Средние значения и математические пропорции: от Античности до наших дней

С.Л. Василенко

Контакт с автором: **texvater@rambler.ru**

Отмечена выдающаяся роль древних мыслителей в моделировании исследуемых процессов и формализованном описании окружающего мира. Не безотчетным преувеличением-превознесением. Скорее, как дань глубокого уважения. Человеческая мысль не стоит на месте. Появляются новые знания. Совершенно новые возможности для исследований, «которые не снились мудрецам». Важно только сохранить преемственность времён-поколений.

Оглавление

Ничто не нравится, кроме красоты,
в красоте – ничто, кроме форм,
в формах – ничто, кроме пропорций,
в пропорциях – ничто, кроме числа.
А. Августин

Введение

Уровни познания неограниченны, как китайская шкатулка или русская матрешка.

На каждом этапе пути-движения к новым горизонтам знаний распахиваются ещё большие просторы нетронутой целины необычных парадоксов, новых тайн и загадок.

И нет этому процессу ни конца, ни края.

Вкусив запретный плод, первые люди выбрали познание. Поэтому человечество просто обречено находиться в постоянном плену теорий, гипотез и витиеватых прогнозов.

Приобретенные знания в очередной раз подтверждают наши ограниченные возможности в изучении макро- и микромира.

Всякий новый виток познания открывает начало сотен и тысяч новых дорог в мир непознанного.

Но есть на этом тернистом пути некие столпы-маркеры, которые позволяют выстроить единый ряд движения человеческой мысли в соизмерении многих процессов и явлений.

Подобными древними вешками-истоками, давшими людям мощный инструментарий для познания, стали такие базовые представления, как отношение и пропорция.

Философский принцип «всё познается в сравнении», воззрения инь-янь, числа и числовые формы, практически все измерения, музыка, современная теория относительности – лишь маленькая толика проявления и фундаментальности понятия "отношения".

Многие сравнительные образы-характеристики: ложь–истина, меньше или больше, плюс–минус, прошлое–будущее…– суть всё того же отношения.

Мы постоянно что-то с чем-то сравниваем и соотносим, сопоставляем и противопоставляем. Нет такого научного знания, в котором не присутствует "отношение" в том или ином виде.

Фундаментальность отношения и пропорции

Наша жизнь связана со словом "пропорция". Люди часто используют его в повседневной жизни. Говорят о пропорциях человеческого тела, пропорциях в кулинарии и др.

В русском языке встречаются пословицы и поговорки, устанавливающие прямую и обратную пропорциональные зависимости:

- чем выше пень, тем выше тень;
- чем больше народа, тем меньше кислорода;
- чем меньше нас, тем больше нам;
- выше встанешь, больше видишь;
- больше науки, умнее руки…

У Евклида отношение – есть некоторая зависимость (состояние) двух однородных величин по количеству [1, с. 142] или (в другом переводе) – связь по величине между однородными величинами [2, с. 258].

Пропорции имеют непосредственное отношение к числам.

Греки под числом подразумевали только натуральное число как совокупность единиц. Но у них были важные воззрения, близкие к действительным числам.

Речь идет о понятиях отношения (греч. "логос") и пропорции (греч. "аналогия").

Термин "логос" ввел Гераклит. Как закон, по которому "всё течет" и по которому явления переходят друг в друга.

Знаменитый медик Гиппократ (около 440 г. до РХ) искал причины, от которых зависят здоровье и болезнь. Такой причиной Гиппократ считал *отношения*, в которых смешаны в организме различные "соки" – кровь, слизь, желчь. Отношение в смеси была названо темпераментом: сангвиник, холерик, меланхолик, флегматик.

Термины "геометрическая", "арифметическая" и "гармоническая" *аналогии* – имеются у Аристотеля. "Логос" (отношение) переводится на латинский язык словом ratio.

Греческий термин "аналогия" Цицерон один раз перевел редким латинским словом proportio, которое подхватили Капелла (V в.) и Боэций (VI в.) для обозначения математического понятия. Цамберти в XV в. впервые дает определение: "Пропорция есть равенство отношений" [3, с. 310].

Греческое логос, традиционно переводимое как слово, имеет широчайший спектр значений, в т.ч.: 1) речь, изречение; условие, договор, рассказ, история, сочинение; положение в философском учении; дело; 2) счет (число); *соотношение, пропорция*, соразмерность; вес; забота; 3) разум, разумное основание, причина, смысл, понятие.

Логос – некий критерий истины, конечный пункт метода упорядочения вещей. Технический смысл слова – речь, отношение, пропорция. Вероятно, как актуальный элемент и остов вещей, во многих отношениях соотнесенный с первичным космическим компонентом, огнем – наиболее динамичной, изменчивой из всех стихий.

Логос в целом есть единство, системообразующая связь: «Из единого всё происходит и из всего – Единое».

В теоретическом плане понятие о пропорциональных величинах является основой практически всех правил арифметики. Для античных ученых пропорции являлись средством решения задач, соответствующих уравнению первой степени. Действия над дробями, рассматриваемыми как отношение двух целых чисел, также приводили к рассмотрению пропорций. Учение о пропорциях является центральным у Евклида, арабских и европейских математиков средневековья, что хорошо видно из слов Г. Витали (1668): «Пропорция является основанием, на котором строится вся математика, а также целью, к которой стремятся все её приложения» [3].

Различные задачи на пропорции мы находим в индийских сочинениях [4, с. 187].

Пропорции составляли основу поиска закономерностей в художественных композициях древности [5], архитектуре [6] и др.

Пропорция – сопоставление соразмерностей.

Хотя встречаются отдельные неточности-недоразумения, когда пропорцией называют ... фиксированное иррациональное число (URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/003a/02320001.htm).

Математическая пропорция

Пропорция в математике – это равенство двух отношений $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Но малополезные или неинформационные пропорции типа $\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2}$ обычно никто не составляет. Разве что для демонстрации свойств обыкновенной дроби.

Обычно пропорция (в том числе и словесная) служит для фиксации каких-либо особых свойств, или составляется для вычисления некоторого неизвестного x.

$2/1=4/2$ – это не пропорция, хотя и номинально удовлетворяет определению.

В алгебре пропорция – это путь (способ) решения задачи <на пропорцию>.

Теоретические основы пропорции, разработаны ещё в книге V "Начал" Евклида.

Она одинаково хорошо прилагалась к соизмеримым и несоизмеримым величинам.

Эвклид по стопам Евдокса включал в понятие "величины" не только числа, но и непрерывные величины: отрезки, площади и объемы, веса, углы, интервалы времени и др.

Он не приписывал величинам численных значений.

Напомним первые определения книги V [1, с. 142]:

1. *Часть* есть величина (от) величины, меньшая (от) большей, если она измеряет большую.
2. *Кратное* же – большая (от) меньшей, если она измеряется меньшей.
3. *Отношение* есть некоторая зависимость двух однородных величин по количеству.
4. Говорят, что величины *имеют отношение* между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга.
5. Говорят, что величины *находятся в том же отношении*: первая ко второй и третья к четвертой, если равнократные первой и третьей одновременно больше, или одновременно равны, или одновременно меньше равнократных второй и четвертой каждая каждой при какой бы то ни было кратности, если взять их в соответственном порядке.
6. Величины же, имеющие то же отношение, пусть называются *пропорциональными*.

Из восемнадцати определений, помещенных в начале всей книги, и общих понятий сформулированных в книге I, Эвклид изящно и практически без логических недочетов вывел двадцать теорем, в которых устанавливались свойства величин и их отношений. Причем он не прибегал к постулатам, содержание которых было бы чисто геометрическим.

Приведем только одно «в высшей степени важное предложение относительно перестановки средних членов, которое упоминал Аристотель» [2, с. 260].

Предложение 5.16. Если четыре величины пропорциональны, то они будут пропорциональны и "переставляя" (средних или крайних членов – *ред. С.Л.*) [1, с. 162].

То есть, из $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ следует $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

Доказательство. Из $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ вытекает $\frac{am}{bm}=\frac{cn}{dn}$.

Если "числители" $am > cn$, то и "знаменатели" $bm > dn$.

Если $am < cn$, то и $bm < dn$.

Если $am = cn$, то и $bm = dn$. Следовательно, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

Разве это не мастерский образец логики? [2, с. 261]

Обратим ещё внимание на четвертое определение, которое называют аксиомой Архимеда, хотя принадлежит Евдоксу.

Иначе говоря, для двух величин a и b существуют такие целые числа m и n, что $na > b$ и $mb > a$. Величины, удовлетворяющие этим условиям, традиционно называют архимедовыми.

В древности хорошо были известны не архимедовы величины – роговидные углы, между кривой (окружностью) и касательной. Увеличивая такой угол в любое число раз, мы не сможем превзойти угол между касательной и любой прямой, пресекающей её в точке касания [4, с. 97].

Это один из важнейших постулатов непрерывности, которым исключаются системы геометрических величин, содержащие актуально бесконечно малые или бесконечно большие элементы. Исключение подобных систем является действительно необходимым для обоснования учения о пропорциях, которое в итоге является не чем иным, как другой формой современной теории иррациональных чисел [7, с. 309].

Многие свойства пропорций были известны уже древним.

