рисунке 5 представлено два способа отрезания пропорциональных прямоугольников: лесенкой и вкруговую. Второй способ позволяет образовать вписанную логарифмическую спираль для встроенных прямоугольников (рис. 5-б), которая определяется формулой в полярной системе координат: $r=\chi^{k\cdot\theta/2\pi}$, где r – радиус-вектор точки, θ – угол отклонения точки от нуля, χ^k – коэффициент роста (k = 4) – во сколько раз изменяется полярный радиус при повороте на угол 2π.

Аналогичная спираль проводится и через вершины прямоугольников (рис. 5-в).

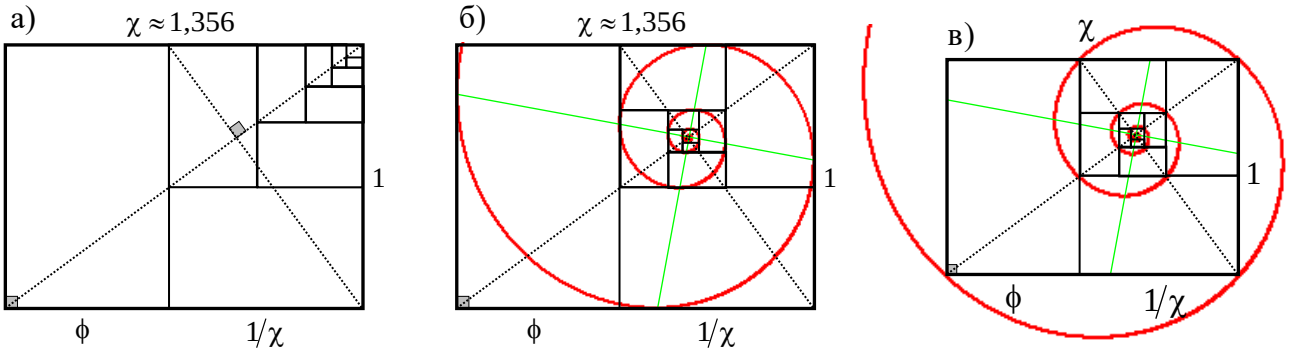


Рис. 5. Иллюстрация двух способов бесконечного удаления гномонов на примере пропорциональных χ-прямоугольников ($p = \chi$):
а) последовательными ступеньками «слева – снизу»;
б) – в) по кругу «слева – снизу – справа – сверху» с вписанной (б) и описанной (в) логарифмическими спиралями

Математические свойства.

Квадратное уравнение общего вида $x^2 - px - q = 0$ имеет корни $x_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$.

Если $q = 1$, то $x_2 = -1/x_1$.

В частном случае $p = \phi,\ q = 1$ уравнение $x^2 - \phi x - 1 = 0$ имеет положительный корень

$$\chi = \frac{\phi + \sqrt{\phi^2 + 4}}{2} = \frac{\phi + \sqrt{5 - \phi}}{2} \approx 1{,}356.$$

На основе уравнения $x^2 - \phi x - 1 = 0$ можно легко построить бесконечную непрерывную (цепную) дробь, а также встроенный радикал:

$$x = \phi + \frac{1}{x} = \phi + \frac{1}{\phi + \frac{1}{x}} = \phi + \frac{1}{\phi + \frac{1}{\phi + \frac{1}{\phi + \ldots}}};$$

$$x = \sqrt{1 + \phi x} = \sqrt{1 + \phi\sqrt{1 + \phi x}} = \sqrt{1 + \phi\sqrt{1 + \phi\sqrt{1 + \ldots}}}.$$

Из приведенных выше соотношений следует, что корни квадратного уравнения $x^2 + \phi x - 1 = 0$ равны $-\chi$ и $1/\chi$, а квадратного уравнения $x^2 - \Phi x - 1 = 0$ соответственно χ' и $-1/\chi'$, то есть они являются нулями полинома с целыми коэффициентами $(\Phi - \phi = \Phi \cdot \phi = 1)$:

$$\left(x^2 + \phi x - 1\right)\left(x^2 - \Phi x - 1\right) = x^4 - \Phi x^3 - x^2 + \phi x^3 - x^2 - \phi x - x^2 + \Phi x + 1 = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1.$$

Данному полиному соответствует линейное однородное разностное (возвратное) уравнение четвертого порядка $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} - a_{n-4}$, которое генерирует целочисленные последовательности с заданными начальными условиями, например [11]:

0, 0, 0, 1, 1, 4, 6, 16, 29, 67, ...

