С.Л. Василенко

Конусная упаковка евклидового пространства с новой визуализацией Платоновых тел в преломлении древних диаграмм янтра

В нашей ранней работе [1] рассмотрена задача упаковки n подходящих кругов на единичной сфере без перекрытия. Она эквивалентна максимизации минимального расстояния между любой парой n точек на сфере.

Через эти круги можно провести конусы с общей вершиной в центре сферы.

Максимальная упаковка трехмерного пространства образуется 12 одинаковыми конусами, исходящими из одного центра, каждый из которых касается 5 таких же конусов.

Конусы вписаны в грани додекаэдра и "стреляют" в двенадцать (6×2 = 12) направлений, которые попарно симметричны относительно центра – принятого начала координат.

Размеры конуса отвечают окружности, вписанной в правильный пятиугольник, как наибольший из возможных правильных n-угольников (n = 3, 4, 5).

Максимальная плотность конусной упаковки ρ соответствует додекаэдру и выражается через константу золотого сечения Ф:

$$\rho = 6\cdot(1 - \sin \operatorname{arctg} \Phi) \approx 89{,}6\ \%.$$

Итак, 12 "золотых" конусов потенциально способны к максимальному заполнению трехмерного пространства. Представляется, что это основной вибрирующий тон наблюдаемой Вселенной. Можно высказать гипотезу о целенаправленной генерации окружающего пространства именно по 12 конусным направляющим, обеспечивающим возможность его наибольшего "освоения".

С точки зрения гипотетичного внешнего наблюдателя, видимо, так оно и было.

А пока остается открытым вопрос: к чему стремится конусная упаковка при $n \to \infty$?

От плотной упаковки пространства к синтезу живого с участием золотой пропорции.

Живому существу нужна достаточно плотная упаковка составляющих элементов, чтобы сохранять структурную целостность и одновременную компактность.

Плотность упаковки, как шаров (молекул), так и конусов (системное заполнение пространства) в количестве $\sim 90\ \%$ здесь вполне подходит.

Остальные $10\ \%$ условно остаются на подвижность системы.

При этом в роли базового строительного материала естественным образом выступает химический элемент углерод: порядковый номер 6, атомная масса 12.

Прочность простых, двойных и тройных связей атомов углерода между собой, их способность образовывать устойчивые цепи и циклы, а также соединяться с большинством элементов, создавая молекулы различного состава и строения, обусловливают существование огромного числа углеродсодержащих соединений.

К концу 20 века их число превысило 10 миллионов.

Среди них обширные группы углеводородов, белков, жиров и др.

Органические соединения углерода играют ключевую роль в существовании живых организмов и составляют основу земной жизни.

Так, общее содержание углерода в организме человека около 20 %.

Возможно, поэтому в строении живых систем можно наблюдать золотое отношение.

Но большей частью оно спрятано. Его наличие (примерно в чистом виде) ведет к условно косным образованиям: рога животных, ракушки, моллюски и др, а также пятипалые конечности человека.

Соцветие или корзинка подсолнечника – тоже, если её рассматривать как "местожительство" живых семян.

Платоновы тела через преломление древних янтр.

Многогранник (полиэдр) – это замкнутая поверхность, составленная из конечного числа многоугольников (граней). Обычно представляется в виде соединительных ребер или граней.

Термин *янтра* происходит из санскрита и буквально означает амулет с корневой основой – ограничить, обуздать, закрепить, поддержать.

Янтра – это диаграмма на основе геометрических фигур, отражающая энергетически-духовный аспект Вселенной.

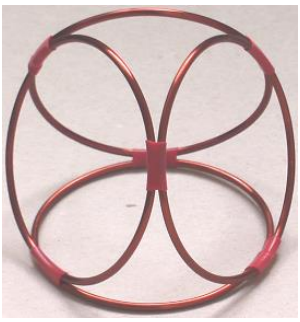
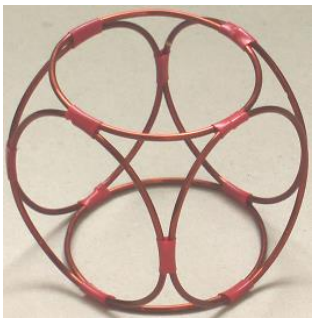
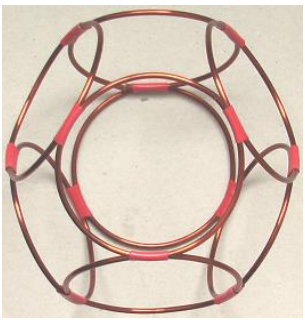
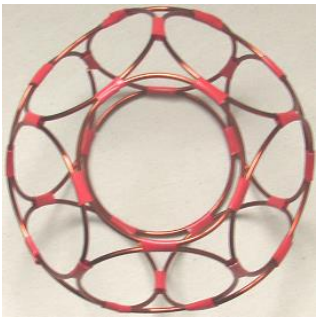
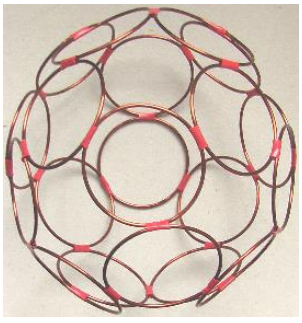
Адепты считают, что подобные диаграммы обладают исцеляющими, духовными и трансформационными качествами.