Так, теорема о равенстве произведений средних и крайних членов пропорции и обратная ей содержится ещё у Евклида, причем в числовой и геометрической формулировке.

Предложение 7.19 [8, с. 25]: Если четыре числа пропорциональны, то возникающее из первого и четвертого число <произведение> будет равно возникающему из второго и третьего числу <произведению>;

и если возникающее из первого и четвертого число равно <возникающему> из второго и третьего, то четыре числа будут пропорциональными.

Предложение 6.16 [1, с. 191]: Если четыре прямые пропорциональны, то прямоугольник, заключенный между крайними, равен прямоугольнику, заключенному между средними;

и если прямоугольник, заключенный между крайними, равен прямоугольнику, заключенному между средними, то четыре прямые будут пропорциональными.

В переводе на современную запись это означает:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_3}{a_4} \quad \Leftrightarrow \quad a_1 \cdot a_4 = a_2 \cdot a_3 .$$

Хотя нахождение четвертого члена пропорции по трем известным (тройное правило), что непосредственно вытекает из данных утверждений, Евклид не применяет.

Само название тройного правила имеет индийское происхождение (Брамагупта, VII в.).

Немецкий математик Иоганн Видман[1] (XVI в.) различает 28 видов задач, решаемых тройным правилом. Даёт им особые названия и восторженно отмечает: «это золотое правило, превосходящее все другие правила, в той же мере, как золото превосходит все остальные металлы».

Одновременно это пример своеобразной любви к "золотому" окрашиванию особо впечатляющих результатов. Видимо, с подобной симпатией связано и более позднее название «золотой пропорции», которое постепенно вытеснило из широкого употребления термин Луки Пачолли «божественная пропорция». Некоторые исследователи (В. Говоров и др.) вполне обоснованно считают такую замену напрасной.

У ранних авторов, включая известного педагога-математика Л. Магницкого (1669–1739), тройное правило обычно называлось *строкой*, ибо для механических вычислений данные писались в строку.

Русские ученые относились тройному правилу также с восхищением и в своих математических рукописях отмечали, что «строка похвальная и лучшая из всех иных строк, которую философы зовут золотой строкой».

Напомним некоторые важные преобразования пропорции [9, с. 132].

Из пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ вытекают равенства

$$ad = bc, \quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d}, \quad \frac{d}{c}=\frac{b}{a}, \quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c},$$

а также производные пропорциональные вариации:

$$\frac{a \pm b}{b}=\frac{c \pm d}{d}, \quad \frac{a \pm b}{a}=\frac{c \pm d}{c}, \quad \frac{a \pm c}{c}=\frac{b \pm d}{d}, \quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

Из равенства нескольких отношений $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$ следует:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}.$$

Отметим, что в античные времена пропорции мыслились на языке, несколько отличном от современного представления. Это хорошо видно из таблицы:

Пропорция	В целых числах	В музыкальной гармонии (по Архиту)
Арифметическая	1, 2, 3	7 – 4 = 4 – 1 Полная октава превосходит квинту на столько *тональных интервалов*, на сколько сама квинта превосходит один тон.
Геометрическая	1, 2, 4	1 : 4/3 = 3/2 : 2. Во сколько раз кварта больше исходного тона, во столько же раз октава больше квинты. В обратном порядке (по Платону): октава относится к квинте, как кварта к началу октавы
Гармоническая	3, 4, 6	(2 – 4/3) : (4/3 – 1) = 2 : 1 Положение кварты в октаве: на какую часть первой величины вторая превосходит первую, на такую же часть третьей величины эта третья превосходит вторую.

[1] Получил известность тем, что первым употребил и опубликовал знаки *плюс* и *минус* в своем главном труде «Быстрый и приятный счет для всех торговцев» (Лейпциг, 1489).

Средний член пропорции древние ученые понимали не только количественно, но и просто вообще как средний член.

Так, в целых числах [10, ч. 2, гл. 1, § 2]:

арифметическая пропорция $(1:2:3)$ свидетельствует о постоянном нарастании предметов на одну и ту же величину;

геометрическая пропорция $(1:2:4)$ подразумевает нарастание в одно и то же число раз;

гармоническая пропорция $(3:4:6)$ говорит о таком отношении целого и частей, при котором мыслится одинаковость отношения двух каких-нибудь частей к своему положению относительно третьей части.

Например, в гармонической пропорции трех чисел (3, 4, 6) второй член получается из первого, как путем прибавления к этому последнему одной его трети, так и путем вычитания из третьего одной трети этого последнего. Фактически, она представляет арифметическую прогрессию обратных величин (по мере нарастания): 1/6, 1/4, 1/3.

Соотношение чисел в пропорции подразумевалось примерно такое [11, ч. 7, гл. 6, § 1]:

арифметическая пропорция $c-b=b-a$, – разница между двумя числами одной пары равняется разнице чисел другой пары;

геометрическая пропорция $c:b=b:a$, – третий член так относился ко второму, как второй к первому;

гармоническая пропорция $c:a=(c-b):(b-a)$, – на какую часть своей собственной величины один член превосходит другой, на ту же самую часть третьего члена этот последний превосходит второй.

Пропорция – практически неисчерпаемая тема. Более широкие представления, интерпретации, философские толкования можно найти в обширной литературе.

Краткая история средних

В пифагорейской школе мы находим учение о средних величинах. Точнее о пропорциях и отношениях величин. Это одно из ключевых понятий пифагорейской систематики, которое возникает в математических науках: арифметике, геометрии, музыке.

Средними величинами в древности назывались группы трех величин, средняя из которых есть функция двух крайних.

Насчитывали десять видов "средних величин".

Из них три, наиболее распространенные (арифметическое, геометрическое и гармоническое среднее, как пропорция), определил, вероятнее всего, друг и современник Платона – пифагореец Архит Тарентский (начало IV в. до РХ) в своем трактате "О музыке".

Он же – фактически первый изобретатель (детская погремушка, винтовая резьба, летающий деревянный голубь) и первый, кто привязал движение механизмов к геометрическому чертежу, положив начало теоретической механике.

Никомах Герасский во "Введении в арифметику" сообщает, что к трем средним, о которых учили "древние", последователи Аристотеля и Платона позднее добавили ещё три, а "новые авторы" – ещё четыре [12]. Всего стало 10.

О четырех "новых" средних пишет также Папп Александрийский в "Математическом собрании". Хотя списки "новых" средних у них немного не совпадают. – У каждого из них есть одно такое среднее, которого нет у другого. Причина кроется в логике построений: "новых" средних должно быть не четыре, а пять [13].

«Возможно, что оба автора отставили одно из этих средних в сторону из-за того, что десятке в пифагорейском мировоззрении отводилась особая роль самого совершенного числа; и потому средних бралось в общей совокупности десять, а не одиннадцать» [12]. – Такая себе внутренне-обусловленная тяга к нумерологии.

Средние значения Античности

Средние значения античной математики хорошо описаны в работе А. Щетникова [12] на примере величин $a > b > c > 0$.

Учитывая привычные обозначения деления целого c на части a и b, для нас удобнее принять обратный порядок $c > b > a > 0$.

Построение всех средних описывается вполне единообразно.

Итак, пусть имеются три величины $c > b > a > 0$ и три разности между ними: $c-b,\ b-a,\ c-a$.

В случае среднего арифметического верхняя и нижняя разности равны между собой: $c-b=b-a$. Откуда следует $b=(c+a)/2$.

При построении прочих средних составляется пропорция из четырех членов, в которой отношение двух величин приравнивается к отношению двух разностей. При этом в паре разностей $c-b,\ b-a$ большей может быть как верхняя, так и нижняя разность.

В результате, возникает таблица из (2 + 2) × 3 = 12 клеток (табл. 1), где средние названы (пронумерованы) точно так, как их называли Никомах и Папп.

Таблица 1

Средние значения античных математиков (Никомах – н, Папп – п)

$\frac{c}{b}=\frac{c-b}{b-a}=\frac{b}{a}$ 2 Геометрическое	$\frac{c}{b}=\frac{b-a}{c-b}$ 6	$\frac{c}{b}=\frac{c-a}{c-b}$ 8п	$\frac{c}{b}=\frac{c-a}{b-a}$ $c=b$ или $a=0$	$\frac{c}{b}$
	$\frac{b}{a}=\frac{b-a}{c-b}$ 5	$\frac{b}{a}=\frac{c-a}{c-b}$ 10н 7п	$\frac{b}{a}=\frac{c-a}{b-a}$ 9н 10п	$\frac{b}{a}$
$\frac{c}{a}=\frac{c-b}{b-a}$ 3 Гармоническое	$\frac{c}{a}=\frac{b-a}{c-b}$ 4	$\frac{c}{a}=\frac{c-a}{c-b}$ 8н 9п	$\frac{c}{a}=\frac{c-a}{b-a}$ 7н	$\frac{c}{a}$
$\frac{c-b}{b-a}$	$\frac{b-a}{c-b}$	$\frac{c-a}{c-b}$	$\frac{c-a}{b-a}$	

Две пропорции первого столбца дают одно и то же геометрическое среднее.

Ещё одна пропорция (правый верхний угол) является вырожденной, поскольку сводится к уравнению $ca = ba$ или $c = b,\ a = 0$.