Согласно теореме Бернулли (о последовательном приближении корней) предельное отношение соседних членов данной последовательности сходится к своему аттрактору – наибольшему по модулю корню: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \chi' \approx 2{,}890$.

Рациональное приближение числами Фибоначчи.

Иррациональная константа золотого сечения ϕ с достаточной степенью точности определяется отношением целых чисел Фибоначчи $\phi \approx F_n/F_{n+1}$ и выражается непрерывной цепной дробью, состоящей только из единиц, $F_n : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$:

$x^2-\dfrac{3}{5}x-1=0,\quad x=\dfrac{3+\sqrt{109}}{10}\approx 1{,}344$ $x^2-\dfrac{5}{8}x-1=0,\quad x=\dfrac{5+\sqrt{281}}{16}\approx 1{,}360$	$\dfrac{3}{5}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}},\quad \dfrac{5}{8}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}}}$

Как видим (рис. 6), замена иррационального параметра ϕ его простыми дробными приближениями практически не сказывается на визуальном восприятии прямоугольников, построенных в одном масштабе.

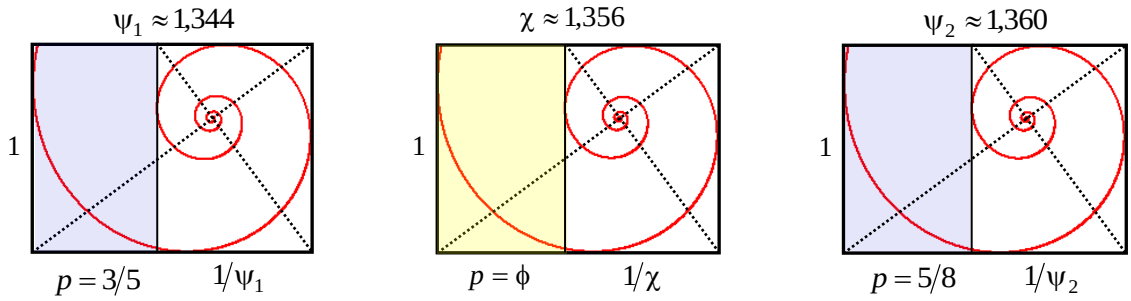


Рис. 6. Разделение прямоугольников с применением чисел Фибоначчи 3, 5, 8: выделенные цветом фигуры – гномоны

Другие варианты гномонов.

Параметр гномона p может быть любым положительным числом.

1) Определение доли гномона.

Форму-вытянутость прямоугольника можно оценить через нормирование параметра гномона p относительно общей длины прямоугольника, выражаемой формулой (1).

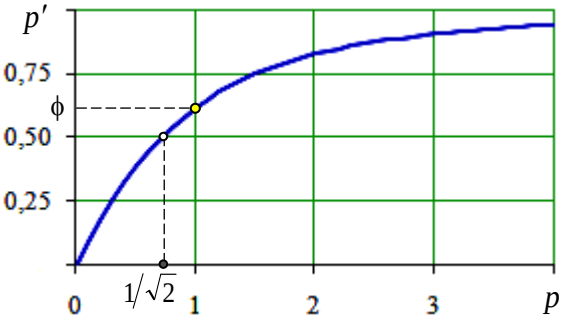


Рис. 7. Доля гномона p' в общей длине прямоугольника

Доля гномона в общей длине прямоугольника составляет (рис. 7):

$$p' = \frac{2p}{p+\sqrt{p^2+4}} = \frac{p\left(\sqrt{p^2+4}-p\right)}{2}.$$

То есть по мере увеличения параметра p гномон практически заполняет весь формируемый им прямоугольник.

2) Вариации с золотой константой.

Если глубоко желание во что бы то ни стало "внедрить" в параметр гномона золотую константу и одновременно получить более-менее гармоничную форму фигуры, то вполне подходят, например, величины $\Phi/2$, $\Phi/3$ и т.п. (рис. 8).

