Василенко С.Л.

Свойства 12 (числа) в основаниях мироустройства. Часть 11. Бесконечные ряды: от Фибоначчи до наших дней

Сочтите число 12 все творенья
поднебесной: и люди, и ангелы...

Бэкграунд.

Общение людей происходит в основном через мимику, жесты, звуки и слова.

Слова, речь и письменность имеют особое главенствующее значение.

Именно поэтому анонимный автор Евангелия, которое иногда приписывают Иоанну Зеведееву – одному из 12 апостолов, явил свету выражение, что «в начале было слово, и слово было у бога, и слово было бог».

В начале чего? – Согласно теологическим концепциям, бог не мог быть в начале.

Он безначальный. Был и есть всегда. Вне времени и наблюдаемого пространства.

Началом "бессловесного" мироздания, если речь об этом, могла быть идея, а в человеческом понимании-представлении – её разумение (по Л.Н.Толстому).

Их реализация-воплощение – посредством числовых форм.

Что-либо выразить точно и воплотить в материальные объекты можно только через адекватные пропорции, расчеты и числа.

От гилетических чисел А.Ф.Лосева к эйдетическим числам в виде зрительных человеческих образов, воспроизводящих сущность и значение вещей.

Все слова, включая слово "бог", по историческим меркам Вселенной появились буквально недавно. Также как и музыка или арифметические числа с числовым абстрактным исчислением.

В английском языке двенадцать – самое большое число с односложным названием *twelve*, которое впервые упоминается в Евангелии из Линдисфарна X века...

Другое слово из 12-мерной обоймы – "гросс" или двенадцать дюжин.

Дюжина гроссов 12^3 – "масса" или, можно сказать, материя, как трехмерная дюжина в трехмерном пространстве бытия.

«Вначале была идея. Она родила слово. И слово это было число, имя которому "двенадцать". В нём обитала всякая полнота». – Примерно так будет начинаться Библия с математическим уклоном.

В разное время (2011–2016) на страницах АТ нами опубликовано 10 частей на тему «Свойства 12 (числа) в основаниях мироустройства» [1].

Исследование уникальных "неземных" свойств числа 12 не закончено, и в своем логическом продолжении связано с интересными проявлениями в бесконечных рядах.

Легкая разминка.

Для разогрева напомним одну задачку 300-летней давности из увлекательной по содержанию арифметики Л.Ф.Магницкого (1703) – вратах всей российской учёности, которая ставила в тупик многих прилежных учеников.

12 человек несут **12** хлебов. Каждый мужчина несет по 2 хлеба, женщина – по половине хлеба, а ребенок – по четверти хлеба. Сколько мужчин, женщин и детей?

Обозначим: x – число мужчин, y – женщин, z – детей.

Составляем два равенства:

по людям $x + y + z = 12$ и по хлебам $2x + y \cdot 1/2 + z \cdot 1/4 = 12$ или $8x + 2y + z = 48$.

Вычитая первое равенство из второго, получаем $7x + y = 36$ или $x = (36 – y)/7$.

Поскольку $x + y < 12$, то в целых числах находим одно решение: $x = 5$, $y = 1$, $z = 6$.

Вселенски-масштабированная модель Сухоноса.

Сергей Иванович Сухонос – человек с ноосферно-космическим мышлением.

Основоположник красивой ясной картины по масштабированной структуре устройства Вселенной. Один из первых авторов АТ.

Для друзей и коллег был и остается маяком, устремленным в будущее.

Развернутое обоснование Сухоноса построено на периодических закономерностях в размерах наблюдаемых объектов: от элементарных частиц до метагалактики.