Так что в действительности по этой схеме составляются не 12, а 10 средних значений, в дополнение к среднему арифметическому – первому в списке.

Среднее (10н, 7п) является "полувырожденным", поскольку сводится к виду $a=b+c$.

Если нужен список из десяти средних, включая среднее арифметическое, то именно это среднее можно не вставлять в данный перечень.

Таким образом, приняв среднее арифметическое первым в общем списке, окончательно остаются такие средние значения: 1–6, 7н–9н, 8п.

Реконструкция средних, записанных в виде пропорции (табл. 1), в пересчете на средний член пропорции b, представлена в табл. 2.

Средним арифметическим двух величин u и v называется их полусумма $A=(u+v)/2$. Величины $u,\ A,\ v$ образуют арифметическую прогрессию.

Среднее геометрическое (пропорциональное) двух положительных величин u и v – есть величина $G=\sqrt{uv}$. Величины $u,\ G,\ v$ образуют геометрическую прогрессию.

Среднее гармоническое – это обратная величина среднего арифметического обратных величин $H^{-1} = \dfrac{u^{-1} + v^{-1}}{2} \rightarrow H = \dfrac{2uv}{u + v}$.

Фактически, имеет место арифметическая прогрессия обратных величин (по мере нарастания): 1/6, 1/4, 1/3.

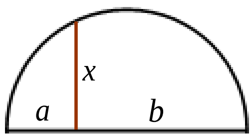
Таблица 2

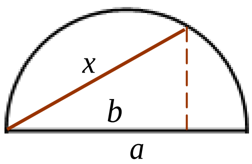
Средние значения величин c и a античных математиков, $d = c - a$

<table>
<tr><td rowspan="2">$\sqrt{ac}$
2</td><td>$\dfrac{-d + \sqrt{d^2 + 4c^2}}{2}$
6</td><td>$\dfrac{c^2}{2c - a}$
8п</td><td>c</td><td>$\dfrac{c}{b}$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{d + \sqrt{d^2 + 4a^2}}{2}$
5</td><td>$c - a$
10н 7п</td><td>$\dfrac{a + \sqrt{a(a + 4d)}}{2}$
9н 10п</td><td>$\dfrac{b}{a}$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{2ac}{a + c}$
3</td><td>$\dfrac{c^2 + a^2}{c + a}$
4</td><td>$\dfrac{c^2 - ad}{c}$
8н 9п</td><td>$\dfrac{a(2c - a)}{c}$
7н</td><td>$\dfrac{c}{a}$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{c - b}{b - a}$</td><td>$\dfrac{b - a}{c - b}$</td><td>$\dfrac{c - a}{c - b}$</td><td>$\dfrac{c - a}{b - a}$</td><td></td></tr>
</table>

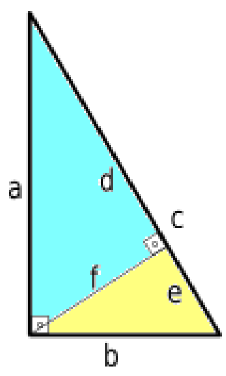
Среднее геометрическое двух чисел равно среднему геометрическому их среднеарифметического и гармонического $G = \sqrt{AH}$.

Если a и b – длины отрезков, то отрезок длиной $x = \sqrt{ab}$ определяется построением [9, с. 161]





Этим построением пользовался Ньютон для геометрического вычисления корней [14, с. 15]. Чтобы извлечь квадратный корень из линии *AB*, нужно к ней добавить *BC* = 1, на *AC* как на диаметре описать полукруг и в *B* восстановить перпендикуляр, пересекающий круг в точке *D*. Так как линия *BD* есть средняя пропорциональная между *AB* и единицей *BC*, то она и будет искомым корнем.



Высота, проведенная из прямого угла к гипотенузе, обладает уникальными свойствами. Она делит треугольник на два треугольника, подобных исходному и друг другу.

Из этого следуют полезные отношения:

- высота – среднее геометрическое (пропорциональное) двух сегментов гипотенузы $f = \sqrt{de}$;
- каждый катет треугольника – среднее пропорциональное гипотенузы и смежных сегментов $a = \sqrt{cd}$, $b = \sqrt{ce}$;
- отсюда вытекают также дополнительные связи

$$f = \frac{ab}{c}, \qquad \frac{1}{f^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Современные средние

В современных приложениях и работе с числовыми данными используют различные виды средних величин, которые можно разделить на два больших класса: степенные и структурные средние.

Для вычисления степенных средних (арифметическое, геометрическое и др.) обычно используют все имеющиеся значения исследуемого признака.

Для относительной характеристики величины варьирующего признака и внутреннего строения рядов распределения в статистике применяют структурные средние, которые представлены в основном, модой и медианой. Они определяются лишь структурой распределения, поэтому их называют также позиционными средними.

Рассмотрим некоторые наиболее употребляемые средние.

Средние Колмогорова [15] для действительных чисел x_i, $i=\overline{1,n}$ – это величины вида

$$M(x)=f^{-1}\left[\frac{1}{n}\sum_i f(x_i)\right],$$

где f – непрерывная строго монотонная функция, f^{-1} – функция, обратная к f.

При разном задании функции f получают различные средние:

$f(x)=x$ – среднее арифметическое;

$f(x)=\log x$ – среднее геометрическое;

$f(x)=x^{-1}$ – среднее гармоническое;

$f(x)=x^2$ – среднее квадратическое;

$f(x)=x^{\alpha}$ – среднее степенное, $\alpha\neq 0$.

Согласно А. Колмогорову [15, с. 136–138] любая средняя величина – функция $M(x)$ обладает свойствами:

– непрерывна;
– монотонна по каждому x_i, $i=\overline{1,n}$;
– симметрична, то есть её значение не меняется при перестановке аргументов;
– среднее одинаковых чисел равно их общему значению;
– некоторую группу значений x_i можно заменить их собственным средним, не меняя общего среднего.

Согласно теории измерения [16]:

▪ для усреднения данных, измеренных в шкале интервалов, из всех средних Колмогорова можно использовать только *среднее арифметическое*;

▪ для усреднения данных, измеренных в шкале отношений, из всех средних Колмогорова можно использовать только *степенные средние* и *среднее геометрическое*.

Таким образом, среднее геометрическое служит для усреднения величин в шкале отношений.

Математические пропорции, возникающие при взаимодействии целого и его аддитивных частей, рассмотрены в работе [17].

Другое направление в усреднении связано с установлением весовых коэффициентов для слагаемых.

Например, среднее арифметическое взвешенного набора вещественных чисел x_i с неотрицательными действительными весами ω_n, $i = \overline{1, n}$ определяется по формуле

$$\bar{x} = \sum_i x_i \omega_i \Big/ \sum_i \omega_i \, .$$

Некоторые веса могут быть равны нулю, чаще для группы крайних значений – наибольших или наименьших. При этом не допускается одновременное равенство всех весов нулю.

Обычно сумма весов принимается равной 1, то есть знаменатель равен 1.

Если все веса равны между собой, среднее арифметическое взвешенное будет равно обычному среднему арифметическому.

Среднее взвешенное находит применение в физике (для расчета центр масс, температуры смеси нескольких порций одной жидкости с разными температурами), в экономике (средневзвешенный курс валюты) и др.

Понятие средневзвешенного может быть расширено и на функции [18].

Среднее степенное набора положительных чисел – частный случай Колмогорова – выражается общей формулой:

$$M_p(x) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{1/p} .$$

Образуются такие средние величины:

$$M_{-1}(x) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \quad \text{– гармоническое;}$$

$$M_0(x) = \sqrt{x_1 \cdots x_n} \quad \text{– геометрическое;}$$

$$M_1(x) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \quad \text{– арифметическое;}$$

$$M_2(x) = \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \quad \text{– квадратическое;}$$

$$M_3(x) = \sqrt[3]{\frac{x_1^3 + \cdots + x_n^3}{n}} \quad \text{– кубическое.}$$

Среднее степенное обобщает известные с древности так называемые архимедовы средние величины, поэтому то его часто называют *средним обобщенным*.

Логарифмическое среднее двух положительных величин $x \neq y$ равно их разности, деленной на разность логарифмов [19]:

$$L = \frac{x - y}{\ln x - \ln y} .$$

Обобщение для нескольких величин представлено в работе [20].

Логарифмическое среднее находит применение в инженерных задачах для определения уровня теплопередачи в поточных системах, особенно в теплообменниках.

В частности, при установившемся непрерывном процессе теплообмена (в случае прямотока или противотока) определяется *средне-логарифмическая разность температур* (Logarithmic mean temperature difference – *L*mtd) [21, с. 545]

$$Lmtd = \frac{\Delta t_i - \Delta t_o}{\ln \Delta t_i - \ln \Delta t_o},$$

где $\Delta t_б$, $\Delta t_м$ – бóльшая и меньшая разность температур между теплоносителями.

Чем больше средняя разность температур теплоносителей *L*mtd, тем больше тепла передается.