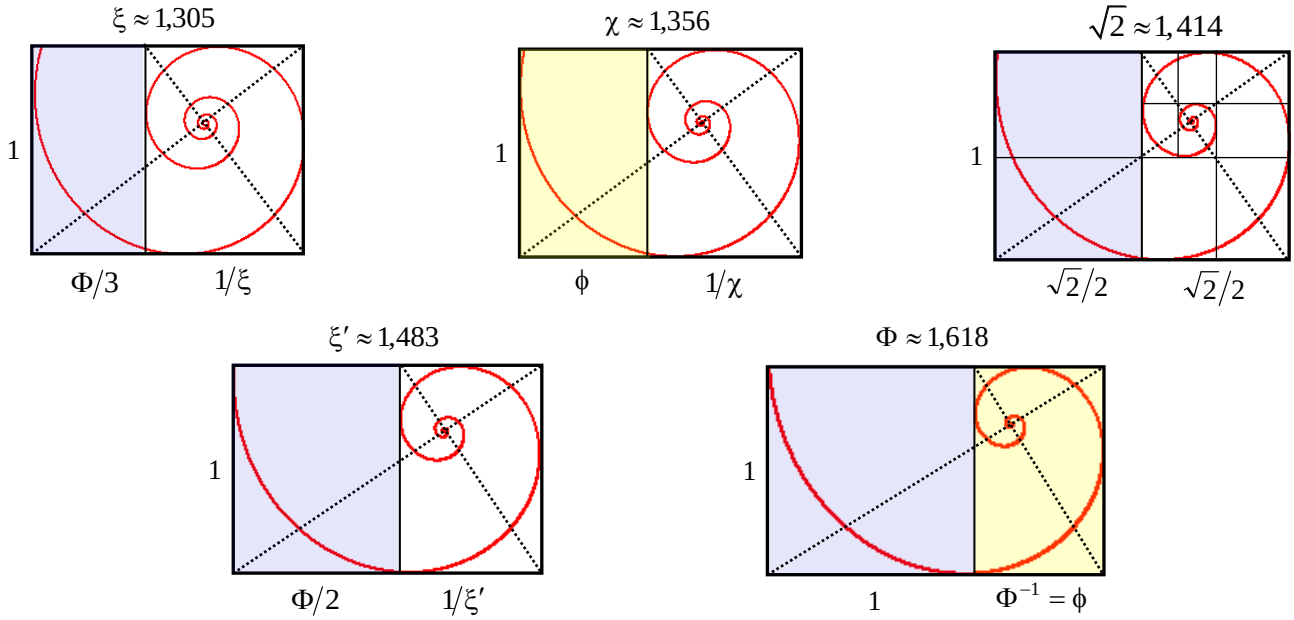


Рис. 8. Разделение прямоугольников с применением константы золотого сечения и константы Пифагора – квадратного корня из 2:
выделенные желтым цветом фигуры – золотые прямоугольники

Во всяком случае, параметр $p = \Phi/3$ приводит к константе $\xi = \dfrac{\Phi + \sqrt{\Phi^2 + 36}}{6} \approx 1{,}305$, которая по многочисленным эмпирическим данным работы [3] довольно точно определяет логарифмическую спираль с коэффициентом роста ξ^4 для раковины класса головоногих моллюсков – наутилусов.

3) Корень квадратный из двух.

Весьма реалистичным представляется параметр гномона $p = \sqrt{2}/2$, равный половине константы Пифагора $\sqrt{2}$.

Образованная фигура (рис. 8) гармонична, приятна на глаз и в чём-то даже симпатичнее золотого Ф-прямоугольника и χ-прямоугольника, которые на её фоне выглядят: один чрезмерно вытянутым, другой немного сжатым.

Корень из двух является пропорцией бумаги формата ISO 216 с широко известными форматами: A_0, A_1, A_2, A_3, … При таком соотношении сторон разрезание бумаги пополам (параллельно короткой стороне) дает два листа с той же пропорцией.

И вообще, деление пополам – яркий геном-символ биологии.

Если принять нижний левый угол прямоугольника за начало координат, то центр спирали находится как точка пересечения (x, y) двух диагоналей с их уравнениями:

$$y_1 = \frac{x}{\sqrt{2}} = \quad y_2 = 2 - \sqrt{2}x \quad \rightarrow \quad x = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.9428, \quad y = \frac{2}{3} \approx 0.6667 .$$

О раковине наутилуса (Nautilus).

Известное положение о том, что логарифмическая спираль раковины наутилуса регулируется и/или определяется золотым отношением, на сегодня по существу развенчано, хотя остатки популярного мифа всё ещё остаются.

Более новый и не менее популярный миф утверждает, что спираль наутилуса имеет отношение 4/3 (1,333). Это утверждение распространялось многими авторами путем обобщения соотношения их собственных образцов либо, цитируя исследование Фальбо [12], которое не содержало подробных сведений о видах, методах или размере выборки.