Масштабная ось Вселенной разделена на 12 интервалов (классов) [2, с. 65]:

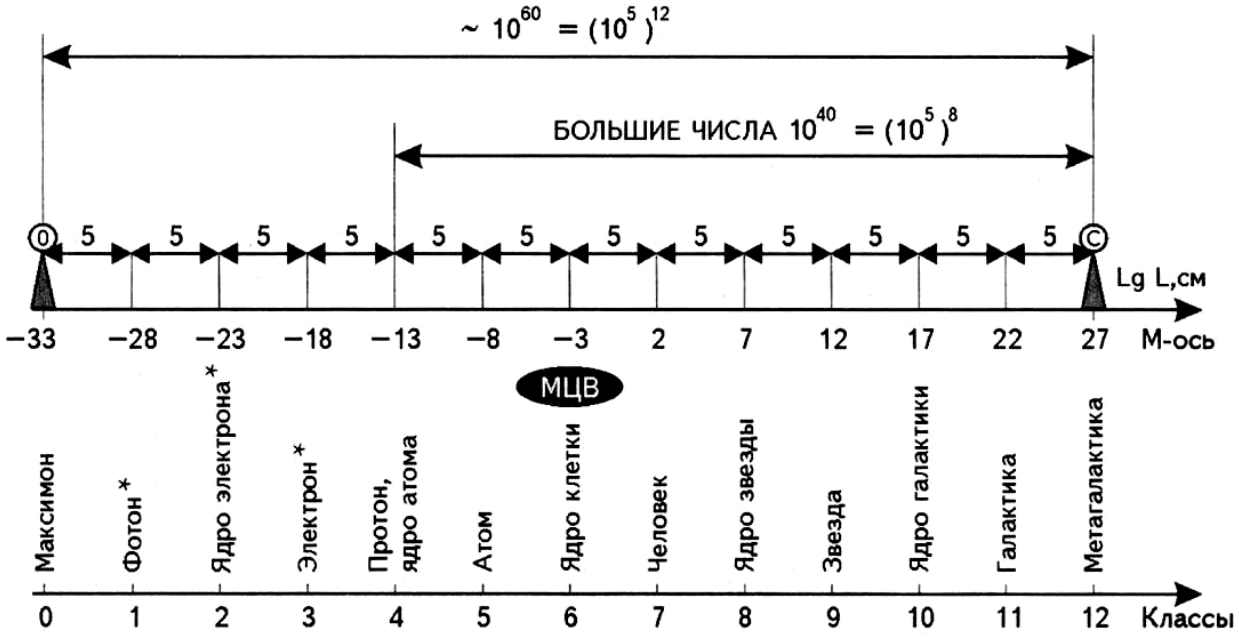


Рис. Масштабная ось Вселенной (упрощенная модель), разделенная на 12 интервалов, по 5 порядков каждый. Сдвиг по М-оси на один порядок влево или вправо означает изменение размеров в 10 раз. Средний период — 10^5. В центре масштабного интервала Вселенной размер 10^{-3} см, который назван МЦВ (масштабный центр Вселенной).

* Звездочкой отмечены условные размеры, для которых можно предполагать некоторую связь с указанными феноменами.

Это не искусственно-целенаправленная подгонка под число 12, чем "грешат" отдельные исследователи в своем структурировании.

Двенадцать классов Сухоноса – выверенный и просчитанный результат открытой им периодичности в размерах природных образований.

Числа и последовательности Фибоначчи.

Широко известные числа Фибоначчи 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... основаны на простом суммировании $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, n = 2, 3, 4, … с начальными условиями $F_0 = 0, F_1 = 1$.

Любая другая двучленно-аддитивная рекурсия $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ с иными исходными значениями – "семенами" f_0, f_1 сводима к числам Фибоначчи по формуле $f_n = f_1 F_n + f_0 F_{n-1}$, то есть функционально связана с ним.

Например, числа Люка $L_n = 1 \cdot F_n + 2 \cdot F_{n-1} = F_{n+1} + F_{n-1}$: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, ...

Все последовательности f_n имеют золотой аттрактор $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_{n+1}}{f_n} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$.

Числа Фибоначчи F_n содержат неповторимый тройной кортеж простых чисел 2, 3, 5.

Во всех других целочисленных рядах Фибоначчи любая тройка последовательных чисел содержит хотя бы одно четное число, за исключением одной особой последовательности:

$$g_n = 2 \cdot F_n + 3 \cdot F_{n-1} = F_{n+1} + L_n : \ \underline{3, 2, 5, 7}, \mathbf{12}, \ldots$$

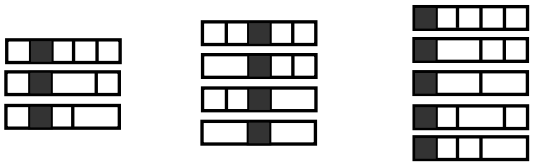
Здесь наличествует единственный кортеж из четырех последовательных простых чисел, среди всех (!) возможных двучленно-аддитивных последовательностей типа Фибоначчи.

