С.Л. Василенко

Функциональная модель "золотого сердца" на основе кривой второго порядка

Доброе сердце ценится на вес золота
Уильям Шекспир

Каждому искусству присуще определенное стремление к "созвучию" частей в системе целого, соразмерности и гармонии.

Как мировой порядок и упорядоченность Космоса, в противоположность к хаосу.

Они проявляются в пропорциях архитектуры и скульптуры, в расположении предметов и фигур, сочетании красок в живописи, чередовании рифм и стихотворного размера в поэзии, последовательности музыкальных звуков и т.п.

Изображение сердца во все времена служило знаком искренней привязанности. Хотя это больше сакральный символ с отдаленным напоминанием реального сердца человека.

Сердце обычно рассматривается, как антропологический и культурологический феномен [1], метонимия со смежным отражением-замещением чувственности и понимания.

Сердце – центр микрокосма, образующий суть устремлений человека, один из базовых образов и архетипов мировой культуры. Прообраз-аллегория фокуса, истока и причины социально-биологического существования.

Подробные эскизы сердца в работах гениального Леонардо да Винчи составляют одну из основ антропоцентрической парадигмы.

Хорошо известен жест руки, прижатой к сердцу, или скрещенные пары пальцев, как визуальное обозначение глагола *любить*. Отсюда оборот речи, *положа руку на сердце*.

Выражать высокие сердечные чувства можно обычными словами, в стихах и даже на языке математики. Например, путем построения графиков функций и/или поверхностей в форме сердца. Правдоподобие, гармония и красивость зависят от авторских фантазий.

Имеется несколько математических уравнений, графическое решение которых приводит к образованию кривых, похожих на символ сердца [2, 3]. Самое известное из них – кардиоида – частный случай улитки Паскаля, эпициклоиды и синусоидальной спирали.

Бытует также мнение, что в искусстве часто встречается золотое сечение (ЗС).

Именно встречается. Но никоим образом не главенствует. Ибо значение и тем более универсальность ЗС в искусстве сильно и нарочито преувеличивается.

Тем не менее, золотому отношению действительно свойственно проявление гармонии.

И оно просто напрашивается стать основой функциональной модели "золотого сердца" – как фразеологизма, олицетворяющего великодушие и добро, отзывчивость и сострадание.

Выбор подходящей золотоносной функции.

Есть разные примеры функций в графической форме, заданных аналитически в виде неявных уравнений, в параметрическом виде через промежуточный аргумент, в полярной системе координат, с использованием степенных и тригонометрический функций [3].

Рассмотрим двумерную кривую из работы [2], выделив наиболее характерные моменты, в виде функции второго порядка с масштабным коэффициентом $\lambda > 0$ по оси y:

$$x^2 + \left(y/\lambda - \sqrt{|x|}\right)^2 = 1,$$

Данная формула привлекательна своей простотой и хорошо соотносится с константой золотого сечения, которая отчетливо проявляется, если функцию записать в явном виде $y = \lambda\left(\sqrt{|x|} \pm \sqrt{1-x^2}\right)$ и найти точки пересечения с осью абсцисс $(y = 0)$:

$$x^2+|x|+1=0 \;\rightarrow\; x=\pm\phi,$$

где $\phi=\left(\sqrt{5}-1\right)/2=\Phi^{-1}$ – малая константа золотого сечения.

Если $x=0$, то функция принимает значения $\pm\lambda$.

Имея точки $\pm\phi$ по горизонтали, вполне естественно наложить аналогичные свойства и на вертикаль, приняв близкое "золотоносное" значение $\lambda=\Phi/2\approx 0{,}8090$ (рис. 1).