Скорее всего, отношение целых чисел 4/3 тоже является очередным заблуждением

Измеряя большую выборку раковин наутилуса по видам, Бартлет в работе [3] приводит убедительные эмпирические доказательства и дает своеобразные расчетно-математические критерии ("стандарты") отношений: 1,310 – для всего класса головоногих моллюсков – наутилусов и χ = 1,356 – конкретно для редкого вида Crusty (Fuzzy) Nautilus (см. рисунок).

Как отмечает Андрей Ковалев [13], в природе встречаются приближения к логарифмическим спиралям с коэффициентом роста равным Φ^k, то есть $r = \Phi^{k\cdot\theta/2\pi}$.

Так раковины моллюсков Nautilus pompilius и окаменелых аммонитов (подкласс вымерших головоногих моллюсков) хорошо описываются при k = 2, а раковины некоторых улиток при k = 1.

Наутилус умер, да здравствует его золотоносная раковина!

Выводы.

1. Терминология «мета-золотого сечения (отношения)» оценивается нами как неудачная, поскольку полностью отсекает другие возможные вариации.

2. В общем случае терминологию целесообразно выстраивать относительно порождающего гномона, что избавляет от придумывания малополезных дефиниций (разве что оставив вполне понятные названия *квадратичный* и *золотой*):

- квадратичный гномон $1\times1,\ p=1,\ x=\Phi$;
- золотой гномон $1\times\phi,\ p=\phi,\ x=\chi$;
- гномон $1\times\Phi/3,\ p=\Phi/3,\ x=\xi$ и т.д.

3. Сама по себе константа χ, вытекающая из модели золотого гномона, имеет право быть и весьма полезна. Только вместо вычурного «**мета-золотого отношения»** предлагается её именовать **константой золотого гномона** $\chi=\dfrac{\phi+\sqrt{\phi^2+4}}{2}\approx1{,}356$.

4. Не существует четко определенного коэффициента роста логарифмической спирали для раковин наутилуса. Во всяком случае, коэффициент роста спирали точно не равен Φ^4. Можно только предположить возможную связь с золотой константой. Многочисленные эмпирические данные хорошо описывает «гномон $1\times\Phi/3$» с константой:

$$\xi=\frac{\Phi+\sqrt{\Phi^2+36}}{6}\approx1{,}305.$$

5. Из всех рассмотренных фигур наиболее колоритным и гармоничным, на наш взгляд, представляется $\sqrt{2}$ -прямоугольник с его параметром гномона, равным $\sqrt{2}/2$.

Литература:

1. Bartlett C., Huylebrouck D. Art and Math of the 1.35 Ratio Rectangle / Symmetry: Culture and Science, 2013, 24, 451-462.

2. Huylebrouck D. The Meta-Golden ratio Chi / Proceedings of Bridges: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture, 2014, 151-158. – https://archive.bridgesmathart.org/2014/bridges2014-151.pdf.

3. Bartlett C. Nautilus spirals and the Meta-Golden ratio Chi / Nexus Netw J., 2019, **21**, 641-656.

4. Kimberling C. Two kinds of golden triangles, generalized to match continued fractions // J. for geometry and graphics, 2007, **11** (2), 165-171. – https://www.heldermann-verlag.de/jgg/jgg11/j11h2kimb.pdf.

5. Начала Евклида. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.

6. Василенко С.Л. Золотоносная атрофия // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22282, 14.07.2016. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162993.htm.

7. Василенко С.Л. Треугольник Кеплера как объединитель теоремы Пифагора, золотого сечения и современных мифов // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22385, 05.08.2016. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163016.htm.

8. Василенко С.Л. В погоне за мега-призраками // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 24276, 14.02.2018. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163618.htm.

9. Василенко С.Л. «Мета-геометрия» сюрреализма // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 26999, 01.03.2021. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00164642.htm.

10. Василенко С.Л., Никитин А.В. От золотого отношения к равновесию, синтезу и созиданию // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17972, 07.04.2013. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162094.htm.

11. Sloane Neil. On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – http://oeis.org/A112576.

12. Falbo C. The golden ratio: A contrary viewpoint / College Mathematics J., 2005, 36(2), 123-134.

13. Ковалев А.Н. Еще раз о золотых спиралях // АТ. М.: Эл. № 77-6567, публ. 23545, 13.07.2017. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/3352-kv.pdf.



© ВаСиЛенко, 2025
Украина, Харьков