Эти четыре числа являются начальными в упорядоченной последовательности простых чисел, которые в целочисленной последовательности Фибоначчи g_n формируют (образуют) число 12. Кроме того, сам ряд g_n ассоциируется с музыкальным хроматическим звукорядом, включающим 7 основных нот-ступеней октавы и 5 диезов-альтераций: 5 + 7 = 12.

Итак, необычная в своем роде двучленно-аддитивная рекурсия g_n с четырьмя начальными простыми числами под музыкальный аккомпанемент размером C (сродни углероду с атомной массой 12) приводит к числу **12**. – Уникальный единственный случай.

В комбинаторном аспекте g_n – это количество способов замостить полосу длины $n + 1$ белыми домино и квадратами, а также одним черным квадратом, который должен находиться среди первых трех ячеек (Greg Dresden, 24.08.2024).

Например, для $g_4 = \mathbf{12} = 3+4+5$:



Числа Кейта.

В 1987 году американский математик Майкл Кейт обнаружил необычные числа [3].

Они из разряда развлекательно-популярной математики, наводящей на серьезные размышления, научные закономерности и гипотезы.

Число Кейта – *k*-значное целое число *K* последовательности *k*-боначчи (суммирование предыдущих *k* элементов), в которой начальные члены являются десятичными цифрами числа *K*.

Числа Кейта также называют повторяющимися числами (*repfigit number*), подобно алгоритму образования последовательностей Фибоначчи.

Этих чисел очень мало, а их вычислительный поиск очень трудоемкий.

На 2009 год было известно всего 114 чисел Кейта [4; 5, A007629]:

14, 19, 28, 47, 61, 75, 197, 742, 1104, 1537, 2208, 2580, ... – до $k = 34$.

Обратное число Кейта (*revers repfigit*) – то же самое, только с обратным (реверсным) повторением цифр.

Этих чисел ещё меньше [5, A097060]:

12, 24, 36, 48, 52, 71, 341, 682, 1285, 5532, 8166, 17593, 28421, ...

Итак, берем *k*-значное целое число *N* и записываем его в виде последовательности однозначных чисел-цифр, которые принимаются как начальные значения (детки, ростки) для ряда с *k*-суммированием по Фибоначчи. Если в таком ряде встретится число *N* с повторением цифр в прямом (обратном) порядке, то *N* – число Кейта (обратное число Кейта).

Числа, заканчивающиеся на ноль, не допускаются, поскольку нули отбрасываются при перевороте. Однако допускаются числа с "внутренними" нулями, такими как 90711.

Например, $n = 3$: $\overrightarrow{197} \Rightarrow \underline{1,\ 9,\ 7},\ 17,\ 33,\ 57,\ 107,\ \overrightarrow{197}$ – *repfigit*;

$\overrightarrow{341} \Rightarrow \underline{3,\ 4,\ 1},\ 8,\ 13,\ 22,\ 43,\ 78,\ \overleftarrow{143}$ – *rev.repfigit.*

И теперь начинаются "чудеса чудные", будто из научной фантастики.

а) Само число 12 не является числом Кейта, причем ни в одной из систем счисления [5, A320122]. – Не желает оно "вписываться" по такой схеме ни в одну другую систему, оставаясь самобытным и преданным только собственной 12-ричной основе.

б) Число 12 является обратным числом Кейта, копируя в своем последовательном превращении кроличью ферму Фибоначчи:

$$\overrightarrow{12} \Rightarrow \underline{1,\ 2},\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \overleftarrow{21}.$$

в) На основе 12 образуется неповторимый связанный набор-кластер кратных обратных чисел Кейта (12, 24, 36, 48), делящихся на 12 без остатка. – Среди известных чисел Кейта ничего подобного нет! Наиболее вероятно, это единственный 4-мерный кластер в базе 10.