В более простом, но менее точном способе вычисления разницы температур в теплообменном аппарате используется *среднеарифметическая разность температур* первичного-1 и вторичного-2 контуров (Arithmetic mean temperature difference – *A*mtd):

$$Amtd = \frac{t_{1i} + t_{1o}}{2} - \frac{t_{2i} + t_{2o}}{2} = \frac{\Delta t_i + \Delta t_o}{2}.$$

Контргармоническое среднее (Contraharmonic mean) положительных чисел определяется как среднее арифметическое квадратов чисел, деленное на среднее арифметическое чисел:

$$C_x = \sum_i x_i^2 \Big/ \sum_i x_i \,.$$

Впервые описал древнегреческий математик Евдокс. Наряду с другими средними широко используется в статистике.

Является отдельным случаем среднего Лемера (p = 2) и среди наиболее употребляемых средних величин, часто встречающихся в технике, науке и быту, имеет наибольшее значение:

$$\min_x \le H_x \le G_x \le L_x \le A_x \le R_x \le C_x \le \max_x,$$

H – гармоническое, G – геометрическое, L – логарифмическое, A – арифметическое, R – среднеквадратическое, C – контргармоническое.

Герониальное среднее (Heronian mean) [22] положительных чисел x, y в математике вычисляется по формуле:

$$He = \frac{1}{3}\left(x + \sqrt{xy} + y\right)$$

и фактически является взвешенным средним арифметического и геометрического среднего

$$He = \frac{2}{3} \cdot A + \frac{1}{3} \cdot G.$$

В частности, используется при нахождении объема усеченных тел (пирамиды, конуса): объем равен произведению высоты усеченного тела на герониальное среднее площадей противоположных параллельных граней.

Арифметико-геометрическое среднее [23] Ag величин x и y – одинаковый предел двух быстро сходящихся числовых последовательностей $a_{n+1} = \frac{a_n + g_n}{2}$, $g_{n+1} = \sqrt{a_n g_n}$ с начальными значениями $a_1 = \frac{x+y}{2}$, $g_1 = \sqrt{xy}$.

Пример: $(x \quad y) = (1 \quad 4) \;\Rightarrow\; (a_1 \quad g_1 \quad Ag) = (2{,}5 \quad 2 \quad 2{,}243\ldots)$.

Арифметико-гармоническое среднее Ah величин x и y – одинаковый предел двух быстро сходящихся числовых последовательностей $a_{n+1} = \dfrac{a_n + g_n}{2}$, $h_{n+1} = \dfrac{2a_n h_n}{a_n + h_n}$ с начальными значениями $a_1 = \dfrac{x+y}{2}$, $h_1 = \dfrac{2xy}{x+y}$.

Пример: $(x \quad y) = (1 \quad 4) \;\Rightarrow\; (a_1 \quad h_1 \quad Ah) = (2{,}5 \quad 1{,}6 \quad 2)$.

Средние по Чезаро для последовательности $\{a_n\}$ – средние арифметические первых n членов $c_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Основной результат теории чезаровских средних утверждает [24], что если существует предел последовательности $\{a_n\}$, то также существует предел последовательности $\{c_n\}$, и они равны.

Чезаровские средние обладают признаком регулярности, сохраняя свойство сходимости последовательности и её предела. В то же время существует последовательности $\{a_n\}$, которые не имеют предела, а их $\{c_n\}$ сходятся, например, $a_n = (-1)^n$. Это позволяет использовать чезаровские средние для суммирования расходящихся рядов.

Средние Лемера объединяются общей формой [25]

$$L_p(x) = \sum_n x_n^p \Big/ \sum_n x_n^{p-1},$$

и в том числе включают:

$\lim\limits_{p \to \infty} L_p(x)$	– минимум совокупности элементов $\{x_n\}$;
$L_0(x)$	– гармоническое среднее;
$L_{1/2}(x_1, x_2)$	– геометрическое среднее двух чисел;
$L_1(x)$	– арифметическое среднее;
$L_2(x)$	– контргармоническое среднее;
$\lim\limits_{p \to -\infty} L_p(x)$	– максимум совокупности элементов $\{x_n\}$.

Различают также:

скользящее среднее (moving average) – среднее значение функции за выделенный предшествующий период, – используется, в частности, для сглаживания краткосрочных колебаний и выделения тендеций и/или циклов, для обработки сигналов [26];

сферическое среднее (spherical mean) функции вокруг точки – среднее всех значений этой функции на сфере заданного радиуса с центром в этой точке, и др.

Золотая пропорция

Одним из ярких и уникальных математических объектов, уходящих в глубину времен античности, стала золотая пропорция (деление в крайнем и среднем отношении), имеющая непосредственное отношение к средним величинам. Впервые встречается в знаменитых «Началах» Евклида (~2300 лет назад), где применялась для построения правильного пятиугольника.

Золотая пропорция образуется из среднего геометрического $\frac{c}{b}=\frac{c-b}{b-a}=\frac{b}{a}$, если ввести дополнительное условие $c=a+b$ – аддитивное деление величины (целого, отрезка) на две непересекающиеся части.

Приняв без потери общности рассуждений единичное целое $a+b=1$, пропорция $\lambda=\frac{1}{b}=\frac{b}{a}$ дает нам три квадратных уравнения:

- отношение → $\lambda^2-\lambda-1=0$, $\lambda=\Phi$ – точка внутреннего деления;
- большая часть → $b^2+b-1=0$, $b=\phi$;
- меньшая часть → $a^2-3a+1=0$, $a=\phi^2$.

Сформированные таким образом три величины $\{c, b, a\}$ составляют геометрическую прогрессию $k\{1,\ \phi,\ \phi^2\}$ с любым коэффициентом пропорциональности $k>0$.

Примечательно, что константа Φ здесь имеет характер безразмерной величины.

С учетом свойств математической пропорции имеем:

$$\frac{1}{\phi}=\frac{\phi}{\phi^2}=\frac{1+\phi}{\phi+\phi^2}=\frac{\Phi}{1}\text{ или }\frac{\Phi}{1}=\frac{1}{\phi}$$ – модель золотого роста [27].

Здесь $\Phi=1+\phi$ – величина метрическая, как сумма целого и его большей части.

Одним из камней преткновения в данной пропорции является терминология «крайнего и среднего отношения» (КСО), берущая своё начало со времен Евклида.

По-русски звучит несколько странно и не совсем понятно.

Невольно создается впечатление вольных переводов-интерпретаций, когда в одной посудине смешались средние и крайние члены пропорции вместе с отношениями c/b, b/a, которых всего-то два, и по визуальному расположению оба крайние – слева и справа.

«До времен Пачоли золотое сечение было известно под устрашающими названиями вроде "крайнее и среднее отношение" или "пропорция, имеющая среднее и два экстремума", и само это понятие было известно одним лишь математикам» [28].

На наш взгляд, понятия крайнего и среднего касаются не визуального расположения двух отношений пропорции, а формы организации (!) самих отношений [29, 30]:

– первое отношение образуют два отрезка, имеющие общий край;
– второе отношение формируют отрезки, имеющие общую середину (рис. 1).

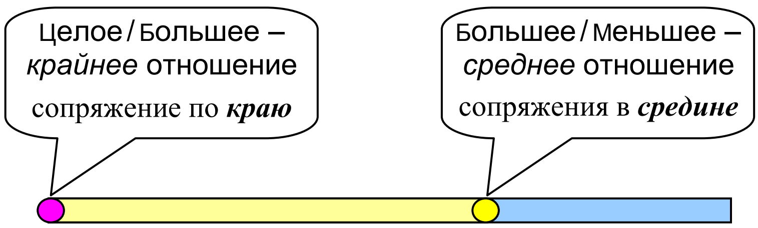


Рис. 1. «Крайнее и среднее отношения» в интерпретации точки сопряжения

В первом отношении участвует целое и только одна из его частей.

В середине отрезка сопрягаются исключительно части.

Отсюда и разгадка термина КСО (рис. 2).

Выдающийся астроном и математик И. Кеплер называл эту пропорцию продолжающей саму себя [31, с. 17]: «Устроена она так, что два младших члена этой нескончаемой пропорции в сумме дают третий член, а любые два последних члена, если их сложить, дают следующий член, причем та же пропорция сохраняется до бесконечности».

$$\overbrace{c : \underbrace{a = a}_{\text{средние}} : b}^{\text{крайние}} \qquad\qquad \underbrace{c : a}_{\text{крайнее}} = \underbrace{a : b}_{\text{среднее}}$$

члены пропорции — отношения пропорции

Рис. 2. Члены и отношения золотой пропорции
в терминологии "крайнего" и "среднего"

«Если меньшую часть отрезка, разделенного в КСО, отложить на большей части, то большая часть также разделится в КСО» [32, с. 222].

Если руководствоваться положением, что золотая пропорция обусловливает зрительное ощущение гармонии и равновесия, то есть и другое гармоничное отношение двух смежных величин (не путать с гармоническим отношением). Оно является функцией золотого числа.

Так, если взять разность двух величин золотого сечения, разделить её также в золотой пропорции и каждую долю добавить к меньшей величине исходного золотого сечения, то получится отношение [33]:

$$\psi = \frac{1+\phi^2}{1+\phi^3} = \Phi - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{80}} = \frac{\sqrt{125}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}1180.$$

То есть имеем величину Φ за вычетом половинки целого.

