РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ТРАНСПОРТА
ОБЩЕРОССИЙСКАЯ ОБЩЕСТВЕННАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ

А.В. Кочетков П.В. Федотов

Топологическая механика

Монография

Москва 2024

УДК 533
ББК 22.31
К 756

Рецензенты: Балакина Екатерина Викторовна – д.т.н., профессор, Волгоградский государственный технический университет.

Денисов Александр Сергеевич – д.т.н., профессор, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.

Кочетков, Андрей Викторович
Федотов, Петр Викторович
К 756 Топологическая механика. Монография – М.: Мир науки, 2024. – Сетевое издание. Режим доступа: https://izd-mn.com/PDF/27MNNPM24.pdf – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-907891-01-2
DOI: 10.15862/27MNNPM24

Авторами проводится исследование актиоматики поворота, основываясь не только на источники по механике и физике, но и с учетом современных представлений о моделях развития науки, научных направлений и физических теорий.

В качестве решения проблемы вводятся понятия неэвклидовых систем координат и векторов в виде разделов топологической механики.

Приводятся примеры использования криволинейных векторов (кортов и ортов) в обобщенных технологических координатах роботов для силовых операций гибки с растяжением и раскатки роликом длинномерных сложнопрофильных изделий авиастроения.

Книга представляет интерес для широкого круга специалистов, занимающихся аксиоматикой, историей и философией точных наук.

ISBN 978-5-907891-01-2

© Кочетков Андрей Викторович
© Федотов Петр Викторович
© ООО Издательство «Мир науки», 2024

Оглавление

Предисловие 6
От авторов 8
Глава 1. Поворотные силы – особые силы 12
1.1. Постановка задачи 12
1.2. Специфические силы вращения 19
1.3. А как же Галилей? 22
Глава 2. Классическая механика 29
2.1. И. Ньютон и классическая физика (историческая справка) 29
2.2. Первый закон Ньютона и закон инерции Галилея 31
2.3. Третий закон Ньютона 32
2.4. Силы инерции в абсолютном, переносном и относительном движении 34
2.5. Движение гироскопического тела 37
2.6. Два подхода к теориям в науке 38
2.7. Геометрический вывод формулы ускорения Кориолиса 39
2.8. Основное уравнение механики 42
2.9. Решение общего уравнения динамики 43
2.10. Частные случаи решения 47
2.11. Обсуждение 49
2.12. Выводы 50
Глава 3. Механика Ньютона, Лагранжа и Гамильтона 52
3.1. Введение 52
3.2. Ньютоновская механика 53
3.3. Лагранжева механика 54
3.4. Гамильтонова механика 56
3.5. Решение проблемы необратимости 57
3.6. Силы инерции 62
3.7. Об истинном и видимом движении 64
3.8. Физика и Математика. Две точки зрения 65
3.9. Ускорение Кориолиса 70
3.10. Вычисление дополнительных членов 72
3.11. Работа поворотных сил инерции 74
3.11. Выводы 76
Глава 4. Унифицированное мнемоническое правило рук 77
Глава 5. Приведенный коэффициент верчения. Постановка фундаментальной проблемы 83

Глава 6. Применение математики в физике 91
6.1. Матрицы 91
6.2. Векторы 91
6.3. Скалярное произведение 93
6.4. Умножение матриц 95
6.5. Умножение тензоров 95
6.6. Тензоры в римановых пространствах 97
6.7. Параллельные кривые? 97
6.8. Выводы 100
Глава 7. Топологическая механика 101
7.1. Введение 101
7.2. Состояние проблемы решения задачи сферического маятника 103
7.3. Сведение к одномерной задаче 106
7.4. Сферическая механика 109
7.5. Полярная система координат на сфере 111
7.6. Что такое вектор? 112
7.7. Понятие топологического вектора 113
7.8. Произведение т-векторов 113
7.9. Дифференцирование т-векторов 114
7.10. Т-механика 115
7.11. Переход задачи движений сферического маятника к одномерной 118
7.12. Что такое принципы наследования и как их эффективно использовать 120
7.13. О решениях математических задач в физике и в строительной механике 122
7.14. Выводы 128
Глава 8. Применение криволинейных векторов в прикладных задачах машиностроения 130
8.1. Особенности заготовительных операций гибки с растяжением в авиастроении 130
8.2. Новые задачи совершенствования технологических роботов для силовых операций гибки с растяжением 139
8.3. Формирование координатной сетки и структуры комбинированного программирования технологических роботов для силовых операций 146
8.4. Объемное компьютерное моделирование конструкций технологических роботов для силовых операций гибки с растяжением 151
8.5. Особенности кинематического замыкания технологического робота для силовых операций гибки с растяжением 161
Глава 9. Прикладные задачи применения топологических векторов 172
9.1. Анализ возможностей применения рядов Фурье в дорожной отрасли 172
9.2. Математическое моделирование обобщенных координат распределения вяжущего и щебня при устройстве шероховатой поверхностной обработки 175

9.3. Измерения векторных и тензорных величин 179
9.4. Ударные стенды 188
9.5. Малогабаритные упрощенные стенды для исследовательских испытаний 189
9.6. Малая центрифуга 190
9.7. Роторный стенд, работающий на выбеге 190
9.8. Маятниковый стенд 191
9.9. Малогабаритный ударный стенд для создания ударных ускорений малой длительности 192
9.10. Выводы 195
9.11. Постановка задачи «активная прецессия» 196
Список литературы 198

Предисловие

В монографии объектом обсуждения является методология научного анализа ряда разделов физики, в первую очередь классической механики, но не в рамках сложившейся учебной дисциплины "теоретическая механика". Авторы преимущественно выражают и аргументируют собственное мнение по поводу понимания законов механики.

В наше время трудно найти науки, в которых не использовались бы активно математические методы, поэтому зона охвата научной проблематики предельно широка. Нужно учитывать, что традиции в науках сложились в различное время в результате стараний часто вполне определенных выдающихся ученых или узких коллективов со своими пристрастиями. Получилось так, что эти пристрастия оказались «законсервированными» на многие десятилетия, а достижения в смежных областях основываются на других концепциях.

В былые годы внушалось, что все накопленные противоречия в разных разделах разных наук можно устранить на основе единственно правильного использования гиперобобщенного философского метода материалистической диалектики. Эта идея давно полностью дискредитирована. В настоящее время, как представляется, никто не верит во всемогущую силу каких-то единых, универсальных методологических подходов и концепций. При этом выход заключается в гибкости при выборе подходов на основе глубокого понимания сути задач. Рецензируемая монография относится к числу сочинений, в которых совокупность рассматриваемых задач разнообразна и не покрывает все поле современной науки, а освещает отдельные фрагменты. При этом нет и не может быть претензий на всеохватывающую общность.

Авторы монографии основное внимание обращают на методологию изложения основных положений в разных разделах физики, выбор иллюстрирующих примеров, обоснование математических моделей, решение и трактовку результатов. Из этого следует вывод, что монография имеет по преимуществу методологический характер и ориентирована на использовании в преподавании.

Приходится согласиться с тем, что при преподавании в вузах отношения между математикой и физическим смыслом далеки от гармоничных. Значительное место и время в лекциях уделяется выкладкам, формально-математическим выкладкам (в духе многократного повторения заклинания «подставим — получим»), в то время, как содержательная интерпретация занимает довольно скромное место.

При обобщенной формулировке общих приложений значительное внимание уделяется достаточно простым иллюстрирующим примерам.

Связь с преподаванием в высшей школе очевидна. Профессионалам хорошо известно, что вузовская механика консервативна, и ее реальное содержание и, в особенности, иллюстрирующие примеры относятся преимущественно к первой половине XX века, к числу новшеств не самого последнего времени относится внедрение аппарата теории матриц, что, однако, приводит лишь к упрощению записей математических соотношений и дифференциальных уравнений, но содействует дальнейшему отрыву от реальности, студентам не рассказывается о простейших задачах, которые нужно глубоко понимать, а потом по индукции переходить к более сложным.

Нужно прояснить соотношение между классической механикой Ньютона и аналитической (Лагранжа). В этом плане интересны соображения о том, что аксиоматика Ньютона, Лагранжа и Гамильтона эмпиричны по сути. В отношении сил инерции, несмотря на подробный разбор этой проблематики в монографиях А.Ю. Ишлинского и И.Е. Иродова, нужно навести порядок.

Уровни сложности математических моделей различных объектов и процессов в монографии существенно различаются: иногда они глобальны, иногда имеют характер частных математических примеров (даже просто числовых).

В природе существуют два вида движения, прямолинейное и вращательное. Любое криволинейное движение можно разложить на эти два движения. При этом надо учитывать, что к вращательному движению относятся и поворотные движения.

Главное различие между вращательным и поворотным движениями только в углах поворота. При вращательном движении исследуемая материальная точка или тело совершает постоянные повороты на 360^0 вокруг центра вращения, при поворотном движении та же точка или тело совершает поворот меньше 360^0. Общим для поворотного и вращательного движения является то, что и для поворота, и для вращения можно выделить центр поворота или вращения и то, что и поворот, и вращение осуществляется по дуге окружности. Но имеются и существенные отличия. Траектория вращения – это окружность, по которой материальная точка или тело проходит многократно, траектория поворота – это кривая, по которой материальное тело или точка проходит один раз.

Но принципиальные отличия вращательного (поворотного) движения от прямолинейного не в этом. А в том, что силы, вызывающие вращение (повороты), отличаются от сил, вызывающих прямолинейное движение. Причем разница не в природе сил; силы, как раз одни и те же, а в результатах действия сил на материальную точку или тело. Первое отличие, которое сразу бросается в глаза, это то, что при действии сил на материальную точку или тело в процессе сохранения прямолинейного движения, материальная точка или тело получает реальное ускорение, т.е. у него реально изменяется величина количества движения (импульса). А в результате поворотного или вращательного движения, изменения количества движения не происходит, т.е. импульс остается неизменным по величине, меняется только направление его вектора.

Тем не менее, в современной научной и учебной литературе принято любое изменение импульса называть ускорением. Таким образом, ускорение, реализуемое как изменение скорости по величине, инстинктивно (на уровне чувств) воспринимается как ускорение, называется ускорением. Так и изменение направления скорости, которое не меняет величину скорости, также называется ускорением. Такое смешение понятий вызывает некоторый когнитивный диссонанс в начале обучения, но, в последствии, ученик привыкает к принятым названиям и воспринимает как должное, что под термином «ускорение» понимается два совершенно разных понятия.

Но, т.к. под термином «ускорение» понимается два принципиально разных процесса, то естественно появляется необходимость изобрести два дополнительных термина, чтобы различать одно ускорение от другого. Так и появились термины «тангенциальное ускорение» и «нормальное ускорение». Первый термин описывает, ускорение в смысле изменения величины скорости, в результате действия сил вдоль вектора скорости. А второй термин описывает изменение направления скорости, под действием сил перпендикулярных вектору скорости, причем величина скорости при этом не изменяется.

От авторов

Данная монография затрагивает вопросы преподавания естественных наук, т.к. именно от того, как преподают естественные науки в средней и высшей школе в первую очередь зависит состояние этих самых естественных наук. Причем, методики преподавания влияют на развитие науки и применение в технике новейших научных достижений намного больше, чем любое финансирование на развитие науки и технического прогресса. Потому, что если науку не понимают большинство инженеров, то никакое финансирование не заставит их внедрять достижения этих самых наук.

Но, эта книга не по педагогике. Она не о том: КАК надо преподавать? Эта книга о том: ЧТО надо преподавать.

Видный русский математик М. В. Остроградский уделял много внимания проблемам преподавания (это не очень широко известно, тем не менее, это так) совместно с А. Блумом написал брошюру «Размышления о преподавании» [106] в этой брошюре авторы осудили методы преподавания в современной им школе.

«Обучение ведется слишком сухо, абстрактно, оторвано от потребностей жизни, без учета наклонностей и интересов детей… Кто из нас не видел, что из 50 соучеников, по крайней мере, 40 отвращены и обескуражены навсегда абстрактными идеями, которые нам вначале преподносили, прежде чем сделать их понятными с помощью примеров, взятых из практической жизни. Действительно, на уроках арифметики, алгебры, геометрии ничто не свидетельствовало о необходимости их изучения для практической жизни. Ничего не было рассказано об истории наук. Глубокие теории, сухие, непонятные определения были изложены, повторены и, осмелимся сказать, пережеваны, не давая никакого другого результата, чем образование небольшого количества учеников. Кажется, что жрецы древнего Египта еще руководят тайнами наук» [106].

Остроградский призывал к внесению в программу среднего образования элементов высшей математики [106], великий математик не знал, что элементы высшей математики в программу среднего образования будут внесены, но стойкое отвращение большинства обучающихся к изучению математики и физики, более чем через полтора века, останется неизменным.

В некоторой степени этот парадокс разъясняет другой великий физик и математик Анри Пуанкаре, который также уделял много внимания методологии преподавания, понимая важность обучения для науки.

«Что же тогда происходит? Вначале, они (ученики, прим. Авт.) еще схватывают те очевидные вещи, которые представляются их взору; но, так как последние связаны чрезвычайно тонкой нитью с предшествующими и последующими, то они не оставляют никакого следа в их мозгу; они тотчас забываются. Освещенные на одно мгновение, они сейчас же исчезают в сумраке вечной ночи. А когда люди следят за дальнейшим развитием доказательства, для них исчезает и прежняя эфемерная ясность, так как теоремы опираются одна на другую, а теоремы, которые им нужны, уже забыты. Таким образом, эти люди становятся не способными понимать математику.

Не всегда здесь виной преподаватель; зачастую ум людей, нуждающийся в руководящей нити, слишком ленив для поисков ее. Но, чтобы помочь непонимающим, мы должны сначала хорошо узнать то, что их останавливает. [106]

«В построении математической науки и ее преподавании различаются две противоположные тенденции – аналитическая и интуитивная. По мере развития науки первая стремилась выйти вперед. Обе, однако, играют необходимую роль. В преподавании необходимо обратится к интуиции, чтобы развить некоторые способности ума, полезные для ученого и особенно для инженера. В самой науке интуиция остается, за исключением нескольких привилегированных умов, главным инструментом изобретения, в то время как

анализ все более стремиться стать единственным законным инструментом доказательства» [106].

С того времени как были написаны эти пророческие слова, прошло много времени. И сейчас уже можно посмотреть результаты этого пути развития. В науке все меньше остается места для интуиции и размышления, а все больше внимания уделяется аналитическим методам (читай математическим) исследования.

Все больше значение в науке приобретает знание математики, и все меньше места остается другим наукам. Иногда в шутку, иногда всерьез используется выражение: «Каждая наука настолько является наукой, насколько в ней математики».

Но, математика – это палка о двух концах. Существуют и другие цитаты, например, «Математика – это самый совершенный способ водить самого себя за нос». Эти слова принадлежат автору специальной и общей теории относительности А. Эйнштейну. Эти теории в современной физике невозможны без сложного математического аппарата. Но, тем не менее, эти слова сказаны и явно, что Эйнштейн знал, что он говорит.

Следовательно, данная работа посвящена проблемам взаимоотношениям математики и физики и, несмотря на то, что в книге много математических формул и определений основное для авторов, все-таки физика, хотя современную физику невозможно представить без математики.

Одной из главных задач преподавания физики следует считать формирование представлений о единой картине мира, основанной на достижениях теоретической и экспериментальной физики. Между тем именно эти вопросы не находят пока должного отражения в существующих учебниках. И дело здесь не только, и не столько в нежелании авторов современных учебников, сколько в том, что современная физика, пока еще не предоставляет подобной возможности.

Проблема, в первую очередь в том, что современная физика представляет собой конгломерат по крайней мере трех течений. Это классическая физика, квантовая физика и теория относительности. Каждое из этих течений предъявляет к читателю свои особые требования не только в области математической подготовки, но что самое главное особого, отличного от других философского взгляда на весь физический мир.

Так, классическая физика, основанная на философии материализма, предполагает объективное существование мира, в пространстве и во времени независимо от субъективизма наблюдателя. Ньютон учил, есть «абсолютное, истинное и математическое время», текущее однообразно, «без связи к каким–либо внешним предметом». Точно также, Ньютон говорил об «абсолютном пространстве». Он рассматривал его как некую емкость, которая вмещает весь мир, и которая «без связи с каким-либо внешним предметом постоянно остается одинаковой и неподвижной». Причем пространство и время объективно не зависят друг от друга. Строгая детерминированность, причинно – следственные связи, независимо от наблюдателя и т. д. Другими словами, объективная реальность не зависит от того, наблюдает ли за ней наблюдатель или нет, и тем более, от того, из какой системы отсчета производятся наблюдения.

С другой стороны, теория относительности основана на философии позитивного релятивизма. Релятивизм (лат. relativus – относительный) - утверждает, что все события в мире относительны, условны и субъективны. А в физике релятивизм утверждает, что и результаты наблюдения о происходящих событиях зависят от системы отсчета, из которой эти события наблюдаются. Философия позитивизма, – отрицая ценность теоретических исследований, требует, чтобы теории строились только на наблюдаемых в опыте величинах, истинную ценность имеют только эмпирические данные. Отсюда признание, в теории относительности, самым важным, понятие наблюдателя, который наблюдает событие из выделенной системы отсчета, и объективизация субъективных наблюдений. Чтобы сохранить инвариантность законов природы взаимно увязываются пространство и время в единый 4-мерный континуум. При этом, признается как факт, предельность скорости света для всех скоростей и равенство

скорости света во всех инерциальных системах отсчета, несмотря на то, что никакими экспериментами ни то, ни другое не подтверждено.

Квантовая теория, с другой стороны, вводит понятие наблюдателя. Согласно этой теории объективная реальность микромира, зависит, от возмущения, которые вносит наблюдатель своим наблюдением (проводимым экспериментом), в результате объективная реальность становится непредсказуемой, так как экспериментатор видит только результаты возмущений в результате исследования, и не может сказать, что происходит без участия экспериментатора. Так как эксперимент вносит возмущение, то, во-первых, знания о природе становятся субъективными, и относительными (каждый экспериментатор может придумать любую картину мира, каким он мог бы быть, если бы экспериментатор не вмешивался в эту картину), а значит релятивистским. Во-вторых, так как объективная реальность не поддается объективному описанию, то нет смысла пытаться описывать мир в теоретических терминах, не поддающихся прямой экспериментальной проверке, отсюда позитивизм.

Несмотря на то, что некоторые авторы современных учебников пытаются совместить эти три учения, этого невозможно сделать без потерь. Материализм находится в непримиримом противоречии с идеалистическими течениями в философии, позитивизмом и релятивизмом, поэтому для создания стройного здания современной физики необходимо отказаться либо от материализма, либо от идеализма, третьего пути нет.

Для того, чтобы представить какое направление в современной физике побеждает, приведем определение неопозитивизма [90]. «Отвергнув психологизм, в отличии от махизма, в котором психология творчества занимала крайне ведущее место, переходящее в субъективизм, представители этого направления пошли по линии сближения «логики науки» с математикой, по линии формализации гносеологических проблем».

Остается только поражаться, как это из учебников совсем не убрали все рисунки и графики, и не оставили только математические формулы.

И здесь, мы плавно подошли ко второму недостатку современной физики, ее математизация. С одной стороны, без математики не существует точных наук. Но, с другой стороны, уровень математики, необходимой для понимания (или хотя бы усвоения, Р. Фейнман писал «даже большие ученые не понимают настолько, насколько им хотелось бы») общей теории относительности и квантовой теории, настолько высок, что эти теории преподаются только на физико-математических специальностях университетов, отрезая тем самым от новейших достижений науки инженерных и других специальностей ВУЗов.

Известно высказывание одного крупного ученого физика XX века «теория хороша, но достаточно ли она сумасшедшая, чтобы стать верной», теория, предлагаемая авторами данной книги, с точки зрения современной физики абсолютно сумасшедшая – авторы предлагают вернуться к классической теории в атомной физике, теории относительности и теории гравитации. При этом, несмотря на устоявшееся мнение о науке, состоящее в том, что, чем новее теория, тем она сложнее и непонятнее, авторы глубоко уверены, что если теория непонятна непрофессионалам, то она либо не верная, либо не доработанная. Поэтому, одна из задач, которую пытаются решить авторы – это путем упрощения математических выводов в физике максимально расширить количество людей, понимающих достижения науки.

Также необходимо отметить наличие в книге исторического материала, и это тоже убеждение авторов, что любой современный тупик – это результат ошибки, совершенной в истории. Но историю творят люди, а не бездушные роботы, как можно представить из современных учебников, где ученые упоминаются только по имени как авторы какого-либо закона, теоремы постулата и т. д. Но Ньютон не мог опубликовать теорию относительности Эйнштейна, не потому, что было разное время, а потому, что это два совершенно психологически противоположных человека.

Ньютон как создатель анализа бесконечно малых стал известен миру только через тридцать с лишним лет. Об открытии всемирного тяготения ученый мир узнал лишь через 20 лет. Согласно исследованиям биографов, Ньютон открыл закон тяготения в 1666-1668 г., но из-за расхождения теоретических расчетов, соответствия силы земного тяготения на

поверхности Земли и на расстоянии лунной орбиты, с астрономическими данными движения Луны, не опубликовал свое открытие. И только после опубликования новых уточненных геодезических измерений Пикара, во Франции, и астрономических измерений, Кассини и Ремера, расстояния до Луны опубликовал его в «Математических началах...» 1687 г.

Эйнштейн в 1905 г. опубликовал теорию относительности, основанную на постулате абсолютности скорости света. Постулат, который не доказан экспериментально до сих пор, даже через век после публикации.

Как говорится, почувствуйте разницу.

Поэтому, отказ от психологизма (неопозитивизм) так же плох, как и возвеличивание психологического фактора в махизме.

Другой недостаток современного преподавания физики - это статичность, устоявшихся догм, в настоящее время от ученика не только не требуется критически мыслить, но наоборот, такой критический настрой тщательно вытравляется, так как современные теории на проверку не выдерживают критики. Совершенно аналогичное состояние физики описывает А. Эйнштейн, каким оно было во времена его юности**:**

«Несмотря на то, что в отдельных областях она (физика) процветала, в принципиальных вещах господствовал догматический застой. В начале (если таковое было) бог создал ньютоновы законы движения вместе с необходимыми массами и силами. Этим все и исчерпывается**;** остальное должно получаться дедуктивным путем, в результате разработки надлежащих математических методов». Слова актуальные и в наше время.

По крайней мере, отказ «математической» сухости и догматической статичности описания физики, позволит, повысить интерес к изучению предмета, что также не маловажно, и позволит преподавать физику как живой и вечно молодой предмет, а не застывшую мумию, состоящую из набора устоявшихся истин, которые не обязательно понимать, а только заучивать.

«Ибо человек не машина, и он хиреет, если лишается возможности самоопределения и свободы высказывать собственные суждения». А. Эйнштейн

Работа является изысканиями авторов в поиске противоречий в недостаточно методически (или теоретически?) отработанных методах представления материала и, в принципе, не претендует на достаточную доказательность.

Понимая, что данная книга является первой попыткой изложения проблемы классической теории в отдельных разделах современной физики, авторы будут благодарны всем читателям за критические и конструктивные замечания, и советы по ее улучшению.

Авторы выражают искреннюю признательность академику РАН С.С. Григоряну за внимательное и доброжелательное рецензирование и квалифицированные советы при публикации цикла статей в журнале «Пространство и время».

Глава 1. Поворотные силы – особые силы

1.1. Постановка задачи

Как известно, согласно принципу относительности Галилея и первому закону Ньютона, если на тело не действуют силы или все силы, действующие на тело, скомпенсированы, то тело сохраняет инерциальное движение, равномерное и прямолинейное. Если силы не скомпенсированы, то тело совершает ускоренное движение, под действием не скомпенсированной силы.

Более того, под действием силы, тело не просто ускоряется, но действующая сила совершает работу, и на совершение работы затрачивается энергия. Формула, по которой рассчитывается работа, совершенная силой, записывается в виде

$$\boldsymbol{A = F*s} \quad . \qquad (1.1)$$

Начнем с нескольких очень простых вопросов, ответы на которые должен знать каждый школьник.

Вопрос первый. Каждое ли инерциальное движение является равномерным и прямолинейным?

Вопрос второй. Каждая ли некомпенсированная сила, действующая на тело, совершает работу и при этом затрачивается энергия?

Третий вопрос. Возможно ли инерциальное движение под действием силы?

Если задавать эти вопросы многим людям, то большинство ответов на эти вопросы будут утвердительными. И это будут примерно такие ответы:

Да. Движение по инерции может быть только прямолинейным и равномерным.

Да. Любая сила, не скомпенсированная другими силами, производит работу и при этом затрачивается энергия.

Нет. Движение по инерции может быть только при отсутствии действия любых сил.

И все три ответа неправильные.

А правильные ответы будут звучать так:

1. Нет. Движение по инерции может быть прямолинейным и равномерным, только при определенных условиях, в остальных случаях, движение по инерции может быть равномерным, но не прямолинейным.

2. Нет. Некоторые силы работу не производят, и в своих действиях на тело, энергии не затрачивают.

3. Да. Силы, которые не совершают работу, позволяют телу двигаться по инерции.

Кажется, что такие утверждения противоречат ньютоновской механике. На самом деле это не так. В этом нет никакого противоречия законам Ньютона. Все дело в том, что ньютоновская механика описывает не всю механику, а только ее часть. Эту часть можно назвать механикой прямолинейного движения. Но кроме этой, несомненно, важной части, есть еще и механика вращательного движения. И законы вращательного движения не противоречат законам Ньютона и Галилея, а дополняют их, и в необходимых случаях, поправляют законы Ньютона и Галилея.

Начнем со второго вопроса. Рассмотрим, какие же силы не совершают работу? Ответ на этот вопрос легко получить из уравнения (1.1). Но уравнение (1) записано в векторной форме, перепишем его в скалярном виде, тогда уравнение перепишется в виде:

$$A = F*s*\cos(F \wedge s) \quad . \qquad (1.2)$$

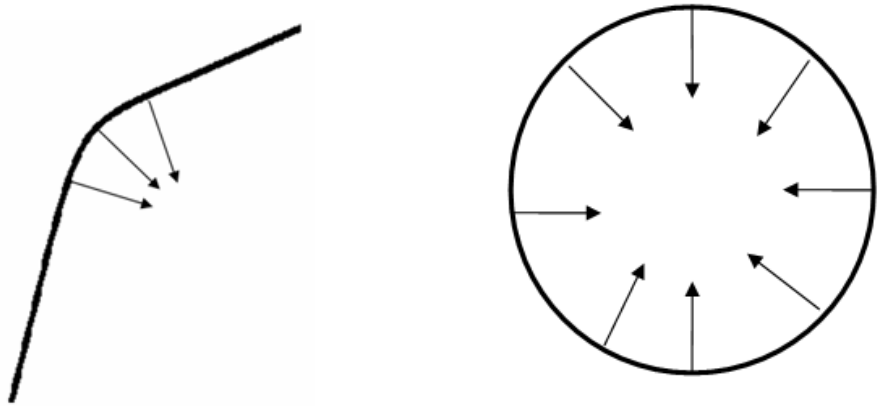
Здесь $F \wedge s$ – угол между векторами F и s.

Известно, что $cos(90^0) = 0$, т.е. если вектора F и s перпендикулярны, тогда

$$A = F*s*cos(90^0) = F*s*0 = 0 \quad . \qquad (1.3)$$

Т.е., если действующая сила перпендикулярна траектории движения, то работы такая сила не совершает, соответственно энергии при действии такой силы не затрачивается.

Эти силы хорошо известны, это так называемые поворотные или центростремительные силы. Разница между ними небольшая (см. рис. 1.1).



а) б)

Рис. 1.1. Поворотные (а) и центростремительные силы (б) силы
(стрелками указаны вектора действующих сил)

На рис. 1.1 видны различия, поворотные силы действуют кратковременно, на отдельном участке траектории, в результате траектория искривляется, поворачивается на некоторый угол, отсюда и название. А вращательные силы действуют постоянно на всей траектории, в результате траектория превращается в движении по кругу, отсюда и название. Других отличий между поворотными и вращательными силами нет.

Изменение величины скорости движения происходит только при совершении работы над телом. Если же работа над телом не совершается, значит, тело сохраняет величину скорости, даже если на него действует поворотная сила. Другими словами, если вначале тело движется по инерции со скоростью v, то после и во время действия поворотной силы величина скорости остается постоянной, соответственно тело продолжает движение по инерции со скоростью v. Независимо от того изменилось направление движения или нет. Т.о. возможно постоянное движение по инерции, при этом совсем непрямолинейное.

Посмотрим, как Галилей обосновывал свой закон инерции. Он описывал это так: «Никакие механические опыты в закрытой каюте корабля не дают возможности определить, стоит корабль на месте или движется прямолинейно и равномерно». Ключевые слова здесь, в «закрытой» каюте, т.е. определить движется корабль или нет, можно только выйдя на палубу и посмотрев на проплывающие мимо, берега.

Но та же самая ситуация и у космонавтов на МКС. Они точно также свободно парят в невесомости по станции, показывают разные фокусы с парением разных предметов. Можно провести все опыты, которые проводил Галилей (описанные в [31]), по бросанию разных предметов в разные стороны, и на МКС, и мы получим те же самые результаты, которые получал Галилей, а значит, и движение МКС также инерциально. И точно также, не выглядывая в иллюминатор, никак не скажешь, висит МКС неподвижно в космосе или летает по орбите. А орбита, к слову сказать, вовсе не прямолинейная, а очень даже криволинейная.

А это значит, что главным определением инерциальности движения, служит не форма траектории, а существование **реального** ускорения. Т.к., в случае существования **реального**

ускорения включаются силы инерции, появление действия которых не требуют особого изучения. Они сами проявляются.

Но, продолжим дальше. Галилей проводил много опытов, не только на Пизанской башне, но еще и катал шарики по наклонной плоскости. Он писал: «импульс постепенно уменьшается по мере приближения к наименее наклонной линии и совершенно исчезает при достижении горизонтали; здесь тело оказывается индифферентным к движению и покою, не имея само по себе никакой склонности перемещению в какую-либо сторону и не проявляя никакого сопротивления передвижению» [31, с. 324]. Но, здесь имеется одна тонкость.

«Для Галилея инерционное движение круговое.

Основное понятие небесной механики «Диалога» – круговое равномерное движение.

Все дело именно в том, что движение по инерции, о котором говорит Галилей, - это круговое движение. Тело движется горизонтально, не опускаясь и не поднимаясь, с неизменной скоростью. Но горизонтальная линия, по которой оно движется, - это круговая линия» [50].

Галилея «исправляет» Ньютон, в «Математических началах» он пишет прямо: «Определение III

Врожденная сила материи есть присущая ей способность сопротивления, по которой всякое отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено самому себе, удерживает[7] свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения[1]»[97].

Вот так, без всяких сомнений, инерциальное движение – может быть только прямолинейным, и никаким другим.

Попробуем ответить на вопрос: откуда столь принципиальные отличия, в вопросе определения инерциального движения у Галилея и Ньютона? А может быть даже сумеем понять, кто же из них прав?

Ответ на первый вопрос разрешается просто. Галилей рассматривал инерциальное движение как состояние, когда невозможно определить движется система или не движется. Для выяснения этого вопроса, он рассматривает много наблюдений и проведенных опытов. Все его рассуждения приводят его к мысли, что Земля – это инерциальная система отсчета. При этом Галилей является сторонником гелиоцентрической системы Коперника, согласно которой, Земля вертится в суточном движении и летит по круговой орбите[2]. И при этом, совершая минимум два круговых движения, Земля остается инерциальной системой. Отсюда Галилей делает логичный вывод – круговое вращение не является ускоренным движением.

Обязательное существование центробежного ускорения при вращении являлось главным доказательством геоцентрической системы Мира. Так сторонники аристотелевской системы утверждали, что если бы Земля вращалась, то тогда обязательно бы проявлялись центробежные эффекты, которые невозможно было бы не заметить.

Галилей доказывал, что ДА Земля вертится, и НЕТ, центробежные эффекты отсутствуют, а значит, делает вывод Галилей – равномерное вращение является инерциальным движением.

Ньютон поступает проще. Он постулирует первый закон механики, который является следствием второго закона. Согласно второму закону, при действии любой силы на тело, тело движется ускоренно. Отсюда следствие, что без ускорения (инерциально) тело может двигаться только при полном отсутствии действия любых сил. Отсюда и закон инерции Ньютона – тело может двигаться инерциально, только при полном отсутствии действия любых сил. Т.к. при поворотах и вращении тело находится под действием сил, значит такое движение не инерциальное, а ускоренное.

Ньютон писал: «Распознание истинных движений отдельных тел и точное их разграничение от кажущихся весьма трудно, … Однако, это дело не вполне безнадежное. … Основания для суждений можно заимствовать … частью из сил, представляющих причины и проявления истинных движений. Так, если два шара, соединенные нитью на данном друг от

[1] Подчеркнуто нами (Прим. Авт.).
[2] Эллиптические орбиты введены Кеплером позднее (Прим. Авт.).

друга расстоянии, будут обращаться около общего их центра тяжести, то по натяжению нити можно будет узнать стремление шаров к удалению от оси вращения и по нему вычислить угловую его скорость» [97].

Т.о. Ньютон фактически дезавуирует все доводы и доказательства, приводимые Галилеем, против геоцентрической системы Аристотеля. И фактически утверждает, что если бы Земля крутилась, то неизбежно проявлялись бы соответствующие силы, по наличию и величине которых мы могли бы определить угловую скорость вращения Земли. Но, Ньютон нигде и никогда не заявлял, что он спорит с Галилеем. Он всюду повторяет, что побудительной причиной неинерциального (ускоренного) движения являются силы. А инерциальное движение может быть только при полном отсутствии действия сил.

По поводу свойств вращения Ньютон писал следующее, что различия истинного и кажущегося вращения «состоят в силах стремления удалиться от оси вращения, ибо в чисто относительном вращательном движении эти силы равны нулю, а в истинном и абсолютном они больше или меньше, сообразно количеству движения» [97].

В качестве доказательства такого утверждения Ньютон приводит описание опыта по вращению сосуда с водой, который он сам проделывал: «По мере возрастания вращения вода будет постепенно отступать от середины сосуда и возвышаться по краям его, принимая впалую форму поверхности» [97, с. 34]. И далее он пишет: «Этот подъем воды указывает на стремление ее частиц удалится от оси вращения, и по этому стремлению и обнаруживается и измеряется истинное и абсолютное вращательное движение воды» [97].

Более того, из прямой цитаты Ньютона можно сделать вывод, который сам Ньютон **никогда** не говорил. А именно, суточное вращение Земли и её движение по орбите, является мнимым движением, иначе бы существование центробежных сил ясно бы указали, что Земля не неподвижна, а вращается. Любопытно, что именно эти аргументы приводили и последователи Аристотеля, против учения Коперника, в спорах с Галилеем.

Но, такого Ньютон никогда не говорил, так что предъявить Ньютону нечего.

Правда, Ньютон про вращающиеся по орбитам планеты говорит следующее: «Поэтому, в тех системах мира, в которых предполагается, что наши небесные сферы обращаются внутри сферы неподвижных звезд и несут с собою планеты, окажется, что отдельные части этих сфер и планеты, покоящиеся относительно своих сфер, на самом деле движутся; вместе с тем они участвуют в общем движении небесных сфер и, значит, как части вращающегося целого, стремятся отдалиться от оси» [97].