в) В последовательности *revers repfigit* отсутствуют 12-значные обратные числа Кейта:

98 665 175 305 – последнее из пяти 11-значных чисел;

1 935 391 095 868 – первое из трех 13-значных чисел.

Даже в такой "мелочи" число 12 проявляет свой строптивый своенравный характер и явное желание выделяться среди других.

"Приручение" бесконечности.

Бесконечность – не число и не физическая сущность.

Бесконечность – это концепция и категория человеческого мышления.

В нашем мире она физически не существует!

Ряд или бесконечная сумма – одно из центральных понятий математического анализа.

Обрывая бесконечный ряд на n-м члене, получаем частичные суммы S_n.

Если для последовательности S_n определен конечный предел, то его значение – сумма данного ряда, а сам ряд – сходящийся, в противном случае – расходящийся.

Формальное "внедрение" бесконечности в анализ расходящихся рядов, как правило, приводит в недоумение не только обычных людей, но и математиков.

Не случайно, знаменитый норвежский математик Н.Абель считал, что расходящиеся ряды (последовательность S_n не сходится) – изобретение дьявола. С их помощью можно сделать любой вывод, поэтому они приводят к ошибкам и парадоксам.

Например, по Интернету разлетелось равенство, в котором бесконечно большая сумма натурального ряда приравнивается отрицательному числу, без каких-либо оговорок (!):

$$1+2+3+4+5+6+\ldots=-1/12.$$

Проследим этот «прыжок из космоса без парашюта»:

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \ldots$ – обозначаем сумму натурального ряда;

$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 1/2$ – присваиваем сглаженную сумму;

$S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots$ – записываем сумму ряда знакопеременных чисел;

$S_2 = \underline{\quad 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots}$ – смещаем ряд вправо и складываем с самим собой;

$2S_2 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = S_1 = 1/2 \quad \rightarrow \quad S_2 = 1/4$;

$S - S_2 = 0 + 4 + 0 + 8 + 0 + 12 + \ldots = 4\cdot(1 + 2 + 3 + \ldots) = 4S$ – суммируем разности рядов;

$3S = -S_2 \quad \rightarrow \quad S = S_2/3 = -1/12$ – определяем сумму натурального ряда.

Или другой "прыжок", путем сложения троек последовательных чисел и получением уже другой суммы:

$$S = 1 + (2+3+4) + (5+6+7) + (8+9+10) +... = 1+9+18+27+\ldots = 1 + 9(1+2+3+...) = 1 + 9S;$$

$$S = 1 + 9S \quad \rightarrow \quad S = -1/8.$$

К чему же прислониться? – Как сказал один ученик: математика абстрактна, далека от реальности и с её помощью можно доказать всякую чепуху. – Не отчаивайтесь.

В современной математике сумма ряда определяется как предел последовательности частичных сумм S_n, если он существует. В вышеприведенном виде подобные сложения нарушают последовательное наращивание частичных сумм исходного бесконечного ряда.

Именно поэтому они выглядят нелепо. – Но не всё так плохо...

Регуляризация. Расходящемуся ряду можно и весьма полезно назначать-присваивать (!) некоторое конкретное число. Естественно, в рамках определенных правил.

Для этого разработаны специальные методы суммирования, которые используются при решении физических задач. Один из таких способов основан на методе Рамануджана и регуляризации аналитического продолжения дзета-функция Римана.

Суть регуляризации – назначить-соотнести расходящемуся ряду некоторое фиксированное значение.

Дзета-функция Римана $\zeta(s)$ комплексной переменной s в области $\mathrm{Re}(s)>1$ является абсолютно сходящимся рядом $\zeta(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots.$ В частности, $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$.

Для условия $\mathrm{Re}(s)\leq 1$ ряд в правой части больше не является абсолютно сходящимся или даже условно сходящимся. Тем не менее, функцию можно расширить до этой области (с полюсом в точке $s = 1$) аналитическим продолжением [6].