В таком отношении, например, проводится средний элемент (полочка) в русских буквах Н, Р, Я и т.д.

В некоторых шрифтах, берутся пропорции высоты и ширины для широких букв.

Это отношение также встречается в природе.

В целом, относительно идеологии золотой пропорции следует признать [34]: «Все античные тексты, в которых обсуждается деление величины в среднем и крайнем отношении – это сугубо математические трактаты, в которых данное построение рассматривается исключительно в связи с построением правильного пятиугольника».

После чего было забыто на многие века. За ненадобностью (?)...

Гармоническая пропорция

Иногда золотую пропорцию называют гармонической, что терминологически неправильно.

Понятие математической гармоничности для неё не свойственно, поскольку определяется другими положениями-критериями [27], которые устанавливаются геометрической пропорцией (!).

Ярким примером сравниваемых отношений является *гармоническая пропорция* Архита в вариациях [35]:

«на какую часть первой величины вторая превосходила первую, на такую же часть третьей величины эта третья превосходила вторую» [10];

«на какую часть своей собственной величины один член превосходит другой, на ту же самую часть третьего члена этот последний превосходит второй» [11].

Другими словами, три числа образуют гармоническую пропорцию, если отношение двух из них равно отношению разностей между каждым из них и третьим числом.

Например, числа 6, 4 и 3 находятся в гармонической пропорции, ибо 6 превосходит 4 на 2 или третью часть от 6, и 4 превосходит 3 на 1 или третью часть от 3. При этом $\frac{6}{3}=\frac{6-4}{4-3}$.

Применительно к задаче деления целого $1=b+a$ эта пропорция принимает вид:

$$\frac{1-b}{b-a}=\frac{1}{a} \quad\rightarrow\quad a^2+2a-1=0 \quad\Rightarrow\quad a=\sqrt{2}-1, \quad b=2-\sqrt{2}\,.$$

Тройка возрастающих чисел $(a,b,1)=(\sqrt{2}-1),\ 2-\sqrt{2},\ 1)$, объединённая дополнительным свойством целого из двух частей, действительно является гармонической: второе число получается прибавлением к первому его $(\sqrt{2}-1)$-й части и одновременно вычитанием из третьего его $(\sqrt{2}-1)$-й части:

$$a+(\sqrt{2}-1)\cdot a \;=\; 2-\sqrt{2} \;=\; 1-(\sqrt{2}-1)\cdot 1.$$

Данная пропорция имеет непреходящее значение в музыкальной гармонии. Что касается гармонии, якобы обусловленной золотой пропорцией, то она сугубо субъективна и потому под большим сомнением.

Да и сравнивать-то особо не с чем, ибо она единственная в своём классе из трех величин $\{1, a, b\}$, не считая половинного деления [27, 35].

Как говорил одесский классик, если не видел другие, то наши туфли <машины> вот такие!

Золотая пропорция и теорема Пифагора

Разбираясь в противоречивых мнениях по истории термина "золотое сечение", В. Зубов приводит оригинальный текст высказывания выдающегося немецкого астронома-математика И. Кеплера [36–38]:

«Существует два сокровища в геометрии: *одно есть отношение диагонали прямоугольника к сторонам, другое – деление линии в крайнем и среднем отношении*. Из первой вытекает построение куба, пирамиды и октаэдра, а из второго – построение додекаэдра и икосаэдра. Обе теоремы – бесконечной полезности и потому в высшей степени драгоценны... первую, гласящую, что стороны прямоугольника, будучи возведены в степень, равны квадрату линии, противолежащей прямому углу, – эту теорему, говорю я, вы справедливо уподобите куску золота, вторую, о пропорциональном сечении, назовете драгоценным камнем. Ведь она, хотя и прекрасна сама по себе, однако без первой ничего не стоит». – Kepler J. Mysterium Cosmographicum, 1596.

К слову, следуя И. Кеплеру, золотое сечение следовало бы, скорее, назвать "алмазным" или другим драгоценным камнем, а теорему Пифагора "уподобить куску золота".

Заслуживает внимания продемонстрированный в работе [39] переход от теоремы Пифагора – через деление целого в среднем и крайнем отношении – к числу золотого сечения [38]:

$$x^2+y^2=z^2 \quad\rightarrow\quad y^2=z^2-x^2=(z+x)(z-x) \quad\rightarrow\quad \frac{z+x}{y}=\frac{y}{z-x}.$$

Сравнивая с математической пропорцией (задачей деления целого в среднем и крайнем отношении) $\frac{\text{Целое}}{\text{Большее}}=\frac{\text{Большее}}{\text{Меньшее}}$, имеем: $\text{Целое}-\text{Меньшее}=(z+x)-(z-x)=y$ или $y=2x$.

Положив для определенности $x=1$, получаем $y=2$ и $z=\sqrt{5}$.

Обозначая через число золотого сечения (ЗС) безразмерную величину Φ как отношение целого к большему, находим

$$\Phi = \frac{z+x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Хотя запись решения квадратного уравнения напрямую не использовалась, из контекста преобразований хорошо видно: оно неявно присутствует в отображении пропорции, когда в равенство отношений мы вводим неизвестную переменную.

Может создаться впечатление, что золотое сечение является частным случаем теоремы Пифагора. В частности, можно говорить о некотором выражении целостности, определяемой не через линейную сумму $a+b=c$, а посредством теоремы Пифагора $a^2+b^2=c^2$.

Однако некорректно рассуждать о том, что золотая пропорция является следствием теоремы Пифагора. Ибо золотая пропорция может использовать в своём проявлении эту теорему. Но не сводится к ней [40].

Пропорция Гетальди

Задачи пропорционального деления отрезков были предметом рассмотрения и математиков эпохи Возрождения, среди которых отметим известного итальянского математика Б. Кавальери (1598–1647) и менее именитого сербохорватского математика М. Гетальди (1566–1627). Последний был хорошим знатоком научного творчества греческих авторов и занимался приложениями алгебраических методов в геометрии.

Мастерски решая задачи на построения, в книге «О математическом анализе и синтезе» он рассмотрел ряд тематических задач на деление отрезков и, в частности, такую нетривиальную проблему [41]:

разделить данный отрезок так, чтобы прямоугольник, построенный на частях, равнялся квадрату, построенному на разности частей (рис. 3).

Нахождение точки сечения отрезка длиной l при этом сводилось к решению геометрической пропорции $(l-x)x=(l-2x)^2$.

Но что любопытно, не имея прямого отношения к ЗС, ответ здесь, тем не менее, содержит число ЗС [42]:

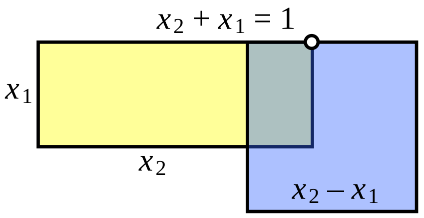


Рис. 3. Решение геометрической пропорции Гетальди:
$x_1 = \frac{1}{2+\Phi}$, $x_2 = \frac{1}{2-\phi}$

$$x^2 - lx + l^2/5 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{l}{2}\left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow \frac{l}{2+\Phi}, \quad \frac{l}{2-\phi},$$

$$\text{где } \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad \phi = \Phi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Площади прямоугольника и квадрата равны $l^2/5$.

Приняв без потери общности длину отрезка $l=1$, исходное уравнение можно записать в виде пропорции

$$\frac{x}{1-2x} = \frac{1-2x}{1-x} \Rightarrow \frac{x}{\Delta} = \frac{\Delta}{1-x},$$

где $1-2x=(1-x)-x=\Delta$ – разность между бо́льшим $1-x$ и меньшим x отрезками.

Мы пришли к следующей интерпретации пропорции Гетальди:

меньшее так относится к разности между целым и удвоенным малым,
как эта разность – к бо́льшему.

Возможно и альтернативное, более наглядное истолкование пропорции Гетальди:

меньшее так относится к разности между бо́льшим и меньшим, как эта разность – к бо́льшему

То есть в роли средних членов пропорции выступает разность между двумя частями. Крайними членами являются сами части. Отношения равны:

$$\frac{a}{a-b}=\frac{a-b}{b}=\Phi, \qquad \frac{a}{b}=\Phi^2 .$$

Возвращаясь к корням $x_{1,2}$ квадратного уравнения, заметим, что для единичного отрезка величины $x_1=\phi/\sqrt{5}\approx 0{,}2764$ и $x_2=\Phi/\sqrt{5}\approx 0{,}7236$, а сторона квадрата x_2-x_1 равна $1/\sqrt{5}\approx 0{,}4472$. Эти три числа являются начальными членами золотой последовательности *ФG*, приведенной в работе [43].

Возвратное уравнение, эквивалентное рассматриваемой задаче, имеет вид (n = 1, 2, 3…)

$$f_{n+1}=f_n-f_{n-1}/5 .$$

Соответствующая рекуррентная последовательность независимо от начальных условий приводит к аттрактору – большему по модулю корню x_2 характеристического уравнения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\frac{1}{2-\phi}=\frac{\Phi}{\sqrt{5}}\approx 0{,}7236 .$$

Итак, "золотая крупица", описанная в этом разделе и найденная благодаря пропорции Гетальди, вполне может располагаться рядом с "золотым самородком" – золотым сечением.