Но многолетние наблюдения за планетами говорят о том, что планеты никак не реализуют стремление разлететься друг от друга. Почему планеты не разлетаются, хотя и вращаются по орбитам, Ньютон не объясняет, но явно держит в уме свой закон всемирного тяготения. Но если на планеты в одну сторону действует центробежная сила, а в другую сторону, сила тяготения Солнца, то для того чтобы планеты удерживались на постоянной орбите, эти силы должны взаимно компенсироваться. А тогда будет исполняться главное условие инерциального движения в трактовке Ньютона, все действующие силы взаимно скомпенсированы.

Вот такая каша творилась в голове Ньютона. С одной стороны, для планет исполнено главное условие инерциального движения, а с другой стороны обращение по орбите, никак нельзя признать инерциальным, т.к. оно вращательное.

Этот парадокс не разрешен до сих пор, в научной и учебной литературе этот вопрос обходится стороной.

Отсюда следует важный вывод, что, во-первых, первый закон Ньютона, о движении тел по инерции при отсутствии действующих сил, не охватывает все случаи инерциального движения, а только случаи прямолинейного движения. И, во-вторых, закон инерции Галилея, должен быть изменен, в части того, что движение является инерциальным, не только в случае прямолинейного движения, как это утверждается сейчас, а так как это предлагал Галилей. Инерциальным, движение СО может быть признано во всех случаях, когда механическими опытами, проводимыми внутри СО невозможно отличить состояние движения от состояния

покоя. Таковым являются не только прямолинейное, но любое криволинейное, в том числе и круговое движение. Как и предполагал Галилей.

Интересно, что главным аргументом противников вращения Земли было то, что если бы Земля крутилась, то неизбежно проявлялись бы центробежные силы[3]. Ньютон полностью повторяет эти рассуждения, утверждая, что на планеты действуют центробежные силы. По поводу действия центробежных сил, действующих на тела на Земле, Ньютон не высказывался, но можно предположить, что Ньютон также был сторонником действия центробежной силы на тела, располагающиеся на поверхности Земли, в следствии суточного вращения Землитакже как он утверждал о действии ц.б.с. на планеты. Но, интересно, как Галилей и Ньютон объясняют тот факт, что ни планеты не сходят с орбит, ни все предметы на Земле не улетают в космос под действием центробежных сил? Ведь они оба были сторонниками гелиоцентрической системы Коперника.

Ньютон на этот вопрос не отвечал никак. Он просто не поднимал этого вопроса, и тщательно обходил его. Всего один раз, высказав мнение, что истинное вращение всегда сопровождается действием центробежных сил, Ньютон больше никогда не возвращался к этому вопросу.

Галилей же, напротив, выдержал многочисленные споры с перипатетиками[4] по поводу действия ц.б.с. от вращения Земли. И всюду он повторял свой главный тезис: движение по кругу является инерциальным, т.к. никакими механическими экспериментами невозможно отличить круговое движение по инерции от покоя. И поэтому считал инерциальным движением не прямолинейное, а именно криволинейное движение. Т.е. Галилей на утверждение, что корабль движется инерциально, якобы потому, что он движется прямолинейно. Возражал, что прямолинейную траекторию, отличить от равномерного вращения по инерции, невозможно.

Надо отметить, что Галилей понимал, что прямолинейность движения корабля лишь кажущаяся, на самом деле, корабль движется по кругу, Земля ведь круглая, а прямолинейной, траектория кажется только потому, что отрезок пути слишком короткий. И именно потому, что движение вместе с Землей Галилей считал инерциальным, значит, если нет побудительных причин изменять инерциальное движение, то не будет никакого изменения движения. А само круговое движение такой побудительной причиной не является, в силу инерциальности. Так рассуждал Галилей.

Налицо некий неразрешимый парадокс. С одной стороны, Ньютон прав со своими экспериментами по различению истинного вращения, с другой стороны и доводы Галилея нельзя сбрасывать со счетов.

Но прежде чем объяснить, как разрешается этот парадокс, подкинем еще одтн пример инерциальной системы.

Это наблюдение за поведением космонавтов и предметов на МКС. Дело в том, что, если бы был прав Ньютон, и при вращении МКС по орбите вокруг Земли и на МКС и на все предметы внутри станции действовали бы силы ц.б.с. И вследствие действия этих сил и космонавты, и все непривязанные предметы прижимались бы к внешней стенке (дальней от Земли) станции. Тем не менее, ничего такого не происходит. И космонавты, и все предметы, которые они запускают в свободный полет, одинаково летают во все стороны. Демонстрируя все рассуждения Галилея о поведении предметов в трюме корабля. Т.е. станция МКС является инерциальной системой. Несмотря на то, что она крутится по орбите.

Отсюда следует важный, но единственный вывод: признаками инерциальности системы должны быть не действие или бездействие сил, согласно формулировке Ньютона, а формулировка Галилея, о невозможности отличить состояние движения от состояния покоя.

[3] Конечно, во времена Галилея такого термина не было, понятие появилось позднее. Но опыт по запусканию камня, раскрученный пращей был известен с глубоких времен (Прим. Авт.).
[4] Сторонниками системы Мира Аристотеля (Прим. Авт.).

Соответственно, законом инерциального движения должен быть признан не первый закон Ньютона, а принцип Галилея, а траектория может быть при этом любой, лишь бы сохранялось состояние инерциальности.

Однако это признание не разрешает парадокс противоречий между Галилеем и Ньютоном. Ведь и Галилей, и Ньютон прекрасно знали, по опыты с вращением, и про поведение воды во вращающемся сосуде и о полетах камня из пращи. И оба знали, что все механические опыты на Земле приводят к осознанию, что Земля вращается, как на карусели. Но вращение на карусели неинерциальное, а вращение Земли – инерциальное. И, исходя, что для каждого важнее, один заявляет, что вращение инерциально, а другой провозглашает, что вращение – неинерциальное.

Помочь в разрешении этого парадокса, могут мысленный эксперимент придуманных Эйнштейном известные под названием «падающий лифт Эйнштейна».

Мысленный эксперимент Эйнштейн описывал так: «Представим себе лифт на башне небоскреба, гораздо более высокого, чем какой-либо действительно построенных. Внезапно канат, поддерживающий лифт, обрывается, и лифт свободно падает по направлению к земле. Во время падения наблюдатели в лифте производят опыты. Один из наблюдателей вынимает платок и часы из своего кармана и выпускает их из рук. Что происходит с этими предметами?» [130].

«Для внутреннего наблюдателя оба предмета остаются точно там же, где они были в тот момент, когда наблюдатель выпустил их из рук. Внутренний наблюдатель может игнорировать поле тяготения, т.к. источник последнего лежит вне его системы координат. Он находит, что никакие силы внутри лифта не действуют на оба тела, и, т.о. они остаются в покое, как если бы они находились в инерциальной системе. Странные вещи происходят в лифте! Если наблюдатель толкает тело в каком-либо направлении, например, вверх или вниз, то оно всегда движется прямолинейно и равномерно, пока не столкнется с потолком или полом лифта. Короче говоря, законы классической механики справедливы для наблюдателя внутри лифта. Все тела ведут себя так, как следовало ожидать по закону инерции» [130].

При этом Эйнштейн рассуждает про внешнего наблюдателя и равенство гравитационной и инертной массы, но мы не будем на этом останавливаться.

Отметим только главное. В явно ускоренной системе соблюдены все условия инерциальной системы. Другими словами, система, на которую действует нескомпенсированная сила, движущаяся с ускорением, тем не менее, все предметы находятся в состоянии невесомости и все механические эксперименты не могут указать, находится система в покое или в состоянии движения.

С точки зрения Ньютона полный нонсенс, действует сила, движется с ускорением, значит, не может быть инерциальной системой по определению.

С точки зрения Галилея, ничего сверхординарного. Ведь для Галилея главное, не как движется или какие силы действуют. Главное, можно отличить движение от покоя или нет.

Т.о., становится ясно, что определение инерциальных систем Галилея является макимально обобщенным, а определение инерциального движения Ньютона – описывает только отдельный частный случай.

Остается только вопрос, а как же тогда быть с опытами, на которые опирался Ньютон, опытом с водой во вращающемся сосуде, опытом по вращению шаров связанных веревкой? А также как быть с остальными многочисленными опытами с пращей, с экспериментами по вращению на карусели и центрифуге и т. д.? И все эти опыты ясно, и главное без особых исследований показывают, что вращение является неинерциальным движением, как это и указывал Ньютон, и как это принято прописывать в современной и учебной и научной литературе?

Чтобы ответить на этот вопрос, перечислим примеры инерциальных систем, которые укладываются в определение Галилея, но противоречит определению Ньютона.

Это опыты Галилея на поверхности Земли, совершающей суточное вращение, состояние невесомости на МКС, состояние невесомости в падающем лифте Эйнштейна. Во

всех этих случаях, согласно точке зрения Ньютона, действуют силы, а значит, перечисленные системы отсчета не могут быть инерциальными. И действие сил должно проявляться в явном виде. Однако этого не происходит.

А ответ на поставленный вопрос простой и явно виден из наблюдений, описанных Эйнштейном внешним наблюдателем. «Для внешнего наблюдателя все предметы внутри двигаются с одинаковым ускорением. Но таково же ускорение и лифта, его стен, пола и потолка» [130]. Заметим, что все тела неподвижные относительно внутреннего наблюдателя, для внешнего наблюдателя движутся с одинаковым ускорением.

Но таково действие гравитации. Оно действует одинаково на все тела, как на саму кабину лифта, так и на все тела внутри кабины. Поэтому внутренний наблюдатель и не замечает фактор действия гравитации, находясь внутри лифта. Но точно также гравитация действует и на все тела находящиеся на поверхности Земли и на все тела, находящиеся внутри МКС. Именно поэтому внутренний наблюдатель и не может засечь действие сил гравитации. Конечно на все тела, и корпус МКС и на все тела внутри МКС действуют центробежные силы, но на те же самые тела действуют центростремительные силы гравитации. Т.о., силы компенсируют друг друга, и все тела внутри МКС находятся в состоянии невесомости. По той же причине никакими механическими опытами нельзя выявить действие центробежных сил.

Совсем другое дело, в экспериментах, выявляющих действие центробежных сил. В опытах с пращей, мысленный эксперимент Ньютона с вращением двух шаров, связанных веревкой, в экспериментах на карусели или центрифуге т.д. Во всех этих экспериментах центростремительная сила передается точечно, в месте крепления. При этом сила передается только на корпус, но никогда не передается на предметы, находящиеся внутри. Например, если помещают испытателя в кабину центрифуги, то при вращении на него действует центробежная сила, а центростремительная сила действует только на кабину, потому испытатель на центрифуге чувствует действие центробежной силы, не скомпенсированной центростремительной силой. Из-за этого испытательная центрифуга испытывает перегрузки, полностью отсутствующие в аналогичной ситуации на МКС.

В монографии [68] авторы исследовали вопрос о причинах разрушения маховиков при быстром вращении. Причина катастрофы в том, что центростремительная сила передается не на все тело маховика, а только на место крепления маховика к оси вращения. Остальные же части маховика оказываются под действием центробежной силы, а компенсируется она только силами молекулярного притяжения со стороны других частей. И когда центробежные силы превышают силы сцепления, то маховик разрывает. Но силы молекулярного сцепления действуют между частями одного тела, но между разными телами. Именно поэтому и так заметны центробежные силы, про которые говорил Ньютон, доказывая, что вращающиеся системы не могут быть инерциальными.

Таким образом, решающим фактором является не сам факт вращения, а факт наличия центростремительных сил, то на какие именно тела и части тел действуют эти силы, а также учитывать другие силы, например, силы сцепления, которые препятствуют центробежным силам. Другими словами, вращающиеся системы могут быть, как инерциальными, так и неинерциальными. Разницу определяют конкретные условия.

Остается рассмотреть вопрос совершения работы различными силами, рассмотренными выше. Можно легко констатировать, что поворотные силы, к которым относятся и центростремительные силы работы не совершают, или другими словами не затрачивают энергию при действии на тела. Этот вывод следует из того, что при любых поворотах не происходит изменения величины скорости, изменяется только направление скорости. А кинетическая энергия зависит только от величины скорости v, но никак не зависит, в каком направлении движется тело.

Совсем другое дело сила гравитации, действующая на падающий лифт Эйнштейна. Падающий лифт ускоряется в абсолютной системе отсчета, соответственно увеличивается и потенциальная и кинетическая энергия лифта. Соответственно изменение энергии означает совершение работы гравитационной силы.

Отметим, что и обращение по орбите и падающий лифт являются инерциальными системами, однако в одном случае производится работа и энергия тела меняется, в другом случае этого не происходит. Отсюда следует вывод, что изменение энергии и совершение работы не является признаком инерциальности системы отсчета. Другими словами, совершение работы или не совершение, не является отличительным признаком инерциальности системы отсчета.

Также в качестве определения инерциальности движения не может являться критерий Ньютона в виде 1-го закона, согласно которому, только полное отсутствие либо полная компенсация всех действующих сил является основным условием инерциальной системы отсчета.

Остается, только критерий Галилея, о том, что критерием инерциальности является только отсутствие различения покоя и движения в механических экспериментах

1.2. Специфические силы вращения

Выше мы рассматривали вопрос инерциальности и неинерциальности вращающихся систем. Но с вращающимися системами связаны не менее интересные вопросы.

Это вопросы, связанные со специфическими силами, возникающими во время вращения. Эта сила Кориолиса и гироскопические силы. Несмотря на то, что исследование сил Кориолиса и гироскопов насчитывает уже 200 лет, тем не менее, остаются вопросы, которые мы намерены обсудить.

Для справки, сообщим, что гироскоп изобретен Иоанном Бонненбергером [96], профессором математики и астрономии в Тюбенгенского университета (Германия). Описание своего изобретения Бонненбергер опубликовал в 1817 г [2]. Но уже в статье 1813 Пуассон, который был профессором математики в Политехнической школе (Париж) упоминает, что во владении школы был действующий образец Машины Бонненбергера[4] [96]. Причем во Францию, уже действующий образец попал во Францию по указу Наполеона I, для наглядного объяснения законов обращения земли вокруг оси.

Исследование кориолисовых сил началось несколько позднее, «Первая работа Кориолиса, содержащая теорему в зародышевой форме, была опубликована в 1832 г. (доклад в Академии наук был сделан 6 июня 1831 г.)» [123].

Но, оказывается, что гироскопические силы на самом деле проявления силы Кориолиса. «Пользуясь понятием о кориолисовом ускорении, можно наиболее полно раскрыть физические причины возникновения гироскопического момента, представление о котором является основой теории гироскопов» [103].

Т.о. рассмотрение сил инерции связанных с вращением резонно начать с рассмотрения сил Кориолиса.

Напомним, что формула силы Кориолиса записывается в форме:

$$F_к = -m\bar{a}_к = -2m\cdot\left[\bar{\omega}\times\bar{v}_r\right] = -2m\cdot|\omega|\cdot|v_r|\cdot\sin(\alpha) \quad , \qquad (1.4)$$

где m – масса, $a_к$ – кориолисово ускорение, ω - угловая скорость переносного движения, $v_к$ – относительная скорость.

Интересно объяснение, почему кориолисова сила и кориолисово ускорение имеют разные знаки, в отличие от второго закона Ньютона, в котором и сила, и ускорение имеют один знак.

«Таким образом, кориолисово ускорение существует только для «неподвижного» (внеземного) наблюдателя, но силу бокового давления рельс обнаруживает как

[4] В то время не было слова «гироскоп», поэтому Бонненбергер называл свое устройство просто «машина», поэтому, в частности во Франции, устройство называлась «машина Бонненбергера» (Прим. Авт.).

«неподвижный», так и движущийся (земной) наблюдатели. Однако движущийся наблюдатель не обнаруживает ускорения, которая сила бокового давления рельс должна сообщать поезду. Движущийся наблюдатель объясняет это тем, что существует кориолисова сила инерции, уравновешивающая действие той силы, которая кориолисово ускорение. Поэтому кориолисова сила инерции и кориолисово ускорение направлено навстречу друг другу» [102].

В приведенной цитате содержится одна неточность, искажающая смысл сказанного. Сказанное верно, только в том случае, если тело имеющее скорость относительно вращающейся системы координат имеет связь ограничивающую перемещение относительно подвижной системы координат. Это может быть рельс для поезда, или трубка (желоб) для шарика. При этом рельс или желоб жестко привязаны к вращающейся системе координат. В этом случае, наблюдатель на земле не замечает никакого смещения вдоль действия силы Кориолиса, зато видит результат действия (работу) силы. В виде повышенного износа правого рельса в Северном полушарии от поезда, движущегося с Севера на Юг, в виде эффекта Бэра, состоящего в том, что реки, текущие с Севера на Юг, подмывают правый берег и т.д. Но из-за жестких связей с вращающейся системой отсчета никакого отклонения с Востока на Запад не наблюдается.

В этом случае становится понятна фраза, «Такое доказательство теоремы Кориолиса довольно наглядно выявляет, почему именно кориолисово ускорение называется поворотным» [26].

В отличие от отечественной литературы в зарубежной принято считать, что сила Кориолиса и кориолисово ускорение направлено в одну сторону, т.е. в уравнении (2.1.) будет стоять знак плюс (см., например, [13], [14], [27], [51] и др.).

В этой интерпретации сила Кориолиса и кориолисово ускорение направлены в одну сторону, т.е. $\vec{a}_K = \frac{\vec{F}_K}{m}$. В русскоязычной литературе сила и ускорение направлены в противоположные стороны, т.е. $\vec{a}_K = -\frac{\vec{F}_K}{m}$.

Это происходит потому, что в иностранной литературе рассматривается другой случай. Движение тела свободного от связей с подвижной системой отсчета. В этом случае ситуация меняется. Для неподвижного (внеземного) наблюдателя тело движется прямолинейно равномерно с переносной скоростью. А для подвижного (земного) наблюдателя тело движется с поворотным ускорением, отклоняясь в сторону действия кориолисовой силы. Другими словами, в иностранной интерпретации и сила, и ускорение Кориолиса полностью отсутствует в неподвижной системе отсчета и проявляются только в подвижной системе отсчета.

Заметим, что в первой части, мы указывали, что поворотные силы не изменяют величину скорости (отсутствует ускорение) и не совершает работы. В российской традиции это совсем не так, в частности сила Кориолиса совершает работу, подтачивает рельсы, подмывает берега рек и т.д. В зарубежной интерпретации ничего подобного, тело просто заворачивает траектории, не изменяя величину скорости.

Рассмотрим подробнее, откуда идут различия? А различия идут от привязки к вращающейся системе. Для свободного тела, никак не связанного с вращающейся системой, с точки зрения неподвижного (внеземного) наблюдателя нет никаких оснований для появления ни посторонних сил, ни посторонних ускорений, поэтому с его точки зрения тело движется прямолинейно равномерно, а вращающаяся система вращается сама по себе. В российской интерпритации, рассматривается тело, связанное с вращающейся системой отсчета, которая тащит тело. Тело пытается двигаться равномерно и прямолинейно относительно неподвижной СО, а подвижная система увлекает его в сложное движение относительно неподвижной системы отсчета. Поэтому по наблюдению земного (подвижного) наблюдателя тело движется прямолинейно, вдоль связи, рельсов или берегов, но при этом само действует на связь. При этом неподвижный наблюдатель видит криволинейное движение тела.

Но дело не только и не столько в различных реакциях на различные исходные условия. Дело еще и в различных смыслах физических явлений. Так в случае движения свободного тела

при рассмотрении из двух систем, подвижной и неподвижной, оказывается, что не просто силы и ускорения Кориолиса появляются только в подвижной системе, и полностью отсутствуют в неподвижной. Но, сила и ускорение Кориолиса становится полностью фиктивной. Т.е. никаких сил и ускорений не существует в обеих системах, а существует кажущееся движение для объяснения, которого и вводятся несуществующая сила и несуществующее ускорение. На самом деле, тело летит прямолинейно и равномерно, а не связанная с движением тела подвижная система, в этот момент поворачивается. А наблюдателю в подвижной системе кажется, что это тело сворачивает с прямолинейного пути. Ситуация идентична ситуации с пассажиром поезда, отходящего от перрона. Пассажир, инстинктивно считающий себя неподвижным, «видит», что это перрон отъезжает от поезда. Так и в случае наблюдения тела, которое в неподвижной системе движется прямолинейно равномерно, при наблюдении за ним из подвижной системы, которое в свою очередь, поворачивается вокруг некоей оси, кажется движущимся непрямолинейно и неравномерно. Но, на самом деле, это не реальное изменение движения, а кажущийся эффект, для объяснения которого и необходимо вводить фиктивные силы и фиктивные ускорения.

С другой стороны, в случае наложения связей на движение тела со стороны подвижной системы, подвижная система действует на тело реальной силой, пытаясь подстроить движение тела под себя. В результате при наблюдении из подвижной системы тело движется равномерно и прямолинейно. Но при наблюдении из неподвижной системы, движение становится непрямолинейным и неравномерным. И при этом силы и ускорения Кориолиса становятся не фиктивными, не существующими в реальности, а самыми реальными и действуют они со стороны подвижной системы. Соответственно совершается работа и изменяется энергия. Причем и работа, и изменение энергии становится не фиктивными, а самыми реальными.

С этим эффектом связано одно любопытное явление, которое легко проверить экспериментально. Это влияние относительного движения на подвижную систему. По третьему закону Ньютона, любое действие вызывает противодействие. Соответственно, если подвижная система действует с некоторой силой, на тело, движущееся с относительной скоростью, то и тело, в свою очередь, будет действовать с силой противодействия на подвижную систему.

Уловить противодействие со стороны одного поезда, через рельс, на вращение земли – невозможно, в виду несопоставимых масс, земли и поезда. Но если провести опыт при сопоставимых массах подвижной системы и тела движущегося с относительной скоростью, взаимодействуя с подвижной системой, возможно.

Для этого опыта можно взять трубку, внутри которой может свободно перемещаться шарик. Для удобства можно взять шарик и трубку равной массы.

Затем, закрепить один конец трубки на оси и раскрутить ее до угловой скорости ω, (см. рис. 1.2). Во время вращения трубки двигать шарик внутри трубки со скоростью v_o.

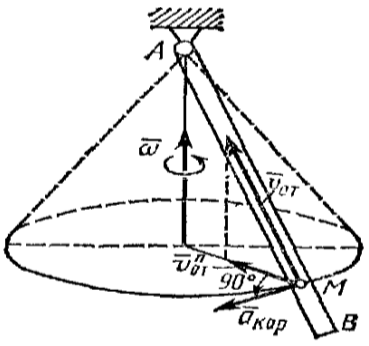


Рис. 1.2. Движение шарика во вращающейся трубке

Результатом такого опыта окажется, что когда шарик движется от центра вращения к периферии, то вращение будет замедляться, а если от периферии к центру – то вращение будет

ускоряться. Причем ускорение и замедление вращения будет соответствовать расчетам кориолисовой силы.

Такой опыт наглядно покажет, действие кориолисовой силы на движение переносной системы связанной с относительно движущимся телом наложенными связями.

Отсутствие воздействия между переносным движением и относительным движением без наложенных связей, совершенно понятно, без всяких опытов. Для демонстрации можно использовать две платформы, одна вращающаяся с постоянной угловой скоростью, и другая неподвижная, никак друг с другом не связанные. Подвижная платформа будет обозначать переносное движение, а движение шарика по неподвижной платформе будет означать относительное движение. Т.к. платформы никак не связаны, то никакого взаимодействия не будет, но траекторию движения шарика по неподвижной платформе можно спроецировать на систему координат движущейся платформы. Конечно, движение шарика по неподвижной платформе, никак не будет воздействовать на движение подвижной платформы, но для наблюдателя на подвижной платформе будет **казаться**, что траектория шарика непрямолинейная.

Опыт с двумя платформами нельзя путать с опытами по качению шарика на подвижной платформе. Т.к. в этом случае взаимодействие все-таки будет, за счет сил трения между шариком и платформой. Но, значительно слабее, чем при наличии жесткой связи, например, рельса или полой трубки. И выражаться это будет в виде проскальзывания. Поэтому в подобном опыте, смещение шарика в подвижной системе отсчета все-таки будет иметь место, т.е. станет криволинейным, в отличие от случая с жесткими связями. Но меньше, чем должно быть по расчетам под действием кориолисовой силы. Но в тоже время и в неподвижной системе отсчета движение также не будет прямолинейным. Т.е. в данном случае наблюдается переходное состояние между опытами с жесткой связью и опытом в отсутствии связей. Причем, степень отклонения от того или иного случая, будет зависеть от величины трения. При трении равном нулю, случай сведется к опытам при отсутствии связей, а в случае с бесконечной силой трения – к случаю с жесткой связью.

Т.о., никакого противоречия между двумя точками зрения на силы и ускорения Кориолиса нет, а имеет место два разных явления, и соответственно, две реакции в соответствии с двумя разными исходными условиями. Считаем, что было бы логично рассматривать оба случая и обе ситуации, с соответствующими выводами. Конечно, при первоначальном ознакомлении с темой это вызовет определенный диссонанс и путаницу в уме. Но, мы считаем, что в программу обучения должны входить рассмотрение обоих случаев. Иначе, у пытливых умов, которые постараются самостоятельно разобраться в данном вопросе. И, наткнувшись на пример, который не рассмотрен в учебниках, может сложиться впечатление, о том, что в науке не все в порядке, и в учебниках указаны ошибочные сведения, которые вводят в заблуждения.

1.3. А как же Галилей?

Выше мы рассказывали о том, как был прав Галилей доказывающий, что вращательные системы, в частности системы отсчета Земли являются инерциальными. А во второй главе рассказываем о том, что во вращательной системе отсчета проявляются силы Кориолиса. Как это совместить? Что дало возможность Галилею, не теоретически, а, проводя опыты, доказывать, что вращающаяся земля является инерциальной системой отсчета? Для того чтобы понять, в чем тут дело, необходимо рассмотреть феномен силы Кориолиса внимательнее и учитывать два эффекта.

Во-первых, перечислим случаи, когда кориолисово ускорение, соответственно и кориолисова сила обращается в нуль.

«1) когда $\omega = 0$, т.е. когда переносное движение является поступательным или если переносная угловая скорость в данный момент времени обращается в нуль;

2) когда $v_{отн} = 0$, т.е. когда относительная скорость в данный момент времени обращается в нуль;

Когда $\alpha = 0$, или $\alpha = 180^0$, т.е. когда относительное движение происходит по направлению параллельному оси переносного вращения, или если в данный момент времени вектор $v_{отн}$ параллелен этой оси» [111].

Два первых случая тривиальны и в данном случае неинтересны, т.к., земля никогда не останавливает суточное вращение, поэтому $\omega \neq 0$ по определению, и, во-вторых, мы не рассматриваем поведение неподвижных тел, т.е. $v_{отн} \neq 0$, также по определению.

А вот к третьему случаю, необходимо добавить, что сила Кориолиса и кориолисово ускорение максимальны, когда $\alpha = 90^0$. Т.е., когда $v_{отн}$ параллельна радиусу вращения. Другими словами, имеет значение не абсолютная величина относительной скорости $v_{отн}$, а величина проекции на экваториальный радиус $v^{п}_{отн}$.

Чтобы стало ясно, насколько эти различия принципиальны, рассмотрим схему на рис. 1.3.

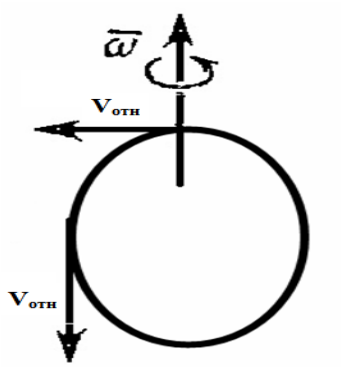


Рис. 1.3. Схема опытов относительного движения по поверхности Земли, на разных широтах

Из рис. 1.3 видно, что при проведении опытов движения на полюсе и на экваторе будут получены принципиально разные результаты. Потому, что при движении тела по поверхности Земли, на полюсе $v_{отн}$ перпендикулярна ω, значит $v^{п}_{отн} = v_{отн}$. А на экваторе $v_{отн}$ параллельна ω, значит $v^{п}_{отн} = 0$. Другими словами, проводить опыты по наблюдению движения тела по поверхности Земли, для определения кориолисова ускорения бесполезно. Результат будет отрицательным.

Совсем другое дело при проведении опытов с падающими телами (см. рис. 1.4).

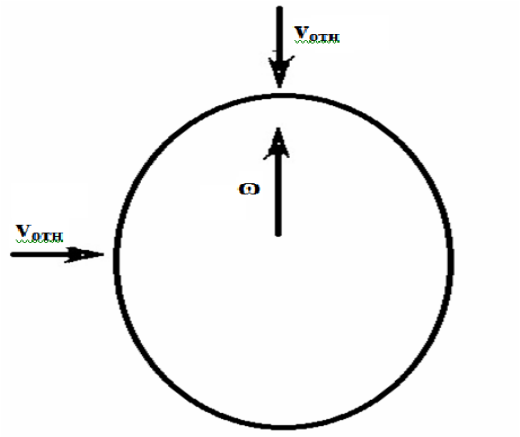


Рис. 1.4. Схема опытов свободного падения тел на разных широтах

На рис. 1.4 видно, что при свободном падении на полюсе $v_{отн}$ параллельна ω, значит $v^{n}_{отн} = 0$. А на экваторе $v_{отн}$ перпендикулярна ω, значит $v^{n}_{отн} = v_{отн}$. Значит при проведении различных опытов по определению кориолисового ускорения результаты будут разными, в

зависимости от широты и методики экспериментов. Это надо учитывать при проведении опытов и при интерпретации результатов.

Но, есть и еще одно, что сыграло большее значение в том, что Галилей ошибался в вопросе инерциальности и вращения.

Это влияние размеров на результаты опытов. Этот момент отмечал еще Эйнштейн.

«В инерциальной системе координат движущееся тело, на которое не действуют никакие силы, будет вечно двигаться прямолинейно и равномерно. Инерциальная система координат, рассматриваемая в классической физике, не ограничена ни в пространстве, ни во времени. Однако рассматриваемый случай с наблюдателем, находящимся в лифте, иной. Инерциальный характер его системы координат ограничен в пространстве и времени. Рано или поздно прямолинейно и равномерно движущееся тело столкнется со стенками лифта; при этом прямолинейное и равномерное движение нарушится. Рано или поздно весь лифт столкнется с землей, уничтожая наблюдателей и их опыты. Эта система координат является лишь «карманным изданием» реальной инерциальной системы» [130, с. 179].

Сразу отметим, что Эйнштейн главное внимание уделяет временным ограничениям, это связано с тем, что рассматривается прямолинейное движение, ограниченное естественными причинами, тем, что невозможно падать на землю вечно. Эйнштейн ничего не говорит о масштабах локальной инерциальной системы, единственная оговорка, так, это наименование «карманное издание», но ни слова о размерах «кармана». Другое дело, если рассматривать движение по орбите. В этом случае, временных ограничений нет. Орбитальный комплекс, например, станция «Мир», может долгое время обращаться на орбите. А вот фактор размеров имеет значение. Хорошо известно, что внутри орбитальной станции тела находятся в невесомости и «опыты Галилея», не позволяют определить инерциальная или неинерциальная система координат, связанная с орбитальной станцией. Фактически, вопрос стоит следующим образом. Каких размеров может быть орбитальная станция, чтобы внутри ее, система координат, связанная с орбитальной станцией (локальная система координат) может считаться инерциальной?

Чтобы разобраться в этом вопросе, необходимо рассмотреть не математические формулы, а физические основания для появления отклонений движения тел от инерциального движения. Центробежная сила, самая первая и самая заметная из сил, позволяющих отличить вращающуюся систему от движущейся прямолинейно равномерно. Появление данной силы настолько очевидно, что Ньютон указал на ее действие, как единственный способ таких различий. Тем не менее, действие центробежной силы легко (в некоторых случаях) компенсируется действием поворотной силы, а в случае вращения роль такой силы играет центростремительная сила. Но, есть еще одна сила, возникающая во время вращения, это кориолисова сила и создаваемая ею ускорение. Сила Кориолиса возникает только при вращении, и полностью отсутствует при прямолинейном движении, независимо от того является ли движение равномерным или ускоренным.

Для этого рассмотрим такой фактор вращения, как орбитальная скорость при вращении, уравнение определяющее величину орбитальной скорости:

$$v_{орб} = \omega * R. \qquad (1.5)$$

Отсюда видно, что чем дальше от центра вращения, тем выше орбитальная скорость точки, сказанное проиллюстрировано на рисунке (см. рис. 1.5)

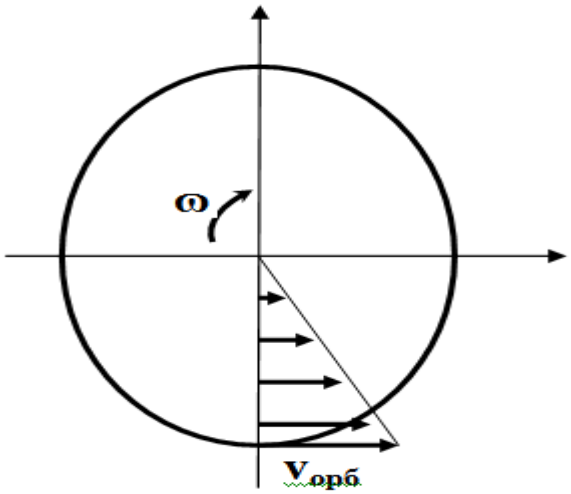


Рис. 1.5. Орбитальная скорость при вращении

Если отвлечься от всех формул и уравнений, то причина появления силы Кориолиса в том, что при изменении радиуса вращения материальной точки, без изменения инерции (импульса) приведет к тому, что сохраненный импульс (полученный в начальных координатах) будет не соответствовать новым координатам. И если материальная точка связана с вращающейся платформой, то материальная точка будет действовать на вращающуюся платформу, с целью привести старый и новый импульс орбитальной скорости в соответствие с новыми условиями.

Другими словами, при изменении радиуса в подвижной системе координат при сохранении импульса предыдущего положения, материальная точка воздействует на вращающуюся систему, ускоряя или затормаживая ее. В свою очередь, вращающаяся система воздействует на материальную точку, с целью приведения в соответствие новым условиям движения. В результате этого взаимодействия и появляется сила Кориолиса.

Поэтому при движении материальной точки (тела) от периферии к центру, материальная точка старается разогнать платформу, на которой она вращается. При движении от центра к периферии будет наблюдаться обратный эффект, тело, перемещающееся относительно вращающейся платформы, от центра к периферии, будет замедлять платформу.

Сказанное хорошо иллюстрируется на рис. 1.6.

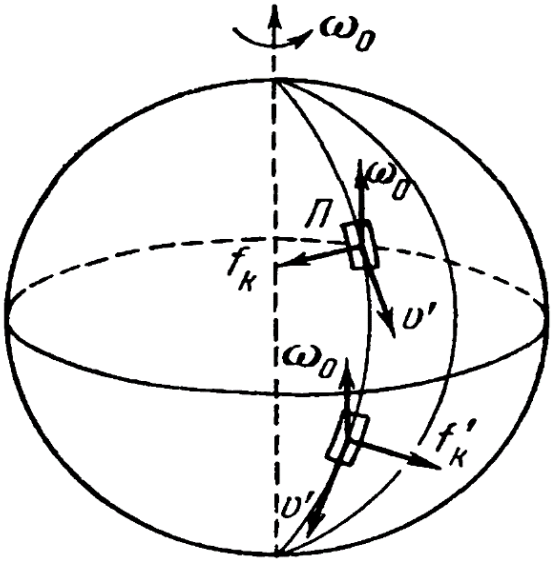


Рис. 1.6. Действие силы Кориолиса на тело, движущееся по Земле с севера на юг.