Например, после аналитического продолжения в общем случае имеем $\zeta(-s)=-\frac{B_{s+1}}{s+1}$, где B_n $(n=0,1,2,\ldots)$ – известные числа Бернулли $1, -1/2, 1/6, 0, -1/30, 0, 1/42, \ldots$:

$$\zeta(0)=1+1+1+1+\ldots \overset{R}{=} -1/2;$$

$$\zeta(-1)=1+2+3+4+\ldots \overset{R}{=} -1/12$$

$$\zeta(-2)=1+4+9+\ldots \overset{R}{=} 0.$$

Можно называть это регуляризацией (R) расходящихся рядов (по Рамануджану).

С точки зрения привычного суммирования, недоверчиво видится некоторая уловка и/или даже "обман", ибо сумма натуральных чисел в виде –1/12 никак не получается из обычного сложения положительных чисел. Но в принципе это совершенно допустимо, и де-факто имеет практическое применение.

Кажущийся парадокс обусловлен дискретным характером частичных сумм, которые имеют точки конечного разрыва первого рода в виде скачков функции.

Объяснение, почему такое происходит, можно найти в работе всемирно известного английского математика Г.Харди [7, с. 410] на основе строгих формул суммирования Эйлера-Маклорена, чисел Бернулли и аналитического расширения-представления дзета-функции Римана $\zeta(s)$ при s <0.

Таким образом, регуляризация-суммирование R – вполне законный и четко обоснованный метод присвоения значений расходящимся бесконечным рядам.

Разумеется, это не сумма в традиционном смысле.

Но она обладает свойствами, которые делают её математически полезной при изучении расходящихся рядов, для которых обычное суммирование не определено.

Когда-то отрицательные и комплексные числа были в диковинку. Воспринимались едва ли не дьявольским проявлением-искушением.

Ничего, привыкли. Сегодня без них далеко не уйдешь.

А выдающийся немецкий математик Л.Кронекер году сформулировал свой знаменитый афоризм (1886): «Бог создал целые числа, все остальное есть дело рук человеческих».

Пусть так. – Бог создал, а Рамануджан – самородный математик "от бога" – их все просуммировал!

Другой вариант следует из сходящейся версии суммирования дискретных функций [8]

$$\sum_{n\ge 1}^{\infty} f(n) \overset{R}{=} -\frac{f(0)}{2} + i\int_0^{\infty} \frac{f(it)-f(-it)}{e^{2\pi t}-1}\,dt$$

и перекликается с формулой [9] Абеля–Плана (1820-1823) , которая связывает дискретную сумму и соответствующий интеграл, $i^2=-1$.

Пусть $f(x)=x$, тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \overset{R}{=} -\frac{0}{2} + i\int_0^{\infty} \frac{it-(-it)}{e^{2\pi t}-1}\,dt = i\int_0^{\infty} \frac{2it}{e^{2\pi t}-1}\,dt = -2\int_0^{\infty} \frac{t}{e^{2\pi t}-1}\,dt = \left\| \begin{matrix} u=2\pi t \\ du=2\pi dt \end{matrix} \right\| = -2\int_0^{\infty} \frac{u/2\pi}{e^{u}-1}\,\frac{du}{2\pi} =$$

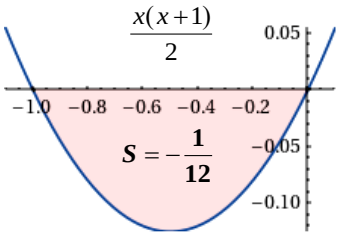
$$= -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty} \frac{u}{e^{u}-1}\,du = -\frac{1}{2\pi^2}\,\frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad \underline{1+2+3+4+\ldots \overset{R}{=} -\frac{1}{12}}.$$

Ещё раз подчеркнем, это не сумма ряда в обычном понимании, и частичные суммы S_n не сходятся к этому значению. Но вещь весьма полезная. В частности, находит применение в квантовой теории поля в перенормировке.

Итак, сумма натурального ряда "сводима" к числу 12! – Пусть с отрицательным обратным значением и путем специального математического суммирования.

Главное, что в данном случае 12, а не какое-либо другое число.

Минус не должен смущать. Наоборот, отрицательность подчеркивает саму сущность альтернативного суммирования положительных чисел. Как метка и/или знак отличия.



К слову, частичные суммы дискретного натурального ряда равны $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Заменим n на x и начертим график непрерывной функции.