Золотая пропорция и средние

В реальном мире абсолютное начало не существует либо полностью сокрыто.

Оно способно генерироваться лишь в головах и воображении мыслящих существ, трансформируясь далее на язык абстрактной математики [44].

Для выражения абсолютных величин и перевода их в относительные характеристики человек в глубокой древности придумал разного рода отношения и пропорции.

Так, «золотой пропорцией» в наше время обычно называют равенство двух отношений, возникающих в классической задаче о золотом сечении: *целое относится к большему, как оно – к меньшему* $1:b=b:a$.

Вообще-то вполне резонно и логично.

Хотя ещё античный философ Ямвлих отмечал, что «Пифагор нашел "золотую пропорцию" $a:H=A:b$, где H и A – гармоническое и арифметическое среднее между величинами a и b, и что этому он научился у вавилонян» [2, с. 130].

Заметим, что «золотая пропорция» здесь представляет собой абсолютное тождество в виде равенства двух безальтернативных отношений.

Собственно, это обычные алгебраические преобразования, ибо $A=(a+b)/2$, $H=2ab/(a+b)$, и произведение средних членов $A{\cdot}H$ равно произведению крайних членов пропорции $a{\cdot}b$.

Тем не менее, эта пропорциональность играла большую роль в пифагорейской теории музыки.

В понимании античных ученых отношения имели вид:

$$A-a=b-A, \qquad (H-a):a=(b-H):b.$$

Де-факто данные выражения весьма слабо связаны с понятием пропорции, ибо здесь попросту нечего решать.

В конечном счете, наличествует завуалированное тождество.

Чтобы как-то сберечь преемственность веков, и одновременно сохранить сложившееся современное понимание математической пропорции, соотношение $a:H=A:b$ целесообразно называть "золотой пропорциональностью" или тождественным равенством одного и того же отношения в двух разных транскрипциях.

Термин «золотая пропорция» остается за соотношением $1:b=b:a$.

Если первое равенство соблюдается для любой пары чисел (a b), то второму соотношению соответствует одно единственное положительное решение, называемое константой золотого сечения, которая равна

$$b=1-a=\left(\sqrt{5}-1\right)/2\approx 0{,}618\ .$$

Это не только уникальная и неповторимая пропорция, но и особая симметрия.

«На основе пифагорейского теоретико-числового учения о гармонии формулировался еще один тип симметрии, ... который можно было бы назвать динамическим типом симметрии.

Это – то, что впоследствии получило название *золотого деления*....

Динамической эту симметрию мы назвали бы потому, что она формулирует постепенный переход от целого к части; и так как этих частей может быть сколько угодно, то в порядке постепенности ими исчерпывается вся величина, взятая в целом,... путем постепенного перехода от большей части целого к его меньшей части» [11, ч. 7, гл. 6, § 1].

Взаимосвязь средних значений и "золотой" константы

Запишем три средних для двух положительных чисел:

арифметическое $A=\dfrac{u+v}{2}$, геометрическое $G=\sqrt{uv}$ и гармоническое $H=\dfrac{2uv}{u+v}$.

В этих формулах фигурирует сумма и/или произведение исходных чисел $u,\ v$.

Выберем для конкретности простой, но любопытный вариант $(u,\ v)=\left(\Phi,\ \phi^2\right)$, такой, что $uv=\phi$ и $u+v=2$.

Тогда имеем

$$(A,\ G,\ H)=\left(1,\ \sqrt{\phi},\ \phi\right).$$

Данные величины образуют прямоугольный треугольник Кеплера с гипотенузой A и катетами $G,\ H$:

$$A^2=G^2+H^2 \quad \text{или} \quad 1=\phi+\phi^2.$$

Причем стороны соотносятся в золотой пропорции:

$$\frac{A}{H}=\left(\frac{A}{G}\right)^2=\left(\frac{G}{H}\right)^2=\Phi\ . \qquad (1)$$

Средние в треугольнике Кеплера

Описанный выше примечательный случай является частным примером более общей закономерности.

В литературе можно найти ссылку на работы [45, 46], в которых вроде бы утверждается, что для двух положительных вещественных чисел u, v их среднее арифметическое A, среднее геометрическое G и среднее гармоническое H являются длинами сторон прямоугольного треугольника тогда и только тогда, когда треугольник является треугольником Кеплера.

Свободный доступ к упомянутым работам отсутствует, поэтому выполним собственную реконструкцию данного положения, определив необходимые соотношения.

С целью удобства и простоты изложения, но без потери общности рассуждений, зафиксируем одно число $v = 1$.

Учитывая известное неравенство для средних величин $A \geq G \geq H$, найдем условия, при которых соблюдается теорема Пифагора $A^2 = G^2 + H^2$ или

$$\frac{(u+1)^2}{4} = u + \frac{4u^2}{(u+1)^2} \quad \Rightarrow \quad u^4 - 18u^2 + 1 = 0\,.$$

Решение квадратного уравнения дает

$$u^2 = 9 + 4\sqrt{5} = \Phi^6 \quad \text{или} \quad u = \Phi^3.$$

То есть соотношение чисел составляет $v : u = 1 : \Phi^3$ с любым коэффициентом пропорциональности.

Таким образом, приходим к следующему утверждению:

если отношение двух чисел равно $u/v = \Phi^3$, то их среднее арифметическое $A = \dfrac{u+v}{2}$, среднее геометрическое $G = \sqrt{uv}$ и среднее гармоническое $H = \dfrac{2uv}{u+v}$ образуют прямоугольный треугольник с гипотенузой A и катетами H, G такой, что выполняется пропорция (1).

Примеры параметров треугольника Кеплера, который имеет единичное значение соответственно гипотенузы, большого, малого катетов и высоты, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу:

$$(u,\ v) = \left(\Phi,\ \ \phi^2\right) \qquad \to \quad (A,\ G,\ H) = \left(1,\ \sqrt{\phi},\ \phi\right);$$

$$(u,\ v) = \left(\Phi\sqrt{\Phi},\ \phi\sqrt{\phi}\right) \ \to \quad (A,\ G,\ H) = \left(\sqrt{\Phi},\ 1,\ \sqrt{\phi}\right);$$

$$(u,\ v) = \left(\Phi^2,\ \phi\right) \qquad \to \quad (A,\ G,\ H) = \left(\Phi,\ \sqrt{\Phi},\ 1\right);$$

$$(u,\ v) = \left(\Phi^2\sqrt{\Phi},\ \sqrt{\phi}\right) \ \to \quad (A,\ G,\ H) = \left(\Phi\sqrt{\Phi},\ \Phi,\ \sqrt{\Phi}\right).$$

Справедлива и обратная формулировка:

стороны треугольника Кеплера $k \cdot \left(1,\ \sqrt{\Phi},\ \Phi\right)$ с произвольным коэффициентом пропорциональности $k > 0$ являются средним гармоническим, средним геометрическим и средним арифметическим двух величин, которые численно равны уменьшенному катету в Ф раз и увеличенной гипотенузе – тоже в Ф раз.

Формальный переход к комплексным числам всё оставляет в силе.

Так, для мнимой единицы $i = \sqrt{-1}$ имеем:

$$(u,\ v) = \left(\Phi^2 + i\Phi,\ \phi + i\phi^2\right) \ \Rightarrow\ (A,\ G,\ H) = \left(\Phi + i,\ \sqrt{\Phi} + i\sqrt{\phi},\ 1 + \phi i\right).$$

Только вместо одного вещественного числа теперь фигурирует пара чисел – разложений вектора на две составляющие по осям координат. Со своей арифметикой и геометрией для мнимой и вещественной части.

Средние величины в трапеции

Трапеция общего вида (рис. 4) – чрезвычайно удобный геометрический объект для построения и демонстрации средних величин, зависящих от длин оснований трапеции x, y.