На рисунке видно, что при движении тела в Северном полушарии, когда радиус увеличивается, то кориолисова сила направлена против вращения, т.е. тело тормозит землю. А вот в Южном полушарии ситуация вроде бы меняется, движение также с Севера на Юг, но кориолисова сила меняет свое направление и наоборот ускоряет землю, потому, что в этом случае радиус вращения уменьшается. Путаница возникает при использовании терминов Север, Юг и т.д. Правильнее говорить, движение к увеличению радиуса вращения или движение к уменьшению радиуса вращения. Тогда все становится простым и понятным. При движении с Севера на Юг, в Северном полушарии это движение от центра к периферии, или в сторону увеличения радиуса, и в соответствии сказанным выше, сила Кориолиса будет сопротивляться вращению. В Южном полушарии ситуация меняется, движение с Севера на Юг – это движение уменьшающее радиус вращения, а уменьшение радиуса ведет к действию кориолисовой силы по ускорению вращения.

Сказанное выше обычно преподносится как закон Бэра, примерно в следующей формулировке: «Для частички воды в реке действие силы Кориолиса слева направо, если смотреть по течению реки, приведет к прижиманию этой частички к правому берегу, способствуя большему подмыванию. Правый берег рек в Северном полушарии более подмыт, чем левый на прямолинейных участках реки. Этот эффект известен в географии как закон Бэра» [13].

Правда при этом не поясняется, какой берег правый, а какой левый. А это желательно пояснять. Так для большинства рек, таких как Волга, Дунай, Днепр и т.д. правый - это западный берег. Т.е. река подмывает набегающий берег. А вот для Ангары – это восточный берег, т.е. убегающий. Дело в том, что Ангара течет с Юга на Север, поэтому сила Кориолиса имеет противоположное направление, по сравнению с другими реками.

Но, при этом есть одна тонкость, обычно не упоминаемая в учебной и научной литературе. Имеется в виду, что на величину кориолисовой силы влияет не абсолютное изменение радиуса, а его относительная величина.

Для иллюстрации сказанного приведем простейший расчет.

Предположим, что радиус вращения меняется на 10 м. Подсчитаем, на сколько изменится скорость в двух случаях: при экспериментах на полюсе и на экваторе земли.

На полюсе, предположим, что радиус вращения меняется от 1 м (от полюса) до 11 м. В этом случае, скорость обращения, по известной формуле изменится, от $v_1 = \omega * 1 = \omega$ км/с. До $v_2 = \omega * 11 = 11\ \omega$ км/с. Здесь ω - угловая скорость суточного вращения Земли.

$$\Delta v = \frac{v_2 - v_1}{v_1} = \frac{11*\omega - \omega}{\omega} = 10 \quad . \qquad (1.6)$$

Легко видеть, что орбитальная скорость изменится в 10 раз.

То же самое смещение на экваторе, при радиусе Земли R = 6 371, смещение на 10 м = 0,01 км, даст изменение скорости

$$\Delta v = \frac{v_2 - v_1}{v_1} = \frac{R*\omega - (R+0.01)*\omega}{\omega} = \frac{0.01}{6371} = 1.57*10^{-6} \quad . \qquad (1.7)$$

Явно видно, что один и тот же эксперимент будет различаться по результатам выявления силы Кориолиса почти в 10 миллионов раз. Отсюда и ответ, почему Галилей в своих экспериментах, не заметил неинерциальности системы координат связанную с вращающейся землей.

Галилей проводил свои эксперименты в Италии, ближе к экватору, чем к полюсу. Поэтому заметить отклонение порядка 0,000001 от текущих параметров он не мог. Для таких измерений нужны прецизионные приборы, которых у Галилея не было.

Т.о. мы подошли к вопросу о размерах локальной инерциальной системы. Локальная вращающаяся система координат, может считаться инерциальной в тех пределах, в которых мы можем считать реальные отклонения от инерциальности несущественными, т.е. равными нулю. Естественно, что пределы инерциальности зависят от радиуса от центра вращения локальной системы координат.

Ясно, что чем больше радиус от центра вращения локальной системы, тем больше размеры локальной инерциальности. Размеры локальной инерциальной системы на МКС будут еще больше, чем размеры локальной инерциальности на поверхности земли на экваторе[5].

Последним рассмотрим вопрос о том, что в современной научной и учебной литературе один и тот же эффект рассматривает как два разных явления.

Речь о кориолисовой силе и законе сохранения момента импульса.

Мы достаточно говорили про кориолисову силу, пришел черед, поговорить о законе сохранения момента импульса.

«Закон сохранения кинетического момента используют в своей деятельности акробаты, прыгуны, танцоры и т.д. Наглядно его можно продемонстрировать в опыте на скамье Жуковского (рис.1.7).

Если человек увеличит момент инерции, например, разведением рук с гирями в стороны, то скорость вращения уменьшится и наоборот» [102].

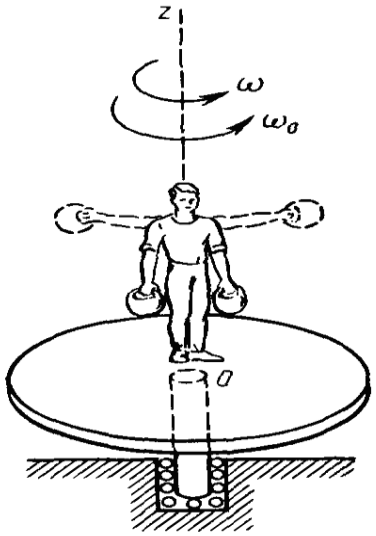


Рис.1.7. Опыты на скамье Жуковского

Известно, что момент, который может ускорять или замедлять вращение, по своей сути это сила направленная перпендикулярно радиусу, умноженная на величину радиуса:

$$M = [F \times R] \quad . \qquad (1.8)$$

Т.е., по сути, ускоряет и замедляет вращение скамьи – сила, действующая тангенциально. Причем, если масса (в приведенном примере это гири), движется к центру, то скорость вращения ω, увеличивается, а если масса движется от центра к периферии – уменьшается.

Сравним с законом Бэра. Если река течет вдоль меридиана, в Северном полушарии с Севера на Юг, то масса воды движется от центра вращения к периферии. При этом вода подмывает правый берег. Для таких рек, которые текут в Северном полушарии с Севера на Юг (например, Сена, Рейн, Днепр, Волга), это западный берег. Для рек, которые текут в Северном полушарии, с Юга на Север (например, Ангара), правый берег – это восточный берег. Т.е.

[5] Напомним, что высота орбиты МКС около 400 км над поверхностью Земли (прим. Авт.)

такие реки, как Сена, Рейн, Днепр, Волга, давят на землю в сторону уменьшения суточного вращения, против суточного вращения. А Ангара, наоборот давит на Восток – ускоряя суточное вращение земли. Точно также действуют и поезда, движущиеся вдоль меридиана, в Северном полушарии они изнашивают правый рельс, т.е. кориолисова сила от поезда давит вправо. Поезд, который едет на Юг, давит на Запад (против вращения земли) и наоборот.

Наглядно видно, что закон сохранения кинетического момента и закон Бэра – это проявлении одного и тог же эффекта. Различие состоит только в том, что сила Кориолиса в законе Бэра не может изменить скорость вращения земли, а сила создающая кинетический момент в опытах на скамье Жуковского – может и изменяет скорость вращения.

И эта разница не существенная. Только потому, что все дело не в разных законах, а в соотношении масс. Масса человека на скамье Жуковского и масса скамьи – примерно равны, поэтому действия человека влияют на вращение скамьи. А вот масса реки или масса поезда, не сопоставимы с массой земли. Поэтому ни одна река, ни один поезд, не может повлиять на вращение земли.

И если в опытах на скамье, действие силы проявляется в изменениях скорости вращения, то действие той же самой силы проявляется только в повышенном износе рельсов или в подмывании берегов. Но, сформулируем четко: закон Бэра и закон сохранения кинетического момента – это один и тот же закон Природы.

Анализируя сказанное можно отметить, что во всех перечисленных случаях, действует закон сохранения движения.

«Анализируя законы Ньютона, можно заключить, что все они являются частными проявлениями общего закона природы – закона неуничтожаемости движения. Неуничтожаемость движения выражена в положении Декарта, что во вселенной сохраняется одно и то же количество движения» [42].

Даже без привлечения законов Ньютона совершенно ясно, что здесь действует именно принцип Декарта. Если движущееся тело и вращающаяся система координат взаимодействуют через связи, то перемещение тела из области, где равновесное движение больше, чем равновесное движение в новой точке приведет к тому, что избыток движения через связь будет передана системе координат и увеличит скорость вращения системы. Если наоборот, количество равновесного движения в новой точке меньше чем количества равновесного движения в начальной точке, то по той же связи телу будет передано недостающее количество движения вращающейся системы.

Глава 2. Классическая механика

Эта книга посвящена некоторым проблемам современной физики, известным широкому кругу людей с высшим образованием, в частности механики, скорее даже противоречиям в методической литературе и энциклопедических словарях. И, хотя в ней нет ни одного открытия, в том смысле, что не приведено ни одного факта не известного ученым, тем не менее выводы следующие в конце работы, могут иметь претензии на оригинальность для представлений о современной науке. Этот кажущийся парадокс вызван тем, что корни проблемы уходят в прошлое и в настоящее время, это уже вопрос не научного творчества, а вопрос психологии науки и методологии обучения этим самым наукам.

Задача книги: воспроизведение исторического мышления в формировании системных свойств методологии науки.

Т.к. проблема возникла в прошлом, то ее рассмотрение начнем с исторической справки.

2.1. И. Ньютон и классическая физика (историческая справка)

«Итог развития механики в XVIII в. подвел великий английский ученый Исаак Ньютон. Он ввел основные понятия механики (сила, масса) и сформулировал ее законы. Ньютон открыл также закон всемирного тяготения. Применив его к движению небесных тел, он построил небесную механику, объяснив движение планет, их спутников, комет и т.д.» [30].

Свои исследования по механике Ньютон изложил в книге «Математические начала натуральной философии», вышедшей в 1687г.

Несомненно, что И. Ньютон был великим ученым, но кроме этого он был просто человеком и в вопросе, который неизбежно встает перед каждым ученым, «Я или Истина», у Ньютона, безусловно, победило первое. Хорошо известны факты, что Ньютон вел непримиримую войну со своими современниками Лагранжем и Декартом. Мало известен, но тем не менее существенен, исторический факт, что Ньютон вел не шуточную войну с председателем Королевского Общества (аналог академии наук) Англии Робертом Гуком и другими. На войне, как на войне, хороши все доступные средства, в том числе и действия по сжиганию всех научных трудов и портретов Р. Гука в архивах Королевского Общества, чтобы вычеркнуть имя соперника из анналов истории. В общем, Ньютон вел себя по известному принципу: «на свете существует только два мнения, Мое личное и неправильное».

Поставленной цели: добиться непререкаемого авторитета в науке, И. Ньютон практически достиг.

Ф. Энгельс писал: «До восемнадцатого века никакой науки не было (курсив - наш); познание природы получило свою научную форму лишь в восемнадцатом веке или, в некоторых отраслях, несколькими годами раньше. Ньютон своим законом тяготения создал научную астрономию, разложением света - научную оптику, теоремой о бином и теорией бесконечных - научную математику и познанием природы сил - научную механику». [50].

Nature and Nature’s laws lay hid in night:

God said, Let Newton bell and all was light.

Pope

[Природа и ее Закон - весь мир во мрак одет. Да будет Ньютон - Бог сказал, и вот повсюду свет. [49]

Другими словами, И. Ньютон не просто ученый, а пророк и посланец в науке самого Господа Бога.

Это было бы смешно, если бы не было так грустно.

Хорошо известно, влияние И. Ньютона в теории света, тем не менее, напомним некоторые факты. В 1672 г. И. Ньютон поддержал корпускулярную теорию света, и благодаря огромному авторитету Ньютона корпускулярная теория стала господствующей. «То, что на протяжении всего XVIII в, - отмечает Макс Борн, - придерживались корпускулярной теории,

являлось простой случайностью... Здесь сказался авторитет Ньютона, который избрал корпускулярную теорию как более простую концепцию ввиду отсутствия убедительных доказательств противоположной теории.

У волновой теории света были тысячи противников и буквально считанные приверженцы». [22] И, все это при том, что существовали факты, которые противоречили корпускулярной теории, но авторитет оказался превыше всего. Принцип известный: «если некоторые факты противоречат хорошей теории, тем хуже для ... фактов».

Апофеозом непререкаемого авторитета Ньютона можно считать факт появления философии механицизма, основным постулатом которого было распространение законов ньютоновской механики на все явления природы.

К счастью для науки, многочисленные факты опровергли непомерный авторитет Ньютона в некоторых областях науки, в частности в оптике, электродинамике и главное в философии, но для науки было потеряно время, минимум сто лет, пока ученые под давлением фактов признали, что факты, в науке, все-таки важнее, чем авторитет личности. Тем не менее, остаточные проявления излишнего авторитета личности Ньютона все еще остаются, особенно в механике.

Приведенная историческая справка ни в коем случае не преследует цель, как-то оценит результаты деятельности И. Ньютона. Цель показать, что «подковерная» борьба в физике имеет намного большее значение, чем это принято считать людьми далекими от физики. С этим необходимо считаться и, что самое главное (по мнению авторов), это надо отслеживать.

Внешне в науке, в частности в физике, преодолены все последствия догматизма, связанные с именем Исаака Ньютона. На самом деле, это далеко не так. Хотя бы потому, что никому не позволено сомневаться в правильности механики Ньютона, заметим, что не позволительно даже сомневаться, не говоря уже о попытке подвинуть Великого Ньютона с его общепризнанного пьедестала. При том, что все физики, на словах, признают основной тезис познания - познание бесконечно. При этом, скромно опускается вопрос, как можно принять новую теорию полностью, оставаясь в рамках старой. Это – аналог христианского атеизма, когда человек не верит в существование Бога и, в тоже самое время, верит, что Иисус Христос сын Бога (которого не существует по первой аксиоме).

В процессе подготовки данной работы к печати авторы показывали отдельные части ученым, специалистам в области современной физики, с целью получения неофициальной рецензии, а также указания на возможные ошибки, если таковые имеются. Реакция была просто замечательная, не было указано ни на одну принципиальную ошибку, дано несколько рекомендаций по уточнению некоторых незначительных моментов и, самое главное, крайняя степень удивления и возмущения по поводу того, что авторы посмели (!) усомниться в абсолютной правильности механики Ньютона. В неофициальных беседах ученые признают, что некоторые темные пятна в механике, все же имеются, но они должны быть разрешены строго в рамках постулатов ньютоновской механики. «Формула $F=ma+F_K$ безусловно, верна для центра масс вращающегося тела, но заниматься этой проблемой не советуем» - вот резюме, которое вынесли авторы из этого рассмотрения. Совершенно замечательна фраза, одного сильного саратовского методиста: «как можно сомневаться в правильности ньютоновской механики, если, сам, великий Эйнштейн преклонялся перед гением Ньютона». По хорошо известному принципу: пусть все будет по-новому, но так, чтобы все оставалось по-старому.

Авторы посмели сомневаться в отсутствии противоречий в современной физике и некоторые результаты сомнений выносят на суд читателей, надеясь, в следующий раз осветить некоторые другие проблемы.

Авторам представляется, что публикация и последующее обсуждение может повысить интерес и мотивацию студентов вузов к изучению теоретической механики и истории предмета. Так авторам известно, что вопрос в данном случае не только (и не столько) в области объективных законов природы, сколько в исторически сложившихся догматах «научной веры».

Поэтому, прежде чем переходить непосредственно к идеям, которые предлагаются авторами, разберем некоторые проблемы аксиоматики ньютоновской механики.

2.2. Первый закон Ньютона и закон инерции Галилея

Так большинство физиков считает, что первый закон Ньютона и закон инерции Галилея в принципе одно и то же, разберем этот вопрос подробнее.

Сравним две формулировки закона инерции.

«Всякая материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не выведет ее из этого состояния» [35, стр. 32].

Закон инерции или первый закон Ньютона

«Заставьте корабль двигаться с любой скоростью (если движение будет равномерным и без качки) во всех механических явлениях вы не обнаружите ни малейшего отклонения и ни по одному из них не сможете установить, движется ли корабль или стоит неподвижно» [31, стр. 17]

Закон инерции Галилея

При кажущейся равноправности этих формулировок, в них есть принципиальное различие. В законе Галилея, основное то, что, не выглядывая наружу, только по механическим экспериментам, в замкнутом пространстве лаборатории, невозможно определить движется ли лабораторная система или нет.

В качестве примера рассмотрим движение орбитальной станции в качестве лаборатории. Никакими механическими экспериментами, космонавты не смогут определить, движутся ли станция, или нет, т. к. все направления на станции равноправны. Таким образом, по закону инерции Галилея орбитальная станция, которая движется по орбите, – это инерциальная система отсчета.

По первому закону Ньютона орбитальная станция, которая движется по эллиптической орбите, не является инерциальной системой отсчета, т. к. движется она совершенно не равномерно[6] и абсолютно не прямолинейно.

Причем в строгой формулировке первого закона Ньютона, ничего не говорится об инерциальности системы отсчета, а только о том, что тело, на которое не воздействуют силы, будет продолжать оставаться неподвижным, либо двигаться прямолинейно и равномерно. Другими словами, тело сохраняет инерциальность движения. И, хотя, на первый взгляд кажется, что пример с орбитальной станцией противоречит закону инерции, на самом деле это не так. Здесь тело (орбитальная станция) также сохраняет инерциальность движения (что подтверждается состоянием невесомости внутри станции), но траектория движения орбитальной станции при этом не прямолинейная и не равномерная. Но при этом строго соблюдается равенства нулю равнодействующей сил, действующих на станцию.

Следовательно, необходимо формулировать закон инерции примерно следующим образом:

Тело, на которое не действуют силы, либо равнодействующая сил равна нулю, либо остается в покое, либо движется вдоль траектории, на которой инерциальность движения сохраняется.

Сама траектория при этом может быть любой, так в тексте приведена эллиптическая траектория, для случая задачи двух тел (формулировка небесной механики), когда тело (орбитальная станция) движется вокруг одного притягивающего центра, например, Земли, но в принципе тело может двигаться вокруг двух и более притягивающих центров (задача n-тел), в этом случае траектория движения по инерции может быть очень сложной, тем не менее инерциальность движения и соответственно состояние невесомости внутри станции будет сохраняться.

[6] При движении по эллиптической орбите, по второму закону Кеплера, скорость не равномерная.

С другой стороны, первый закон Ньютона, который не может объяснить инерциальное движение в общем случае, а только прямолинейное и равномерное (когда скорость движения постоянна по величине и направлению), является частным случаем второго закона Ньютона:

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} \quad , \qquad (2.1)$$

где F – равнодействующая всех сил, действующих на тело, m – масса тела, a – ускорение тела, v – скорость тела.

Легко видеть, что если
F = 0,
то
$m\frac{dv}{dt} = 0$
отсюда
v = const .

2.3. Третий закон Ньютона

Разберем как в физике применяется третий закон Ньютона.

С одной стороны, силовое взаимодействие формулируется следующим образом, «действие двух материальных точек друг на друга численно равны и направлены в противоположные стороны

$$Fij = -Fji, \qquad (2.2)$$

где F_{ij} – это сила, действующая на i- точку со стороны j, а F_{ji} - сила, действующая на j-ю точку со стороны i-ой. Эти силы приложены к разным точкам (телам) и могут взаимно уравновешиваться только в том случае, когда точки i и j принадлежат одному и тому же абсолютно твердому телу» [35, стр. 41]

С другой стороны, «Тела которые ограничивают движение данного тел, называются связями.

Под действием силы тяжести связи деформируются, и реакция деформированной связи по третьему закону Ньютона уравновешивает силу тяжести» [34, стр. 50][7]

Именно так, с одной стороны, силы могут уравновешиваться только тогда, когда они приложены к одному телу и, с другой стороны, уравновешиваются силы, приложенные к двум разным телам (телу и связи, т.е. телу которое ограничивает движение данного тела).

На лицо противоречие, причем противоречие не в формулировке самого закона, в законе Ньютона не говориться, куда приложены силы действия и противодействия, а только постулируется их равенство по величине и противоположность по направлению.

Лучше рассмотреть этот вопрос на конкретном примере.

Представим тело (рис. 2.1), висящее на невесомой нити неподвижно.

[7] Мы специально подобрали две цитаты из разных книг, но одних и тех же авторов. Аналогичные рассуждения можно найти и у других авторов.

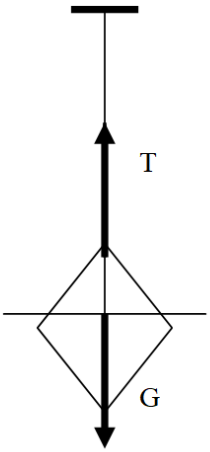


Рис. 2.1. Тело, висящее на невесомой нити неподвижно

Согласно определению, приведенному выше, нить – это связь. Разберемся, какие силы действуют на тело.

Во-первых, это сила тяжести. В самом деле, сила тяжести (сила притяжения со стороны Земли) действует независимо от наличия или отсутствия связи.

Во-вторых, это сила натяжения, которая действует со стороны нити. Именно эта сила удерживает тело в неподвижности.

На тело действуют две силы, сила действия (сила тяжести, с которой тело действует на связь) и сила противодействия (сила натяжения, с которой связь действует на тело).

По определению, данному выше эти две силы уравновешиваются, соответственно равнодействующая сила, действующая на тело, равна нулю и тело продолжает оставаться неподвижным.

Таким образом, если на тело действует сила, но существует связь, которая ограничивает движение тела, то сила продолжает действовать на тело и, в тоже самое время, тело действует на связь с силой, стремясь двигаться вдоль вектора силы, а со стороны связи на тело действует сила противодействия. При этом, и сила действия, и сила противодействия действуют и на тело, и на связь.

В противном случае, если считать, что сила действия и сила противодействия действуют на разные тела, невозможно решить ни одну задачу (!) на статическое равновесие.

Приведем пример нарушения третьего закона Ньютона.

Рассмотрим действие машины Атвуда [15, стр. 72].

«Машина Атвуда представляет собой два груза с массой M_1 и M_2, которые подвешены на легкой нити, перекинутой через неподвижный блок (рис. 2.2).

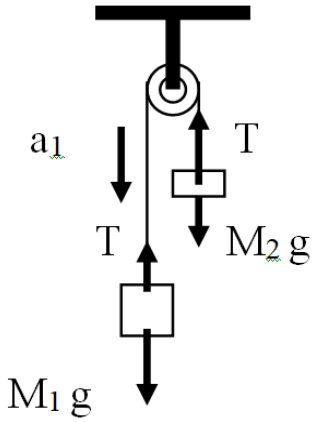


Рис. 2.2. Два груза

«Результирующая сила, действующая на M_1, равна

$$M_1g - T = M_1a_1 \quad . \qquad (2.3)$$

На M_2 действует сила

$M_2g - T = M_2a_2$,

где M_1, M_2 – масса первого и второго тела соответственно, a_1, a_2 – ускорение первого и второго тела, g – ускорение свободного падения, T – сила натяжения нити.

Так как длина нити не меняется, то $a_1 = - a_2$ » [15, стр. 72].

Теперь рассмотрим силы, действующие на первое тело, при условии, что M_1 не равна M_2.

Во-первых, это сила тяжести M_1g, во-вторых, это сила противодействия, сила натяжения нити T.

Сила натяжения нити равна

$T = M_1g - M_1a_1$.

Соответственно,

$T \neq M_1 g$.

Сила действия не равна силе противодействия.

Важно обратить внимание, что в рассматриваемом случае, тело M_1 (или M_2) и нить движутся ускоренно, с ускорением a_1.

Таким образом, следует добавить в формулировку третьего закона Ньютона следующую важную поправку.

Сила действия равна силе противодействия, только в случае, когда, система взаимодействующих тел либо неподвижны, либо движутся без линейного ускорения.

2.4. Силы инерции в абсолютном, переносном и относительном движении

Сначала приведем несколько постулатов, на основании, которых будут сформулированы выводы данной главы:

Причиной любого отклонения твердого тела от прямолинейно равномерного движения, является сила, действующая на тело [25]. При этом сила, действующая на тело, является причиной, а отклонение – следствием. Легко видеть, что приведенное утверждение – это принцип инерции, выраженный в первом законе Ньютона.

Из причинно-следственной связи следует, что любая сила вызывает отклонение движения тела от прямолинейного и/или равномерного. При этом утверждается, что нет отклонения (изменения импульса) без силы, и не бывает сил, которые не вызывают отклонения движения.

Силы, действующие на тело, бывают двух типов:

А) внешние силы, действующие со стороны других тел. Эти силы действуют в любой системе координат.

Б) силы инерции, действующие только в неинерциальных системах отсчета, поэтому эти силы иногда называют фиктивными силами.

Отклонение движения и вызвавшее это отклононенение сила действуют в одной и той же системе отсчета. Т.е. если в какой-нибудь системе отсчета наблюдается отклонение движения данного тела от прямолинейно равномерного, то именно в этой системе отсчета и действует сила.[8]

[8] Авторы в курсе того, что в физике не прекращаются попытки убрать понятие силы из физики (в связи с тем, что силу невозможно измерить практически) и объяснять законы механики с точки зрения импульса, или энергии. Самый знаменитый пример – это «Механика» Г. Герца. Но поскольку эти попытки пока не увенчались

Несмотря на то, что эти постулаты кажутся тривиальными, последовательное и логичное их применение приводит к некоторым интересным результатам. По мнению авторов, именно в этих вопросах сосредоточены противоречия современной механики.

В настоящее время в механике принято считать, что неподвижная система отсчета инерциальная [например, 35, стр. 33]. В инерциальной системе отсчета, по определению, действуют законы Ньютона, закон сохранения момента импульса и сохранения движения (импульса) центра масс (центра инерции) для замкнутых, не подверженным внешним воздействиям систем. В неинерциальных системах отсчета указанные выше законы не выполняются [30], т.к. в них кроме внешних воздействий наблюдается воздействие силы инерции, центробежной силы и силы Кориолиса.

Так в неподвижной системе отсчета движение центра инерции записывается в виде

$$F = ma \quad , \tag{2.4}$$

где F - главный вектор внешних воздействий, m - суммарная масса системы материальных точек, a - ускорение центра инерции относительно неподвижной системы координат.

Однако из экспериментов следует, что при наличии вращения, кроме внешних сил на центр инерции действуют также силы инерции и в неподвижной системе координат.

В качестве первого примера рассмотрим случай кругового движения груза массы m на упругой нити вокруг центра О (см. рис. 2.3), на тело действует не только внешняя сила Т со стороны нити, но и центробежная сила инерции $F_{ц.}$

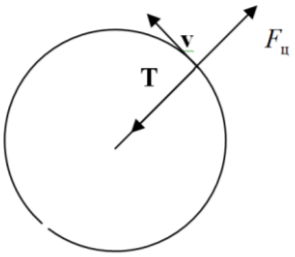


Рис. 2.3. Круговое движение груза

При этом необходимо заметить, что сила инерции действует в неподвижной системе координат. В противном случае (в современной механике), невозможно объяснить движение тела. Если в неподвижной системе координат действует только внешняя сила Т, то соответственно уравнение (2.4) данном случае приводится к виду

$$T = ma \quad . \tag{2.5}$$

Следовательно, в неподвижной системе координат тело должно ускоренно двигаться к центру О, с ускорением

$$a = \frac{T}{m} \quad . \tag{2.6}$$

Однако этого не происходит, поэтому в неподвижной системе координат уравнение движения (2.5) должно быть записано в виде

$$ma = T + F_ц \quad . \tag{2.7}$$

полным успехом и практически во всех учебниках по физике применяются термины силы (взаимодействия между телами) и силы инерции, то авторы пользуются именно этими понятиями.

Т.к. силы Т и $F_ц$ равны по величине и противоположны по направлению, по третьему закону Ньютона, как сила действия и противодействия. То уравнение (2.7) можно переписать в виде:

$$ma = T - F_ц = 0 \quad , \tag{2.8}$$

или

$$ma = 0 \quad .$$

Это означает, что при вращении тела вокруг оси, не проходящей через ось симметрии, тело движется равномерно без линейного ускорения по круговой траектории.

Посмотрим, как этот случай решается в современной физике. В данном случае используется уравнение

$$\frac{mv^2}{R} = T\,, \tag{2.9}$$

где m – масса, v – скорость, R – радиус, T – сила натяжения,

которое действует в любой системе отсчета, в том числе и в неподвижной, так как скорость v – это скорость относительно неподвижной системы отсчета.

При этом, член $\frac{mv^2}{R}$ «часто называют центростремительной силой» [33, стр. 40], а согласно современной аксиоматике, в неподвижной системе отсчета силы инерции не действуют. Но, если в левой части уравнения не сила, то как объяснить равенство, если в правой части сила. Имеем явное противоречие.

По известному закону формальной логики, если

$A = B$

и, в то же самое время

$B = C$

то, однозначно

$A = C$.

Но, в современной физике о законах формальной логики вспоминают только когда нужно, так в неподвижной системе отсчета действует член $\frac{mv^2}{R}$, который называется (центробежной) силой инерции, но сила инерции в неподвижной системе отсчета, согласно современной аксиоматике, не действует.

Другой пример, мотоцикл на круговой вертикальной стене[9], если центробежная сила инерции не действует в неподвижной системе отсчета, то, почему мотоциклист не падает под действием силы тяжести, эта-то сила точно на него действует.

Таким образом, в общем, случае уравнение движения центра инерции системы точек вокруг неподвижного центра О, не совпадающего с центром инерции записывается в виде

$$ma = F - F_ц \quad . \tag{2.10}$$

[9] Цирковой номер

2.5. Движение гироскопического тела

Следующий случай действия сил инерции в неподвижной системе отсчета - это движение гироскопического тела.

Определение. Гироскопическое тело - симметричное вращающееся твердое тело, ось вращения которого совпадает с осью симметрии и может изменять свое направление в пространстве [15].

К простым примерам гироскопического тела относятся волчок Лагранжа и детская юла. Как известно, при наличии вращения волчок, поставленный вертикально, не падает, под действием силы тяжести G, как в случае отсутствия вращения, а прецессирует вокруг вертикальной оси, с угловой скоростью ω (см. рис. 2.4).

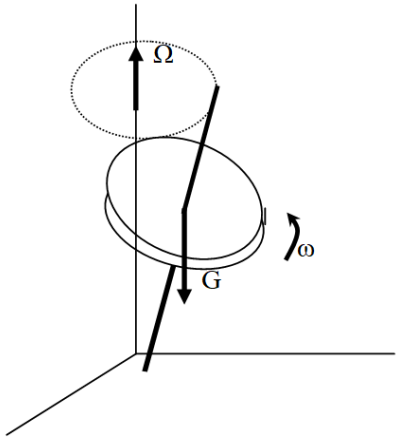


Рис. 2.4. Волчок, поставленный вертикально, не падает

Причина отклонения поведения вращающегося волчка от поведения не вращающегося, известна в теории гироскопов. Это гироскопический момент - суммарный момент сил инерции Кориолиса, действующих на точки гироскопического тела [15][10].

При этом не существенно, что в теории гироскопов принято иметь дело с гироскопическими моментами, а не с силами. Т.к. гироскопический момент точки, по определению, это момент силы Кориолиса относительно неподвижной точки. Суммируя гироскопические моменты, действующие со стороны всех точек тела, получают полный гироскопический момент, как реакцию тела, на действующие со стороны точек тела, элементарных гироскопических моментов.

Точно так же, суммируя силы Кориолиса, действующие со стороны всех точек тела, получим полную силу Кориолиса, действующую на гироскопическое тело и приложенную к центру инерции.

Из вышеизложенного следует, что уравнение движения центра инерции гироскопического тела в неподвижной системе координат, должно включать силу инерции Кориолиса ($F_к$). В этом случае данное уравнение будет записываться в виде

$$ma = F - F_к \quad . \qquad (2.11)$$

В уравнение (2.11) не входит центробежная сила, т.к. ось вращения совпадает с осью симметрии. При этом центробежные силы, действующие на симметричные точки тела при суммировании, уравновешивают друг друга. В общем, случае, когда, ось симметрии тела не

[10] Обычное возражение в этом случае, состоит в том, что поведение волчка можно описать без силы Кориолиса, рассматривая импульс (точнее закон сохранения момента импульса). Но, изменение импульса – это и есть сила (см. постулат 2 на стр. 11), а сохранение импульса (или момента импульса) означает, что силы уравновешены. Одна сила, действующая на волчок, в неподвижной системе отсчета, известна – это сила тяжести, а чем она уравновешена, господа физики?

совпадает с осью вращения, и (или) тело не имеет осей симметрии, в уравнение (1.5) должен включать в себя дополнительный член: центробежную силу вращения.

$$ma = F - F_к - F_ц \quad . \qquad (2.12)$$

Исходя из спорного, по нашему мнению, постулата, что неподвижная система координат всегда инерциальная, в современной механике принято считать, что сила инерции Кориолиса действует только в подвижной системе координат, которая вращается, с переносной угловой скоростью $\omega_{пер}$ относительно неподвижной. Рассмотрим точки тела, которые движутся относительно подвижной системы координат с относительной скоростью $v_{отн}$. При этом сила Кориолиса определяется выражением

$$F_к = 2\,m\,[\omega_{пер} v_{отн}] \neq 0 \quad . \qquad (2.13)$$

При этом принято считать [26], что, если подвижная система координат движется поступательно ($v_{пер} \neq 0$, $\omega_{пер} = 0$), то сила Кориолиса равна нулю, даже, если точки тела вращаются относительно подвижной системы координат с угловой скоростью $\omega_{отн} \neq 0$. Т.е.

$$F_к = m\,[\omega_{отн} v_{пер}] = 0 \quad . \qquad (2.14)$$

Т.е., если, точка совершает сложное движение относительно неподвижной системы координат, происходят вращение относительно мгновенного центра О с угловой скоростью ω и перемещение вместе с центром О со скоростью v.

Оказывается, что в современной механике, принципиально важно, какое движение будет называться переносным, а какое относительным. Что, по большому счету, противоречит, принципам кинематики, согласно которым все системы отсчета равноправны. Ведь очевидно, что при отсутствии переносного движения, в случае, рассмотрения сложного движения точки непосредственно в неподвижной системе координат, без введения подвижной системы координат, сила Кориолиса на точку действовать не будет, в силу постулата инерциальности неподвижной системы.

Здесь необходимо отступление. Рассмотрим принципиальную разницу между ньютоновской и лагранжевой механикой. Или «ньютоновской точкой зрения» и «лагранжевой точкой зрения» [1, стр. 47]

2.6. Два подхода к теориям в науке

Несмотря на то, что в современной науке в частности в механике не принято разделять подходы к изучению проблемы, на самом деле существуют два различных метода изучение вопроса в физике.

Первый метод – феноменологический, способ рассмотрения проблемы как физического явления. При рассмотрении данным методом принято рассматривать примеры явления на конкретных моделях. Например, по дороге едет платформа, со скоростью относительно неподвижной системы отсчета u_1, по поверхности платформы движется шарик, массой m и скоростью относительно платформы u_2. На данной модели явно видно, что скорость платформы – это переносная скорость, а движение относительно платформы – относительная. Если одно из движений криволинейное, то принципиально ничего не изменяется, главное в методе определения переносного и относительного движений – это здравый смысл, исходя из конкретной задачи.