Они являются мощными священными символами сакральной геометрии в гармонизации пространства и веками используются как энергетические структуры в различных духовных практиках медитации, включая йогу, индуизм, буддизм, в качестве визуальных инструментов для концентрации внимания.

В обыденной жизни способствуют снятию стресса и устраняют тревожность.

Конусная упаковка обрела неожиданное развитие: в заметке [2] описан конструктор *tatrik*, который представляет собой объемно-пространственные композиции из одинаковых колец, все точки которых лежат на поверхности одной сферы, а сами кольца соприкасаются между собой в 3, 4 или 5 точках.

Полученные пять пространственных фигур условно названы янтрами огня, земли, воздуха, эфира и воды, которые с древних времен соотносят с Платоновыми телами.

Эти фигуры можно отнести к способу создания и визуализации геометрических масштабируемых моделей правильных многогранников.

Применительно к указанным фигурам, автор полагает, что они являются первичными структурами, которые образовались, "родились" из точки в пространстве. Это часть множества точек, которые расположены на сфере, равноудалены от её центра и представляют объемные объекты, в основе которых лежат окружности.

К рассматриваемому множеству точек в пространстве применимы такие характеристики как начальное, правильное, равномерное, равноудаленное, единственно возможное и простейшее образование из точки, которая явилась причиной «рождения всего».

Образование янтр можно рассматривать как результат рождения и развития конусов интервалов времени, которые откладывается вдоль оси конуса, так же как в световом конусе.

Мы привыкли к визуализации правильных выпуклых многогранников (Платоновых тел) в виде равно-реберных и/или гране-поверхностных каркасов.

Их представление в виде одинаковых соприкасающихся окружностей, вписанных в грани, по типу скрепленных проволочных колец, позволяет по-новому взглянуть на формообразование Платоновых тел.

Срединная сфера касается каждого его ребра в середине.

Грани заменяются кольцами.

Ребра стягиваются в точку касания-спайки окружностей.

Кольца-круги формируют плоскости и в целом образуют каркас объемного тела.

Все точки такого проволочно-кольцевого каркаса находятся на одинаковом расстоянии от воображаемого центра симметрии.

Так или иначе, "кольцевые" фигуры вписываются в общую концепцию конической упаковки трехмерного пространства [1] n одинаковыми конусами (рис. 1).

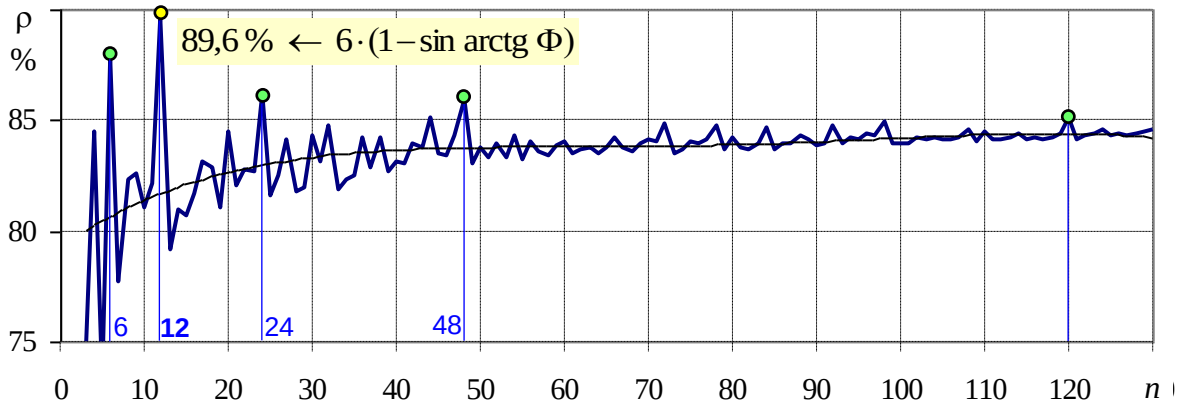


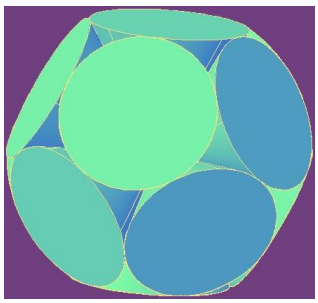
Рис. 1. Плотность конической упаковки трехмерного пространства n одинаковыми конусами: $\Phi \approx 1{,}618$ – константа золотого сечения

Плотность упаковки конусов, вписанных в грани многогранников, равна

$$\rho = \frac{\Gamma}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\Gamma\Omega}{4\pi},$$

где $\Omega = 2\pi\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\right)$ – телесный угол одного конуса;

θ – двугранный угол между смежными гранями многогранника; Γ – число граней.