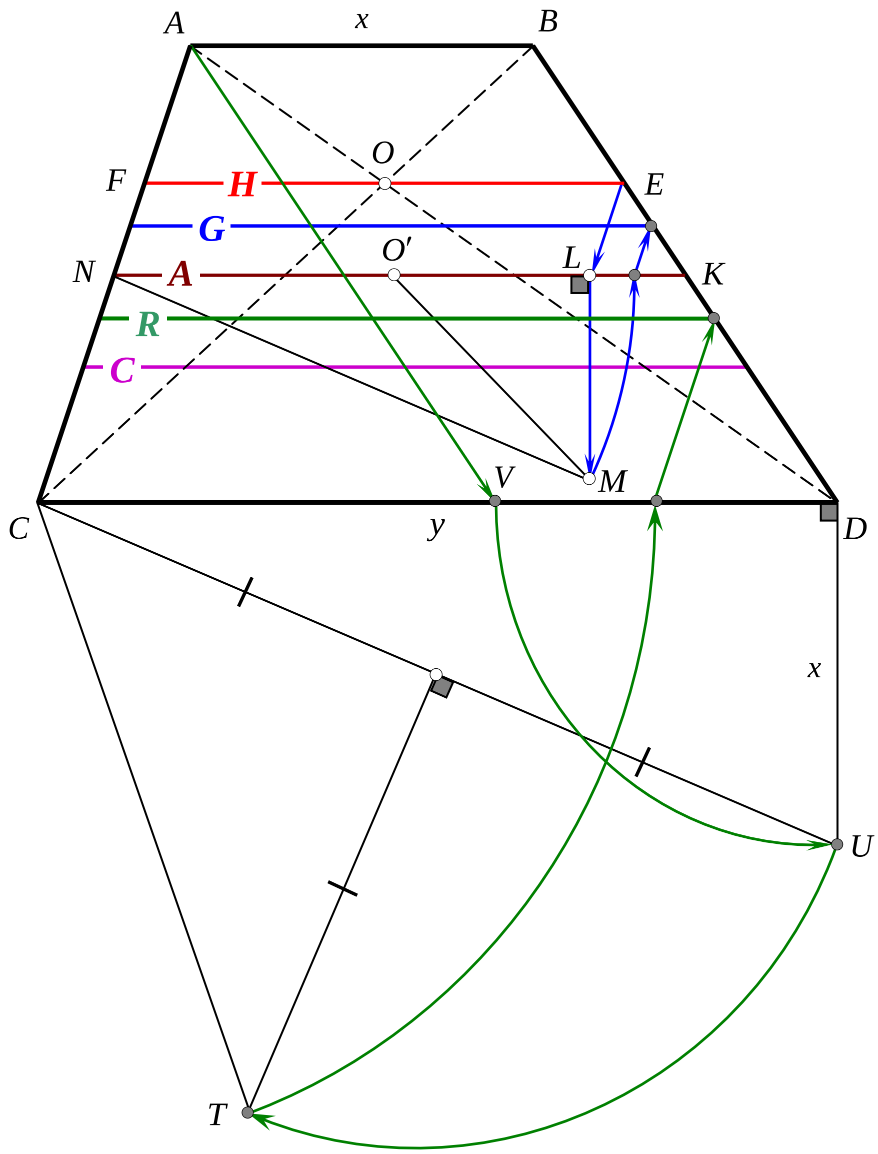


Рис. 4. Геометрическая интерпретация наиболее распространенных средних в трапеции

1) Отрезок $H = FE$, проходящий через точку пересечения диагоналей O параллельно основаниям $H \parallel x \parallel y$, – есть их *среднее гармоническое* $\dfrac{1}{\boldsymbol{H}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$ или $\boldsymbol{H} = \dfrac{2xy}{x+y}$ [47, с. 65–66].

Действительно, прибавив к пропорции $\frac{FO}{x}=\frac{CO}{CB}$ одинаковые отношения $\frac{OE}{x}=\frac{FO}{y}=\frac{OB}{CB}$, получаем $\frac{FO}{x}+\frac{FO}{y} = \frac{CO}{CB}+\frac{OB}{CB} = 1$.

Разделив это равенство на величину $FO = FE/2$, находим $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{\boldsymbol{H}}$.

2) Отрезок *NK*, соединяющий середины боковых сторон трапеции, – есть *среднее арифметическое* $\boldsymbol{A}=(x+y)/2$. Отрезок одинаково отстоит от оснований трапеции.

3) Отложим $NL = FE$, восстановим перпендикуляр $LM \perp NK$, возьмем точку *O'* – середину *NK* и циркулем проведем $O'N = O'M$.

Полученный отрезок *NM* – *геометрическое среднее* $\boldsymbol{G}=\sqrt{xy}$, как катет $\Delta\, KMN$ – среднее пропорциональное гипотенузы $NK = \boldsymbol{A}$ и смежного сегмента $NL = \boldsymbol{H}$.

С целью удобства восприятия остается его расположить параллельно (знак ||) основаниям трапеции. Для этого вращением вокруг точки *N* он переносится на линию *NK*, из точки пересечения проводится линия || боковой стороне *AC*, и далее собственно линия-отрезок ***G*** || основанию *AB*.

В таком расположении отрезок делит исходную трапецию на две подобные трапеции.

4) *Контргармоническое среднее* расположено на таком же расстоянии от линии ***A*** до ***H*** (только ниже) и легко достраивается путем проведения окружности и проведения к ней касательной || основанию *AB*.

Действительно, при таком построении $\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{H}+\boldsymbol{C}}{2}$ или $\boldsymbol{C}=2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{H}=\frac{x^2+y^2}{x+y}$.

5) Проводим $AV \| BD$. Радиусом $DV = x$ на перпендикуляре $DU \perp CD$ отмечаем отрезок длиной *x*. Делим гипотенузу $CU=\sqrt{x^2+y^2}$ пополам и как на диаметре проводим дугу *UT* до пересечения с перпендикуляром в точке *T*. Отрезок $CT=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}=\boldsymbol{R}$ – есть *среднеквадратическое*. Далее он легко переводится в "площадь" трапеции.

Отрезок ***R*** делит исходную трапецию на две равные по площади трапеции.

Средние величины в полукруге

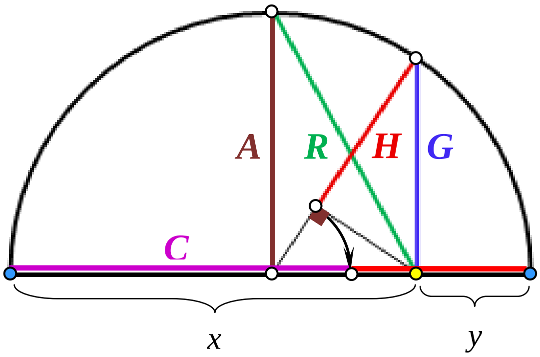
Не менее эффектно выглядят средние величины в полукруге, диаметр которого разделен на значения *x*, *y* (рис. 5).

Построения сравнительно легкие и не требуют особых комментариев.

Приняв без потери общности рассуждений диаметр полукруга равным единице и разделив его золотым сечением $x+y=1=\phi+\phi^2$, получаем следующие значения средних:

H	$2\phi^3$	0,4721
G	$\sqrt{\phi^3}$	0,4859
A	0,5	0,5
R	$\phi\sqrt{1-\phi/2}$	0,5137
C	$3-4\phi$	0,5279

Наблюдается практическая симметрия средних величин: $2A = H + C \approx G + R$.



$$\boldsymbol{H \le G \le A \le R \le C}$$

$\boldsymbol{H} = \dfrac{2xy}{x+y}$ – гармоническое (*Harmonic*);

$\boldsymbol{G} = \sqrt{xy}$ – геометрическое (*Geometric*);

$\boldsymbol{A} = \dfrac{x+y}{2}$ – арифметическое (*Arithmetic*);

$\boldsymbol{R} = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$ – квадратическое (*Root-mean-square*);

$\boldsymbol{C} = \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ – контргармоническое (Contraharmonic)

Рис. 5. Геометрическая интерпретация наиболее распространенных средних в полукруге

Пропорции с отрицательными числами

С появлением аналитической геометрии в 17 веке отрицательные числа получили наглядное геометрическое представление на числовой оси. Хотя их теория ещё долго претерпевала осмысление.

Чего стоило только обсуждение необычной тождественно-числовой пропорции

$$1 : (-1) = (-1) : 1.$$

Здесь в левой части $1 > -1$, а справа наоборот $-1 < 1$.

Получается, что большее число как бы равно меньшему. Эту необычность иногда называют "парадоксом Арно" – французского теолога, и философа-математика, занявшего достойное место среди выдающихся мыслителей, таких как Аристотель, И. Кант и др.

Именно Антуан Арно (сын), говорил о логике, как об «искусстве правильно прилагать разум к познанию вещей». Однажды он задал вопрос, сокрушительный в своей простоте: «Если нам нужно доказывать существование Бога, чтобы гарантировать верность человеческого мыслительного процесса, как нам верить этому доказательству, которое само по себе есть плод человеческого разума?» [48, гл. 4]. – Несмотря на отчаянные попытки человеческих умов, до сих пор так и не удалось вырваться из этого заколдованного круга.

С пропорцией, конечно, несколько легче. Если знаки "минус" вынести и поставить перед дробью, то всё становится на свои места, то есть $-(1:1) = -(1:1)$.

Последующее развитие теории чисел окончательно убрало эту неясность.

К тем же комплексным числам понятия "положительности-отрицательности" теряют смысл и неприменимы.

Хотя сами величины допустимо сравнивать, например, по модулю.

Заключение

О пропорциях и средних величинах можно говорить долго.

Мы специально не затрагивали использование пропорции в музыке или области звуковых представлений. На эту тему написано немало разных трактатов.

Систематически пропорции начали изучать в Древней Греции.

Сегодня нам трудно сказать, откуда первый древнегреческий философ Фалес Милетский (625–547 до Р.Х.) узнал о пропорциональности сторон подобных треугольников.

Главное, что он умел находить какую-либо неизвестную величину по трем известным на основе обычной пропорции.

Так, измерив длину тени, отбрасываемой предметами, Фалес с помощью пропорции нашел высоту египетской пирамиды [49].

Сначала рассматривали лишь пропорции, составленные из натуральных чисел.