Допустим, пароход движется по реке (или по морю) – это обязательно переносная система, независимо от того, какое движение совершает пароход, прямолинейное или криволинейное. По палубе (относительно парохода) движется шарик (человек, или любой

материальная другой объект) – это движение однозначно относительное, независимо от того какое это движение, прямолинейное или криволинейное. Этот метод принят в ньютоновской механике.

Второй метод – аналитический, проблема рассматривается безотносительно конкретных моделей, как это принято в математике. Например, обозначенная выше задача в этом ключе будет рассматриваться следующим образом. Имеется точка массой т, которая совершает два движения относительно неподвижной системы отсчета. Вектор скорости первого движения v_1, и вектор второго движения - v_2. Скорость материальной точки относительно неподвижной системы отсчета равна геометрической сумме векторов. В этом случае совершенно невозможно определить какое движение относительное, а какое переносное, т.к. вектора совершенно идентичны, а индекс, обозначающий порядковый номер движения совершено произволен. Этот метод принят в аналитической механике Лагранжа, и так как выше показано, что различия между переносным и относительным движением невозможно определить. В механике Лагранжа этих понятий не существует. В принципе ничего не меняется, если одно из движений криволинейное, все равно какое, в любом случае в задаче будут фигурировать векторы, и координаты точек и векторов.

Таким образом, в механике создается интересная ситуация, с одной стороны в ньютоновской механике считается принципиально важным какое движение считать переносным, а какое относительным, потому что от этого распределения движений зависит наличие или отсутствие сил инерции. И с другой стороны в лагранжевой механике понятий относительного и переносного движения вовсе не существует[11]. Хотя обе механики описывают одни и те же явления. Поэтому, если брать за основу феноменологический подход, как единственно верный, необходимо отказаться от аналитического метода, и соответственно, от лагранжевой механики, что практически невозможно и теоретически неверно. Другой выход, признать, что разделение движений на переносное и относительное – это чисто феноменологическое разделение, а на самом деле они равноправны[12]. Отсюда следует, что появление в уравнениях сил инерции не зависит от того, какое движение криволинейно.

На первый взгляд может показаться, что феноменологический и аналитический методы присущи только механике, на самом деле это не так. Прекрасный пример – это теория теплоты и молекулярно-кинетическая теория. В феноменологической теории теплоты постоянно фигурируют понятия количество теплоты, поток тепла, перенос тепла. Эти понятия родились исторически из теории теплорода, отброшенного наукой как неверного, но понятия остались, и ими прекрасно пользуются. С другой стороны, аналитическая молекулярно кинетическая теория, в этой теории нет феноменологических параметров. Хотя рассматриваются, в принципе, те же явления, но описываются терминами кинетической энергии, скорости и массы молекул и атомов.

Следующий пример, феноменологические уравнения Максвелла для макрополя и уравнения Лоренца для микрополя. Сравнение в этом случае, также приводит к интересным выводам, которые мы рассмотрим далее.

Теперь, перейдем к выводу формулы силы Кориолиса для материальной точки, при не традиционном распределении составляющих сложного движения на переносное и относительное движения.

2.7. Геометрический вывод формулы ускорения Кориолиса

Допустим, что принадлежащая телу Т точка М совершает сложное движение в плоскости чертежа (см. рис. 2.5), движется поступательно с постоянной переносной скоростью

[11] Хотя при решении задач, указывается, что задача решается либо в подвижной, либо в неподвижной системе отсчета, но, никогда не делается переход из подвижной в неподвижную или наоборот, чтобы при этом появлялись или исчезали силы инерции.

[12] Что и делается в лагранжевой механике, где упоминания о силах инерции и не инерциальных системах отсчета появляются, только тогда, когда рассматриваются конкретные (феноменологические) модели.

$v_{пер}$ и вращается вокруг оси OO, перпендикулярной плоскости чертежа, с относительной угловой скоростью $\omega_{отн}$. Участвуя в относительном движении, точка приобретает линейную скорость $v_{отн} = \omega_{отн} R$, где R – расстояние от оси OO_1 до точки M.

В результате переносного и относительного движений точка M за промежуток времени Δt переместится из точки A в точку B. Такое перемещение можно рассматривать как поворот точки M вокруг оси O на угол $\omega_{отн}\Delta t$ в положение C (относительное) движение и перемещение из точки C в точку B (переносное движение) со скоростью $v_{пер}$. Относительная скорость точки M в положении C по-прежнему равна $\omega_{отн}R$, но ее вектор повернут относительно первоначального направления на угол $\omega_{отн}\ \Delta t$. Вектор скорости $\omega_{отн} R$ соответствующий начальному положению A точки M, перенесем в точку C (CE). Относительная скорость точки M изменилась на величину $\Delta v_{отн}$.

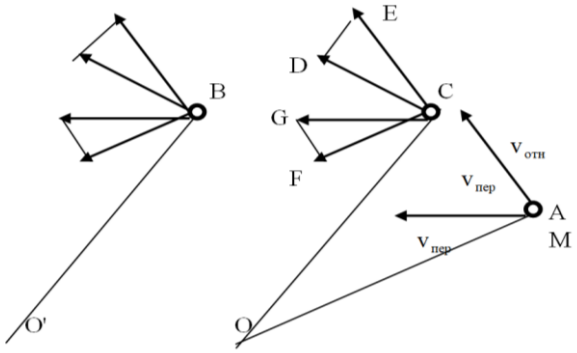


Рис. 2.5. Точка M совершает сложное движение в плоскости чертежа

Следовательно, относительное движение точки M происходит с ускорением, которое можно определить по формуле:

$$w_{Ц} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_{отн}}{\Delta t} \quad , \tag{2.15}$$

где $w_{Ц}$ - центростремительное ускорение, обусловленное относительным движением.

Т.к. при прямолинейном равномерном движении ускорение точки равно нулю, то переносное движение не вносит дополнительных членов в формулу ускорения при переходе материальной точки из положения C в положение B.

Величину $\Delta v_{Ц}$, легко определить из равнобедренного треугольника CDE, где

$$\Delta v_{отн} = 2\omega_{отн} R \sin \frac{\omega_{отн} \Delta t}{2} \quad . \tag{2.16}$$

Поскольку угол $\omega \Delta t$ мал, синус этого угла можно заменить углом, тогда

$$\Delta v_{отн} = \omega_{отн}^{2} R \Delta t \quad . \tag{2.17}$$

Следовательно,

$$w_{Ц} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega_{отн}^{2} R \Delta t}{\Delta t} = \omega_{отн}^{2} R \quad . \tag{2.18}$$

Переносная скорость, также, при переходе из точки А в точку С, поворачивается на угол $\omega\Delta t$. Перенесем вектор переносной скорости v_E в точку С (CG). Соответственно, поворотное ускорение переносной скорости определяется по формуле

$$w_K = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_{пер}}{\Delta t} \quad . \qquad (2.19)$$

здесь w_K - поворотное ускорение переносной скорости
$\Delta v_П$ - приращение переносной скорости.

Из равнобедренного треугольника CFG

$$\Delta v_{пер} = 2v_{пер} \sin\frac{\omega_{отн}\Delta t}{2} \quad . \qquad (2.20)$$

ввиду малости угла $\omega\Delta t$

$$\Delta v_{пер} = v_{пер}\omega_{отн}\Delta t \quad . \qquad (2.21)$$

Следовательно,

$$w_K = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_{пер}\omega_{отн}\Delta t}{\Delta t} = v_{пер}\omega_{отн} \quad . \qquad (2.22)$$

При сложном движении материальной точки, кроме центростремительного ускорения $w_Ц$, появляется дополнительное ускорение w_K, которое носит название поворотного или кориолисового ускорения. Легко видеть, что приведенный вывод формулы ускорения Кориолиса - стандартный, приведенный в любом учебнике по теоретической механике, но только переносное движение заменено относительным, и наоборот. Основанием для такой замены может служить следующее рассуждение. Если при вращении скорость точки поворачивается, и точка испытывает поворотное ускорение, то наличие такого ускорения не может зависеть от того, как называется вращение, вызвавшее это ускорение переносным или относительным. Но, необходимо заметить, что, если формула центростремительного ускорения одна и та же, как в случае переносного вращательного и прямолинейного относительного движения точки, так и в случае прямолинейного переносного и вращательного - относительного движения. Т.о., кориолисово ускорение имеет две формы, различающиеся коэффициентом. Так, в случае переносного вращательного, и относительного – прямолинейного, формула кориолисового ускорения [19]

$$w_K = 2\,[v_{отн}\ \omega_{пер}] \quad , \qquad (2.23)$$

здесь $v_{отн}$ - линейная скорость прямолинейного относительного движения,
$\omega_{пер}$ - угловая скорость переносного вращательного движения,

В случае переносного прямолинейного и относительного вращательного

$$w_K = [v_{пер}\ \omega_{отн}] \quad , \qquad (2.24)$$

здесь $v_{пер}$ - линейная скорость прямолинейного переносного движения,
$\omega_{отн}$ - угловая скорость относительного вращательного движения.

Важно отметить, коэффициент 2 исчезает потому, что во втором случае радиус вращения не изменяется в процессе движения.

Приведенный выше вывод формулы силы Кориолиса показывает, что сила Кориолиса действует на точку в случае сложного движения относительно неподвижной системы координат, независимо от наличия подвижной системы координат, а также от распределения сложного движения на переносное и относительное.

Следовательно, силы инерции действуют в неподвижной системе координат, и значит, неподвижная система координат является неинерциальной, со всеми вытекающими отсюда выводами.

2.8. Основное уравнение механики

Из предыдущего следует, что основное уравнение динамики в неподвижной системе координат, в общем случае должно записываться в виде

$$ma = F + F_K + F_ц \quad , \tag{2.25}$$

где m – масса, a – ускорение, F - внешняя сила, F_K - сила инерции Кориолиса, $F_ц$ - центробежная сила инерции

Уравнение (2.25) известно в теоретической механике [10], но его принято относить, как уже сказано выше, к подвижной неинерциальной системе координат. Но, выше приведено вполне достаточно доказательств того, что неподвижная система координат является неинерциальной в общем случае, и поэтому уравнение движения материальной точки, или уравнение движения центра масс системы точек, должно быть записано как уравнение движения в неподвижной не инерциальной системе координат.

Подставив выражение силы инерции Кориолиса и формулу центробежной силы инерции, получим уравнение движения центра масс в развернутом виде

$$ma = F + m\,[v\ \omega] + \Sigma m_i\,[v_o\ \omega] \quad , \tag{2.26}$$

здесь v - поступательная скорость центра масс, v_o - орбитальная скорость i-ой материальной точки системы, m_i - масса i -ой материальной точки, ω - угловая скорость системы точек.

Легко видеть, что в случае отсутствия собственного вращения ($\omega=0$), уравнение (2.25), приводится к виду

$$ma = F \quad . \tag{2.27}$$

Последнее уравнение, по современной терминологии - это уравнение Ньютона для материальной точки, и теорема о движении центра масс для системы материальных точек.

В современной механике принято считать, что уравнения Ньютона занимают доминирующее положение в механике, т.к. эти уравнения описывают движение материальной точки в инерциальной системе координат и, согласно аксиоматике, в неподвижной системе координат. Уравнения Даламбера соответственно имеют второстепенное значение, и применяются только в случае специально введенных подвижных неинерциальных систем координат.

Таким образом, ввиду того, что приведено достаточно доказательств того, что неподвижная система координат является иногда неинерциальной, все должно быть наоборот. Уравнения Даламбера должны считаться основными уравнениями механики, а уравнения Ньютона - частным случаем, верными в системе отсчета, в которой силы инерции не действуют, т.е. инерциальной системе отсчета. Совершенно не обязательно, что это будет

неподвижная система координат. По крайней мере, это видно для второго закона Ньютона в форме уравнения (2.26), который является частным случаем уравнения (2.25).

И хотя принято вводить первый закон Ньютона как постулат, без доказательств, как отдельный закон инерции, на самом деле, первый закон Ньютона является следствием второго закона при условии, равенства внешних сил нулю, либо их взаимная компенсация.

В самом деле, если F = 0, то уравнение (2.25) приводится к виду

$$ma = F = 0 \qquad (2.28)$$

или

$$m\frac{dv}{dt} = 0 \ ,$$

окончательно имеем

$$v = const \qquad . \qquad (2.29)$$

т.е. тело движется прямолинейно равномерно, т.к. вектор скорости постоянный по величине и направлению.

Легко видеть, что в общем случае, в форме уравнения (2.25), данный закон не исполняется.

Если $F = 0$, то

$$ma = 0 + m\,[v\,\omega] + \Sigma m_i\,[v_o\omega] \neq 0 \quad . \qquad (2.30)$$

Т.е. при наличии вращения тело будет двигаться ускоренно, даже в отсутствии внешних сил.

С третьим законом Ньютона, который гласит, что сила действия равна по величине и противоположна по направлению силе противодействия, то же, не все просто. По крайней мере, спортсменам, имеющим дело с мячами, футболистам, теннисистам и т.д., известно, что крученые мячи при встрече с препятствиями ведут себя не адекватно.

Это вызвано тем, что кроме силы воздействия со стороны препятствия, в дело вступают, как сказано выше, также и силы инерции вращения. Хотя закон сохранения импульса никто отменить не может, результат столкновения будет не таким простым, как в ньютоновской механике, в которой рассматривается движение не вращающихся тел[13].

2.9. Решение общего уравнения динамики

Запишем основное уравнение движения осе симметричного тела, вращающегося вокруг оси симметрии, и не имеющего неподвижных точек в неподвижные системы координат, в векторной форме

$$ma = F + m\,[v\omega] + \Sigma m_i\,[v_o\omega]_i \qquad , \qquad (2.31)$$

где m - масса тела, a - ускорение тела в неподвижной системе координат, F - внешняя сила, действующая на тело со стороны других тел, ω - угловая скорость собственного

[13] Принято считать, что законы Ньютона описывают движение в неподвижной системе любых тел, в том числе и вращающихся, но в дифференциальные уравнения второго закона Ньютона вращение не входит. Чтобы решить подобные задачи в современной механике необходимо сделать фокус, перейти в подвижную систему координат. Но ни один физик не сможет ответить, как решить эту задачу не переходя в подвижную систему отсчета, в терминах сил (согласно второму закону Ньютона).

вращения, v - линейная скорость центра инерции тела относительно неподвижной системы координат, m_i - масса i-ой точки тела, v_o - орбитальная скорость i-ой точки тела

В формуле (2.28) первый член в правой части внешняя сила, второй - сила инерции Кориолиса и третий - сила инерции центробежная. Т.к. тело осе симметричное и вращается вокруг оси симметрии, то сила инерции центробежная равна нулю. В этом случае уравнение (1.3) записывается в виде

$$ma = F + m[v\omega] \qquad (2.32)$$

и в координатной форме

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x + m[v\omega]_x$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = F_y + m[v\omega]_y$$

$$m\frac{dv_z}{dt} = F_z + m[v\omega]_z \quad .$$

Входящие в общее уравнение движения силы, резко отличаются друг от друга.

Внешняя сила как ускоряет движение тела, если скорость параллельна силе, так и поворачивает траекторию движения тела, если скорость перпендикулярна силе.

Сила Кориолиса только поворачивает траекторию движения без линейного ускорения, при этом, сила Кориолиса всегда перпендикулярна линейной скорости и оси вращения.

Такой комплекс сил известен в электродинамике - движение заряженной частицы в электрическом и магнитном полях.

Уравнение движения в этом случае, известно, как уравнение Лоренца [14]

$$ma = F_{ЭЛ} + q[B\ v] \quad , \qquad (2.33)$$

где $F_{ЭЛ}$ - сила, действующая на частицу со стороны электрического поля, q - электрический заряд частицы, B - индукция магнитного поля, v - линейная скорость частицы.

С учетом различий обозначений легко видеть, что эти формулы математически (но, не физически) идентичны.

В связи с тем, что одинаковые уравнения имеют одинаковые решения, то можно воспользоваться известными методами решения уравнения Лоренца, аналогичного уравнению динамики.

Воспользуемся методом решения уравнения Лоренца, приведенным в [14].

Пусть, ось x направлена вдоль вектора ϖ, а ось z перпендикулярна векторам ω и F. В этом случае уравнения (2.32) примут вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \qquad (2.34)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y + m\omega\frac{dz}{dt} \qquad (2.35)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -m\omega\frac{dy}{dt} \quad . \tag{2.36}$$

Введем обозначения

$$\varepsilon_x = \frac{F_x}{m} \quad \varepsilon_y = \frac{F_y}{m} \quad \varepsilon_z = \frac{F_z}{m} \quad . \tag{2.37}$$

Тогда уравнения движения примут вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon_x \tag{2.38}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon_y + \omega\frac{dz}{dt} \tag{2.39}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega\frac{dy}{dt} \quad . \tag{2.40}$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_x t + C_1 \tag{2.41}$$

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon_y t + \omega z + C_2 \tag{2.42}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\omega y + C_3 \quad . \tag{2.43}$$

Из уравнения (2.38) имеем

$$x = \frac{\varepsilon_x{}^2 t}{2} + C_1 t + C_4 \quad . \tag{2.44}$$

Из уравнений (2.39) и (2.40) имеем

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = \varepsilon_y + \omega C_3 \quad . \tag{2.45}$$

Общее решение этого уравнения можно представить

$$y = y_1 + y_2 \quad , \tag{2.46}$$

где y_1 - общее решение уравнения без правой части, y_2 - частное решение неоднородного уравнения. Легко видеть,

$$y_1 = C_5 e^{i\omega t} + C_6 e^{-i\omega t} \quad (2.47)$$

или

$$y_1 = R\sin(\omega t + \varphi) \quad (2.48)$$

и

$$y_2 = \frac{\varepsilon_y}{\omega^2} + \frac{C_3}{\omega} \quad (2.49)$$

Проинтегрируем. Тогда

$$z = z_1 + z_2 \quad (2.50)$$

где

$$z_1 = R\cos(\omega t + \phi) \quad (2.51)$$

$$z_2 = -\frac{\varepsilon_y}{\omega} t + C_7 \quad (2.52)$$

Константы $C_1 \div C_3$ определяются из начальных условий: при t = 0 имеем

$$x = x_0, \quad \mathrm{y} = \mathrm{y}_0, \quad \mathrm{z} = \mathrm{z}_0,$$
$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \dot{x}_0, \ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = \dot{y}_0, \ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} = \dot{z}_0 \quad (2.53)$$

Формулы описывают равномерное движение по окружности радиуса R с угловой скоростью ω вокруг оси параллельной оси x, т.е. вокруг направления вектора собственного вращения ϖ.

Решения выражают параболу в плоскости, перпендикулярной оси y. Если *R=0*, то движение центра инерции сводится к перемещению по параболе. В общем случае центр инерции свободного гироскопического тела движется вокруг оси, параллельной вектору собственного вращения, по окружности прецессии, центр которой перемещается по параболе. При этом траекторией центра инерции является пространственная спираль, окружающая параболу.

Радиус винтовой линии определяется по формуле

$$R = \frac{v_1}{\omega} \quad , \quad (2.54)$$

здесь v_1 - скорость центра инерции тела в плоскости, перпендикулярной вектору угловой скорости собственного вращения (ω).

Период оборота по спирали

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad , \quad (2.55)$$

шаг винтовой линии равен

$$l = \frac{2\pi v_2}{\omega} \quad , \quad (2.56)$$

где v_2 - скорость центра инерции в направлении параллельно вектору ϖ.

2.10. Частные случаи решения

1. В случае отсутствия собственного вращения уравнение движения центра инерции вырождается в уравнение Ньютона

$$F = ma \quad , \qquad (2.57)$$

где F - внешняя сила, действующая на тело, m - масса тела, a - ускорение центра инерции тела в неподвижной системе координат.

2. В случае отсутствия внешней силы парабола вырождается в прямую линию, параллельную оси x, и траекторией центра инерции становится цилиндрическая винтовая линия с радиусом R, осью которой является направление вектора угловой скорости собственного вращения (ϖ).

Скорость движения при этом остается неизменной по величине.

В частном случае, когда начальная скорость перпендикулярна ϖ, винтовая линия вырождается в окружность.

Рассмотрим общий случай, когда внешняя сила параллельна вектору ϖ. В этом случае парабола при $\varepsilon_y = 0$, снова сводится к прямой линии параллельной вектору внешней силы и вектору ϖ. В таком случае траекторией центра инерции будет винтовая линия радиуса R, причем для R остается справедливой формула (2.54), т.к. внешняя сила перпендикулярная плоскости, в которой происходит движение по окружности радиуса R, не может изменить движения в этой плоскости. Для периода остается в силе формула (2.55).

Из начального условия $dx / dt = \dot{x}_0$ находим

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_x t + \dot{x}_0 \quad . \qquad (2.58)$$

Поэтому шаг винтовой линии $l = \left|\frac{dx}{dt}\right| T$ путем подстановки T из (2.55) выражается формулой

$$l = \frac{2\pi}{\omega}\left|\varepsilon_x t + \dot{x}_0\right| \quad . \qquad (2.59)$$

Если вектор внешней силы направлен вдоль направления вектора ϖ, то $\varepsilon_x > 0$ и шаг l растет со временем при $\dot{x}_0 > 0$, но при $\dot{x}_0 < 0$ величина l сначала убывает и лишь при $t > \frac{|\dot{x}_0|}{\varepsilon_x}$ шаг растет со временем.

Если вектор внешней силы направлен против направления вектора ω, то $\varepsilon_x < 0$ и шаг l монотонно растет со временем при условии $\dot{x}_0 < 0$, но при $\dot{x}_0 > 0$ шаг сначала убывает и затем растет, когда $t > \frac{|\dot{x}_0|}{\varepsilon_x}$.

Рассмотрим случай, когда внешняя сила перпендикулярна вектору ω.

Пример. Определить движение волчка на опорной плоскости ω=125 1/сек и запущенного с вертикальной осью вращения со скоростью V_Γ=50см/сек по горизонтали, считая трение опорной точки оси нулевым. Волчок представляет собой цилиндрический ротор. Размеры ротора: диаметр D=8 см, высота h=5 см, расстояние от точки опоры до центра масс l = 10 см, удельный вес стали 7,8 г/см ^{3} .

Решение. Т.к. на тело действует внешний момент, силы тяжести задача решается в два этапа, на первом этапе определим движение волчка в подвижной системе координат. Начало подвижной системы координат (рис. 1.4) привяжем к точке опоры, оси $x_1 y_1 z_1$ направим параллельно осям неподвижной системы координат. Тогда в системе координат $x_1 y_1 z_1$ волчок будет иметь одну неподвижную точку на оси вращения, т.е. задача решается методами теории гироскопов [15].

Осевые моменты инерции

$$J_\xi = J_\eta = \frac{m}{12}\left(\frac{3D^2}{4} + h^2\right) + ml^2 = \frac{G}{12g}\left(\frac{3D^2}{4} + h^2\right) + \frac{Gl^2}{g} \quad ,$$

$$J_\zeta = \frac{mD^2}{8} = \frac{G}{g} * \frac{D^2}{8} \quad , \qquad G = \frac{\pi' D^2}{4} h\gamma \quad .$$

Собственный или кинетический момент гироскопа H

$$H = J_\zeta \Omega_\zeta \quad .$$

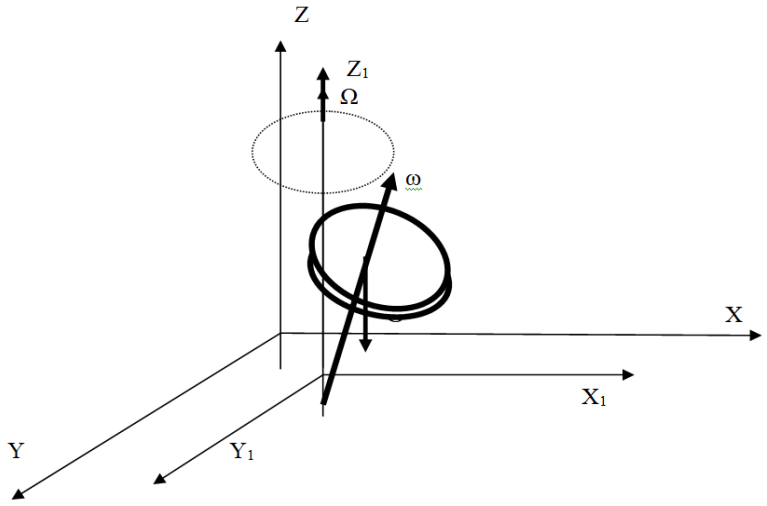


Рис. 1.6. Движение волчка в подвижной системе координат

Подставив исходные данные, получим

$$G = \frac{3{,}14 * 0.08^2}{4} 0{,}05 * 7800 = 1{,}959 \text{ кг},$$

$$J_\xi = J_\eta = \frac{1{,}959}{12 * 9{,}81}\left(\frac{3}{4} 0{,}08^2 + 0{,}05^2\right) + \frac{1{,}959 * 0{,}1^2}{9{,}81} = 21{,}183 * 10^{-4} \text{ кг м}^2,$$

$$J_\zeta = \frac{1{,}959 * 0{,}08^2}{9{,}81 * 8} = 1{,}597 * 10^{-4} \text{ кг м}^2,$$

$$H = 1{,}597 * 10^{-4} * 125 = 0{,}01996 \text{ кг м/с}.$$

Согласно теории ось волчка ζ движется вокруг направления истинной вертикали (ось z $_1$) с постоянной угловой скоростью $\Omega = \frac{Gl}{H}$, описывая вокруг этого направления круглый конус с углом при вершине равным 2β. Такое движение называется вынужденной регулярной прецессией.

Угол наклона волчка определяется по формуле:

$$tg\beta = \frac{J_\xi M^0}{H^2} = \frac{J_\xi Gl \sin\beta}{H^2}$$

где M^0 - момент внешних сил.

Отсюда

$$\cos\ \beta = \frac{H^2}{J_{\xi} Gl} = \frac{0{,}01996^2}{21{,}183 * 10^{-4} * 1{,}959 * 0{,}1} = 0{,}960 \quad ,$$

$$\beta = 16°15' \quad ,$$

$$\Omega = \frac{1{,}959 * 0{,}1}{0{,}01996} = 9{,}81 \ \text{1/с}.$$

На втором этапе решения решаем задачу движения точки опоры на плоскости, при этом необходимо учитывать, что равнодействующая внешних сил, действующих на волчок равна нулю, т.к. сила тяжести скомпенсирована реакцией опорной поверхности, поэтому уравнение движения волчка записывается в виде:

$$ma = -\ m\ [\ \omega v] \quad ,$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0 \quad ,$$

$$R = \frac{v_{\Gamma}}{\omega \cos\beta + \Omega} = \frac{0{,}5}{125 * 0{,}96 + 9{,}81} = 0{,}004 \ \text{м} \ .$$

$$\Omega = \omega_Z = 129{,}8 \ \text{1/с}.$$

Т.о. общее движение волчка в неподвижной системе координат представляет собой сложное движение: движение по кругу радиусом R = 4 мм точки приведения (точки опоры) в плоскости XY с круговой частотой Ω = 129,8 1/сек и прецессией оси собственного вращения вокруг направления истинной вертикали.

Для точного решения задачи необходимо учитывать силу трения в месте контакта оси и опорной поверхности.

Учет действия силы трения, согласно теории гироскопов, приводит к нутационным колебаниям оси собственного вращения с частотой:

$$\omega = \frac{M_{TP}}{H} = \frac{F_{TP} l}{H} \quad .$$

Нутационный бросок:

$$\beta_H = -\frac{M_{TP} A}{H^2} \quad ,$$

где M_{TP} - момент трения относительно центра масс, F_{TP} - сила трения в точке опоры.

Причем, осевые моменты A и H в этом случае определяются для осей проходящих через центр масс. Легко видеть, что учет силы трения принципиально не меняет характер движения волчка, а только усложняет его путем внесения дополнительных колебаний.

2.11. Обсуждение

Выше рассмотрены решения общего уравнения механики движения вращающихся тел и частные случаи решения. Во-первых, необходимо вернуться к вопросу о движении тела при отсутствии внешнего воздействия со стороны других тел, в случае ньютоновской механики поведение тела описывается первым законом Ньютона, в общем случае этот закон может быть сформулирован следующим образом. Центр масс тела имеющего собственное вращение вокруг оси, совпадающей с осью симметрии тела (спин)[14], в случае, когда вектор равнодействующей внешних сил равен нулю, движется по цилиндрической винтовой линии. Направление оси, которой совпадает с направлением вектора угловой скорости собственного вращения (ω). Направление и скорость дрейфа вдоль винтовой линии равна начальной скорости вдоль направления ω, радиус и круговая частота обращения по винтовой линии

[14] В классической механике в настоящий момент такого термина нет, но первоначально в атомную физику термин спин (вращение – англ.) был введен в 1925 году для классической теории электрона, представляя электрон как сферическую частицу, имеющую 6 степеней свободы. Для тех, кому не нравится английский термин, может заменить его выражением: вращение осесимметричного тела вокруг оси симметрии, проходящей через центр тяжести.

определяется начальной скоростью перпендикулярной ϖ и определяются по формулам (2.46 – 2.48). Причем, если в начальный момент времени v = 0, тело неподвижно, то оно сохраняет состояние неподвижности.

Если $\omega = 0$, тело не имеет спина, то следует, что
$R = T = l = \infty$.

Окружность вырождается в прямую линию, движение вдоль которой бесконечно, т.е. первый закон Ньютона.

А теперь вернемся к вопросу об истории науки. Дело в том, что волчок, рассмотрение движения которого привело авторов к пересмотру догматов механики, в науке называется «волчок Лагранжа». Потому, что Лагранж первый в науке начал рассматривать вопросы общего движения тела с учетом собственного вращения, поднятые в данной работе.

Но, Лагранж проиграл Ньютону войну авторитетов, а что проиграла при этом наука, еще предстоит выяснить.

В физике известна т.н. механика Лагранжа, в которой не вводятся понятия инерциальных и неинерциальных систем координат, а все координаты объявляются обобщенными. При этом «лагранжева механика описывает движение механической системы при помощи конфигурационного пространства, которое имеет структуру дифференцируемого многообразия. На дифференцируемом многообразии действует группа диффеоморфизмов» [1] и т.д. Эта цитата приведена с единственной целью, показать необходимый уровень математической подготовки. Хотя в лагранжевой механике возможно решение некоторых задач недоступных в ньютоновской механике. «Лагранжева точка зрения позволяет исследовать до конца ряд важных задач механики, например, в теории малых колебаний и в динамике твердого тела» [1, стр. 47] Но в лагранжевой механике отсутствуют физические модели, схемы, рисунки сплошь математические формулы, поэтому эту механику невозможно понять образно, как ньютоновскую механику, а только запомнить математические формулы и способы их решения. Отсюда следует, почему обучение механики разделяется на два уровня, ньютоновская для всех и лагранжева для гурманов, знатоков математической экзотики.

Поэтому, несмотря на то, что лагранжева механика противоречит ньютоновской механике в части отсутствия избранных систем отсчета, инерциальности одних и не инерциальности других, что прямо противоречит канонам ньютоновской механики, т.к. уравнения ньютоновской механики в инерциальных и неинерциальных системах отсчета принципиально различаются. Тем не менее, лагранжева механика путем ухода в математические дебри сумела выстоять в мире, где механика Ньютона считается абсолютно верной и ревизии не подлежит.

2.12. Выводы

Первый закон Ньютона является не общим законом инерции, как это принято считать в современной механике, а только частным случаем второго закона Ньютона. Общий закон инерции необходимо формулировать на основании утверждений Галилея (см. в тексте). Принципиальное различие принципа относительности Галилея, состоит в том, что инерциальное движение возможно, не только прямолинейное, а также криволинейное.

Третий закон Ньютона, который гласит, что сила действия равна по величине и обратна по направлению силе противодействия, выполняется только в том случае если взаимодействующие тела (или материальные точки) неподвижны или движутся инерциально, без линейного ускорения в направлении действия сил.

Разделение движений в ньютоновской механике на переносное и относительное является феноменологическим и не отражает физической сущности движения материальных тел. Поэтому, необходимо отказаться от утверждения в принципиальном различии

переносного и относительного движений, и привести в соответствие ньютоновскую и лагранжеву механику, в части разделения общего движения на составные части.

В связи с отсутствием различий относительного и переносного движений, в общее уравнения динамики, движения тела и материальной точки относительно неподвижной системы отсчета, должны входить инерциальные силы, независимо от того какое движение является ускоренным.

В связи с тем, что в общие уравнения динамики относительно неподвижной системы отсчета входят силы инерции, значит неподвижная система отсчета в действительности является в общем случае неинерциальной.

Неподвижная система отсчета является инерциальной в частном случае, когда силы инерции равны нулю. Это наблюдается, если все движения, составляющие сложное движение относительно неподвижной системы отсчета, будут неускоренными (прямолинейными и равномерными).

В связи с вышеизложенным следует, что ньютоновская механика является частным случаем общей классической механики. Соответственно, уравнения Ньютона – это частный случай общих уравнений механики.

Соответственно, следствие первого закона Ньютона, что тело, на которое не действуют внешние силы или равнодействующая внешних сил равна нулю, покоится, либо движется прямолинейно и равномерно, выполняется только в частном случае если тело при этом не вращается вокруг оси.

Если тело вращается вокруг произвольной оси, другими словами имеет спин, то при равенстве нулю равнодействующей внешних сил тело, либо покоится, либо движется по винтовой линии, если вектор скорости перпендикулярна вектору спина, винтовая линия вырождается в круг. Скорость при этих движениях остается равномерной.

Глава 3. Механика Ньютона, Лагранжа и Гамильтона

3.1. Введение

Начало развития механики принято связывать с Древней Грецией[15]. К начальным научным работам принято относить натурфилософские сочинения Аристотеля (4 в. до н.э.) [28, с. 127].

Основные разделы классической механики[16] принято различать по имени их авторов: ньютоновская (ньютонова), лагранжева и гамильтонова.

«В 18 в. интенсивно развиваются аналитические методы решения задач механики, основывающиеся на использовании дифференциальных и интегральных исчислений. Основы классической механики заложены в работах И. Ньютона.

Разработку этих методов завершил Лагранж, получивший уравнения движения системы в обобщенных координатах» [там же].

В данной главе делается попытка внести ясность в вопрос о различиях и границах применения (а также о достоинствах и недостатках) каждой из теорий динамики. Необходимость таких попыток ясна из того, что в современной литературе нет четкого понятия ньютоновская и лагранжева механика и, главное, нет ясной оценки достоинств и недостатков каждой из «механик».

Так в частности в [13] сказано:

«Ньютонова механика изучает системы материальных точек в трехмерном евклидовом пространстве».

По определению: «Евклидово пространство – пространство, свойства которого описываются аксиомами евклидовой геометрии. В более общем смысле евклидово пространство – конечномерное действительное пространство R^n со скалярным произведением (x, y) где x, y $\in R^n$, которое в надлежащем образом выбранных координатах (декартовых)

$x\ (x_1, ..., x_n)\ и\ y\ (y_1, ..., y_n)$

выражается формулой

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i, y_i» \text{ [18].} \qquad (3.1)$$

Т.е. ньютонова механика предполагает изучение движения только в прямоугольных декартовых координатах, т.к., например, в полярных координатах формула скалярного произведения не совпадает с формулой (1.1) и даже в декартовых косоугольных координатах формула скалярного произведения отличается от (1.1). Во-вторых, в любых других координатах, кроме прямоугольных декартовых, аксиомы Евклида уже не будут аксиомами[17].