Среди них особым образом выделяется максимальная упаковка пространства 12-ю одинаковыми конусами, исходящими из одного центра и пронизывающими 12 граней додекаэдра:

$$\rho = 6\cdot(1 - \sin\ \mathrm{arctg}\ \Phi) = 6\cdot(1-\xi)\ \rightarrow\ 89{,}6\,\%,$$

$\xi = \sin\ \mathrm{arctg}\ \Phi = \dfrac{1}{2\sin\ \pi/5} \approx 0{,}8507$ – отношение радиуса описанной окружности правильного пятиугольника к длине его стороны.

Любопытна также "конусная" связь с икосаэдром: оказывается, что $\mathrm{arctg}\ \Phi \approx 1{,}0172$ – полярный угол (в радианах) конуса, описанного около правильного икосаэдра из одной из его вершин.

Характерный параметр плотной упаковки.

В самой плотной упаковке, а также среди параметров додекаэдра и икосаэдра (приложение, табл. 2) наличествует характерная величина, которая связана с константой золотой пропорции $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi^{-1}$, числами Фибоначчи F_n, Люка L_n и равна [3]:

$$\kappa = \xi^{-2} = (2\sin \pi/5)^{-2} = \frac{1}{1+\phi^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\Phi}{\sqrt{5}} = \lim_{n\to 0}\frac{F_{n+1}}{L_n} \approx 0{,}7236;$$

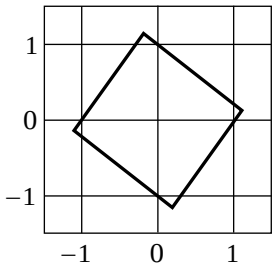
ξ^{-1} – отношение длины стороны правильного пятиугольника к радиусу описанной окружности.

Число κ имеет интересную интерпретацию в словах двоичного кода.

Пусть: W_n – совокупность всех двоичных слов длины n, которые не содержат двух последовательных нулей;

r_n – отношение общего числа единиц в W_n к общему числу букв в W_n.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \kappa$.



Параметр κ также проявляется в одной из задач геометрии чисел в двумерной постановке [4, с. 176] (см. рисунок).

Пусть Z – стандартная целочисленная решетка на плоскости с базисными векторами (1,0) и (0,1).

Рассмотрим произвольный параллелограмм P с центром в начале координат (0,0). P называется Z-допустимым, если внутренность P не содержит других вершин Z.

При наличии любого базиса v, w плоскости, очевидно, существует Z-допустимый параллелограмм P со сторонами, перпендикулярными v и w (достаточно взять P приемлемой площади).

Пусть: $\alpha(v, w)$ – верхняя граница (супремум) площадей для всех таких P;

κ – нижняя граница (инфимум) $\alpha(v, w)/4$ для всех таких баз v, w.

В работе [5] доказано, что $\kappa = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \xi^{-2}$;

κ – константа диофантового приближения, такая, что площадь «критического параллелограмма» (в данном случае квадрата) составляет 4κ, а его наклоны равны $(\Phi, -\phi)$.

Приложение

Платоновы тела

Правильные многогранники – это выпуклые многогранники с максимально возможной симметрией. Все грани являются правильными многоугольниками, а в каждой вершине сходится одинаковое число ребер.

Одно из эквивалентных определений: многогранник называется правильным, если существуют три концентрические сферы, одна из которых касается всех граней многогранника, другая касается всех его ребер и третья содержит все его вершины.

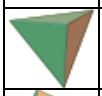
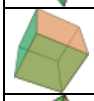
Другое определение: правильным многогранником (ПМ) называется такой выпуклый многогранник, все грани которого являются одинаковыми правильными многоугольниками и все двугранные углы попарно равны.

Одно из древнейших упоминаний о ПМ находится в трактате Платона (427–347 до н. э.) "Тимаус". Поэтому ПМ также называются Платоновыми телами, хотя они были известны задолго до него.

