Н.Ф. Семенюта

МАТЕМАТИКА ГАРМОНИИ – НОВОЕ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОЕ НАПРАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Аннотация: В статье рассмотрено применение золотого сечения и рекуррентных чисел Фибоначчи к анализу однородных электрических цепей.

Ключевые слова: золотое сечение, числа Фибоначчи, математика гармонии, параметры электрических цепей.

Главной целью всех исследований внешнего мира должно быть открытие рационального порядка и гармонии, которые бог ниспослал миру и открыл на языке математики.

Иоганн Кеплер

Современный этап в развитии науки и техники отличается особым интересом к учению о гармонии Мироздания. Это объясняется как развитием науки и техники, так и глобализацией науки и общества, усложнением его самоорганизации. Это же явилось причиной к возврату, казалось бы, к несколько забытым идеям гармонии, в основе которой лежат золотое сечение, гармонические пропорции, рекуррентные и мультирекуррентные последовательности чисел.

Начала гармонии как математического направления заложены в трудах Евклида, Пифагра и других мыслителей и философов еще до нашей эры [1]. Первыми математическими понятиями теории гармонии были «золотое» сечение («золотая» пропорци»), тождество Кассини и др. Оценку «золотого» сечения в математике дал замечательный философ А. Ф. Лосев (1893–1988): «С точки зрения всей античной космологии мир представляет собой пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического деления – «золотому сечению». Золотое сечение связано с последовательностями чисел Фибоначчи, Люка и др.) и мультирекуррентными числами, которые широко проявляются в живой и неживой природе, морфологии человека, науке и технике, философии и социологии, искусстве и обществе, биологии, в том числе в таких современных направлениях науки как биотехника, нанотехнология, менеджмент и др. [2]. Столь широкое проявление золотого сечения и рекуррентных последовательностей чисел ставит задачу включения математики гармонии в образовательный процесс всех уровней образования, как междисциплинарную дисциплину с приоритетом специальности [3, 4, 5].

Целью настоящей работы является расширение математики гармонии на теорию электрических цепей и связи как основы теоретических дисциплин специальностей по автоматике, телемеханики и телекоммуникациям. Начальные сведения об анализе линейных электрических цепей методом лестничных чисел (рекуррентных чисел Фибоначчи и др.) рассмотрены в работе [6]. В развитие метода лестничных чисел в статье рассмотрена связь параметров электрических четырехполюсников с основными составляющими математики гармонии.

В простейшем случае золотое сечение (золотая пропорция) – это *симметричное деление* отрезка прямой $a + b$, на две равные части $a = b$, $a/b = 1$. Симметрия – фундаментальное свойство природы, обуславливает ее структурное разнообразие, внутреннее единство и совершенство, оптимальность параметров. В науке и технике под золотым сечением чаще понимают *асимметричное деление* отрезка когда целое $(a + b) = 1$ так относится к большей своей части a, как большая часть – к меньшей части b, т. е. $(a + b)/a = a/b = \Phi = 1.6180339\ldots$ Такое понятие золотого сечения было введено древнегреческим математиком Евклидом (365–300 до н. э.) при решении задачи «*о делении отрезка в крайнем и среднем отношении*» [6].

Асимметричное деление отрезка имеет алгебраическое решение в виде корней «золотых» квадратных уравнений:

$$x^2 - x - 1 = 0, \qquad x^2 + x - 1 = 0,$$

численные значения корней, которых соответственно равны «золотому» сечению Ф:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi, \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\Phi},$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi}, \qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = -\Phi.$$

Значение Ф связано также с последовательностями чисел Фибоначчи:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10} …,
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55 …

Последовательность Фибоначчи – это рекуррентная последовательность, у которой каждый последующий ее член (кроме первых двух $F_1 = 1$ и $F_2 = 1$) равен сумме двух предыдущих:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

при $n \to \infty$ отношения чисел $F_n/F_{n-1} = \Phi$ и $F_{n-1}/F_n = 1/\Phi$.