Тем не менее, в ньютоновской механике широко применяются другие системы координат, кроме декартовых, например, при решении задачи движения материальной точки в центральном поле – полярные (сферические), например [13]:

«Рассмотрим движение точки в центральном поле на плоскости

[15] Достаточно вспомнить строительство пирамид в Древнем Египте, чтобы усомниться в том, что до Древней Греции механики (как науки) не существовало.

[16] В действительности имеется в виду не вся механика, а только динамика механической системы материальных точек или абсолютно твердого тела.

[17] «**Аксиома –** основное положение, самоочевидный принцип» [Мат. Энцикл., т. 1, с. 103] (подчеркнуто нами). По крайней мере, аксиомы Евклида, переведенные математически в другие координаты, перестают быть самоочевидными и требуют доказательств.

$$\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r}\ ,\ U = U\ (r). \qquad (3.2)$$

Естественно перейти к полярным координатам *r, φ* ».

Так же естественно при решении других конкретных задач в рамках ньютоновской механики вводятся любые координаты, а не только прямоугольные декартовые, и значит под термином «координаты» в ньютоновской механике, в общем случае, понимаются координаты любые, «обобщенные».

Приведенные рассуждения позволяют сформулировать тезис о том, что ньютоновская механика изучает движение системы материальных точек, или абсолютно твердого тела, в общем случае, в обобщенных координатах. В частных случаях, когда это удобно, в декартовых.

И таким образом, мы пришли к противоречию, состоящего в том, что по применяемым координатам (обобщенным) ньютоновская механика ничем не отличается от лагранжевой, где также исследование движения проводятся в обобщенных координатах.

Других строгих определений ньютоновской механики и ее отличий от лагранжевой механики не существует[18].

Мы не рассматриваем отдельно гамильтонову механику, пользуясь определением данным в литературе [14]:

«Лагранжева механика включает гамильтонову как частный случай (фазовое пространство в этом случае есть кокасательное расслоение конфигурационного, а функция Гамильтона – преобразование Лежандра функции Лагранжа)».

3.2. Ньютоновская механика

Разберемся в вопросе, что же является принципиальным в ньютоновской механике. Т.е. подготовим основание для ответа, поставленного в начале главы: чем ньютоновская механика принципиально отличается от лагранжевой.

Как уже сказано, по применяемым координатам: декартовым, обобщенным и т.д., ньютоновская механика не отличается от других. Следующее определение, которое встречается в литературе – это обоснование, что ньютоновская механика основана на трех законах Ньютона, отсюда и название.

Данное определение не может считаться серьезным, т.к. математические законы Ньютона не только не противоречат законам механики Лагранжа и Гамильтона, но наоборот являются неотъемлемой частью лагранжевой механики, как уравнения Эйлера – Лагранжа. Поэтому присутствие уравнений Ньютона не дает оснований отличать ньютоновскую механику.

И все-таки именно по уравнениям Ньютона идет разделение механики, не по их наличию, а по способу их введения в механику.

Так в лагранжевой механике уравнения Эйлера – Лагранжа (уравнения Ньютона) – это следствие вариационного принципа Гамильтона в механике.

А в ньютоновской механике уравнения Ньютона не выводятся из каких-либо основополагающих законов, а сами являются таковыми, и вводятся эмпирически как результат долгой практики изучения динамики движения твердых тел.

Приведем примерный образец основ ньютоновской механики:

«Согласно принципу детерминированности Ньютона все движения системы однозначно определяются ее начальными положениями $\left(\bar{x}(t_0) \in R^N\right)$ и начальными скоростями $\left(\dot{\bar{x}}(t_0) \in R^N\right)$.

[18] По крайней мере, авторам они неизвестны.

В частности, начальные положения и скорости определяют ускорения. Иными словами существует функция $F: R^N \times R^N \times R^N \to R^N$ такая, что

$$\ddot{\bar{x}} = F\ (x, \dot{x}, t)\,.$$

(3.3)

Уравнение (1.2) положено Ньютоном в основу механики. Оно называется уравнением Ньютона.

Вид функции F для каждой конкретной механической системы определяется экспериментально. С математической точки зрения вид F для каждой системы составляет определение этой системы» [14].

Такое положение, что закон вводится на основе обработки экспериментальных данных проходит красной нитью через всю ньютоновскую механику. Все основные законы не выводятся, а эмпирически вводятся.

Например, формула кинетической энергии в декартовых координатах

$$T = \frac{mv^2}{2}\ , \qquad (3.4)$$

является чисто эмпирической и не следует ни из каких более общих, законов. То же самое можно сказать и о полной механической энергии системы

$$E = T(\dot{x}) - U(x)\,, \qquad (3.5)$$

где E – полная энергия системы,
T – кинетическая энергия,
U – потенциальная энергия.

Таким образом, можно сделать предварительный вывод, что ньютоновская механика основана на эмпирических законах и главным доказательством истины является экспериментальное подтверждение[19].

Но все-таки, как мы увидим далее, это не является принципиальным отличием ньютоновской механики, хотя бы потому, что в лагранжевой механике эмпиризма ничуть не меньше.

3.3. Лагранжева механика

«Лагранжева механика описывает движение механической системы при помощи конфигурационного пространства. Ньютонова потенциальная система – частный случай лагранжевой (конфигурационное пространство в этом случае евклидово, а функция Лагранжа в этом случае равна разности кинетической и потенциальной энергий)» [13].

В приведенной цитате есть одна важная фраза, что ньютоновская механика – частный случай лагранжевой. Но никаких других механических законов, кроме законов ньютоновской механики, в лагранжевой механике нет. Значит, фраза о частном случае касается только применения систем координат, в ньютоновской – только декартовы [20], а в лагранжевой – обобщенные, т.е. любые, в том числе и декартовы.

Основанием для лагранжевой механики является вариационный принцип наименьшего действия Гамильтона.

«Движения механической системы совпадают с экстремалями функционала

[19] Знаменитая фраза Ньютона: «Гипотез не измышляю».
[20] А при решении конкретных задач любые (т.е. обобщенные).

$$\overline{\Phi}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt \qquad (3.6)$$

где L = T – U разность кинетической и потенциальной энергий [14, с. 51].

Согласно вариационному исчислению: «Чтобы кривая γ была экстремалью функционала $\overline{\Phi}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)dt$ на пространстве кривых x(t), соединяющих две данные точки (t_0, x_0) и (t_1, x_1), необходимо и достаточно выполнение вдоль нее уравнения Эйлера – Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \ .$$

Это система уравнений второго порядка, и решение зависит от 2n произвольных постоянных. Для нахождения их служат 2n условий $x(t_0) = x_0$ и $x(t_1) = x_1$.

Сравним уравнения динамики Ньютона

$$\frac{d}{d\,t}(m_i\, \dot{r}_i) + \frac{\partial U}{\partial r_i} = 0\,, \qquad (3.7)$$

с уравнением Эйлера – Лагранжа

$$\frac{d}{d\,t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0\,. \qquad (3.8)$$

Если

$$L = \frac{m_i\, \dot{x}_i^{\,2}}{2} - U\,, \qquad (3.9)$$

то легко видеть, что уравнения Ньютона – это уравнения Эйлера – Лагранжа для функционала согласно вариационному принципу Гамильтона.

Но, в декартовой неподвижной системе координат, принятой за основную в ньютоновской механике, функция Лагранжа всегда имеет вид (1.9), другой вид функция Лагранжа имеет только при переходе к другим координатам, но и уравнения Ньютона в других координатах преобразуются к соответствующему виду. Таким образом, уравнения Ньютона – это уравнения Эйлера – Лагранжа в любой системе координат.

Ранее, рассматривая уравнения Ньютона, мы говорили, что эти уравнения эмпирические и в ньютоновской механике не следуют ни из каких других законов и принципов.

В лагранжевой механике уравнения Эйлера – Лагранжа (уравнения Ньютона) следуют из принципа Гамильтона. Но в тоже время, сам принцип Гамильтона и форма функции Лагранжа также априорные.

Хотя лагранжеву механику и называют аналитической, в ее основе, также, как и в основе ньютоновской механики, лежат эмпирические принципы. Лагранжева механика не освобождает физику от эмпирических принципов, как это иногда кажется, а только переводит эмпирику, требующую экспериментальной проверки, на уровень более общих принципов, принятых априори, превращенных в догматы веры.

В доказательство приведем цитату:

«Наблюдательная (опытная) механика входит в различные отделы экспериментальной физики. В ней устанавливается связь между свойствами материальных тел, их движениями и причинами, вызывающими или изменяющими движение. Эти причины называют силами. Упомянутая связь формулируется в виде законов движения, которые *не являются математическими следствиями каких-то изначальных истин*, а представляют собой индуктивные положения, основанные на большом числе согласующихся между собой опытных фактов. Эти положения представляют собой утверждения о свойствах движения материальных объектов, верные с той или иной точностью. (Курсив наш)

Теоретическая, или рациональная, механика опирается на некоторое конечное число законов, установленных в опытной механике, принимаемых за истину, *не требующих доказательств* – аксиомы (Курсив наш). Эти аксиомы заменяют собой в теоретической механике индуктивные истины опытной механики» [17].

Причем, в опытной механике «эти положения ..., верные с той или иной точностью», а в теоретической механике «конечное число законов ..., принимаемых за истину, не требующих доказательств – аксиомы», вот в чем принципиальная разница механики Ньютона от механики Лагранжа. В ньютоновской каждое положение должно быть подтверждено экспериментально, а в лагранжевой основные положения должны приниматься на веру, как истины, не требующие доказательств.

Но вера в аксиомы, штука тонкая.

Во-первых, аксиомы очевидны только на первый взгляд, да и то больше в силу привычки верить в них, так в свое время было с гелиоцентрической системой мира Коперника. Противники Коперника апеллировали не к фактам, которых у них не было, а к безграничной вере в то, что Бог устроил Землю по «Аристотелю».

Во-вторых, аксиомы верны только при определенных условиях, например, аксиомы Евклида верны только в евклидовом пространстве и не выполняются в пространствах Римана-Бойяи, Лобачевского и других неевклидовых пространствах. Причем, не верны, не все сразу, а каждая в отдельности, любая аксиома Евклида может быть верна или не верна в конкретном неевклидовом пространстве, и этот вопрос требует конкретного рассмотрения в каждом отдельном случае.

В-третьих, безграничная вера в непогрешимость аксиом не помогает, а наоборот мешает развитию. И как сказал А.И. Крылов: «Тому, в истории мы тьму примеров слышим».

В то же самое время в аналитической механике нет и, не может быть аксиом, не подтверждаемых экспериментально, а значит, нет других законов, которые отсутствуют в опытной физике. Можно сказать, что аналитическая и опытная механики рассматривают одни и те же явления, пользуются одними и теми же законами, но с разных точек зрения. И значит, в аналитической механике невозможны выводы, поддающиеся экспериментальной проверке, но отсутствующие в опытной механике.

3.4. Гамильтонова механика

Гамильтонова механика наиболее математически формализованный раздел теоретической механики. Раздел именующийся гамильтоновой механикой настолько математический, что в литературе, например, в [14] приводится следующее определение: «Гамильтонова механика – это геометрия в фазовом пространстве. Гамильтонова механическая система задается четномерным многообразием («фазовым пространством»), симплектической структурой на нем («интегральным инвариантом Пуанкаре») и функцией на

нем («функцией Гамильтона»). Часто смешивают названия гамильтонова механика и канонические уравнения механики, так в [26] Сказано следующее: «КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ (уравнения Гамильтона), дифференциальные ур-ния движения механической системы (выведенные ирландским ученым У. Гамильтоном в 1834), в которых переменными, кроме обобщенных координат q_i, явл. обобщенные импульсы p_i, совокупность q_i и p_i называется каноническими переменными. Канонические переменные имеют вид:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i} (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{3.10}$$

где $H(q_i, p_i, t)$ — Гамильтона функция, равная (когда связи не зависят от времени, а действующие силы потенциальны) сумме кинетической и потенциальной энергий системы, выраженных через канонические переменные; s — число степеней свободы системы. Интегрируя эту систему обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, можно найти все q_i и p_i как функции времени t и 2s постоянных, определяемых по начальным данным. Канонические переменные обладают тем важным св-вом, что позволяют с помощью т. н. канонических преобразований перейти от q_i и p_i к новым каноническим переменным $Q_i(q_i, p_i, t)$ и $P_i(q_i, p_i, t)$. к-рые тоже удовлетворяют каноническим уравнениям, но с другой функцией $H(Q_i, P_i, t)$. Так канонические уравнения можно привести к виду, упрощающему процесс их интегрирования. Кроме классической механики, канонические уравнения используются в статистической физике, квантовой механике, электродинамике и др. областях физики».

Заметим, что канонические уравнения ВЫВЕДЕНЫ Гамильтоном математически, а не получены из опытов, как это сделал Ньютон. Тем не менее, уравнения Гамильтона получили широкое распространение, именно в силу математического формализма и потому, что уравнения Гамильтона являясь дифференциальными уравнениями 1-го порядка, легче интегрируются в общем случае, чем уравнения Лагранжа или уравнения Ньютона.

3.5. Решение проблемы необратимости

Несмотря на то, что в настоящее время в науке принято считать, что второй необратимость, вытекающая из второго закона термодинамики несовместима с законами механики – это совсем не так. Но прежде чем высказывать предложения по решению проблемы механической необратимости сформулируем требования к кинетической теории тепла. Чтобы новая теория удовлетворяла, казалось бы, противоречивых требований механики и термодинамики, ее аксиомы должны удовлетворять следующим требованиям

Механическая система должна быть замкнутой и сохранять полную механическую энергию. Т.е. должны отсутствовать превращения механической энергии в другие виды энергии, а также передача механической энергии извне системы и наружу.

Уравнения движения должны быть необратимы по времени. Для этого необходимо, чтобы механическая система была не гамильтоновой. Это требование вытекает из теоремы Лиувилля, что любая гамильтонова система принципиально обратима.

Из уравнений движения должно следовать, что для механической системы существует состояние устойчивого равновесия. И система должна самопроизвольно стремиться к достижению устойчивого равновесия. Это ситуация также противоречит теореме Лиувилля для гамильтоновых механических систем.

Два пункта из трех требуют, чтобы механическая система была не гамильтоновой. В современной теоретической механике это кажется невозможным, по крайней мере, ни в одном из источников учебной или научной литературы такие системы не описаны. Более того, в литературе встречаются утверждения, что лагранжева механика является обобщением ньютоновской механики, а гамильтонова механика включает в себя лагранжеву механику как частный случай [14].

Легко показать, что это не более чем инерция мышления.

На самом деле, все как раз наоборот.

В статье «Оценка проявления исторического менталитета в современной механике и физике» [71] авторы показали, что ни лагранжева, ни гамильтонова механики не являются обобщением ньютоновской механики, т.к. не содержат в себе никаких новых законов природы, которых бы не было бы в рамках ньютоновской механики. А являются только переформулированием законов ньютоновской механики на более формально-математическом языке. Здесь мы хотим углубить заявленные тезисы и показать, что именно ньютоновская механика является наиболее общим случаем механики, а лагранжева и гамильтоновы механики являются частными случаями ньютоновской механики.

Во-первых, необходимо понять, что означает понятия «обобщение» и «частный случай». Термин «обобщение» означает, что на основе некоторой области знаний выводятся более общие законы, которые имеют более широкое применение, выходящие за пределы первоначальной области. Термин «частный случай» означает, что этот случай является ограничением общего и применяется в случае, если выполняются определенные условия ограничения общей системы (законы, постулаты, теоремы и т.д.).

Теперь приведем определения лагранжевой механики и сравним области определения лагранжевой и ньютоновской механик.

«Лагранжева механическая система задается конфигурационным пространством и функцией Лагранжа, заданной в нем» [14]. В случае описания механической системы «Конфигурационное пространство в этом случае евклидово, а функция Лагранжа L равна разности кинетической и потенциальной энергий U = $E_{кин}$ - U» [14]. И на основании этого делается вывод, что ньютоновская механика – это частный случай лагранжевой механики. Но, обратим внимание, что поведение механической лагранжевой системы, полностью определяется функцией Лагранжа, зависящей только от кинетической и потенциальной энергий.

Может показаться, что лагранжева механическая система является консервативной механической системой. Но это не так. Консервативная механическая система является замкнутой, и основное ее свойство в том, что механическая энергия такой системы остается постоянной во все время движения. Такое возможно только в случае независимости функции Лагранжа от времени. Лагранжева механика допускает более широкое толкование и в общем случае функция Лагранжа может зависеть от времени и не сохранять свое значение, т.е. быть переменной в процессе движения системы.

Но, посмотрим еще раз на уравнение Лагранжа. Если кинетическая энергия не вызывает никаких вопросов, она всегда определяется однозначно массой и скоростью точки или тела. То потенциальная энергия, другое дело, само определение энергии «потенциальная», говорит о том, что силы, порождающие этот вид энергии потенциальные, т.е. зависят только от координат. Но, кроме потенциальных сил в механике известны и непотенциальные силы (силы трения и др.).

А уравнения Лагранжа выводятся как известно из условия, что все силы в рассматриваемой системе потенциальные[21]. Приведем определение: «В механике приняты следующие наименования: $L(q,\dot{q},t)-$ функция Лагранжа, лагранжиан, q_i обобщенные координаты, $\dot{q}_\iota$ – обобщенные скорости, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p_i$ – обобщенные импульсы, $\frac{\partial L}{\partial q}-$ обобщенные силы» [41].

[21] Некоторые авторы, в частности Гантмахер [31], рассматривают лагранжеву механику в более общем виде, приводя уравнения в котрые входят дополнительные члены, например, учитывающие диссипацию энергии или непотенциальные силы. Но, во-первых, такая расширенная лагранжева механика не укладывается в принятое определение лагранжевой, т.к. ее уравнения не являются классическими уравнениями Лагранжа [31], и к тому же, зачастую, требуют еще и дополнительных уравнений, например, уравнения Аппеля для неголономных систем [31]. И, во-вторых, даже в таком расширенном виде, не решаются некоторые вопросы ньютоновской механики, например, теория удара, или механика разрушений (прим. Авт.)

Из приведенного определения ясно, что обобщенные силы в лагранжевой механике только потенциальные (зависят только от координат), а лагранжиан может зависеть только от координат, скоростей и времени.

Если же в механической системе присутствуют не потенциальные силы или взаимодействия в механической системе зависят от других переменных, кроме координат, скоростей и времени, то для такой механической системы лагранжиан не определен, а, значит, такая система не будет подчиняться уравнениям Лагранжа.

Но, механические потенциальные системы в ньютоновской механике – это только частный случай общих механических систем. Т.к. в ньютоновской механике рассматриваются и более общие случаи, включающие в себя и не потенциальные механические системы с трением, излучением и т.д., выходит, что на самом деле, это лагранжева механика является частным случаем ньютоновской механики.

Продолжим дальше. Обратим внимание на гамильтонову механику. «Гамильтонова механическая система задается фазовым пространством, интегральным инвариантом Пуанкаре и функцией Гамильтона» [26]. «Лагранжева механика включается в гамильтонову как частный случай (фазовое пространство в этом случае есть кокасательное расслоение конфигурационного, а функция Гамильтона – преобразование Лежандра функции Лагранжа)» [29]. Во-первых, если для механической системы лагранжиан не определен, то нет смысла говорить о преобразованиях Лежандра.

Т.е., область определения гамильтоновых механических систем не больше чем область определения лагранжевой механики, как частного случая ньютоновской механики. И во-вторых, т.к. «функция H является первым интегралом гамильтонового фазового потока с функцией Гамильтона H» [29]. А в свою очередь для механических систем «функция Гамильтона H есть полная энергия $H = T + U$» [43], из всего этого следует вывод, что гамильтоновые механические системы – это лагранжевы механические системы при условии, что полная энергия системы постоянна.

Такие системы называются консервативными, они отличаются от неконсервативных тем, что в них лагранжиан не зависит от времени. Т.е., гамильтонова механика является частным случаем лагранжевой. Все сказанное можно выразить графически (см. рис. 3.1).



Рис. 3.1. Диаграмма областей определения ньютоновской, лагранжевой и гамильтоновой механик (рис. авторов)

Т.о., любая механическая система все силы, которой не потенциальные, будет не гамильтоновой.

Более того, из вышеизложенного следует, что не гамильтоновых механических систем намного больше, чем гамильтоновых.

Причем, т.к. теоремы Лиувилля и Пуанкаре доказаны только для гамильтоновых систем, нет ничего удивительного, если не гамильтоновы системы не подчиняются указанным теоремам, и для них возможны положения устойчивого равновесия и асимптотическое приближение к устойчивому равновесию без возврата, т.е. окончательное.

Поэтому задача объяснения теплоты законами механики совсем не безнадежная. Необходимо из великого множества не гамильтоновых механических систем подобрать подходящую.

Следующий вопрос, который необходимо рассмотреть, это закон сохранения механической энергии. В современной учебной и научной литературе принято указывать, что закон сохранения механической энергии выполняется только для консервативных механических систем. Но легко показать, что, на самом деле, закон сохранения механической энергии выполняется для любых замкнутых механических систем при условии отсутствии превращения механической энергии в другие виды (диссипации).

Закон сохранения механической энергии выводится как следствие теоремы об изменении кинетической энергии для механической системы любого вида

$$T_1 - T_0 = \sum A + \sum A_k^i \quad . \tag{3.11}$$

Это уравнение выражает теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме: изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил» [26]. Здесь $\sum A$ и $\sum A_k^i$ – суммы работ внешних и внутренних сил над точками системы.

Далее, предполагается, что все внешние и внутренние силы потенциальные, и, подставляя вместо работы сил – потенциальную энергию, равную работе потенциальных сил получают уравнение (1) в виде:

$$T_1 - T_0 = \Pi_0 - \Pi_1 \text{ или } T_1 + \Pi_1 = T_0 + \Pi_0 \quad . \tag{3.12}$$

«Следовательно, при движении под действием потенциальных сил сумма кинетической и потенциальной энергий системы в каждом ее положении остается величиной постоянной. В этом и состоит закон сохранения механической энергии, являющийся частным случаем общего физического закона сохранения энергии. Величина $T + \Pi$ называется полной механической энергией системы, а сама механическая система, для которой выполняется закон сохранения механической энергии - консервативной системой» [26].

Как видно из изложенного, в данном случае, накладывается ограничение, что механической работой называется только работа потенциальных сил. А работа не потенциальных сил, например, работа сил упругости, сил трения, сил пластического деформирования и т.д., исключаются из определения «механическая работа». На самом же деле, все перечисленные виды сил также являются механическими и, соответственно, работа, произведенная этими силами над точками системы, также является механической работой. Но, работа не может быть произведена без изменения энергии. Значит, если произведена

механическая работа, значит, следует считать, что была затрачена механическая энергия[22]. Общий закон сохранения механической энергии должен формулироваться в виде уравнения (3.11), а не (3.12). Уравнение (3.12) отражает частный случай общего закона сохранения механической энергии (3.11) при условии, что все силы потенциальные, и соответственно, работа, произведенная над точкой системы равна потенциальной энергии.

Представим себе систему материальных точек, которые взаимодействуют между собой только путем ударов. Если такая система не находится во внешнем потенциальном поле и каждая из материальных точек не создает потенциальное поле взаимодействия, то подобная система не будет потенциальной, а значит и консервативной. В этом случае подобная система не будет гамильтоновой. Тем не менее, в ней будет действовать закон сохранения механической энергии, но не в виде суммы кинетической и потенциальной энергии, а в общем виде: суммы кинетической энергии и энергии упругой деформации точек.

Т.о. система материальных точек, взаимодействующих между собой ударами, при отсутствии потенциальных полей, отвечает первому и второму требованиям предъявленными выше для самосогласованной механической теории тепла.

Но, несмотря на то, что для не потенциальной системы материальных точек выполняются два условия, третье условие, однако не может быть выполнено. На это указывал Цермело в полемике с Больцманом по механическому обоснованию второго начала термодинамики. Цермело доказал теорему Пуанкаре о возвращении не только для системы материальных точек в потенциальном поле, но в более общем виде, для всех случаев механического взаимодействия материальных точек [17].

Но, если перейти от материальных точек к реальным телам, то ситуация исправляется коренным образом. Все дело в том, что при ударе материальных точек неявно предполагается, что механическое возмущение при ударе распространяется на точку мгновенно.

Потому, что если точка не имеет размеров, то не стоит говорить, что механическое возмущение (упругое сжатие) распространяется в точке постепенно. Но в реальных телах это совсем не так. Механическое возмущение распространяется в теле не мгновенно, а с конечной скоростью, равной скорости звука в материале тела. А время непосредственного контакта тел при ударе, также не бесконечно мало, хотя и достаточно малое, но все-таки конечное. Соответственно, в процессе соударения реальных тел (не точек), механическое сжатие достигает не всех точек тела, а только некоторой конечной области (см. рис. 3.2).

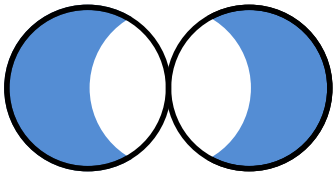


Рис. 3.2. Распространение механических напряжений в реальных телах при ударе
(А – область механических возмущений, В – невозмущенная область, до которой механические возмущения еще не дошли)

Как показано в [68] механическая система реальных упругих тел обладает асимптотически устойчивым положением равновесия, и система самопроизвольно и необратимо движется к этому равновесию. Т.е. механическая система, состоящая из реальных тел (не точечных) взаимодействующих между собой только за счет упругих ударов, без присутствия потенциальных полей полностью удовлетворяет всем требованиям механической теории теплоты и полностью соответствует законам термодинамической необратимости.

В заключение мы можем сказать, какие ошибки не позволили до сих пор разработать механическое обоснование второго закона термодинамики.

[22] Данная формулировка действительна при условии, что нет превращения различных видов энергии, например, электрической в механическую и наоборот (прим. Авт.).

Первая ошибка состоит в том, что ньютоновская механика считается частным случаем лагранжевой. А гамильтонова механика является дальнейшим обобщением механики, т.е. лагранжева механика является частным случаем гамильтоновой. Отсюда следует, что если какая-либо теорема доказана для гамильтоновой механики, то она однозначно истинна для лагранжевой и ньютоновской механик. Т.к. теорема, доказанная для общего случая действительна в каждом частном случае, но наоборот бывает не всегда.

На самом деле все в точности наоборот. Самой общей механикой является ньютоновская, она включает как частные случаи лагранжеву и гамильтонову механики. А значит и теоремы, доказанные в рамках гамильтоновой механики, не обязательно (хотя и возможно) будут исполняться в рамках ньютоновской механики. В частности, это распространяется на теоремы Лиувилля и теорему Пуанкаре, они доказаны в рамках гамильтоновой механики, но в рамках ньютоновской механики они реализуются только в частных случаях потенциальных консервативных систем. Но не в общем случае для не потенциальных механических систем.

Вторая ошибка является следствием первой. Закон сохранения механической энергии сформулирован только для потенциальных систем, т.о., чтобы он удовлетворял области определения гамильтоновой механики, т.е. как сумма потенциальной и кинетической энергий, которая сохраняет свое значение на все время движения. На самом деле закон сохранения механической энергии должен быть сформулирован для всех видов механической энергии, в частности должен включать и энергию упругого сжатия, а не только потенциальную.

Для обоснования необратимости процессов в механических системах необходимо учитывать конечное время удара $d\tau$ и конечную скорость распространения механических возмущений в реальных телах.

Обсуждение результатов.

Гамильтонова и лагранжева механики являются частными случаями ньютоновской механики, т.к. ньютонова механика включает как частные случаи потенциальные механические системы (лагранжева механика) и как частный случай потенциальные консервативные системы (гамильтонова механика).

Закон сохранения механической энергии должен быть сформулирован не просто как сохраняющаяся сумма кинетической и потенциальной энергии, а в более общем виде, как теорема об изменении кинетической энергии. В общем виде закон сохранения механической энергии гласит: изменение кинетической энергии может осуществляться только за счет работы всех механических (а не только потенциальных) сил.

Механическая система реальных (не точечных) упругих тел, взаимодействующих между собой соударениями, при отсутствии потенциальных сил, является не потенциальной, не консервативной, т.е. не гамильтоновой.

Т.к. система реальных упругих тел не является гамильтоновой, то для нее не действительны теоремы Лиувилля и Пуанкаре, о невозможности положений равновесия и самопроизвольном приближении системы к равновесию.

Т.к. в статье [71] показано, что не потенциальная система реальных упругих тел имеет положение равновесия, а система самопроизвольно и необратимо стремится к положению равновесия, тем самым именно такая механическая система и может быть основой для механической теории теплоты.

Как показали исследования ученых, в частности И. Пригожина, для механического обоснования второго закона термодинамики другие механические системы, и, в первую очередь, гамильтоновы, не подходят.

3.6. Силы инерции

Из вышеизложенных не видно явно принципиальных отличий между лагранжево-гамильтоновой и ньютоновской механиками. Но они существуют и различия достаточно велики.

Корни этих отличий «прячутся» в понятии инерциального движения.

Так в ньютоновской механике это понятие заложено в первом законе Ньютона. Этот закон гласит: «тело, на которое не действуют внешние силы, движется прямолинейно равномерно».

Т.о., в ньютоновской механике существуют избранные системы отсчета, которые при переходе от одной ИСО к другой не меняется запись уравнений движения, не зависимо от того, с какой скоростью одна система отсчета движется относительно другой. Но, это только в случае перехода от одной ИСО к другой ИСО. В случае перехода к не инерциальным системам отсчета (неИСО) в этом случае в уравнения движения появляются дополнительные члены, отражающие факт, что в неИСО на тело действуют «инерциальные силы».

Причем, то, что инерциальные силы появляются в уравнениях Ньютона только в неИСО дало повод многим авторам современных учебников называть их «фиктивными силами». Само название «фиктивные» означает, что в действительности их не существует в Природе, якобы эти силы существуют только в уравнениях.

Но, для того, чтобы убедиться в их реальном существовании, достаточно посмотреть, как разрывает центробежными силами несбалансированный маховик при его раскрутке. Попав под «обстрел» осколков такого маховика легко убедиться, что центробежные силы совершенно реальны.

Аналогичные примеры реальности, существуют и для другой силы инерции: кориолисовой. Например, «гайка Джанибекова». Эффект состоит в том, что гайка, совершающая два движения прямолинейно-поступательное и вращательное вокруг продольной оси резьбы, в полете переворачивается и если первоначально она вращалась по часовой стрелке (если смотреть по ходу движения), то через некоторое время она самопроизвольно переворачивается на 180 градусов и сохраняя поступательное прямолинейное движение вращается уже против часовой стрелки. Через некоторое время процесс переворота повторяется и так много раз. Несмотря на бурные обсуждения в Интернете, и даже высказывания о том, что Джанибеков совершил открытие нового природного явления. Ничего нового в этом эффекте нет. Более того, приятно сознавать, что данное явление предсказала и исследовала, наша соотечественница, Софья Ковалевская. Еу работа называлась «Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки». В ней она исследовала движение несимметричных гироскопов, и показала, что при отсутствии осевой симметрии гироскоп ведет себя не регулярно, в отличие от симметричных гироскопов не сохраняет пространственное положение оси вращения, а «рыскает», вплоть до переворотов оси вращения. Что и наблюдается в «эффекте» Джанибекова. Эта работа была незаслуженно забыта, но с тех пор, все гироскопы тщательно симметрируются и балансируются.

Но, кроме реального существования сил инерции, есть еще один спорный вопрос. А на какое тело действуют силы инерции? Современная ньютоновская механика отвечает однозначно: в ИСО силы инерции действуют на связь (тело, ограничивающее свободное движение исследуемого тела), а в неИСО силы инерции действует уже на само исследуемое тело. Но, в первом приведенном примере, разрывает сам маховик, а не его связи, во втором примере, опять, же переворачивается сама гайка, тем более, что гайка не имеет связей вообще, а находится в свободном полете, и согласно канонам, современной ньютоновской механики силам инерции действовать не на что, тем не менее, они действуют.

А как же этот же вопрос решается в лагранжевой механике. Элементарно. В лагранжевой механике основные уравнения движения – это уравнения Лагранжа-Даламбера, т.е. принцип Даламбера (о включении в уравнения движения инерциальных сил) заложен изначально. И поэтому, нет явных различий инерциальных систем отсчета от неинерциальных. Этого просто не требуется, различия получаются при решении конкретных задач, если выбранная СО оказывается инерциальной, то просто члены уравнений движения ответственные за инерциальные силы оказываются равны нулю. Именно поэтому в лагранжевой механике нет четкого разделения ИСО – неИСО, также нет явного аналога

первого закона Ньютона, закона инерции Галилея. И благодаря этому любые координаты в лагранжевой механике оказываются обобщенными.

В книге [73] мы уделили целую главу этому вопросу о действии инерциальных сил на движущееся тело. И на многочисленных примерах доказывали, что на тело, которое движется прямолинейно и при этом вращается вокруг своей оси, действуют и центробежные силы Кориолиса, т.е. необходимо обобщать уравнения Ньютона до уравнений Даламбера, с учетом действия сил инерции. То же самое можно сказать и другими словами, необходимо в ньютоновскую механику, аналогично лагранжевой вводить принцип Даламбера изначально, а не по мере необходимости при рассмотрении неинерциальных движений.

3.7. Об истинном и видимом движении[23]

Следующее, что необходимо рассмотреть это различение истинного и кажущегося движений. На бытовом уровне вопрос кажется простым, но не в науке. В науке, в которой исключительное место занимает теория относительности, в которой все движения рассматриваются как относительные (отсюда и название) и по выражению Эйлера: «различие движения от покоя только в точке зрения относительно которой рассматривается движение и покой»

Ньютон же понимал этот вопрос по-другому:

«Распознание истинных движений отдельных тел и точное их разграничение от кажущихся весьма трудно, ибо части того неподвижного пространства, о котором говорилось и в котором совершаются истинные движения тел, не ощущаются нашими чувствами. Однако это дело не вполне безнадежное. Основания для суждений можно заимствовать частью из кажущихся движений, представляющих разности истинных, частью из сил, представляющих причины и проявления истинных движений. Так, если два шара, соединенные нитью на данном друг от друга расстоянии, будут обращаться около общего их центра тяжести, то по натяжению нити можно будет узнать стремление шаров к удалению от оси вращения и по нему вычислить угловую его скорость.

Если затем на противоположные стороны шаров заставить действовать равные силы, так чтобы они или увеличивали, или уменьшали, круговращательное движение, то по увеличившемуся или по уменьшившемуся натяжению нити может быть обнаружено увеличение или уменьшение скорости движения, и таким образом можно будет найти те стороны шаров, к которым надо приложить силы, чтобы увеличение скорости движения стало наибольшим, и значит, найти те стороны шаров, которые обращены по направлению движения или по направлению, ему обратному. Когда эти передние и задние стороны будут найдены, то и движение будет вполне определено.

Таким способом могло бы быть определено количество и направление кругового движения внутри огромного пустого пространства, где не существовало бы никаких внешних доступных чувствам признаков, к которым можно было бы относить положения шаров.