Существует всего пять правильных многогранников (В + Г = Р + 2):

Таблица 1

Основные параметры правильных многогранников

Вид	Много-гранник	Число сторон у грани, p	Число ребер при вершине, q	Число вершин В	Число ребер Р	Число граней Г	Пара-метр h	Двугранный угол, $\operatorname{tg}\theta/2$	Плоский угол между ребрами при вершине	Телесный угол, стягиваемый гранью ω
	Тетраэдр	3	3	4	6	4	4	arccos 1/3	$1/\sqrt{2}$	$\cos^{-1}\frac{23}{27}$
	Куб	4	3	8	12	6	6	π/2	1	π/2
	Октаэдр	3	4	6	12	8	6	π–arccos1/3	$\sqrt{2}$	$4\sin^{-1}\frac{1}{3}$
	Додекаэдр	5	3	20	30	12	10	2·arctg Φ	Φ	$\pi-\operatorname{tg}^{-1}\frac{2}{11}$
	Икосаэдр	3	5	12	30	20	10	2·arctg Φ^2	Φ^2	$2\pi-5\sin^{-1}\frac{2}{3}$

Телесный угол ω, стягиваемый гранью правильного многогранника, с вершиной в центре этого многогранника, равен телесному углу полной сферы (4π стерадиан), деленному на число граней. Он также равен угловому дефекту, дуальному к данному многограннику.

С каждым правильным многогранником связаны три концентрические сферы:

– вписанная сфера – касается каждой грани многогранника в её центре;
– срединная сфера – касается каждого его ребра в середине;
– описанная сфера – проходит через вершины.

Радиусы вписанной r, срединной m и описанной R сфер задаются формулами:

$$R=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{q}\cdot\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},\qquad m=\frac{a\cos\pi/p}{2\sin\pi/h},\qquad r=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{p}\cdot\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$

где θ – двугранный угол между смежными гранями многогранника, $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{\cos\pi/q}{\sin\pi/h}$;

p – число ребер в каждой грани;
q – число ребер, сходящихся в каждой вершине, $\{p, q\}$ – символом Шлефли;
a – длина ребра.

Таблица 2

Радиусы, площади и объемы правильных многогранников (длина ребра a = 2)

Много-гранник	Радиусы сфер			Площадь поверхности, S	Плотность упаковки, ρ (%)	Объем, V
	вписанной r	срединной m	описанной R			
Тетраэдр	$1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3/2}$	$4\sqrt{3}$	84,53	$a^3\sqrt{2}/12$
Куб	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	24	87,87	a^3
Октаэдр	$\sqrt{2/3}$	1	$\sqrt{2}$	$8\sqrt{3}$	73,40	$a^3\sqrt{2}/3$
Додекаэдр	Φ^2/ξ	Φ^2	$\sqrt{3}\Phi$	$60\Phi/\xi$	**89,61**	$20\,\Phi^3/\xi^2$
Икосаэдр	$\Phi^2/\sqrt{3}$	Φ	ξΦ	$20\sqrt{3}$	65,83	$20\Phi^2/3$

Плотность упаковки конусов, вписанных в грани многогранников, равна

$$\rho = \frac{\Gamma}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\Gamma\Omega}{4\pi},$$

где $\Omega = 2\pi\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)$ – телесный угол одного конуса,

Γ – число граней.

Вписанная сфера r касается граней, срединная m – ребер, описанная R – вершин.

Константы Φ и ξ задаются выражениями

$$\Phi = 2\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2};$$

$$\xi^2 = \left(2\sin\frac{\pi}{5}\right)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} = 1+\phi^2 = 2-\phi.$$

Среди правильных многогранников додекаэдр и икосаэдр представляют собой лучшее приближение к сфере.

Икосаэдр имеет наибольшее число граней, наибольший двугранный угол и плотнее всего прижимается к своей *вписанной сфере*.

Додекаэдр имеет наименьший угловой дефект, наибольший телесный угол при вершине и максимально заполняет свою *описанную сферу*.

Литература:

1. Василенко С.Л. Золотые купола в задаче конусной упаковки евклидового пространства // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 17.07.2011. – artmatlab.ru/articles.php?id=31&sm=2 // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 17.07.2011. – sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11225.html // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17147, 26.12.2011. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322102.htm.

2. Татарко С.Г. О происхождении постоянных, 11.03.2015. – https://medium.com/@sergeytatarko/o-происхождении-постоянных-df53a55cee3a.

3. On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS). – https://oeis.org/A242671.

4. Steven R.F. Mathematical Constants, Cambridge University Press, 2003, Section 2.23. – http://lib.ysu.am/disciplines_bk/8d6a1692e567ede24330d574ac30044b.pdf.

5. Szekeres G. On a problem of the lattice plane // J. London Math. Soc., 12 (1937) 88-93.

© ВаСиЛенко, 2025
Украина, Харьков