Особо магической выглядела пропорция между объемами различных тел, так как всякий раз приводила к неизменному отношению:

$$V_{\text{Пирамида}} : V_{\text{Призма}} = V_{\text{Конус}} : V_{\text{Цилиндр}} = 1 : 3.$$

Здесь было от чего прийти в религиозный экстаз, в который впадали пифагорейцы – стойкие приверженности целочисленного видения-представления мира.

Открытие несоизмеримости диагонали квадрата и его стороны заставило рассматривать такие пропорции как разные объекты.

Древнегреческий математик Евдокс (IV век до РХ) дал определение пропорции, составленной из величин любой природы, что нашло отражение в "Началах" Евклида.

Античные математики превратили пропорции в весьма гибкий аппарат исследования.

Так, в неявной форме идею пропорциональности использовали при решении задач «методом ложного положения». Искомой величине присваивали произвольное значение. Вычисляли, какое значение должна при этом иметь одна из данных величин, и сравнивали с условием задачи. Отношение величин давало коэффициент, на который надо умножить выбранное значение, чтобы получить правильный ответ.

С помощью пропорции решали задачи, которые в наши дни решают с применением уравнений, а место алгебраических преобразований занял переход от одной пропорции к другой. Например, было известно, что если справедлива пропорция $a/b = c/d$, то справедливы следующие производные этой пропорции:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}, \quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a},$$
$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}, \quad \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c},$$
$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \quad (\text{при } a>b),$$
$$\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}, \quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

и многие другие эквивалентные формы.

Роль теории пропорций заметно уменьшилась после того, как было осознано, что отношение величин является числом (возможно, иррациональным), а потому пропорция – это просто равенство чисел.

Такой подход позволил применять уравнения вместо пропорции, а вместо преобразования пропорций – алгебраические преобразования.

Математический аппарат существенно упростился и одновременно развился.

Тем не менее, идеи пропорциональности остались. По-прежнему свежи.

Они служат ярчайшим примером мыслительных способностей человеческого гения, давшего основу развитию и получению новых знаний в разных областях научного поиска практического созидания.

Роль наших замечательных предков в этом процессе чрезвычайно высока, непререкаема и неподвластна времени.

Литература:

1. Начала Евклида. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.
2. Ван дер Варден. Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции: Пер. с гол. – М.: Физматгиз, 1959. – 456 с.
3. Депман И.Я. История арифметики: 2-изд., испр. – М.: Просвещение, 1965. – 416 с.
4. История математики с древнейших времен до начала 19 столетия. В 3-х томах. Т. 1 / Под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – 352 с.
5. Мессель Э. Пропорции в Античности и в Средние века. – М.: Издательство Всесоюзной Академии архитектуры, 1936. – 258 с.
6. Шевелев И.Ш. Принцип пропорции: О формообразовании в природе, мерной трости древнего зодчего, архитектурном образе, двойном квадрате и взаимопроникающих подобиях. – М.: Стройиздат, 1986. – 200 с.
7. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: Пер. с англ. – В 2-х томах. Т. 2. Геометрия. – М.: Наука, 1987. – 416 с.
8. Начала Евклида. Книги VII–X: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1949. – 512 с.
9. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике: для инженеров и учащихся втузов. – 9-е изд., стереот. – М.: Физматлит, 1962. – 608 с.
10. Лосев А.Ф. История античной эстетики. Т. 1. Ранняя классика. – М.: Фолио; АСТ, 2000. – 624 с. – URL: http://psylib.org.ua/books/lose001/index.htm.
11. Лосев А.Ф. История античной эстетики / Т. 8. Итоги тысячелетнего развития. Книга 2. – М.: Фолио; АСТ, 2000. – 688 с. – URL: http://psylib.org.ua/books/lose008/index.htm.
12. Щетников А.И. Алгоритм разворачивания всех числовых отношений из отношения равенства и идеальные числа Платона // ΣΧΟΛΗ. Философское антиковедение и классическая традиция. – 2008. – Т. 2, вып. 1. – С. 55-74.
13. Heath T.L. (1921) A History of Greek Mathematics. 2 vols. – Oxford; repr. New York, 1981.
14. Ньютон И. Всеобщая арифметика. – М.: АН СССР, 1948. – 440 с.
15. Колмогоров А.Н. Математика и механика // Избранные труды. – М.: Наука, 1985. – Т. 1. – 470 с.
16. Орлов А.И. Прикладная статистика / Раздел 5.3. – М.: Экзамен, 2006. – 671 с.
17. Василенко С.Л. Математические пропорции взаимодействия целого и его частей // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15248, 23.04.2009. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322040.htm.
18. Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G. Inequalities: 2nd ed. – Cambridge University Press, 1988. – 340 p.
19. Logarithmic mean. – URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_mean.
20. Stolarsky K.B. Generalizations of the Logarithmic Mean // *Mathematics Magazine*. – 1975, Vol. 48, No. 2, 87-92.
21. Справочник по химии: 2-е изд. Т. 5. – М.: Химия, 1988. – 974 с.
22. Eves H. A Survey of Geometry, rev. ed. – Boston, MA: Allyn & Bacon, p. 7, 1965.
23. Carlson B.C. Algorithms involving arithmetic and geometric means // Amer. Math. Monthly. – 1971, **78,** 496–505.
24. Hardy G.H. Divergent Series. Providence: American Mathematical Society, 1992.

25. Lehmer mean. – URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Lehmer_mean.

26. Грешилов А.А., Стакун В. А., Стакун А. А. Математические методы построения прогнозов. – М.: Радио и связь, 1997. – 112 с.

27. Василенко С.Л., Никитин А.В. От золотого отношения к равновесию, синтезу и созиданию // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 17.01.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=93&sm=2 / URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162094.htm.

28. Mario Livio. The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number. – New York: Broadway Books, 2002. – 294 p. / Марио Ливио. Ф – число Бога. Золотое сечение – формула мироздания / Невоспетый герой Возрождения: Пер. с англ. – М.: АСТ, Прайм, 2015. – 425 с. – URL: www.e-reading.club.

29. Василенко С.Л. Золотое отношение как основа синтеза и созидания // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 19.11.2014. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/14289.html.

30. Василенко С.Л. Метаморфозы представлений: от деления в крайнем и среднем отношении – до золотой пропорции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22463, 01.09.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163040.htm.

31. Кеплер И. О шестиугольных снежинках: Пер. с лат. – М.: Наука, 1982. – 194 с. – URL: http://ilib.mccme.ru/djvu/klassik/kepler-snow.htm.

32. Бачурин В.А. Задачи по элементарной математике и началам математического анализа. – М.: Физматлит, 2005. – 712 с.

33. Закон "золотого сечения" в шрифтовой композиции URL: http://nsportal.ru/vuz/pedagogicheskie-nauki/library/2012/01/19/zakon-zolotogo-secheniya-v-shriftovoy-kompozitsii.

34. Щетников А.И. Лука Пачоли и его трактат "О божественной пропорции" // Математ. образование, 2007. – № 1(41). – С. 33–44. – URL: nsu.ru/classics/pythagoras/Pacioli.pdf.

35. Василенко С.Л., Никитин А.В. Модельные структуры пропорционального роста. Часть 1. Синтез // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.09.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=107&sm=2 / Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 22.09.2013. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13091.html.

36. Василенко С.Л. "Два сокровища геометрии" как основа структурирования природных объектов // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 28.11.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?sm=2&id=110 / Научно-техн. б-ка SciTecLibrary. – 10.01.2014. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13255.html.

37. Василенко С.Л. Золотоносная атрофия // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.22282, 14.07.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162993.htm.

38. Василенко С.Л. Дуально-биполярная модель в проекциях теоремы Пифагора / Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 15.05.2014. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13797.html / Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 27.05.2014. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=114&sm=2.

39. Бакунинский А. Математика гармонии: позолоченные сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16939, 05.11.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322020.htm.

40. Василенко С.Л. Главная тайна золотой пропорции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17178, 04.01.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322109.htm.

41. Ghetaldi M. De resolution et compositione mathematica, libri quinque. Opus posthumum, Rome, 1630.

42. Белянин В.С., Василенко С.Л. Золотые крупицы математики // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16935, 04.11.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322019.htm.

43. Белянин В.С. Таинство чисел золотой пропорции. 2. Удивительная числовая последовательность // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 2011. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=21&sm=2.

44. Василенко С.Л. Структурирование целого и его частей // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17044, 01.12.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322058.htm.

45. Domenico A. The golden ratio – the right triangle – and the arithmetic, geometric, and harmonic means // Mathematical Gazette 89, July 2005, 261.

46. Mitchell D.W. // Feedback on 89.41, vol. 90, March 2006, 153–154.

47. Роу С. Геометрические упражнения с куском бумаги: Пер. с англ. – 2-е изд. – Одесса: Госиздат Украины, 1923. – 170 с. – URL: mathesis.ru/book/rou2.

48. Марио Ливио. Был ли Бог математиком? Галопом по божественной Вселенной с калькулятором, штангенциркулем и таблицами Брадиса: Пер. с англ. – М.: АСТ, 2016. – 384 с.

49. Акимов О.Е. Конструктивная математика. Гл.7. Математика дробей и пропорции. – URL: http://sceptic-ratio.narod.ru/ma/km7.htm.

Авторские страницы:

http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3

http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm

http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html