Токи цепочечного соединения четырехполюсников с сопротивлениями $R_1 = R_2 = 1$ и нагрузкой $R_н$ (см. рисунок 1), равны: $I_1 = I_2 + I_3$, $I_3 = I_4 + I_5$, $I_5 = I_6$. Откуда $I_1 = I_2 + I_4 + I_6 = F_5 + F_3 + F_1$.

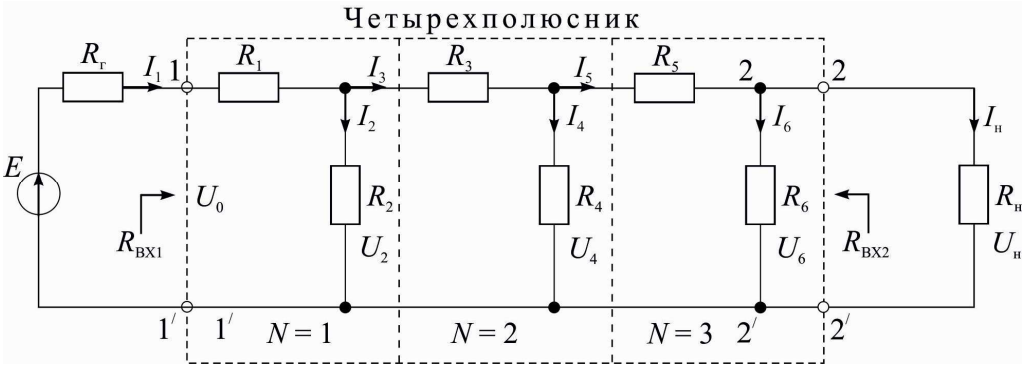

Рисунок 1 – Однородная Т-образная электрическая цепь

С учетом того, что сумма n чисел Фибоначчи с нечетными индексами равна F_{2n}, получаем $I_1 = F_6$. Аналогично для напряжения на входе цепи можно записать $U_0 = U_2 + U_4 + U_6 = = F_5 + F_3 + F_1$. С учетом того, что сумма чисел Фибоначчи с четными индексами равна F_{2n+1}, получаем $U_0 = F_7$. Если $U_0 = F_7$ и $R_н = \infty$, то токи (напряжения) в продольных и поперечных ветвях будут соответствовать числам последовательности Фибоначчи: $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$; если $U_0 = F_6$ и $R_н = 0$, то числам – F_1, F_2, F_3, F_4, F_5.

В общем случае зависимость величин напряжения и тока на входе цепи от соответствующих величин напряжения и тока на выходе при прямой передаче тока (от 1–1′ к 2–2′) может быть представлена в виде системы уравнений:

$$U_1 = F_{2n+1}U_2 + F_{2n}I_2,$$
$$I_1 = F_{2n}U_2 + F_{2n-1}I_2,$$

при изменении направления передачи, т. е. обратной передаче (от (2–2′ к 1–1′), уравнения примут вид:

$$U_1 = F_{2n-1}U_2 + F_{2n}I_2,$$
$$I_1 = F_{2n}U_2 + F_{2n+1}I_2.$$

Этим уравнениям соответствуют цепочечные матрицы чисел Фибоначчи:

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{Vmatrix}, \qquad \|A\| = \begin{Vmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{Vmatrix}.$$

где F_{2n+1}, F_{2n} и F_{2n-1} коэффициенты, зависящие от структуры четырехполюсника.

Основными параметрами приведенного несимметричного четырехполюсника являются: входные сопротивления $R_{вх1}$ и $R_{вх2}$, характеристические сопротивления входа $R_{х1}$ и выхода $R_{х2}$, характеристическая мера передачи g при прямой и обратной передаче тока.

Входные сопротивления четырехполюснико, со стороны его входных $R_{вх1}$ (1–1′) и выходных $R_{вх2}$ (2–2′) зажимах при условии, что четырехполюсник нагружен на конкретное сопротивлении $R_н$, соответственно равны:

$$R_{\text{вх}1}= \frac{F_{2n} + F_{2n+1}R_{\text{н}}}{F_{2n-1} + F_{2n}R_{\text{н}}}, \qquad R_{\text{вх}2}= \frac{F_{2\text{n-1}} + F_{2n}R_{\text{н}}}{F_{2n} + F_{2\text{n+1}}R_{\text{н}}}.$$

Для случаев прямой и обратной передачи тока характеристические сопротивления соответственно равны:

$$R_{x1} = \sqrt{\frac{F_{2n+1}}{F_{2n-1}}}, \qquad R_{x2} = \sqrt{\frac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}}}.$$

При $N \to \infty$ характеристические сопротивления четырехполюсника при прямой и обратной передаче соответственно стремятся к $R_{\text{х}1} = \Phi$, $R_{\text{х}2} = 1/\Phi$.