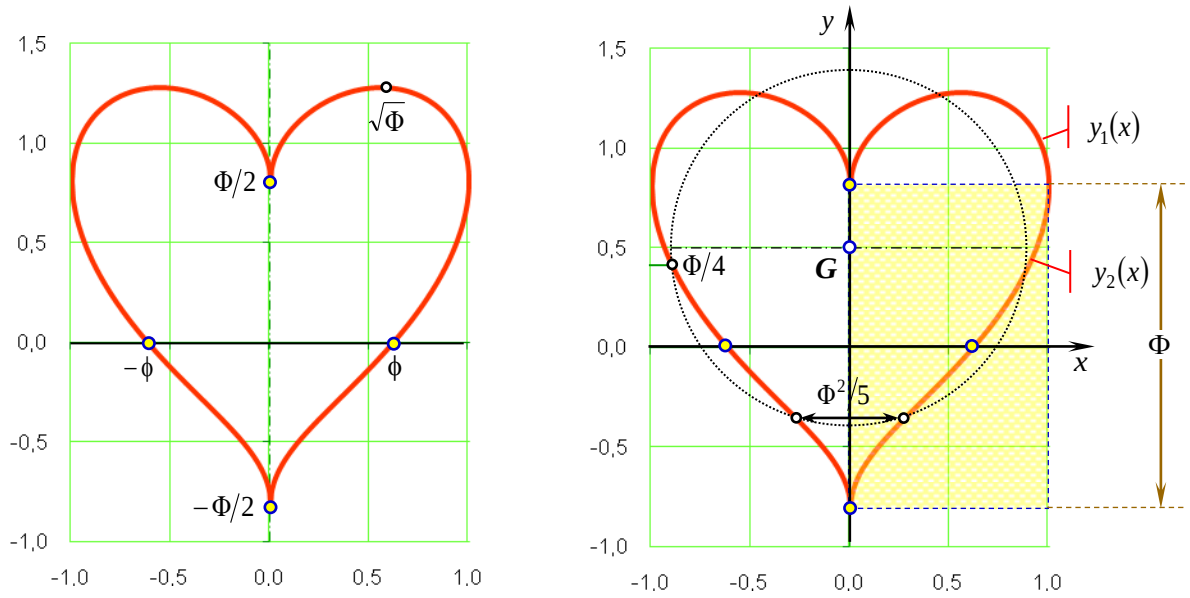


Рис. 1. Модель "золотого сердца" на основе золотого отношения

Характерное расстояние между особыми точками фигуры – срединной впадиной и заостренным концом – равно большой константе золотого сечения $\Phi=\left(\sqrt{5}+1\right)/2=\phi^{-1}$.

Фигура приобретает гармоничные пропорциональные очертания.

Можно сказать, один из немногих случаев, когда золотое сечение, в самом деле, формирует приятное зрительное ощущение-восприятие согласованности и порядка отдельных частей (ветвей графика) и рисунка в целом.

Исследуем свойства кривой.

Экстремум. Создается впечатление, что максимумы функции y_m находятся над точками $x=\pm\phi$.

Проверим через равенство нулю производной (в правой части графика):

$$y'=0 \quad\rightarrow\quad \sqrt{1-x^2}=2x\sqrt{x} \quad\rightarrow\quad 4x^3+x^2-1=0.$$

Кубическое уравнение имеет два комплексных и один действительный корень:

$$x_m=\left(c+c^{-1}-1\right)/12,\quad c=\sqrt[3]{215+12\sqrt{321}};$$

$$(x_m;\,y_m)\approx(0{,}5567;\;1{,}2757).$$

Как видим, $y_m\approx\sqrt{\Phi}\approx 1{,}2720$ с относительной погрешностью менее 0,3 %. – Это очень хорошая точность для визуализации максимума в интервале, в котором функция монотонна и практически постоянна.

Площадь. Найдем площадь фигуры s, разбив правую ветвь фигуры на две функции, тем самым уйдя от двузначности $\pm$ и абсолютных значений $|x|$ аргумента:

$$y_1 = \lambda\left(\sqrt{x} + \sqrt{1-x^2}\right), \qquad y_2 = \lambda\left(\sqrt{x} - \sqrt{1-x^2}\right);$$

$$\int\left(\sqrt{x} \pm \sqrt{1-x^2}\right)dx = \frac{1}{6}\left(4\sqrt{x^3} \pm 3x\sqrt{1-x^2} \pm 3\arcsin\ x\right) + \ const\,;$$

$$s_1 = \int_0^1 (y_1 - \lambda)\,dx = \lambda\left(\frac{\arcsin 1}{2} - \frac{1}{3}\right), \qquad s_2 = \int_0^1 (\lambda - y_2)\,dx = \lambda\left(\frac{\arcsin 1}{2} + \frac{1}{3}\right);$$

$$s = 2\cdot(s_1 + s_2) = 2\lambda\cdot\arcsin 1 = a\cdot\pi \text{ ед}^2.$$

Таким образом, площадь "золотого сердца" равна $s = \Phi\cdot\pi/2 \approx 2{,}5416$ ед^2.