Закрашенная площадь в точности равна $S=-1/12$:

$$\int_{-1}^{0} \frac{x(x+1)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}.$$

И это совершенно точно не простое совпадение.

Своеобразный параболический мешок, в который "свалились" все натуральные числа Вселенной с "приручением" бесконечности.

Думаем, что И.Кант остался бы довольным таким поворотом событий.

Воистину волшебные вещи творит число 12. – Трудно не согласиться.

Сумма числового ряда.

Любопытным представляется сравнение значений ряда и соответствующего интеграла. По сути, речь идет о сопоставлении площадей криволинейной и ступенчатой фигур.



$$\int_0^{\infty} \frac{2x^2}{2^x}\,dx = -2^{1-x}\left(\frac{x^2}{\ln 2}+\frac{2x}{\ln^2 2}+\frac{2}{\ln^3 2}\right)\Bigg|_0^{\infty} = \frac{4}{\ln^3 2} \approx 12{,}011$$

$$\boxed{\sum_{n\ge 1}\frac{2n^2}{2^n}=12}$$

Сумма числового ряда эффектно находится с использованием суммы $S(x)$ бесконечно убывающей геометрической прогрессии и производных [10]:

$$S(x)=\sum_{n\ge 1} x^n = 1+x+x^2+\ldots = \frac{1}{1-x},\ |x|<1;$$

$$S'(x)=\sum_{n\ge 1} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \xrightarrow{\times x} f(x)=\sum_{n\ge 1} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2};$$

$$f'(x)=\sum_{n\ge 1} n^2x^{n-1} = \frac{x+1}{(1-x)^3} \overset{x=1/2}{\Rightarrow} \sum_{n\ge 1}\frac{2n^2}{2^n} = \frac{1/2+1}{(1-1/2)^3} = \mathbf{12}.$$

That's all for today...

To be continued...

Литература:

1. Василенко С.Л. Свойства 12 (числа) в основаниях мироустройства:
Часть 1. Теория чисел // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16453, 26.03.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161815.htm.
Часть 2. Геометрия, теория графов // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16472, 06.04.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161819.htm.
Часть 3. Разные направления // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16481, 10.04.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161822.htm.
Часть 4. Перестановки, композиции, разбиения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16512, 14.05.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161829.htm.
Часть 5. Расширение структур // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16537, 30.05.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161838.htm.
Часть 6. Полёты за горизонт // АТ. – М.: – Эл. № 77-6567, публ. 16683, 28.07.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161863.htm.
Части 7–8. Размышлизмы об истоках и степенные особенности // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22055, 30.04.2016 – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162940.htm.
Часть 9. Недостающие образы // АТ. – М.: Эл № 77-6567, публ. 22118, 21.05.2016. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162953.htm.
Часть 10. Правила и принципы землян // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.22128, 27.05.2016. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162956.htm.

2. Сухонос С.И. Пропорциональная вселенная. – М.: Дельфис, 2015. – 320 с. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0209/004a/02091050.htm.

3. Keith M. Repfigit Numbers / J. Recr. Math., 1987, 19, 41-42.

4. Earls J., Lichtblau D., Weisstein E.W. Keith Number / From MathWorld. – A Wolfram web resource. – https://mathworld.wolfram.com/KeithNumber.html.
5. Sloane N.J.A. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS). – https://oeis.org/.
6. Tao T. The Euler-Maclaurin formula, Bernoulli numbers, the zeta function, and real-variable analytic continuation. – https://terrytao.wordpress.com/2010/04/10/.
7. Харди Г. Расходящиеся ряды. Пер. с англ. – М.: Изд-во иностр. л-ры, 1951. – 504 с. – http://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Hardi1951ru.pdf.
8. Candelpergher B. Ramanujan Summation of Divergent Series. – Springer International Publishing AG 2017. – https://math.univ-cotedazur.fr/~coppo/RamanujanSummation.pdf.
9. Abel–Plana formula. – https://en.wikipedia.org/wiki/Abel–Plana_formula.
10. Сумма числового ряда n^2/2^n / Hmath, 18.10.2020. – https://www.youtube.com/watch?v=V8JKmaZ4Lso.

© ВаСиЛенко, 2025
Украина, Харьков