Мера передачи четырехполюсника определяется по формуле:

$$g = \frac{1}{2}\ln\frac{U_0 I_1}{U_{\text{н}} I_{\text{н}}},$$

где U_0 и I_1 – напряжение и ток на зажимах 1–1' четырехполюсника (см. рисунок), $U_{\text{н}}$ и $I_{\text{н}}$ – напряжение и ток на зажимах 2–2' четырехполюсника, нагруженного на сопротивление $Z_{\text{н}}$, равное характеристическому сопротивлению $Z_{\text{х}}$.

Рабочие меры передачи четырехполюсника связаны также с гиперболическими функциями:

$$g = \ln(\sqrt{F_{2n+1}F_{2n-1}} + F_{2n})$$

где $F_{2n+1}F_{2n-1} = \text{ch}^2\, g$, $F_{2n} = \text{sh}^2\, g$.

Из полученных соотношений также следует:

$$F_{2n+1} = \Phi\ \text{ch}\ g, \qquad F_{2n} = \text{sh}\ g,$$
$$F_{2n} = \text{sh}\ g, \qquad F_{2n-1} = (1/\Phi)\ \text{ch}\ g.$$

С учетом значений коэффициентов F_{2n+1}, F_{2n} и F_{2n-1}, уравнения передачи в прямом направлении равны:

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= \Phi\left(U_2\ \text{ch}\ g + (1/\Phi)I_2 \text{sh}\ g\right) \\ I_1 &= 1/\Phi\left(\frac{U_2}{\Phi}\ \text{sh}\ g + I_2 \text{ch}\ g\right) \end{aligned}\right\},$$

В случае обратного направления передачи уравнения примут вид:

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= (1/\Phi)\left(U_2\ \text{ch}\ g + (1/\Phi)I_2\ \text{sh}\ g\right) \\ I_1 &= \Phi\left(\frac{U_1}{(1/\Phi)}\ \text{sh}\ g + I_2 \text{ch}\ g\right) \end{aligned}\right\}.$$

Заключение. Рассмотренный метод анализа лестничных электрических цепей, в основе которого лежат такие понятия как золотое сечение и числа Фибоначчи, во многих случаях позволяет значительно уменьшить количество промежуточных операций на составление расчетных формул и упростить расчеты. Особо отметим, что применение метода и электрических моделей последовательностей чисел Фибоначчи позволяют моделировать многие физические процессы в системах с распределенными параметрами в природе, науке и технике [7].

Список литературы

1. Stakhov A. The Mathematics of Harmony – From Euclid to contemporary Mathematics and Computer Science. – Singapur: World Scientific, 2009. – 676 с.
2. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. – М: Наука, 1962. – 110 с.
3. Семенюта Н. Ф. Математика гармонии: общие вопросы, рекуррентные и мультирекуррентные последовательности, решения рекуррентных соотношений. «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16779, 25.08.2011.
4. Семенюта Н. Ф. Математика гармонии: коды гармонических пропорций, гармонические пропорции в науке и технике. «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16841, 26.09.2011.
5. Семенюта Н. Ф. Математика гармонии: гармонические волны экономики, валовый национальный продукт, налоги и др. «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16872, 06.10.2011.
6. Семенюта Н. Ф. Анализ линейных электрических цепей методом лестничных чисел. – Гомель: БелГУТ, 2010. – 109 с.
7. Семенюта Н. Ф. Электрическая модель обобщенных рекуррентных чисел и рядов // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567,публ.15194, 27.03.2009.

Материалы науч.-практ. конф. «Актуальные проблемы развития транспортно-промышленного комплекса…» Донецк: ДОНИИЖТ, 2017. 47–51 с.