Весьма любопытное сочетание константы ЗС и числа "пи".

В математике величина $s = \Phi\cdot\pi/2$, в частности, означает:

- площадь круга, радиус которого равен $r = \sqrt{\lambda} = \sqrt{\Phi/2} \approx 0{,}8995$ (см. рис. 1);
- половина площади золотого эллипса с полуосями Φ и 1;
- половина вложенного радикала $\sqrt{\pi^2 + \sqrt{\pi^4 + \sqrt{\pi^8 + \ldots}}} = \pi\cdot\Phi$ (см. приложение).

Точка перегиба – точка плоской кривой, в которой её ориентированная кривизна меняет знак, выпуклость функции отделяется от вогнутости, а её вторая производная равна нулю:

$$y_2''(x) = 0 \ \rightarrow\ x_p = \sqrt{1+s^2} - s,\ s = \sqrt[3]{2};\ \ (x_p;\, y_p) \approx (0{,}3486; -0{,}2806).$$

Золотые прямоугольники. Если в геометрической модели присутствуют золотоносные типоразмеры, то следует ожидать и золотые прямоугольники с отношением сторон $1:\Phi \leftrightarrow 1:\phi$. Таковыми являются прямоугольники размером $1\times\Phi$, одна сторона которого равна 1 или половине ширины фигуры, другая – расстоянию L между особыми точками фигуры.

Золотые коридоры. Поскольку $\Phi/2 : 1/2 = \Phi$, то горизонтали $y = \pm 1/2$ являются золотым сечением для любого отрезка, заключенного между линиями $y = 0$ и $y = \pm\Phi/2$.

Аналогичные золотые коридоры образуют вертикальные линии $x = 0,\ x = \pm\phi,\ x = \pm 1$.

Барицентр. Геометрический центр (барицентр) двумерной фигуры является средним арифметическим положений всех её точек и представляется фиксированной точкой группы изометрии симметрий.

В физических плоских объектах с постоянной плотностью центр масс (центр тяжести) совпадает с барицентром фигуры той же формы.

Для анализируемой фигуры он расположен на вертикальной оси симметрии, поэтому достаточно найти его ординату G_y, как для области, ограниченной известными графиками непрерывных функций.

Несмотря на простоту записи, интеграл сложный и без математического калькулятора не обойтись [4]:

$$\pm\int\left(y_{1,2}^2 - \lambda^2\right)dx = \frac{1}{6}\left[\mp\left(6\lambda^2 + 2x^2 - 3x - 6\right) + 8\sqrt{x}\cdot{}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, 1\right)\right];$$

$$G_y = \frac{1}{S}\left[\int_0^1 \left(y_1^2 - \lambda^2\right)dx + \int_0^1 \left(\lambda^2 - y_2^2\right)dx\right] = \frac{8}{3}\cdot\frac{\lambda^2}{S}\cdot F = 0{,}49366\ldots \approx 0{,}5,$$

где $F = {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, 1\right) = 0{,}71888\ldots$ – гауссова гипергеометрическая функция ${}_2F_1(a, b, c, z)$. Например, в системе MathCad предусмотрена встроенная функция $\mathrm{fhyper}(a, b, c, z)$.

Барицентрический круг с центром в точке $(0; G_y)$ и радиусом $r = \sqrt{\Phi/2}$ равновелик искомой фигуре сердца. При этом окружность пересекает ветвь фигуры в трех точках так, что средняя имеет ординату $\sim \Phi/4$, а нижняя – абсциссу $\sim \Phi^2/10$.

Резюме.

Итак, построена особая функциональная кривая "золотого сердца", которая отличается рядом замечательных свойств:

- пересекает ось x в точках золотого сечения $\pm\phi$;
- расстояние между впадиной и острием равно константе золотого сечения Φ;
- фигура имеет площадь $\pi\Phi/2$ и равновелика окружности радиусом $\sqrt{\Phi/2}$;
- фигура содержит два золотых прямоугольника;
- фигура включает множество золотых коридоров.

Перечисленные свойства в своем роде уникальны и позволяют с полным основанием назвать фигуру второго порядка "золотым сердцем" $x^2 + \left(2\phi\cdot y + \sqrt{|x|}\right)^2 = 1$.

Вместо заключения.

Мы не относим себя к ортодоксальным приверженцам тезы об эстетической значимости золотого отношения, как универсальной меры гармонии.