Если бы в этом пространстве, кроме того, находились бы еще некоторые весьма удаленные тела, сохраняющие относительные друг к другу положения, подобно тому как наши неподвижные звезды, то по перемещению шаров относительно этих тел мы не могли бы определить, чему принадлежит это перемещение — телам или шарам. Но если бы мы, определив натяжение нити, нашли бы, что это натяжение как раз соответствует движению шаров, то мы бы заключили, что движение принадлежит шарам, а не внешним телам, и что эти тела находятся в покое. Таким образом по видимому перемещению шаров относительно внешних тел мы вывели бы их движение. Нахождение же истинных движений тел по причинам, их производящим, по их проявлениям и по разностям кажущихся движений и, наоборот, нахождение по истинным или кажущимся движениям их причин и проявлений излагаются подробно в последующем. Именно с этою-то целью и составлено предлагаемое сочинение» [97].

[23] Идея необходимости различения истинных и видимых движений принадлежит Е.С. Ворсобину.

Как видим из приведенной цитаты мы опять сталкиваемся с пониманием инерциального и неинерциального движений. Согласно Ньютону, истинным является движение относительно ИСО. Если рассматривать движение в неИСО, то появляются инерциальные силы, не вызванные внешним воздействием, что и позволяет отличить истинное движение от кажущихся движений.

Чтобы понять, почему необходимо отличать истину от видимости приведем пример задачи:

В центре комнаты на вращающемся стуле крутится наблюдатель. Он видит, что все предметы в комнате вертятся относительно него. Если принять, что вся комната вращается вокруг наблюдателя, то необходимо признать, что на все предметы в комнате действует центробежная сила, которая должна отбрасывать незакрепленные предметы от наблюдателя на периферию. Однако этого не происходит. Значит, круговое движение окружающих предметов кажущееся, а истинным является вращение самого наблюдателя.

Этот пример приведен, для того, чтобы указать, что не всегда любое движение можно считать относительным, вольно определяя, что относительно чего движется и перемещается.

Но надо четко указать, что отличия истинного и кажущихся движений проявляются только при учете сил, т.е. в динамике.

Напротив, в кинематике, когда силы не принимаются в расчет, вполне можно рассматривать движение относительно любой СО, без различия истинных движений от неистинных. Т.е., теории относительности (любые) имеют четко ограниченную область действия, они правомерны только в кинематике, когда не учитываются силы, действующие в рассматриваемой системе.

Этот простой вывод имеет и продолжение, т.к. работа – это произведение действующей силы, на расстояние, пройденное под действием силы, то в кинематике, а значит и в ТО неправомерно рассматривать и рассчитывать работу и энергию в системе.

3.8. Физика и Математика. Две точки зрения

Разберемся теперь в следующем вопросе. Принято считать, что ньютоновская механика является частным случаем лагранжевой или гамильтоновой механики, ввиду того, что и лагранжева и гамильтонова механика рассматривает движения механической системы в более общем виде. В некотором смысле это так, но не совсем. Для того чтобы разобраться в этом вопросе рассмотрим две точки зрения.

«В настоящее время аналитическая механика входит в программы механико-математических и физических факультетов университетов как часть общего курса теоретической механики. Аналитическая механика входит также в программы по дополнительным главам курса теоретической механики для машиностроительных и механических факультетов ВТУЗов» [14]

Интересно, что аналитическая механика обязательно входит в курсы обучения математиков и физиков, и только дополнительно (факультативно) в курс подготовки механиков и машиностроителей. И этому есть логичное объяснение.

«По установившейся традиции в аналитическую механику обычно включают вариационные принципы, общие уравнения движения голономных и неголономных систем, различные методы интегрирования этих уравнений, канонические преобразования, интегральные инварианты и ряд других вопросов» [там же]

В настоящее время принято считать, что физика настолько математическая, что в методологическом плане практически не различают эти две науки. Тем не менее, это две разные науки и, в действительности, методология у них разная, исходя из разности объектов рассмотрения и решаемых задач.

«Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира» [90].

«Физика – наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности природы, свойства и строение материи, и законы ее движения» [92].

Причем, с одной стороны: «Физика относится к точным наукам и изучает количественные закономерности явлений» [92], с другой стороны: «В начале 19 в. происходит новое значительное расширение области приложений математического анализа. Если до этого времени основными разделами физики, требовавшими большого математического аппарата, оставались механика и оптика, то теперь к ним присоединяются электродинамика, теория магнетизма и термодинамика» [28].

По определению Физика неотделима от явлений и свойств, от природы и материи, Математика изучает количественные отношения, т. е. числа, которых в природе в действительности нет, а существую они только в умах людей, т. е. в абстракции.

Таким образом, Физика – это наука о реальной природе, а Математика – наука об абстрактных численных соотношениях.

Но, традиции преподавания современной механики явно путают эти понятия. «Следуя Феликсу Клейну [50], аналитическую механику можно рассматривать как учение о дифференциальных уравнениях и траекториях произвольных механических систем.

Началу такому пониманию было положено Лагранжем в его знаменитой «Аналитической механике».

В основе аналитической механики лежат общие принципы (как дифференциальные, так и интегральные вариационные принципы), обладающие большой общностью. Из них выводятся уравнения движения механических систем.

Одной из особенностей методов аналитической механики является применение обобщенных координат. Описание движения, при котором, не отдается предпочтения какой-либо определенной системе координат, обладает большой универсальностью и имеет целый ряд преимуществ, которые сразу же обнаруживаются при решении физических и технических задач.» [26]

Несмотря на то, что физика и математика неотделимы друг от друга как сиамские близнецы, тем не менее, их необходимо четко различать. Хотя бы потому, что идеи, лежащие в основе этих двух наук разные, отсюда и разные подходы в решении стоящих задач, а соответственно и способы мышления.

«Переходя в область физики, нужно отказаться от того особого рода уверенности, которой требуют математики. Мы должны удовлетвориться вероятным. Исчисление вероятностей играет необходимую роль, и я показал, что во всякой индукции производят бессознательное вычисление вероятностей» [106].

И дело здесь не только и не столько в математической теории вероятностей потому, что далее Пуанкаре пишет: «Физик не мог бы удовлетвориться голым экспериментом. Его объект не тот же, что у историка, и отдельный факт не имеет для него цены. Отсюда полезность обобщения, которое требуют математики. Это обобщение предполагает некоторую веру в простоту и единство природы. Эта вера справедлива она или нет, необходима для науки.

Впрочем, невозможно было бы обойтись без гипотез, и часто ложные гипотезы оказывали больше услуг, чем верные. Чтобы извлечь пользу из этих гипотез, пытались разложить наблюдаемое сложное явление на большое число элементарных явлений, повинующихся одним и тем же законам. Именно таким образом стала возможна математическая физика» [там же].

Вот так, физика невозможна без веры и большого количества, часто ложных гипотез. Причем интересно как Пуанкаре относится к гипотезам.

«В физических теориях нужно различать основу и форму. Основа – это существование некоторых связей между недоступными объектами. Эти связи – единственная реальность, которой можно достичь, и все, что мы можем спросить – такие же ли связи между реальными объектами и между образами, которые мы ставим на их место.

Форма – лишь род одежды, которую мы набрасываем на этот скелет. Эту одежду мы меняем часто, к удивлению остальных людей, у которых это непостоянство вызывает улыбку и которые объявляют банкротство науки. Но если часто меняется форма, основное остается.

Гипотезы относительно того, что я назвал формой, не могут быть истинными или ложными, они могут быть лишь удобными или неудобными. Например, существование эфира, так же, как и внешних объектов, является лишь удобной гипотезой» [там же].

Прекрасный анализ этих двух точек зрения, а точнее двух способов мышления дал Пуанкаре в статье «Электричество и оптика» [106].

«Когда французский читатель впервые открывает книгу Максвелла, к испытываемому им восхищению примешивается чувство беспокойства и зачастую даже недоверия, от которого удается отделаться нескоро и лишь ценой значительных усилий. Некоторые выдающиеся умы сохранили это впечатление навсегда.

Почему же, однако, идеи английского ученого воспринимаются у нас с таким трудом? Причина этого, несомненно, заключается в том, что образование, получаемое большинством французов, развивает в них склонность к тому, чтобы ценить, прежде всего, логичность и точность.

С этой точки зрения старые теории математической физики вполне нас удовлетворяли. Таков был метод всех наших учителей, начиная от Лапласа и кончая Коши. *Исходя из точно сформулированных гипотез, они с математической точностью выводили из них следствия, которые затем сравнивали с опытом.* (Курсив наш. Авт.) Они как бы стремились придать всем областям физики точность небесной механики.

Ум, воспитанный на подобных образцах, предъявляет ко всякой теории чрезвычайно строгие требования. Его не только возмущает малейшая видимость противоречия, но он требует также строго логической связи между отдельными частями и минимального числа строго разграниченных гипотез».

Заметим, что в число учителей не входят Ньютон, Декарт и некоторые другие выдающиеся умы. Не зря Лапласа и других «учителей» Пуанкаре называет «геометрами» определяя за идеал научного творчества геометрию Евклида.

Таким образом, то, что называется математической физикой, физикой не является, на самом деле это раздел математики, такой же, как *теория игр, теория автоматов и др.*

Таким образом, исторически сложилось, что вместо физики на курсах аналитической механики, преподают на самом деле, математические дисциплины. Это само по себе не страшно, если бы компенсировалось соответствующими отступлениями по воспитанию физического мышления, которое в принципе отлично от математического. Но этого не делается, более того иногда в шутку иногда всерьез приводится фраза о том, что в каждой науке столько науки сколько в ней математики. Отсюда курс на сплошную математизацию науки, что в принципе имеет, кроме положительных, еще и отрицательные стороны. Так в физике всегда существовали факты, которые либо не укладываются в стройные математические теории своего времени, либо вовсе им противоречат.

На этих фактах появляются новые теории, но построить всеобъемлющую теорию, которая сразу в момент создания была бы совершенна в математическом плане невозможно, поэтому новые теории в физике с трудом пробивают себе дорогу, если они не пользуются разделами математики уже достаточно разработанными к моменту их создания. Например, общая теория относительности использует теорию тензорного анализа, разработанную в 19 веке, в том числе и в развитие теории электромагнитного поля Максвелла, матричная механика Гейзенберга использует достижения матричного исчисления, достаточно разработанное к началу 20 века (момент появления теории Гейзенберга), что в большой степени способствовало быстрому распространению матричной механики. Но если соответствующий математический аппарат недостаточно развит, либо невозможно применить какие-либо математические теории, то физическая теория либо очень долго пробивает себе дорогу, как теория Максвелла, либо вовсе отвергается. И в этом главный недостаток математизации, точнее подмены физики математикой.

Необходимо четко понимать, что физика и математика – это в принципе разные науки, взаимосвязанные между собой, но независимые. В физике, как в науке естественной возможны появление гипотез и теорий без математики, а только описательные, математическое обеспечение появляется потом, когда будет собран необходимый экспериментальный материал, а в случае необходимости и соответствующие математические формулы, теоремы, а может быть и новый раздел математики, как это не раз бывало в истории физики и математики. Нельзя требовать от физических теорий сразу полной разработки математического аппарата. Физика не разрабатывает математику, а только представляет заказ на математический аппарат.

Физическое и математическое мышление различаются в принципе. Математическое мышление основывается на аксиомах, выраженных в математических терминах (лучше в виде математических формул) и ищет связи между математическими формулами, описывающими объекты и если нет формул математику не о чем и думать. Физик свободно обходится без формул, прекрасный пример: Майкл Фарадей, который является автором физической теории, но современной ему математики практически не знал. Даже получив, степень доктора наук[24] и став профессором Майкл Фарадей постоянно на лекциях путался в математических выводах, о чем очень много шуток в книгах по истории науки.

Причем Фарадей читал лекции не о каких-то других физических теориях, которых он мог не знать, а по теории электромагнетизма, одним из авторов которой он сам и являлся и не знать которую в совершенстве он просто не мог.

Известны и другие случаи, например, теория электромагнитного поля, была выражены Максвеллом в виде 13 постулатов, написанных словами и только 3 из них, были дополнены формулами известными на момент написания работы, причем другими физиками. Это закон Кулона, закон Фарадея и закон Ампера[25]. А известные в настоящий момент четыре формулы теории Максвелла были разработаны значительно позднее, уже в 20 веке Хевисайдом, хотя и носят имя Максвелла.

Все дело в том, что математически описать теорию Максвелла в элегантной форме 4 уравнений, стало возможно, только после того как в математике было разработано операторное исчисление, причем не просто введено понятие операторов, что уже само по себе достаточно гениально, но и разработан целый математический раздел. При этом именно теория Максвелла во многом подталкивала математиков к разработке новых методов. Таким образом, если бы Джеймс Кларк Максвелл мыслил бы только математическими формулами (которых еще не было и главное быть не могло), то теории электромагнитного поля могло бы не существовать до сих пор.

Но подмена физики математикой вредит не только физике, но и самой математике. Все дело в том, что физика – это питательная среда для развития математики, математика, замкнутая сама на себя, превращается в схоластику, лишенная возможности получения новых идей из физики, она переходит жеванию пережеванного. Вместо разработки нового, к пересмотру и разработке новых методов решения уже решенных задач. Процесс в принципе полезный, но все хорошо в меру.

Необходимо понимать, что математика может развить и помочь уточнить физические теории, именно помочь, а не уточнить потому, что математика может только подсказать где в теории неточность, но не может ни поставить эксперимент, ни даже указать, какие эксперименты необходимы. Эксперимент – это прерогатива физики. Но новых экспериментов не поставить, если нет новых идей, отсюда необходимость гипотез, пусть даже ложных, главное новых. А это уже физическое мышление, его невозможно заменить математическим.

[24] Фарадей был гениальным самоучкой и (формально) нигде не учился, чем и объясняется пробелы в его образовании, научную степень и должность профессора физики получил по факту признания его работ по физике (Авт).

[25] Именно дополнены, а не заменены. В работах Максвелла главное текст, а математические формулы только дополняют и иллюстрируют, но ни коем случае не заменяют текст, выраженный словами.

Именно поэтому в физике в последнее время наблюдается застой, нет новых теорий, а есть новые приложения старых теорий. Термин «фундаментальная наука» подменяется термином «прикладная наука». Исследования новых областей приложения теорий к практике подменяют фундаментальные исследования. Открытия, имеющие громадное значение для практического хозяйства объявляются фундаментальными, физиков низводят до уровня инженеров, которые должны разрабатывать новые приборы и машины, и улучшать существующие, используя достижения теоретической науки. При этом не совсем понятно, куда в этом случае деваться инженерам, если их место занимают ученые.

3.9. Ускорение Кориолиса

В монографии [73] мы уделили много места силе Кориолиса для вращающихся вокруг собственной оси тел. При этом доказали, что для тел, для которых радиус вращения не изменяется во времени, сила Кориолиса определяется по формуле

$$F_K = m\,\omega\,v \quad , \tag{3.13}$$

где m – масса вращающегося тела, ω – угловая скорость вращения тела относительно центра вращения (относительное движение), v – скорость движения центра вращения тела (переносная скорость).

Принципиальных отличий от общепринятой формулы кориолисова ускорения здесь два. Во-первых, переставлены местами переносное и относительное движения. Во-вторых, отсутствует коэффициент 2, то есть сила Кориолиса в виде, принятом авторами ровно в два раза меньше, чем принято считать в физике.

По поводу первого отличия, отсылаем читателей к первой монографии [73], в которой подробно доказывается, что различия между переносным и относительным движением в действительности нет. Все дело, какую компоненту сложного движения называть относительным движением, а какую компоненту – переносным. Разница только в названии. В монографии [73] рассматривался частный случай ускорения Кориолиса при условии, что радиус вращения материальной точки не изменяется в процессе движения (относительное), а система материальных точек (твердое тело) движется поступательно (переносное движение).

Со вторым отличием необходимо разобраться подробнее. Для этого рассмотрим общий случай кориолисового ускорения, когда меняется радиус вращения, то есть стандартный случай кориолисового ускорения.

Приведем вывод формулы кориолисового ускорения, как это принято в настоящее время в физике.

«Установим связь между абсолютным, относительным и переносным ускорением. Пусть точка M движется по кривой AB, жестко связанной с подвижной системой координат, и за время Δt перемещается из положения A в положение B. В положении A точка M имеет относительную скорость $v_{отн}$ и в положении B – $v_{1отн}$. Эти скорости будут направлены по касательной к относительной траектории точки AB (рис. 3.3). Тогда относительное ускорение точки M определяется равенством:

$$t\left(\frac{\partial F}{\partial t} \neq 0 \quad u \quad \frac{\partial U}{\partial t} \neq 0\right). \tag{3.14}$$

За то же время Δt кривая AB вместе с подвижной системой координат переместится в пространстве и займет положение CD (рис. 3.3). Пусть в точке A точка M имеет переносную скорость $v_{пер}$. Точка A подвижной системы координат, в результате движения последней, сместится в положение C. Переносную скорость точки C обозначим через $v_{1\,пер}$.

Тогда переносное ускорение точки M определится равенством:

$$a_{пер} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_{1пер} - v_{пер}}{\Delta t}. \tag{3.15}$$

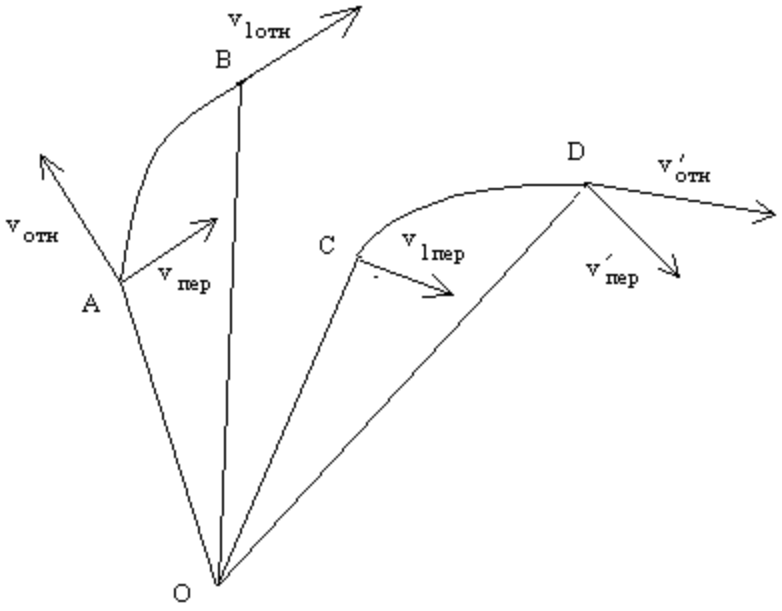


Рис. 3.3. Перемещение участка кривой

За время Δt по отношению к неподвижной системе координат точка М переместится из положения А в положение D. Абсолютная скорость точки М в положении А:

$$v_{абс} = v_{отн} + v_{пер}. \qquad (3.16)$$

В положении D абсолютная скорость точки М:

$$v'_{абс} = v'_{отн} + v'_{пер}. \qquad (3.17)$$

Причем $v'_{отн}$ по модулю равно $v_{1отн}$, так как $v'_{отн}$ будет вектор $v_{1отн}$, но перенесенный в точку D пространства и повернутый относительно $v_{1отн}$ в силу поворота подвижной системы координат относительно неподвижной.

Вектор $v_{пер}$ отличается по модулю от $v_{1пер}$, так как точка D не совпадает с точкой С, или D и С есть различные точки подвижного пространства и, следовательно, их скорости по отношению к неподвижному пространству в общем случае будут различны.

Абсолютное ускорение точки запишем в виде:

$$a_{абс} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v'_{абс} - v_{абс}}{\Delta t}. \qquad (3.18)$$

Или

$$a_{абс} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v'_{отн} - v_{1отн}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_{1отн} - v_{отн}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v'_{пер} - v_{1пер}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_{1пер} - v_{пер}}{\Delta t}. \qquad (3.19)$$

Отсюда пользуясь определением относительного и переносного, ускорения:

$$a_{абс} = a_{отн} + a_{пер} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v'_{отн} - v_{1отн}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v'_{пер} - v_{1пер}}{\Delta t}. \qquad (3.20)$$

В полученной формуле первый член – это ускорение точки относительно подвижной системы координат, второй – ускорение подвижной системы (а также всех точек неподвижных в подвижной системе координат) относительно неподвижной системы координат, третий и четвертый члены полученного уравнения требуют отдельного рассмотрения, к которому мы сейчас переходим.

3.10. Вычисление дополнительных членов

Из предыдущего видно, что абсолютное ускорение равно сумме относительного, переносного ускорения и двух дополнительных членов. Вычислим эти члены.

Так как векторы $v'_{отн}$ и $v_{1отн}$ имеют одинаковые модули, то

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{v'_{отн} - v_{1отн}}{\Delta t} \qquad (3.21)$$

будет производной от вектора постоянной длины, которая может быть записана в виде:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{v'_{отн} - v_{1отн}}{\Delta t} = \omega \times v_{отн} \ . \qquad (3.22)$$

Вектор ω характеризует скорость поворота вектора $v'_{отн}$ относительно $v_{1отн}$. Этот поворот происходит в результате вращения подвижной системы относительно неподвижной. Следовательно, ω представляет собой вектор угловой скорости движения подвижной системы относительно неподвижной. Так как это движение есть по определению переносное движение, то есть ω есть вектор угловой скорости переносного движения и, учитывая это, назовем его $\omega_{пер}$. Итак:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{v'_{отн} - v_{1отн}}{\Delta t} = \omega_{пер} \times v_{отн} \qquad . \qquad (3.23)$$

Рассмотрим далее, как будут связаны скорости $v_{пер}$ и $v'_{пер}$. Так как это будут скорости двух точек подвижного пространства или неизменяемой среды, то для них справедлива формула, связывающая скорости точек твердого тела:

$$v = v_0 + \omega \ x \ r' , \qquad (3.24)$$

которая в данном случае приобретает вид:

$$v = v_0 + \omega \ x \ CD \qquad . \qquad (3.25)$$

Отсюда

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{v'_{пер} - v_{1пер}}{\Delta t} = \omega \ \times \lim_{\Delta t \to 0} \frac{CD}{\Delta t} \ . \qquad (3.56)$$

Но так как, CD есть вектор, стягивающий дугу относительной траектории точки, которая точка проходит за время Δt, то:

$$\lim_{\Delta t} \frac{CD}{\Delta t} = v_{отн} \qquad (3.27)$$

Вектор ω характеризует скорость поворота подвижной системы относительно неподвижной. Следовательно, это угловая скорость переносного движения, и окончательно имеем:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{v'_{пер} - v_{1пер}}{\Delta t} = \omega_{пер} \times v_{отн} \qquad (3.28)$$

Далее обычно определяют ускорение Кориолиса суммированием двух вычисленных дополнительных членов:

$$F_{кор} = \omega_{пер} \text{ x } v_{отн} + \omega_{пер} \text{ x } v_{отн} = 2\ \omega_{пер} \text{ x } v_{отн} \qquad (3.29)$$

Мы видим, что ускорение Кориолиса складывается из двух членов, которые определяются независимо. В последний момент вывода формулы кориолисова ускорения складываются вместе и получается формула ускорения Кориолиса в современном виде. Одно слагаемое действует, когда радиус вращения и переносная скорость (поступательного движения) не изменяются. Это чисто поворотный член кориолисова ускорения, именно этот член ускорения ответственен за отклонения законов движения вращающихся тел: гироскопов, бумеранга, детского волчка и т.д., от законов движения тел, не имеющих собственного вращения, эти законы и рассматривает ньютоновская механика. Второй член ускорения Кориолиса имеет место в тех случаях, когда меняется радиус поворота в движении материальной точки. Этот член ускорения Кориолиса еще не рассматривался, поэтому обратим на его роль особое внимание.

Для начала обозначим разные слагаемые ускорения Кориолиса. Назовем поворотный член ускорения – *гироскопическим,* так как вся теория гироскопов основана на этой составляющей ускорения Кориолиса, второй член не может рассматриваться в теории вращения твердого тела по вполне понятным причинам, так как радиусы вращения точек твердого тела не могут изменяться, если при этом не меняется положение оси вращения относительно тела. Именно такой случай и рассматривается в теории гироскопов.

Второй член ускорения Кориолиса назовем *орбитальным* потому, что он проявляется в случае движения материальной точки по криволинейной орбите, причем не круговой, а именно криволинейной, когда в процессе движения по орбите изменяется радиус кривой траектории.

Не должно смущать, что оба члена ускорения Кориолиса имеют одинаковый вид:

$$F_{кор1} = F_{кор2} = \omega\ v \quad . \qquad (3.30)$$

Когда действует один член (первый или гироскопический) полное ускорение Кориолиса определяется по формуле:

$$F_{кор} = F_{кор1} = \omega\ v \quad . \qquad (3.31)$$

Такое наблюдается при рассмотрении движения твердого тела, имеющего собственное вращение вокруг оси, не меняющей свое положение относительно осей симметрии твердого тела, например, движение гироскопа и т.д.

В случае, когда действуют обе составляющие формула общего ускорения Кориолиса:

$$F_{кор} = F_{кор1} + F_{кор2} = 2\ \omega\ v \quad . \qquad (3.32)$$

Заметим, что случаев, когда действует только второй член, не бывает. Первый член появляется всегда, когда вектор скорости поворачивается в процессе вращения. Отсутствие поворотного члена означает, что-либо скорость равна нулю, значит тело (материальная точка)

стоит на месте, либо вектор угловой скорости равен нулю, значит тело (материальная точка) движется прямолинейно.

В случае, если скорость движения перпендикулярна радиусу, то есть скорость материальной точки только орбитальная, первый член ускорения Кориолиса вырождается в центробежное ускорение, что легко видеть, применив следующие преобразования:

$$F_{кор1} = m\omega\, v\, \frac{r}{r} = \frac{mv^2}{r} = F_ц \quad . \qquad (3.33)$$

Другими словами, центробежная сила инерции – это частный случай гироскопической силы Кориолиса, в случае, когда линейная скорость материальной точки – это скорость движения по кругу.

Вернемся к рассмотрению орбитального ускорения Кориолиса. Рассмотрим формулу (3.33), но перейдем от предела при $\Delta t > 0$, к нормальным значениям Δt. Такой переход легко сделать, достаточно исключить знак предела:

$$F_{кор1} = \omega\, v = \omega \times \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\omega r_2 - \omega r_1}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \quad , \qquad (3.34)$$

где ω – угловая скорость, r_1 – радиус начальной орбиты, v_1 – орбитальная скорость на начальной орбите, r_2 – радиус конечной орбиты, v_2 – орбитальная скорость на конечной орбите.

Фактически орбитальное ускорение Кориолиса – это монотонное изменение орбитальной скорости при непрерывном переходе материальной точки с орбиты радиуса r_1 на орбиту радиуса r_2 .

3.11. Работа поворотных сил инерции

Для того, чтобы вывести формулу закона сохранения кинетического момента, рассмотрим, какую работу производит сила Кориолиса в процессе движения материальной точки по орбите.

В теории гироскопов известно, что работа гироскопического момента (момента силы Кориолиса относительно оси собственного вращения) всегда равна нулю. Именно поэтому гироскоп прецессирует с равномерной угловой скоростью без ускорения.

Легко видеть, что и второй (орбитальный) член силы Кориолиса также не производит никакой работы. Это происходит потому, сила Кориолиса всегда перпендикулярна траектории движения материальной точки, точнее вектору скорости.

Чтобы это понять, почему это так, необходимо рассмотреть природу возникновения силы Кориолиса. В современной динамике рассматриваются несколько инерциальных сил: сила инерции, центробежная сила инерции и сила инерции Кориолиса. Причем рассматриваются они равноправно, тем не менее, в природе существует только одна сила инерции[26], которая стремится сохранить инерциальное движение любого тела имеющего массу. Эта сила проявляет себя при разгоне и торможении тела. Именно эта сила при этом производит работу, либо поглощает энергию для разгона, либо отдает энергию при торможении. Остальные силы инерции – это поворотные силы инерции, они проявляются при отклонении движения тела от прямолинейной траектории.

Векторы этих сил инерции в предельном случае перпендикулярны траектории движения (см. рис. 3.4), т.к. сила равна ускорению, умноженному на массу тела, а поворотное ускорение равно разности векторов скорости в начальной и конечной точке рассматриваемого промежутка времени:

$$a_{кор} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad . \qquad (3.35)$$

[26] Которая не имеет специального названия, в отличии от центробежной силы инерции или силы инерции Кориолиса. Так сложилось исторически. (Прим. авт.)

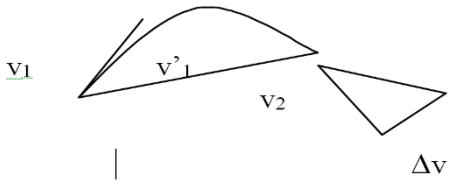


Рис. 3.4. Векторы сил инерции

Запишем формулу работы производимой силой Кориолиса при переходе материальной точки с орбиты радиуса r_1 на орбиту радиуса r_2 :

$$A_{кор} = F_{кор1}\Delta r = m\frac{v_2 - v_1}{\Delta t}\Delta r = \frac{mv_2 r_2 - mv_1 r_1}{\Delta t} = 0\,. \tag{3.36}$$

Отсюда:

$$mv_2 r_2 - mv_1 r_1 = 0\,, \tag{3.37}$$

или:

$$mv_2 r_2 = mv_1 r_1\ . \tag{3.38}$$

То есть при переходе с орбиты на орбиту материальной точки момент импульса:

$$L = mvr \tag{3.39}$$

остается постоянным.

Окончательно, в общем виде имеем:

$$m_i v_i r_i = c_i = const\ . \tag{3.40}$$

Или в развернутом виде:

$$\begin{aligned} &m_1 v_1 r_1 = c_1 = const \\ &m_2 v_2 r_2 = c_2 = const \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &m_n v_n r_n = c_n = const \end{aligned} \tag{3.41}$$

Полученная система уравнений и есть закон сохранения кинетического момента импульса для задачи многих тел, их называют интегралами площадей.

Заметим, что при выводе закона сохранения кинетического момента импульса не учитывались никакие внешние силы, а только сила Кориолиса. А, это в свою очередь означает, что данный закон действует независимо от того какие внешние силы, действуют на материальную точку и, что важно при рассмотрении задачи n-тел, независимо от количества тел, которые взаимодействуют с данным телом.

Запишем уравнение (2.70) в координатной форме для первого тела:

$$\left.\begin{aligned} &y_1\dot{z}_1 - z_1\dot{y}_1 = c_{11} \\ &z_1\dot{x}_1 - x_1\dot{z}_1 = c_{12} \\ &x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1 = c_{13} \end{aligned}\right\}\ . \tag{3.42}$$

Первый индекс указывает номер тела в системе, x, y, z – координаты тела относительно центра инерции, точка сверху означает, как обычно, дифференцирование по времени.

3.11. Выводы

В физику необходимо вернуть физику. Это не тавтология, так как, то, что в настоящее время называется физикой, в большей степени представляет собой математику, а обучение физике подменяет собой обучение математическим теориям.

Лагранжева и Гамильтонова механика – это в действительности разделы математики, а не физики как это принято считать в настоящее время. Единственно физическая теория в механике – это Ньютоновская механика. Разделы аналитической механики должны занять достойное место среди математических дисциплин, таких как: теории игр, теория автоматов, теории автоматического управления и т.д.

Математическое мышление тяготеет к математическим формулам, если нет формул, то математику не о чем думать. Если только о том, как описать явление математически. Физик больше мыслит образами природных явлений, а математика ему нужна только для доказательства, что он на верном пути. Но если нет формул, для физика ничего страшного, просто математика еще на марше и в свое время подтянется и будут формулы, главное, чтобы теория была верна в принципе.

Необходимо перестать путать фундаментальную физику и прикладную науку (читай инженерию). Инженер – это уважаемая профессия (если конечно это грамотный и талантливый инженер), и нет необходимости, человека занятого изобретением новых машин и устройств или улучшением характеристик, существующих называть научным сотрудником, даже если он занимается усовершенствованием самого научного оборудования (например, радиотелескопа или ускорителя элементарных частиц).

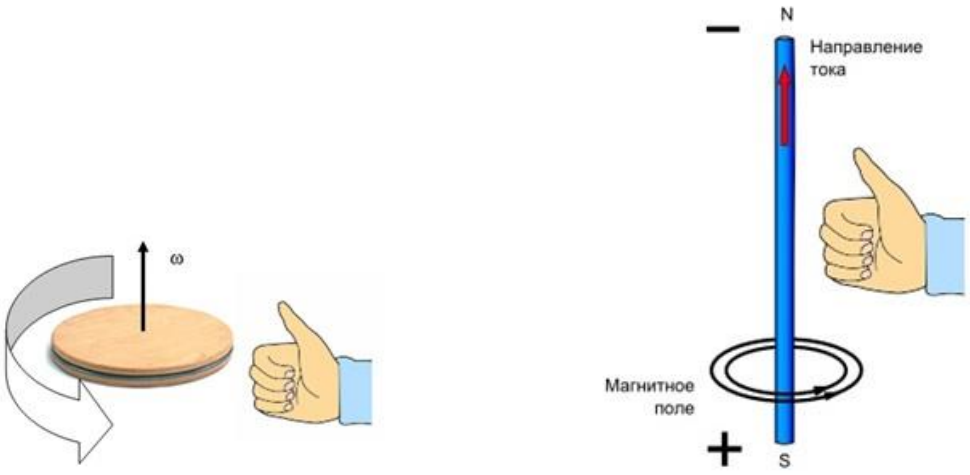
В физике необходимы новые гипотезы, пусть даже потом они будут опровергнуты. Довод, что данная гипотеза противоречит современным учебникам (любимый довод современных методистов), должен быть вычеркнут из списка возражений. Достаточно вспомнить, что все теории, которые сейчас считаются верными, когда-то противоречили официальным теориям, царившими в физике в то время. Но при этом опасна другая крайность, один из доводов в пользу квантовой теории и теории относительности Эйнштейна состоит в том, что эти теории новые и явно противоречат классической физике. Необходима не новизна и противоречие с устоями, главное это логичность и непоколебимость в открытом научном споре, причем именно открытом и гласном, чтобы, как сказал Петр I: «Дабы глупость каждого видна была явно»[27].

[27] Авторы понимают, что гласность оружие обоюдоострое, но лучше честное поражение, чем лживая победа.

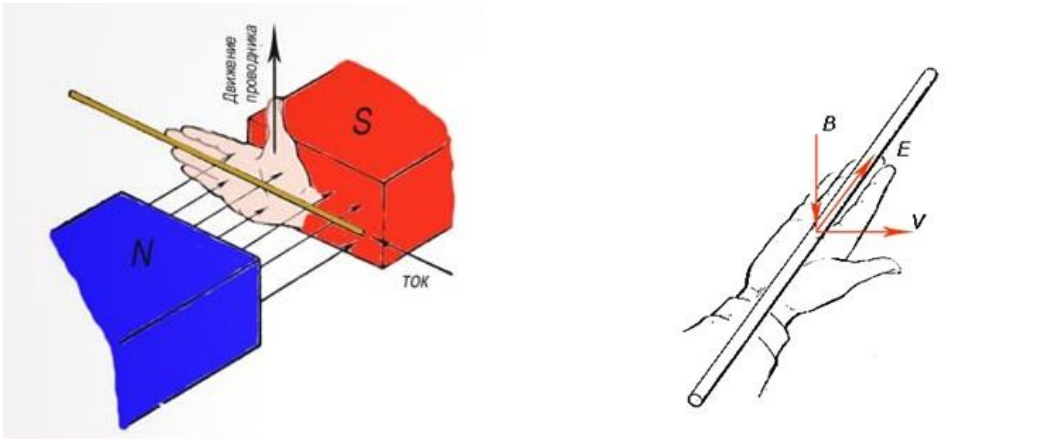
Глава 4. Унифицированное мнемоническое правило рук

В различных разделах физики широко применяются вектора. Очень многие физические величины определяются как векторные произведения неких векторов. Например, вектор угловой скорости, вектор механического момента силы, сила Лоренца и т.д.