Хотя действительно встречаются вещи, которые говорят в его пользу и, в частности, наглядно проявляются в приведенной математической модели "золотого сердца".

Так или иначе, сердце символизирует любовь и доброту, великодушие, сострадание и гуманность.

Возможно, в наш прагматичный век призывы жить по законам добра и справедливости для кого-то выглядят наивными. Но именно такой вектор эволюции человечества способен сохранить международный мир, безопасность и общую стратегическую стабильность.

Это не мираж и не иллюзорная ноосфера безмерно далекого будущего.

Это реальный социальный конструкт выживаемости людей на планетарном ковчеге под названием Земля.

Прошлое у всех разное, и каждый народ трактует историю на свой лад.

Будущее у всех одно! – **Unum et idem**.

Приложение

Некоторые соотношения

1. Рассмотрим вложенный радикал для любого конечного числа $p > 0$.

$$v = \sqrt{p^2 + \sqrt{p^4 + \sqrt{p^8 + \ldots}}} \;>\; p.$$

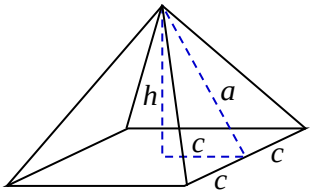
Возведем в квадрат $v^2 = p^2 + \sqrt{p^4 + \sqrt{p^8 + \ldots}}$ и разделим на p:

$$\frac{v^2}{p} = p + \frac{1}{p}\sqrt{p^4 + \sqrt{p^8 + \ldots}} = p + \sqrt{p^2 + \sqrt{p^4 + \sqrt{p^8 + \ldots}}} = p + v;$$

$$v^2 - pv - p^2 = 0 \;\rightarrow\; \underline{v = p \cdot \Phi}.$$

В частности, $\sqrt{\pi^2 + \sqrt{\pi^4 + \sqrt{\pi^8 + \ldots}}} = \pi \cdot \Phi$.

2. Известна простейшая связь-приближение $\pi \approx 4/\sqrt{\Phi}$ между числом "пи" и золотой константой Φ с относительной погрешностью менее 0,1 %. Это добротная точность, учитывая разный характер чисел: Φ – алгебраическое, π – трансцендентное, не удовлетворяющее никакому алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами.



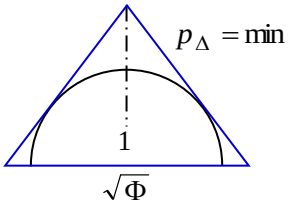
Данная связь хорошо проявляется, например, в расчетных размерах пирамиды Хеопса: если египтяне приняли размеры такими, что отношение полупериметра основания к высоте равно "пи": $4c/h = \pi$, то отношение апофемы a (высоты боковой грани) к половине длины ребра в основании c невольно становится равным:

$$a/c = \sqrt{c^2 + h^2}\,/c = \sqrt{1 + (h/c)^2} = \sqrt{1 + (4/\pi)^2} = 1{,}61899\ldots \approx \Phi.$$

Или в обратном порядке: от константы Φ к числу $\pi \approx 4/\sqrt{\Phi}$.

Тогда площадь "золотого сердца" $\underline{s \approx 2\sqrt{\Phi}}$, то есть площадь фигуры равна её ширине, умноженной на радикал константы ЗС.

3. Величине $\sqrt{\Phi}$ свойственны экстремальные свойства.



В частности, она равна длине основания равнобедренного треугольника с наименьшим периметром, который описывает полуокружность единичного диаметра.

Кроме того, гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, $xy = 1$ пересекаются в точках $\left(\sqrt{\Phi}; 1/\sqrt{\Phi}\right)$ и $\left(-\sqrt{\Phi}; -1/\sqrt{\Phi}\right)$.

Литература:

1. Хубулава Г.Г. Сердце как антропологический и культурологический феномен // Вестник СПбГУ. Сер 17, 2016, вып. 4, 110-119.

2. Василенко С.Л. Синтез моделей "золотого сердца" и куполов на основе золотой пропорции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28582, 08.08.2023. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165380.htm.

3. Weisstein E.W. Heart Curve. – From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – https://mathworld.wolfram.com/HeartCurve.html.

4. Математика. Калькуляторы. Неопределенный интеграл. – https://math24.biz/integral.

© ВаСиЛенко, 2025
Украина, Харьков