Для разных случаев, в физике придуманы разные мнемонические правила, как правила правой руки, так и правило левой руки (см. рис. 4.1 и рис. 4.2).



а) б)



в) г)

Рис. 4.1 Правила правой руки

а) направление вектора угловой скорости; б) направление «вращения» магнитного поля проводника с током; в) и г) направление ЭДС при движении проводника в магнитном поле

Применение правила правой руки (ладони) при определении направлении ЭДС при движении проводника в магнитном поле обратимо. Так направление силы Лоренца, действующей на проводник с током, определяется по тому же правилу, причем в обоих случаях пальцы раскрытой ладони показывают направление тока, большой палец указывает направление движения проводника (сравните рис. 4.1 в, г и рис. 4.2). Направление вектора магнитного поля проводника с током определяется также по правилу буравчика (рис.4.3)

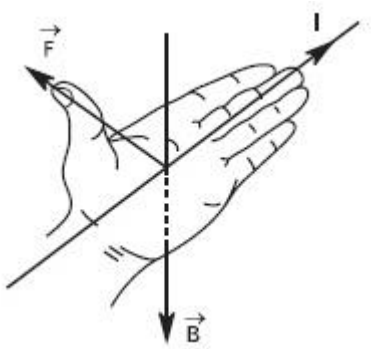


Рис. 4.2. Правило левой руки.
Направление силы Лоренца, действующей на проводник с током.

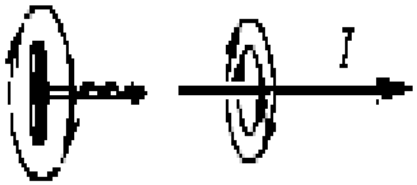


Рис. 4.3. Правило буравчика для проводника с током. Направление вектора магнитной индукции (http://www.eduspb.com/node/1774)

Кроме чисто физических применений правил рук, есть также мнемоническое правило в математике, для определения правой и левой тройки векторов (базисов) и векторного произведения (рис. 4.4).

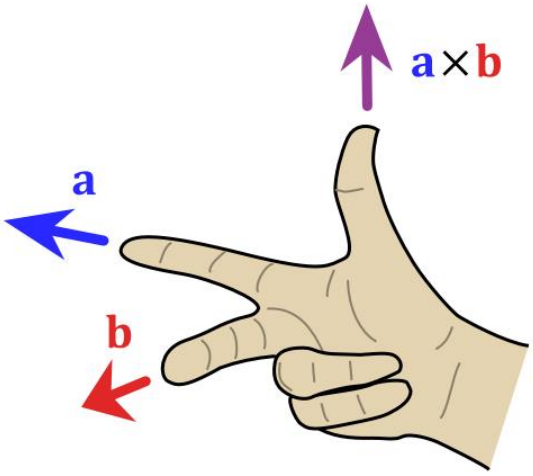


Рис. 4.4. Правило правой руки для определения правого базиса векторов (x ,y, z) и векторного произведения $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{c}$ (https://ru.wikipedia.org/wiki/
Векторное_произведение#mediaviewer/File:Right_hand_rule_cross_product.svg)

Т.о., для разных случаев применяется три **разных** правила правой руки (четыре пальца сжаты в кулак, все пальцы выпрямлены, три пальца оттопырены под углом 90° друг к другу) и одно правило левой руки. Плюс правило буравчика.

Такое разнообразие приводит к тому, что студенты часто путают одно правило с другим, тем более, как показано выше под наименованием «правило правой руки» имеется в виду три разных правила.

В целях упрощения применения правил разных рук, и определения направлений векторов предлагается унифицировать все случаи в единое мнемоническое правило.

За основу лучше всего взять математическое правило правой руки. Но четко определить соответствие каждого пальца соответствующему вектору произведения векторов.

Например, указательный палец направлен вдоль направления первого вектора-сомножителя, средний палец – вдоль направления второго, тогда большой палец будет указывать направление вектора-произведения.

Проверим в этом контексте применение *унифицированного правила правой руки.*

Вектор угловой скорости при вращении определяется формулой: $[r \times v] = \omega$.

Значит, согласно унифицированному правилу:

Т.к. все вектора входят в формулу с положительным знаком, используем правило правой руки.

Направляем указательный палец – в направлении радиуса r, средний палец – вдоль орбитальной скорости - v. А большой палец будет указывать направление (4.5).

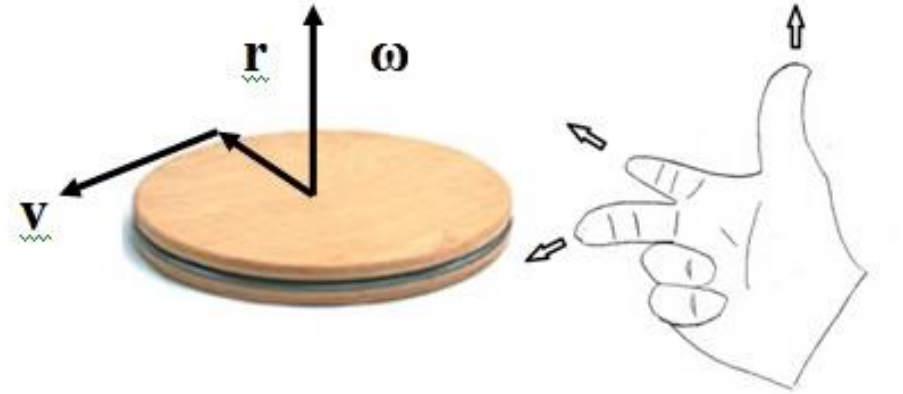


Рис. 4.5. Унифицированное правило правой руки. Направление вектора угловой скорости

Ускорение Кориолиса определяется формулой: $2[\omega \times v_r] = a_K$.

Направление ускорения Кориолиса определяется по правилу правой руки. Указательный палец направлен вверх (вдоль вектора ω), средний палец горизонтально вдоль вектора переносной скорости v_r, тогда большой палец укажет направление кориолисового ускорения (рис. 4.6).

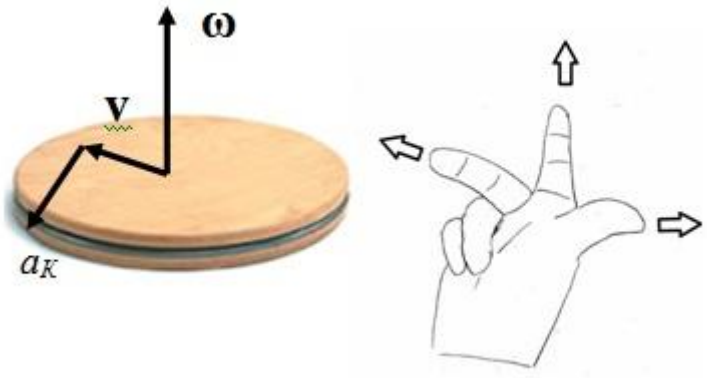


Рис. 4.6. Унифицированное правило правой руки. Направление вектора кориолисового ускорения

Вектор магнитной индукции проводника с током.

Случай с определением направления вектора магнитной индукции осложняется тем, что не существует простого векторного уравнения для определения вектора магнитной индукции. Модуль вектора магнитной индукции определяется по формуле:

$$B = k\frac{I}{r} \quad ,$$

где B – вектор магнитной индукции; k – коэффициент пропорциональности; I – сила тока; r – радиус-вектор.

Тем не менее, можно пользоваться унифицированным правилом правой руки. Направим указательный палец вдоль направления тока, средний палец в направлении радиус-вектора точки, в которой мы хотим определить B. Тогда большой палец покажет направление вектора B в данной точке (рис. 4.7).

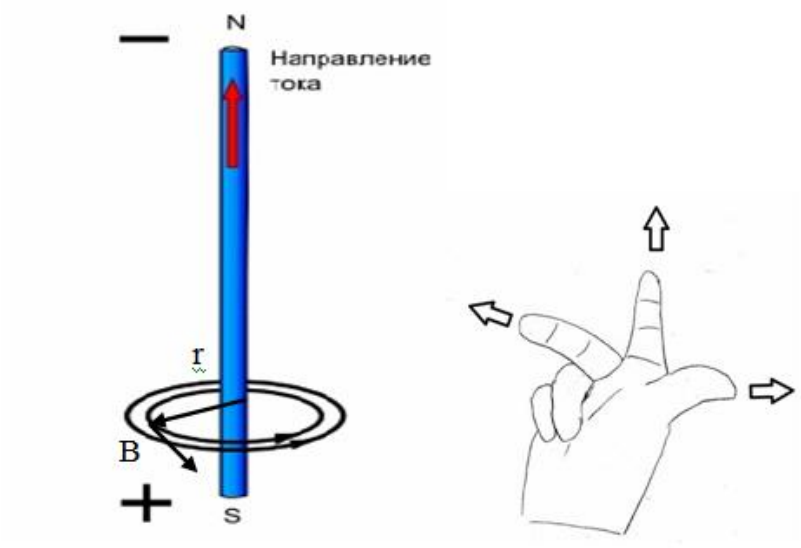


Рис. 4.7. Направление вектора магнитной индукции проводника с током.

Применение данного правила становится более понятным, если вспомнить, что в векторной алгебре не определено понятие деления на вектор. Т.е. написать формулу для вектора магнитной индукции в виде $\vec{B} = k\frac{\vec{I}}{\vec{r}}$ нельзя. Можно только в виде $\vec{B} = k\left[\vec{I} \times \vec{r}\right]\frac{1}{r^2}$. Направление вектора $\vec{B}$ определяется векторным умножением в квадратных скобках $\left[\vec{I} \times \vec{r}\right]$.

Сила Лоренца, действующая на положительный заряд.

Уравнение силы, действующей на положительный заряд движущийся со скоростью v в магнитном поле B, определяется уравнением: $F_л = q[VxB]$.

Направление силы Лоренца в пространстве также можно определить согласно универсальному мнемоническому правилу правой руки (рис.4.8). Указательный палец вдоль вектора v, средний вдоль вектора B, тогда большой палец укажет направление силы Лоренца.

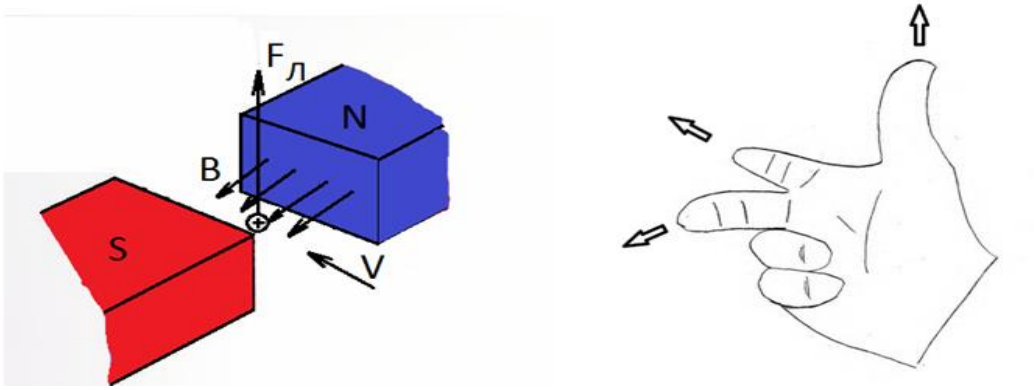


Рис. 4.8. Направление силы Лоренца действующей на подвижный положительный заряд в магнитном поле

Направление силы Лоренца, действующей на проводник с током, определяется аналогично (рис. 4.9).

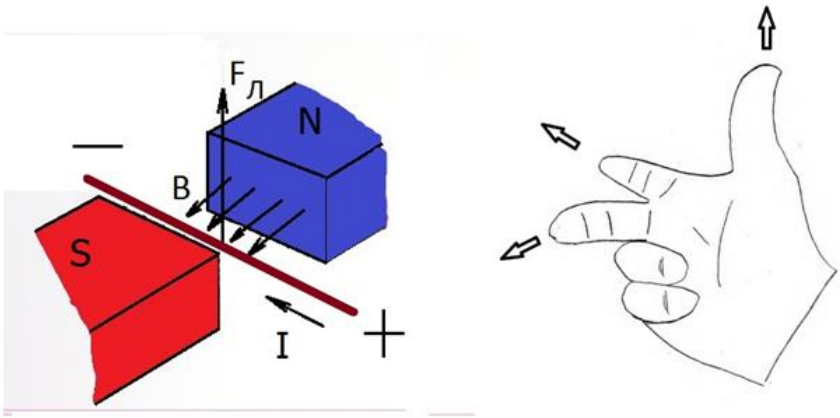


Рис.4.9. Направление силы Лоренца действующей на проводник с током в магнитном поле

Примечание. Иногда силой Лоренца называется сила, действующая на заряд (провод с током) в электрическом и магнитном поле. В этом случае сила Лоренца определяется по формуле $F_Л = q[E + v \times B]$ или $\vec{F}_Л = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}]$.

В этом случае мнемоническое правило определяет направление силы в магнитном поле. А общая сила легко определяется суммой векторов, без всяких мнемонических правил.

Правила левой руки

Правило правой руки неудобно применять в случаях, когда в уравнении векторного произведения появляется знак минус. Дело в том, что в случае знака минус направление произведения с направлено в отрицательную сторону, по сравнению с обычным умножением. В этом случае удобнее применять унифицированное правило левой руки. Наиболее известны два таких случая.

Направление силы Кориолиса.

Направление силы Лоренца, действующей на отрицательный заряд в магнитном поле.

При применении унифицированного правила левой руки будем поступать тем же образом, что и в случае правила правой руки. Т.е., указательный палец всегда направляется в сторону вектора первого сомножителя, средний в направлении второго вектора сомножителя, а большой палец укажет направление вектора произведения.

Сила Кориолиса определяется формулой

$-2m[\omega \times v_r] = F_K$

Т.к. в уравнении стоит знак минус, значит необходимо применять унифицированное правило левой руки (рис.4.10).

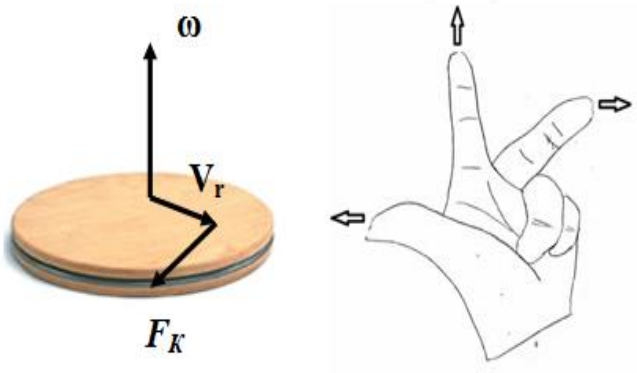


Рис. 4.10. Направление силы Кориолиса

Направление силы Лоренца действующее на отрицательный заряд в магнитном поле.

Формула $F_л$ = - q[VxB]. Т.к. в уравнении снова появляется отрицательный знак, применяем унифицированное правило левой руки (рис.4.11).

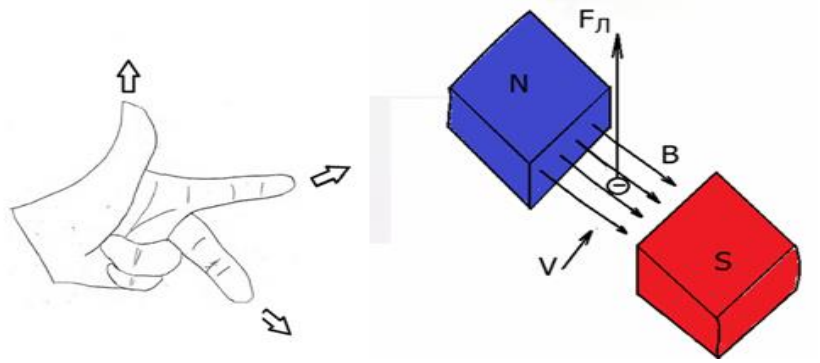


Рис. 4.11. Направление силы, действующей на отрицательный заряд в магнитном поле

Выводы

Применение унифицированного правила рук, предлагаемое в качестве единого представления и вводного метода визуализации при обучении студентов, более доступно в изложении и понимании относительно существующих мнемонических правил в силу простоты использования и минимума необходимых различий применения.

Применение унифицированного правила рук подчиняется всего двум правилам

Правило знаков:

В случае, когда все вектора в формуле векторного умножения положительные – применяется правило правой руки. В случае присутствия в уравнении отрицательного знака – правило левой руки.

Правило соответствия векторов:

Направление указательного пальца соответствует направлению первого вектора-сомножителя, средний палец должен указывать направление второго вектора-сомножителя. Направление большого пальца указывает направление вектора-произведения.

Унифицированное правило рук напрямую связано с формулами векторного умножения, и для его применения достаточно знать формулы физических законов и правила применения мнемонического правила.

Глава 5. Приведенный коэффициент верчения. Постановка фундаментальной проблемы

Эксплуатационные качества объекта машиноведения и транспортного строительства (изделия, конструкции или сооружения) во многом зависят от свойств шероховатости поверхности, как важнейшего показателя ее состояния, важнейшими физико-техническими параметрами которого являются трение покоя (срыва), скольжения, верчения, качения, перспективно исследование коэффициента сцепления и коэффициента сопротивления движения поверхности катящемуся объекту (например, шарику, ролику, резиновому колесу).

Известна фраза «ногу подвернул». Она при всей известности и простоте имеет глубокий триботехнический смысл. Помимо сочетания продольной и поперечной составляющей движения ноги по опоре имеется и поворотная составляющая, которая в технике называется «коэффициентом верчения».

Сцепное взаимодействие эластичного колеса с твердой опорой, определяющее устойчивость, управляемость и тормозную динамику машины, реализуется зонами трения покоя и скольжения в пятне контакта колеса. Показатель сцепного взаимодействия – коэффициент сцепления φ_x. Его минимальное значение – ноль; его максимальное значение – коэффициент трения покоя $f_{\text{П}}$. Также он может принимать промежуточные значения, одно из которых – коэффициент трения скольжения $f_{\text{СК}}$.

Авторы предлагают общее понятие коэффициента сцепления определять как в источнике, а именно: коэффициент сцепления – отношение результирующей реакции в опорной плоскости к соответствующему значению нормальной реакции при данном значении коэффициента продольного скольжения, т.е. во всем диапазоне изменения s_x=0…100%. При s_x=100% коэффициент сцепления равен коэффициенту трения скольжения.

Следует разграничивать понятия коэффициентов сцепления в продольном и поперечном направлениях. При отсутствии боковой силы колеса коэффициент сцепления и коэффициент сцепления в продольном направлении равны.

При наличии же боковой силы появляется коэффициент сцепления в поперечном направлении, а коэффициент сцепления в продольном направлении уменьшается, при этом их геометрическая сумма равна коэффициенту сцепления. Величины коэффициентов сцепления в продольном и поперечном направлениях определяются соответствующими долями, реализуемыми участками трения покоя и скольжения в пятне контакта колеса с дорогой, так как при отсутствии бокового скольжения колеса зона трения скольжения воспринимает продольную нагрузку и реализует часть продольной реакции опорной поверхности, а зона трения покоя воспринимает продольную и боковую нагрузки и реализует как часть продольной, так и всю боковую реакцию пятна контакта. При отсутствии трения покоя в пятне контакта следует вести речь о соотношении составляющих коэффициента трения скольжения в продольном и в поперечном направлениях.

Отдельной задачей, требующей решения, является уточнение понятия «коэффициент продольного скольжения колеса». Большинство авторов подразумевают его следующим образом

$$s_x = \left| \frac{V_x - \omega \cdot R_{\text{Д}}}{V_x} \right|, \qquad (5.1)$$

где V_x – продольная составляющая поступательной скорости оси колеса; ω – угловая скорость вращения колеса; $R_{\text{Д}}$ – динамический радиус колеса.

Он изменяется от 0 до 1, также может выражаться в процентах. Когда он равен нулю, то споров не вызывает, что речь идет только о качении, без продольного проскальзывания.

Когда он равен 1, то тоже нет вопросов – речь идет о заблокированном колесе (юз). Но его промежуточные значения имеют только смысл указанного отношения, и о них нельзя судить о доли площади скольжения в общей площади пятна контакта. Следовательно, понятие величины s_x как «коэффициента продольного скольжения колеса» не является корректным. Требуется уточнение этого понятия и введение дополнительного коэффициента, показывающего при каждом s_x отношение площади участка с трением скольжения в пятне контакта к общей площади пятна контакта колеса с дорогой.

Отметим, что в данном случае рассматриваются продольные и поперечные составляющие взаимодействия колеса и дорожного покрытия, открытым остается вопрос о влиянии механики поворота (верчения) колеса на изменение коэффициентов сцепления и скольжения.

В настоящее время колесо участвует в существенно нестационарных процессах во время функционирования электронных систем активной безопасности автомобиля. Для совершенствования автоматического управления естественно, что должны уточняться ранее существующие понятия и создаваться новые, позволяющие словесно описывать состояние, режим движения колеса, его взаимосвязь с окружающей средой, включая поверхность дорожного покрытия.

Рассмотрим надвекторные структуры для описания движения колеса автомобиля.

В настоящее время существует винтовое исчисление, как векторная алгебра комплексных векторов движения твердых тел в пространстве. Покажем, что винтовое исчисление, является не полным описанием движения твердых тел. Т.к., винтовое исчисление описывает только движение по винтовой линии, и при этом не учитывает движение с переворотами.

Также покажем, что для полного описания движения твердых тел в пространстве необходимо, предварительно, ввести новую алгебру движения с переворотом («исчисление колес»), аналогично алгебре винтов.

Введение дополнительной алгебры комплексных векторов переворотов (колес) влечет за собой необходимость разработки алгебры бикомплексных (гиперкомплексных) векторов «мóторов» описывающих полное сочетание всех видов движений твердых тел в пространстве.

«Теория винтов возникла в начале 19 в. после появления работ Л. Пуансо (L. Poinsot), М. Шаля (M. Chasles), А. Мебиуса (A. Mobius), Ю. Плюккера (J. Plucker), первый капитальный труд по теории винтов принадлежит Р. Боллу. Собственно, «Векторное исчисление» было построено А. П. Котельниковым» [39].

Несмотря на то, что винтовое исчисление декларируется, как раздел векторного исчисления, это не совсем так. В действительности, винтовое исчисление оперирует с конструкциями из двух векторов. Один вектор характеризует поступательное движение тела, а второй – вращение.

Источник такой конструкции в том, что согласно кинематике твердого тела, общее движение любой системы векторов сводится к главному вектору и главному моменту системы, а коллекция из этих двух векторов полностью характеризует движение твердого тела в пространстве. В векторном исчислении вводится два основных термина «мóтор (ударение на первый слог) и «винт».

«Геометрический образ – эквивалент системы векторов, представляемый для любой точки пространства главным вектором и главным моментом системы относительно этой точки, называется мóтором (соединение слов «момент» и «вектор»). В дальнейшем для простоты мóтором будем называть совокупность вектора и момента (***r, r⁰*)**, отнесенную к одной какой-то точке, полагая, что начала ***r*** и ***r⁰*** находятся в этой точке» [39].

Винт – это мóтор, у которого векторы ***r*** и ***r⁰*** коллинеарные[28] [там же].

[28] Легко видеть, что, если главный момент коллинеарен главному вектору, то тело будет совершать винтовое движение. Т.е. поступательное движение и вращение вокруг оси проходящей вдоль вектора поступательного движения (Прим. Авт.).

Отсюда следует два принципиально важных вывода. Во-первых, винтовое исчисление не является частным случаем векторного исчисления. Принципиально, что в мóтор входят два вектора $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r^0}$, при этом, по предложению Клиффорда мóтор формально в виде комплексного вектора

$$A = r + \varpi r^0, \qquad (5.2)$$

где $\boldsymbol{A}$ – мóтор, $\boldsymbol{r}$ – главный вектор, $\boldsymbol{r^0}$ – главный момент, $\boldsymbol{\varpi}$ - множитель, квадрат которого равен нулю [39].

Несмотря на то, что в формулу мóтора (5.2) входят два вектора $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r^0}$ и стоит знак суммы, но складывать векторы нельзя ни алгебраически, ни векторно. Так как природа векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r^0}$ разная и роль знака суммы в (5.2) чисто формальная.

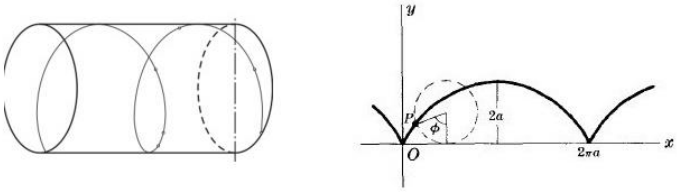
Другими словами, несмотря на то, что комплексный вектор $\boldsymbol{A}$, формально похож на обычный вектор, но в отличие от обычных векторов имеет не три, а шесть координат. Именно поэтому А.П. Котельников, наравне с понятием «мóтора» вводил понятие «бивектора» [39]. Т.о., понятие мóтора является не обычным вектором, а коллекцией векторов[29].

Второй вывод очевиден. Так называемое винтовое исчисление, на самом деле, является частным случаем общего исчисления бивекторов (по терминологии Котельникова) или исчисления комплексных векторов (исчисления мóторов). Последнего термина в науке не существует, Т.к. с самых первых работ А.П. Котельникова в 1895 г., принято считать, что концепция винтов полностью определяет любое пространственное движение твердых тел.

«Движение твердого тела в течение бесконечно малого промежутка времени есть винтовое движение, так что мы можем воспроизвести его, если свяжем тело неизменяемо с гайкой некоторого винта и сообщим этой последней определенную угловую скорость» [39].

Но это ошибка. Легко понять, что кроме винтового движения, аналога движения гайки на винте, существует еще и движение качения, аналогично движению колеса по дороге (см. Рис. 5.1а). Ясно, что движение колеса по дороге, аналогично движению гайки вдоль винта. Также наблюдается вращение и поступательное движение. Но принципиальное отличие в том, что гайка вращается вокруг оси параллельной вектору перемещения, а у колеса ось вращения перпендикулярна перемещению.

Другими словами, точка на периферии гайки при винтовом движении описывает цилиндрическую винтовую линию (Рис. а), а при движении колеса – циклоиду (рис. 5.1б)



а) б)

Рис. 5.1. Винтовое и колесное движение

Следуя традиции винтового исчисления, назовем бивектор (по терминологии Котельникова) состоящего из двух векторов, вектора перемещения **r** и перпендикулярного ему вектора момента $\mathbf{r^0}$, «колесом».

Т.о. получим замкнутую группу бивекторов, описывающего полную группу движения твердого тела в пространстве. Подобное комплексное движение будет состоять из

[29] **Коллекция** (от лат. *collectio* — собирание, сбор) — систематизированное собрание предметов, объединенное по какому-то конкретному признаку, имеющее внутреннюю целостность и принадлежащее конкретному владельцу (прим. Авт).

поступательного движения и двух вращений – вокруг оси параллельной вектору перемещения и оси перпендикулярной перемещению[30].

О том, что для полного описания бивекторного исчисления явно не хватает введения, кроме винтов, еще и колес, легко видеть, внимательно читая учебники по винтовому исчислению. Например, в фундаментальном труде Дименберга приведено определение комплексного угла.

«Зададим направление прямой mn единичным винтом $\boldsymbol{E_{12}}$ и назовем ее осью комплексного угла (рис. 5.2).

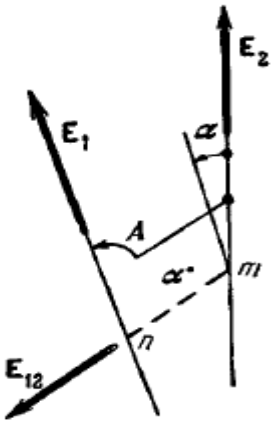


Рис. 5.2. Определение комплексного угла [39]

Для приведения $\boldsymbol{E_1}$ к совпадению с $\boldsymbol{E_2}$ необходимо оси $\boldsymbol{E_1}$ сообщить винтовое движение, состоящее из поворота вокруг оси $\boldsymbol{E_{12}}$ на угол α и из поступательного движения на расстояние α^0, равное длине отрезка *nm*.

Комплексный угол определяется винтом

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E_{12}}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E_{12}}\,(\alpha + \omega\,\alpha^0) \quad , \qquad (5.3)$$

а комплексное число $\boldsymbol{A} = \alpha + \omega\,\alpha^0$ принимается за меру комплексного угла между осями $\boldsymbol{E_1}$ и $\boldsymbol{E_2}$» [39].

Из приведенной цитаты явно следует, что комплексный угол определен только для скрещивающихся векторов. Т.е., исключительно для векторов, не принадлежащих одной плоскости [34]. Соответственно «комплексная векторная алгебра» охватывает исключительно алгебру винтов. Несмотря на то, что в [59] ясно сказано: «Любую алгебраическую операцию (умножение на число, сложение и умножение) над винтами мы будем определять, как операцию над мóторами этих винтов, а т.к. каждый мóтор, как уже было сказано формально выражается комплексным вектором, то алгебра винтов сведется к алгебре комплексных векторов». Т.е., алгебру комплексных векторов искуственно ограничивают винтами. Отсекая любые другие виды комплексных векторов.

Как уже сказано, винтовое движение твердых тел не ограничивается только винтовым движением, удивительно искусственное ограничение комплексных векторов исключительно одним видом, отсекая все остальные случаи.

Напомним, что винт – это частный случай мóторов, при условии, что вектор перемещения и вектор момента – коллинеарные. Общий случай движения твердого тела в пространстве состоит не только из винтового движения, но и из вращения вокруг оси ортогональной вектору движения (перевороты).

[30] Такое движение совершает «гайка Джанибекова» (сложное движение гайки в невесомости), когда гайка крутится по винтовой линии и внезапно переворачивается вокруг перпендикулярной оси (Прим. Авт.).

Т.о. приходим к явному выводу, что кроме алгебры винтов и винтового исчисления, необходимо вводить алгебру колес и соответствующее исчисление.

Самое интересное, что ничего особо выдумывать не надо. Т.к. общий вектор движения колеса не требует особого отношения и не требует больших переделок алгебры.

Это утверждение основано на том, что, как и в комплексный вектор винта входят два вектора: вектор перемещения и вектор вращения (момента). Если предположить существование комплексного вектора колеса, то в него также будут входить два вектора: вектор перемещения и вектор вращения (момент). Единственное отличие, и оно принципиальное, – это направление вектора момента относительно вектора перемещения. Для винта, векторы перемещения и момента – они коллинеарные, для колеса – ортогональные.

Но, если алгебра комплексных векторов основывается на алгебре комплексных числе, то это различие теряет свое значение. Т.к., для комплексных чисел совершенно безразлично, под каким углом мнимая ось отстоит от действительной оси. Т.о., алгебра винтов и колес будет аналогична, если вектор колеса записывать как комплексный вектор. Но, чтобы формальную запись колеса не путать с формальной записью винтов следует внести следующие обозначения:

Для винтов оставить прежнее обозначение

$$A = r + \omega r^0 \quad . \tag{5.4}$$

При условии $\omega^2 = 0$

Для колес необходимо формально ввести новое обозначение

$$B = r + \Omega r^0 \quad . \tag{5.5}$$

При условии $\boldsymbol{\Omega}^2 = 0$.

Легко видеть, что алгебра ко́лес не будет принципиально отличаться от алгебры винтов, т.к. и те, и другие будут представлять алгебры комплексных векторов.

В этом случае легко определяется общее понятие мо́торов и алгебра мо́торов. Формальное определение мо́тора сводится к бикомплексному вектору согласно уравнению

$$M = r + \omega r^0 + \Omega r^0 \quad . \tag{5.6}$$

Алгебра мо́торов сводится к алгебре бикомплексных векторов.

Ясно, что алгебра бикомплексных векторов будет сложнее, чем алгебра простых комплексных векторов, тем не менее. Бикомплексные числа не являются чем-то принципиально новыми понятиями в научной литературе. Например, в [81] сказано: «Многообразие и успешное применение комплексных чисел побудило математиков уже в первые десятилетия XIX в., задуматься над вопросом, нельзя ли подобно тому, как комплексные числа строятся в виде пар действительных чисел, построить высшие комплексные числа, изображающиеся тройками, четверками и т.д. действительных чисел. Начиная с середины XIX в. было исследовано много различных частных систем таких высших или гиперкомплексных чисел, а в конце XIX и в первой половине XX столетия была разработана общая теория гиперкомплексных чисел, нашедшая ряд важных приложений в смежных областях математики и физики» [52].

Методика построения алгебры гиперкомплексных чисел приведена в [52]. В связи с вышесказанным, построение алгебры бикомплексных векторов (мо́торов) в том числе для движения колеса автомобиля на дорожном покрытии не встретит серьезных трудностей. А разработка и введение алгебры мо́торов позволит построить механику движения твердых тел

в пространстве, в полном объеме, а не в урезанном виде, как это обстоит дело в механике винтов.

Согласно исследованиям Артоболевского, трение верчения подчиняется обычному для трения скольжения закону Амонтона-Кулона

$$F_{тр} = f_{ск} * N \quad , \qquad (5.7)$$

где $F_{тр}$ – сила трения скольжения; N – нормальное давление; $f_{ск}$ – коэффициент трения скольжения.

Артоболевский рассматривает трение верчения цилиндрического вала в подпятнике, как пример трения верчения (рис. 5.3).

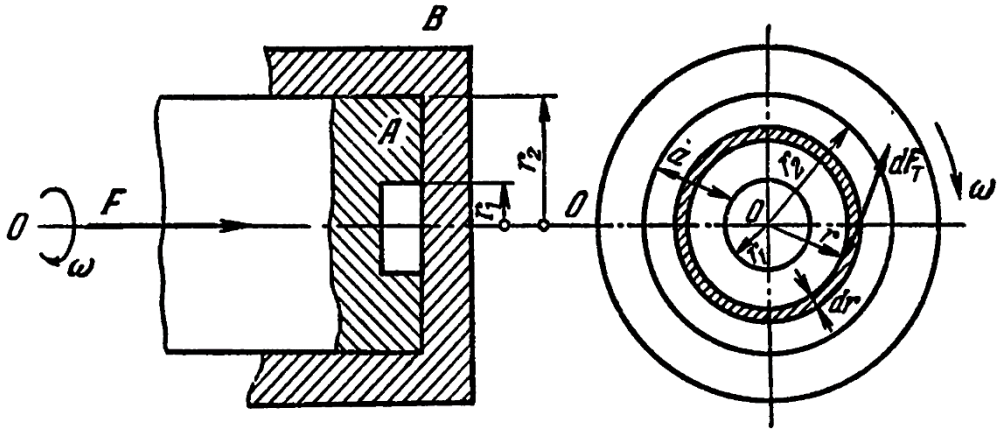


Рис. 5.3. Пята с подпятником

Разбивая пятно контакта на элементарные кольца dr, автор выводит формулу для момента трения верчения основания цилиндра радиусом r по плоской поверхности:

$$M_{врч} = \frac{2}{3} f_{ск} N r \approx 0{,}67\, f_{ск} N r \quad , \qquad (5.8)$$

здесь $M_{врч}$ – момент трения верчения; $f_{ск}$ – коэффициент трения скольжения; N – нормальное давление; r – радиус цилиндра (пятна контакта).

Отметим, что коэффициент трения верчения имеет размерность длины. Для связи его с коэффициентом сцепления следует применять приведенный коэффициент верчения (безразмерный).

Обычно момент трения верчения записывают в виде аналогичном закону Амонтона-Кулона

$$M_{врч} = \mu\, N \quad , \qquad (5.9)$$

где μ - коэффициент трения верчения; N – нормальное давление.

Нужно заметить, что в формуле Артоболевского входит коэффициент 2/3, у других авторов он отличается. Т.е. у Артоболевского значение коэффициента трения верчения $\mu \approx 0{,}67\, f_{ск}\, r$.

Лойцянский и Лурье приводят другие значения. Для верчения цилиндра $\mu \approx 0{,}79\, f_{ск}\, r$, в общем случае $\mu \approx 0{,}59\, f_{ск}\, r$

В самом общем случае можно сказать, что коэффициент трения верчения может быть записан в виде

$$\mu = A\, f_{ск}\, r \quad , \tag{5.10}$$

где А – коэффициент приведения трения скольжения к трению верчения.

Причем, согласно источникам, А всегда меньше единицы, т.е. трение верчения всегда меньше трения скольжения.

Сравнивая формулу трения верчения

$$M_{врч} = \mu\, N \quad , \tag{5.11}$$

и формулу трения скольжения

$$F_{тр} = f_{ск}\, N \quad . \tag{5.12}$$

Видно, что формулы совпадают по виду, но складывать алгебраически коэффициенты трения скольжения и верчения нельзя, т.к. они характеризуют два разных вида трения. Тем не менее, можно вывести единый коэффициент зацепления с поверхностью для сложного вида движения: скольжения с верчением.

Для этого, приведем к единому образцу коэффициенты трения.

Как указано выше, коэффициент трения верчения μ, зависит от коэффициента скольжения и радиуса пятна контакта

$$\mu = A\, f_{ск}\, r \quad . \tag{5.13}$$

Используя обычную связь момента силы и действующей силы:

$$M = F * r \quad . \tag{5.14}$$

Можно вывести формулу приведенной силы трения верчения

$$F_{п.врч} = \frac{M_{врч}}{r} = \frac{\mu}{r} N \quad , \tag{5.15}$$

здесь $M_{врч}$ – момент трения верчения; $F_{п.врч}$ – приведенная сила трения верчения; r – радиус пятна контакта; N – нормальное давление.

Введя обозначение приведенного коэффициента трения верчения:

$$f_{п.врч} = \frac{\mu}{r} = A\, f_{ск} \quad . \tag{5.16}$$

Получим стандартный вид закона Амонтона-Кулона для приведенной силы трения верчения

$$F_{п.врч} = f_{п.врч}\, N \tag{5.17}$$

Сила зацепления с горизонтальной поверхностью при скольжении с верчением будет определяться согласно формуле:

$$F_{зцп} = W_{ск} F_{тр} + W_{врч} F_{п.врч} = W_{ск}\, f_{ск}\, N + W_{врч} f_{п.врч}\, N = (W_{ск}\, f_{ск} + W_{врч} f_{п.врч}) N \,, \tag{5.18}$$

здесь $W_{ск}$ – коэффициент влияния трения скольжения; $W_{врч}$ - коэффициент влияния трения верчения. При условии $W_{ск} + W_{врч} = 1$.

Математическое моделирование показывает, что сила трения зацепления $F_{зцп}$, будет меньше силы трения скольжения $F_{ск}$ и больше приведенной силы трения верчения $F_{п.врч}$, другими словами

$$F_{п.врч} < F_{зцп} < F_{ск} \quad , \tag{5.19}$$

Можно еще больше упростить последнюю формулу, если подставить значение приведенного коэффициента трения верчения $f_{п.врч} = A\, f_{ск}$, тогда получим:

$$F_{зцп} = (W_{ск}\, f_{ск} + W_{врч} A\, f_{ск}) N = (W_{ск} + A\, W_{врч})\, f_{ск} N \quad . \tag{5.20}$$

Вводя обозначение

$$f_{зцп} = (W_{ск} + A\, W_{врч})\, f_{ск} \quad . \tag{5.21}$$

где $f_{зцп}$ – коэффициент зацепления с плоской поверхностью при сложном движении скольжения с верчением.

Получим уравнение Амонтона-Кулона для сложного движения скольжения с верчением:

$$F_{зцп} = f_{зцп} N \, . \tag{5.22}$$

Выводы

Предлагается рассмотреть поворот колеса транспортного средства как механизм уменьшения сопротивления проскальзыванию, при реализации которого исчезает движение транспортного средства по дорожному покрытию без проскальзывания.

В связи с тем, что коэффициенты сцепления и верчения (поворота) имеют разную размерность, необходимо использовать в расчетной формуле коэффициент приведения по умолчанию.

Глава 6. Применение математики в физике

6.1. Матрицы

Несмотря на то, что данная работа посвящена физическим теориям, необходимо рассмотреть некоторые вопросы математики в применении к физике. Эта необходимость обусловлена тем, что в современной физике математический аппарат применяется настолько широко, что позволяет говорить о математизации физики. Так в «Трактате по динамике» (1743 г.) Даламбера формулировалась программа перестройки механики на небольшом числе общих принципов метафизического (философского, прим. Авт.) характера.

Мы уже говорили, что необходимо различать линейные операторы, векторы и дифференциалы в применении к физическим теориям].

Как будет показано далее, необходимо также различать векторы, тензоры и линейные операторы. Начнем рассмотрение с матриц.

«**Матрица** – прямоугольная таблица

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \dots\dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{vmatrix} \qquad (6.1)$$

состоящая из m строк и n столбцов, элементы которой a_{ij} принадлежат некоторому множеству K»[79].

Линейное преобразование (линейный оператор) – это оператор преобразования векторного пространства.

«Пусть U и U' – линейные векторные пространства над одним и тем же полем скаляров $\alpha, \beta, \dots$ Тогда линейное преобразование пространства U в пространство U' есть отображение

$$x' = f(x) \equiv A\,x \qquad (6.2)$$

ставящее каждому вектору $\mathbf{x} \in U$ в соответствие некоторый вектор $\mathbf{x}' \in U'$ так, что при этом сохраняются «линейные» операции сложения векторов и умножения векторов на скаляры.

Каждое линейное преобразование может быть записано как умножение на **линейный оператор A (линейную операцию)**, причем

$$A(x + y) \equiv A\,x + A\,y, \qquad A(\alpha x) \equiv \alpha (A\,x) \qquad (6.3)$$

Линейное преобразование (оператор), отображающее линейное векторное пространство U в себя, называется **линейным оператором в пространстве** U» [79].

Линейный оператор выражается (в общем случае) прямоугольной $(m \neq n)$ матрицей, в частном случае матрица линейного оператора может быть квадратной $(m = n)$.

6.2. Векторы

Вектор – геометрический (физический) объект, который задается набором числовых функций (координат вектора) [79].

Вектор выражается матрицей строкой $(m = 1)$.

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{x}\,(a_1, \dots, a_n) \qquad (6.4)$$

А теперь, перейдем к алгебре матриц и алгебре векторов.

Сложение векторов и сложение матриц не имеет отличий, поэтому операцию сложения рассматривать не будем.

Рассмотрим умножение матриц.

Согласно правилу умножения матриц элементы матрицы произведения $(c_{i\ j})$ вычисляются по формуле

$$c_{i\,j} = \Sigma\, a_{i\,k}\, b_{k\,j} \quad . \tag{6.5}$$

Из приведенного правила следует, что количество строк первой матрицы должно быть равно количеству столбцов второй матрицы. В противном случае при перемножении прямоугольных матриц, произведение не имеет смысла. Так в [79] приведен следующий пример

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{не имеет смысла} \quad . \tag{6.7}$$

«В частности, квадратную матрицу всегда можно умножить саму на себя, т. е. возвысить в квадрат, тогда как прямоугольную неквадратную матрицу возвысить в квадрат нельзя.

Другим важным частным случаем является умножение строчной матрицы на столбцевую, причем ширина первой равна высоте второй; это даст квадратную матрицу первого порядка, то есть число

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \text{» [79].} \quad . \tag{6.8}$$

Причем умножение строковой матрицы на строковую матрицу, так же, как и умножение столбцевой матрицы на столбцевую матрицу не имеет смысла.

«Иногда применяется *транспонирование* матрицы А, т. е. перемена ролями ее строк и столбцов; полученную матрицу обозначают A^* (или A', если элементы матрицы действительные числа). Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

в общем виде можно написать $(a_{ij})^* = a_{j\,i}$.

Матрица, совпадающая со своей транспонированной, называется *симметрической*; такой может быть только квадратная матрица.» [79].

Из последней цитаты следует, что транспонированная матрица – это совершенно другая матрица.

Теперь перейдем к умножению векторов.

Во-первых, векторы – это строковые матрицы. И, согласно, формальному правилу умножения матриц (указанному выше), умножение векторов не имеет смысла. Тем не менее, умножение векторов (скалярное) совершенно определено в векторной алгебре.

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3)\,(b_1 \quad b_2 \quad b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \qquad (6.10)$$

Произведение векторов $\boldsymbol{a_i}$ и $\boldsymbol{b_i}$ в формуле (10) равносильно произведению строковой матрицы $\boldsymbol{a_i}$ и транспонированной матрицы $\boldsymbol{b_i}$*.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad . \qquad (6.11)$$

Но, однако операция транспонирования для векторов не определена. Отсюда следует вывод, что, в отличии от матрицы, транспонированный вектор – это тот же самый вектор.

$$a_i = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_i{}^* \quad . \qquad (6.12)$$

Т. е. векторы – это симметрические матрицы, хотя они прямоугольные, а не квадратные, чего для обычных матриц невозможно. Таким образом, необходимо различать обычные матрицы и векторы.

Симметрические свойства векторов можно объяснить следующим образом: вектор – это геометрический объект, а объект остается тем же самым объектом не зависимо от того стоит объект на основании или лежит на боку. В частности, для вектора существенно порядок следования и величина координат вектора, а направление следования координат в обозначении вектора (слева направо или сверху вниз) не имеет значения.

Исходя из выше изложенного следует, что в математике необходимо различать матрицы-операторы и матрицы-объекты[31].

К матрицам операторам относятся обыкновенные матрицы и линейные операторы, для которых введено понятие транспонирования. И, соответственно, транспонированная матрица считается другой матрицей.

К матрицам объектам относятся векторы, для которых не определено транспонирование и при этом, транспонированный вектор — это тот же самый вектор.

6.3. Скалярное произведение

Различие между матрицами операторами и объектами хорошо видно на примере нормы.

Для матриц объектов в литературе [79] приводится следующие примеры нормы матриц

$$\|A\|_p = \sup\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^p \right)^{1/p} , \qquad (6.13)$$

в частности

[31] В современной математике таких терминов не существует, однако, необходимость введения подобных терминов доказана выше.

$$\|A\|_1 = \sup\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|$$

$$\|A\|_2 = \sup\|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\right)^{1/2}$$ (евклидова норма) .

Так как в общем случае $\boldsymbol{m \neq n}$, матрица $\mathbf{A_{ik}}$ прямоугольная, которую по правилу умножения матриц нельзя возвести в квадрат.

В тоже время, для матриц операторов вводится, так называемая, «*операторная норма*»

$$\|A\| = \sup\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x=1}\|Ax\| \qquad (6.14)$$

где $\boldsymbol{x}$ – вектор

или

$$\|A\| = \sup\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\,\eta_k\right| \qquad \left(\sum_{i=1}^{m}|\xi_i|^2 = \sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^2 = 1\right)$$

Из сравнения (6.13) и (6.14) видно, что норма для матриц объектов существует для самих матриц (векторов), а для матриц операторов только для произведения оператора на (единичный) вектор.

В евклидовом пространстве норма вектора называется, также, длиной вектора.

Для операторов не существует понятие длины, но существует аналогичное понятие удлинения. Это коэффициент удлинения (укорочения) вектора при отображении вектора под действием оператора.

С понятием нормы тесно связано понятие скалярного (внутреннего) произведения.

$(a_i, b_k) = a_i\, b_k = c$ (6.15)

где a, b - векторы
c - скаляр
при $a_i = b_k$

$a_i\, b_k = a_i\, a_i = c = sup\,||\,a_i^2|\,|$ (6.16)

Фактически, норма вектора – это скалярное произведение вектора самого на себя (квадрат вектора).

Для операторов скалярное произведение вводится только для произведения оператора на вектор

$(A\,x, y) = c$ (6.17)

Таким образом, можно записать

$$(a_{ij}\ ,\ b_{kl}) = c \quad , \tag{6.18}$$

где c – скаляр, если a_{ij} и b_{kl} – векторы (матрицы объекты),

и нельзя писать

$$(A_{ij}\ ,\ B_{kl}) = c$$

где c – скаляр если $A_{i\,j}$ и $B_{k\,l}$ – линейные операторы (матрицы операторы).

6.4. Умножение матриц

Исходя из различий для матриц и векторов, следует различие по операции умножения.

По правилу умножения матриц элементы строки первой матрицы умножаются на элементы столбца второй. Поэтому легко показать, что

$$AB = B^*A^* \quad . \tag{6.19}$$

Так как для векторов $A = A^*$ и $B = B^*$, то

$$AB = B^*A^* = BA \quad . \tag{6.20}$$

Произведение векторов коммутативно, всегда.

В тоже время, для линейных операторов (в общем случае) $A \neq A^*$ и $B \neq B^*$, соответственно

$$AB = B^*A^* \neq BA \quad . \tag{6.21}$$

Произведение операторов не коммутативно[32].

Таким образом, матрицы операторы и матрицы векторы различаются в общем случае двумя важными свойствами:

Существование прямого скалярного произведения для векторов и операторного скалярного произведения для операторов.

Скалярное произведение векторов коммутативно, произведение операторов в общем случае нет.

6.5. Умножение тензоров

Перейдем к математическим образованиям, которые, в общем случае, не возможно отнести ни к векторам, ни к операторам[33]. Речь идет о тензорах.

Возьмем определение признака тензора из литературы в [79] говорится буквально следующее:

«Для того, чтобы объект Q был тензором, необходимо и достаточно, чтобы для каждого тензора X некоторого определенного (фиксированного) ранга, типа и веса внешнее произведение или какое-нибудь внутреннее произведение объекта Q и тензора X было тензором определенного (фиксированного) ранга, типа и веса.»

Далее на стр. 501 приводятся примеры:

[32] Кроме случаев симметрических операторов, когда A = A* и B = B*

[33] Точнее и к тем и к другим, в разных конкретных случаях.

«Примеры. 1) Q является абсолютным тензором, r раз контравариантным и s раз ковариантным, если для каждого абсолютного вектора $\boldsymbol{a}$ с компонентами a^i

$$\sum_{j_{r+s}=1}^{n} Q\left(j_1, j_2, \ldots, j_{r+s}\right) a^{j_{r+s}} = B^{j_1 j_2 \ldots j_r}_{j_{r+1} j_{r+2} \ldots j_{r+s-1}} . \qquad (6.22)$$

где в правой части компоненты абсолютного тензора.

2) Q является абсолютным тензором, r раз контравариантным и s раз ковариантным, если для каждого абсолютного тензора **A** с компонентами $A^{j_1 j_2 \ldots\ldots\ldots\ldots j_s}_{j_{s+1} j_{s+2} \ldots j_{s+r}}$

$$\sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \ldots \sum_{j_{r+s}=1}^{n} Q\left(j_1, j_2, \ldots, j_{r+s}\right) A^{j_1 j_2 \ldots\ldots\ldots\ldots j_s}_{j_{s+1} j_{s+2} \ldots j_{s+r}} = \alpha \quad , \qquad (6.23)$$

где α - абсолютный скаляр.»

Так как первый пример умножение тензора на вектор сомнений не вызывает, рассмотрим внимательнее только второй пример, внутреннее умножение тензоров ранга 2 и выше.

Для примера возьмем умножение двух тензоров второго ранга, согласно приведенному примеру

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A^{i\,j}\, B_{i\,j} = \alpha \quad , \qquad (6.24)$$

где α - абсолютный скаляр.

Приведенное правило умножения тензоров совершенно не похоже на правило умножения матриц, согласно которому при умножении квадратных матриц размера $n \times n$ в результате получается квадратная матрица $n \times n$, но ни в коем случае не скаляр.

Для объяснения данного примера, необходимо вспомнить, что «каждый тензор А (ранга 2) может быть представлен в виде суммы **диадных произведений (диад)**, то есть тензорных (внешних) произведений двух векторов:

$$A = p_i q^j \quad . \qquad (6.25)$$

Либо левые множители p_i, либо правые множители $q^{\,j}$ могут быть выбраны произвольно, если только они являются линейно независимыми». [79]

Отсюда следует, что в некоторых случаях тензор ранга 2 в некоторых случаях представляет собой матрицу – объект (диадное произведение). Совершенно естественно для таких тензоров двойное скалярное произведение [79].

$$A{*}{*}B = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (p_i * p'_j)(q^i * q'^{\,j}) = \alpha \quad , \qquad (6.26)$$

где α - скаляр.

Для обычных матриц и линейных операторов двойное скалярное произведение невозможно.

Таким образом, по правилам умножения тензоров, среди тензоров второго и выше ранга необходимо различать матрицам - операторы, (линейные операторы), алгебра умножения которых соответствует умножению. И матрицы – объекты (диады). Но согласно первому примеру, при умножении тензора второго ранга и выше на вектор (тензор первого ранга), тензоры ведут себя адекватно умножению линейных операторов на вектор.

6.6. Тензоры в римановых пространствах

Рассмотрим фундаментальные тензоры риманова пространства: метрический тензор $g_{i\,k}$ и ассоциированный метрический тензор $g^{k\,j}$.

Во-первых, произведение фундаментальных тензоров [79]

$$g_{i\,k}g^{k\;j} = \delta_i^j \tag{6.27}$$

равно тензору второго ранга δ_i^j, а не скаляру как в примере, приведенном выше, а это означает, что фундаментальные тензоры риманова пространства – линейные операторы[34] или что-то подобное.

Во-вторых, «благодаря принятым обозначениям алгебра тензоров ранга 2 в точности совпадает с алгеброй линейных операторов

6.7. Параллельные кривые?

Вторая аксиома Евклида гласит: «Параллельные прямые не пересекаются» [16]. Но, ни где и никогда не упоминаются параллельные кривые. Тем не менее в литературе упоминается понятие параллельного переноса в криволинейных координатах.

Это означает, что криволинейного пространства (Римана, Лобачевского и др.) отдельно от пространства Евклида не существует (физически). А существует одно пространство, в котором можно провести прямолинейные ортогональные координаты (евклидовы), в этом случае пространство **называется** *евклидовым*, или криволинейные и (или) неортогональные координаты и в этом случае пространство будет **называться** *неевклидовым.* Пространство именно называется, а не является как это можно представить по современным источникам, в которых постоянно упоминаются неевклидовое пространство, без упоминания, что на самом деле, речь идет только о неевклидовых координатах в пространстве.

Таким образом, ОТО не предлагает новую теорию гравитации[35], а только описывает теорию гравитации в неевклидовых координатах. А ажиотаж вокруг ОТО связан с непониманием разницы между новой теорией и старой теорией описанной новым способом.

Первоначально рассмотрим характер движения и понимание производных в механике.

В механике различаются два вида движения: прямолинейное и криволинейное. Эти характеристики движения называются «характером движения». Кроме этого введены понятия «равномерность движения». Путать эти понятия нельзя.

Для описания характеристик **равномерности** движения введены понятия «производных пути по времени». Фактически, по смыслу понятия, производная параметра по времени – это скорость изменения параметра со временем. Некоторые производные имеют особые названия.

[34] По крайней мере, умножение фундаментальных тензоров подчиняется правилам умножения линейных операторов (матриц – операторов).
[35] Как это предполагают некоторые авторы современной научной и учебной литературы.

Так, первая производная пути по времени $v = \frac{ds}{dt}$ - называется «скоростью, v».

Вторая производная пути по времени $a = \frac{d^2s}{dt^2}$, называется «ускорением». Легко видеть, что ускорение – это «скорость изменения скорости со временем», т.е. $a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$. Особое название имеет случай равенства нулю ускорения $a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 0$. Если ускорение равно нулю, значит, скорость не меняет своего значения со временем, такое движение называется равномерным.

Высшие производные пути по времени отдельных названий не имеют, т.к. не имеют особого смысла:

Так, третью производную пути по времени, можно назвать «скоростью ускорения», т.к. третья производная, равна производной (скоростью) ускорения по времени $\frac{d^3s}{dt^3} = \frac{da}{dt}$, а можно назвать и «ускорением скорости», т.к. $\frac{d^3s}{dt^3} = \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{da}{dt}$, или «ускорением второго порядка». Отдельное название имеет случай равенства нулю третьей производной пути по времени, т.к. $\frac{d^3s}{dt^3} = \frac{da}{dt} = 0$, означает, что ускорение постоянно во времени. Такое движение называется равноускоренным.

Соответственно, производную четвертого порядка пути по времени, можно называть: «скоростью ускорения второго порядка», «ускорением ускорения» и т.д. Потому, что

$$\frac{d^4s}{dt^4} = \frac{d^3v}{dt^3} = \frac{d^2a}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{da}{dt}\right). \qquad (6.28)$$

При этом, несмотря на любую степень производной пути по времени не равной нулю, при отсутствии отклонения угла траектории, движение останется прямолинейным.

Как указано выше, значения производных (пути от времени) любого порядка не влияет на характер движения. Остается вопрос, а что на самом деле отличает прямолинейное движении от криволинейного. Ответ простой: неравенство нулю производной угла по времени $\omega = \frac{d\varphi}{dt} \neq 0$. Только неравенство нулю производной **угла по времени**, отличает криволинейное движение от прямолинейного. Причем нужно помнить, что изменение угла никак не зависит от изменений скорости, ускорений и более высших производных пути от времени. Путь и угол – две совершенно разные параметры, друг от друга никак **не зависят**. Производные пути по времени могут иметь ненулевые значения в любом порядке, но на характер движения – это никак не влияет. Если **изменения угла нет** – значит, движение **прямолинейное**, даже если не равны нулю, хоть третья, хоть пятая производная пути по времени (см. выше). Если же **есть изменение угла**, то не важно, чему равны производные пути по времени любого порядка – движение будет **криволинейным.**

Также, как и производные пути могут быть разных порядков, также и производные угла по времени могут быть разного порядка. Чтобы не путать скорость как производную пути от времени и скорость поворота (производную угла поворота от времени) придуманы два названия скорости: **линейная скорость** – изменение длины пути со временем и **угловая скорость** - изменение угла поворота со временем, точно также разделяют понятия линейное ускорение, как вторую производную пути по времени и угловое ускорение, как вторую производную угла поворота от времени.

Точно также, производные угла поворота от времени, любого порядка, могут быть не равны нулю

Разберем их по очереди.

Первый случай тривиальный, и разобран выше. Когда угловая скорость ω равна нулю $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 0$, в этом случае движение прямолинейное.

Наличие ненулевого значения первой производной означает, что движение криволинейное $\omega = \frac{d\varphi}{dt} \neq 0$.

При этом могут быть разные случаи, в зависимости от значения производных второго и более высшего порядка.

Если вторая производная угла по времени (угловое ускорение) равна нулю $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$, движение называется круговым. Т.к. угловая скорость постоянна, значит, за равные промежутки времени объект повернется на равный угол, другими словами опишет дугу постоянного радиуса, т.к. радиус поворота определяется по формуле: $R = \frac{S}{\varphi}$, здесь S – длина дуги пройденная за единицу времени, φ – угол поворота **в радианах** за тот же период времени.

Если равна нулю третья производная угла поворота от времени, то движение происходит по траектории, вдоль которой угловое ускорение изменяется равномерно. Т.е. условие $\frac{d^3\varphi}{dt^3} = \frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{d\varepsilon}{dt} = 0$, означает, что $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = const \neq 0$. Другими словами, угловое ускорение постоянно, при этом угловая скорость растет (уменьшается) равномерно. Т.к. угловая скорость определяет угол поворота за единицу времени, то увеличение угловой скорости означает увеличение угла поворота за тот же период времени. Кривая, у которой угловая скорость изменяется равномерно – это спираль Архимеда (рис. 6.1):

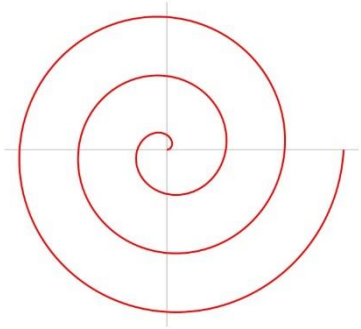


Рис. 6.1. Спираль Архимеда

Это значит, что кривая при ненулевой второй производной угла поворота будет архимедова спираль, у которой радиус траектории растет постепенно и равномерно. Из рисунка видно, что на каждом обороте радиус меняется на одну и туже величину.

Ненулевая четвертая производная приводит к более сложной траектории, у которой не просто изменяется угловая скорость (радиус поворота), но изменения угловой скорости происходят ускоренно. Это приведет к кривой, типа логарифмической спирали (рис. 6.2).

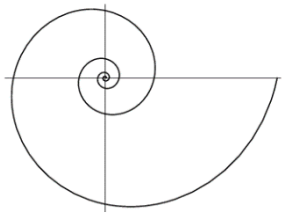


Рис. 6.2. Логарифмическая спираль

На таком виде спирали радиус растет не равномерно, а с ускорением.

Более высшие производные угла поворота по времени приводят к кривым более высокого порядка.

Важно отметить, что ненулевые производные угла поворота любого порядка никак не влияют на скорость движения вдоль траектории.

Все выше изложенное означает, что любое движение вдоль траектории никак не влияет на вид самой траектории, при этом вид траектории никак не влияет на скорость движения вдоль траектории. Т.е., как сказано выше, движение вдоль траектории и вид траектории не зависят друг от друга. Движение вдоль траектории определяется пройденным путем вдоль траектории за единицу времени. Вид траектории определяется изменением угла поворота за ту же единицу времени. Причем:

Ненулевые производные любого порядка **пройденного пути по времени** влияют только на скорость движения вдоль траектории, и никак не влияет на вид траектории.

Производные любого порядка **угла поворота по времени** влияют только на вид траектории, и никак не влияют на движение вдоль траектории.

Кроме случаев, рассмотренных раннее, когда закон движения вдоль траектории и вид траектории сохраняется на все время движения, могут быть случаи, когда законы движения меняются в процессе самого движения.

Возможны два варианта составного движения:

Траектория не меняется за все время движения. Но значения производных разного ранга пути от времени меняют свои значения за время движения. Т.е. темпы движения вдоль неизменной траектории меняются со временем. Так, равномерное движение, может меняться на равноускоренное или на ускоренное в третьем или более высоком порядке производной. Естественно, порядок и время действия различных законов изменения темпов движения вдоль заданной траектории может быть любым. Причем время и место изменения законов темпа движения вдоль траектории может быть произвольным, не зависимо от критических точек траектории.

Аналогично могут меняться законы строения траектории. Траектория может состоять из составных кусков, прямолинейных (угловая скорость равна нулю), круговых дуг (угловая скорость равномерная), дуг спиралей (второго, третьего и т.д. порядков). Точно также время и место смены характера траектории может быть произвольным.

Кроме случаев раздельного составного движения, когда меняются законы движения, либо вдоль заданной траектории, либо сложного изменения вида траектории, может реализоваться самый сложный вид – сложно составное движение. Это когда за время движения, изменяется не только вид траектории (меняются значения производных разного порядка угла от времени), но при этом и произвольно меняются темпы движения вдоль траектории (меняются значения производных разного порядка пути от времени).

Точки изменения вида траектории и темпов движения вдоль траектории могут меняться независимо друг от друга.

6.8. Выводы

Векторы и линейные операторы (матрицы)– совершенно разные математические объекты, которые нельзя путать при операции умножения, так как они умножаются по разным правилам.

Тензоры ранга 2 и выше – математические объекты в общем случае неизвестной природы. Для конкретного применения необходимо дополнительное исследование, для выяснения относится данный тензор к операторам или объектам.

Глава 7. Топологическая механика

7.1. Введение

Существует один принцип, который хорошо известен, но про него часто забывают на практике. Формулируется он так: решение математического уравнения не зависит от практического смысла входящих в уравнение членов. Если говорить проще, то можно сформулировать так: правила сложения чисел не зависят от того, какие числа складывают. Это может быть сложение количества молекул в химии, может быть сложение двух параллельных сил в механике или сложение двух расстояний в геометрии и т.д., но в любом случае числа складываются по одним и тем же законам.

Необходимость такого вступления произошла от того, что при обсуждении предлагаемого решения встретилось следующее возражение: предложенное решение было найдено для совсем другой **физической** задачи, значит, и метод решения не может быть принят. Попытка объяснить, что если уравнение одно и то же, то и решение уравнения будет аналогичным, натолкнулась на довод: но ведь физический смысл у задач разный, значит, и переносить решения с одного случай на другой нельзя!

Мы же исходим из общего методического принципа, сформулированного выше. Заявляем, что если решение какой-то задачи сводится к решению математического уравнения, то решение уравнения будет однозначно одинаковым, независимо от физического смысла решаемой задачи.

Сформулируем философский принцип математики: применение математических символов, уравнений и построений в виде доказательств или математических выводов не зависит от физического смысла решаемых **физических** задач.

Кажется, что этот принцип очевиден и всем известен, но в процессе решения самых разнообразных физических задач авторы столкнулись с тем, что большее количество споров возникает вокруг вопросов, а можно ли применять математические выводы, доказанные для одной конкретной физической задачи, в случае решения другой конкретной физической задачи. Заявлялась необходимость проверки легитимности применяемых математических доказательств.

Но формулировка указанного принципа не означает, что можно его применять, не задумываясь в любых похожих случаях. Есть существенное ограничение. Необходимо доказывать, что случаи переноса не просто внешне похожи, а строго аналогичны **в рамках поставленной задачи**.

В качестве конкретного примера можно привести геометрию Евклида и неевклидову геометрию. В них есть области, в которых эти геометрии полностью совпадают, и теоремы, доказанные в рамках евклидовой геометрии, которые полностью совпадают с аналогами неевклидовой геометрии, но есть и различия[36].

Таким отличием являются и ее следствия, в частности то, что в евклидовой геометрии сумма углов треугольника равна 180^0, а в неевклидовых геометриях это не так.

Следствием сформулированного принципа с учетом ограничения является то, что необязательно доказывать математические теоремы, каждый раз встречаясь с новой физической задачей, достаточно доказать, что в новых условиях не действует ограничение.

Другими словами, новая задача не просто внешне похожа, а строго аналогична уже решенной задаче. В частности, для неевклидовой геометрии ограничением является теорема Пифагора и ее следствия. Если при доказательстве какой-то теоремы в явном или неявном виде не используется сумма квадратов катетов, то ее доказательство и выводы, можно считать автоматически доказанными для неевклидовой геометрии.

[36] Это доказывается в любом курсе дифференциальной геометрии, например см. [10] (Прим. Авт.).

Сделаем еще одно отступление, которое тоже часто вызывает замешательство. Это соотношение между достаточными условиями и необходимыми условиями для решения задачи.

При объяснении различий между «достаточными» и «необходимыми» приводится в частности такой пример.

Утверждение:

Каждый квадрат является ромбом. Истинно.

А утверждение:

Каждый ромб является квадратом. – Ложно.

Различия в том, что достаточные условия – это условия, при выполнении которых утверждение однозначно истинно. А необходимые условия – это те условия без выполнения, которых утверждение **не может быть** истинным.

В примере с ромбом и квадратом ситуация следующая.

Чтобы четырехугольник был ромбом необходимо одно условие:

А. Все грани четырехугольника были равны между собой.

А чтобы четырехугольник был квадратом, необходимо уже два условия:

А. Все грани четырехугольника были равны между собой.

Б. Все углы четырехугольника должны быть равны 90°.

Т.о. чтобы четырех угольник был ромбом, необходимо выполнение условия А, условие Б – не является обязательным.

«Квадрат - заведомо ромб; однако из того, что четырехугольник - ромб, не следует, что он - квадрат (нужно еще, чтобы углы были прямые)» [132].

Несмотря на кажущуюся простоту, данный вопрос о разделении необходимых и достаточных условий вызывает замешательство.

Разберемся на общем примере. Допустим, некая физическая задача решена при определенных условиях. Причем условия, при которых была решена задача, вытекают из физического смысла задачи. Далее следует логическая ошибка: условия, при которых решена задача, вместо того, чтобы быть объявленными *достаточными*, объявляются *необходимыми*. А далее следуют следующие рассуждения: «Если все условия, при которых была решена задача, *объявлены* необходимыми, значит, отсутствие любого из списка условий является категорическим доказательством невозможности решения задачи». Но это явная ошибка, происходящая из отсутствия четкого анализа и автоматически включаемой инерции мышления.

Наиболее характерный пример такой ошибки являет история становления неевклидовой геометрии. Все жаркие споры по поводу неевклидовой геометрии проистекали, в первую очередь, от внутреннего сопротивления тому, что некоторые аксиомы Евклида не являются необходимыми для построения непротиворечивой геометрии.

В данном вопросе мало помогало, что с древних времен была известна сферика[37]. Тем не менее, геометрия Лобачевского и геометрия Римана встретила самую горячую критику. Так, например, Гаусс пришел к неевклидовой геометрии раньше Лобачевского, но не опубликовал работы по данному вопросу, по причине, указанной им в некоторых письмах. Например, к австрийскому астроному Герлингу. В 1818 г. Гаусс писал: «Я радуюсь, что вы имеете мужество высказаться так, как если бы вы признавали ложность нашей теории параллельных, а вместе с тем и всей нашей геометрии. Но осы, гнездо которых Вы потревожите, полетят Вам на голову»; по-видимому, под «потревоженными осами» Гаусс имел в виду сторонников традиционных взглядов на геометрию, а также априоризма математических понятий» [28].

[37] Так в древности называлась сферическая геометрия (Прим. авт.).

7.2. Состояние проблемы решения задачи сферического маятника

Сначала приведем краткий обзор современного состояния данной задачи.

«Уравнения движения сферического маятника впервые были получены еще в 18 веке. Кривая, которую выписывает сферический маятник, изучена Клеро в 1735 году, Лагранжем и Пюизе в 1842 году» [96]. В настоящее время известно несколько методов решения задачи. Примечательно, что все авторы, исследующие движение сферического маятника, приходят к выводу, что орбита сферического маятника представляет собой прецессирующий овал, близкий к эллипсу на поверхности сферы с радиусом, равным длине маятника.

Рассмотрим некоторые из решений.

Валле-Пуссен решает задачу в цилиндрических координатах [27], r, θ и z. С началом координат в точке подвеса. Причем z направлена вертикально, а r, θ – полярные координаты. В качестве уравнений связи координат автор использует «уравнение сферы, интеграл живых сил[38] и интеграл площадей[39]» [27]. Но для решения использует не уравнения динамики в виде изначальных уравнений Ньютона, а уравнения связи, упомянутые выше. Т.к., уравнений динамики точки в трехмерном пространстве три, и уравнений связи координат тоже три, то, как доказано в теории динамики точки, такая замена допустима и результат, полученный в результате такой замены, будет аналогичным.

В результате проведенных математических преобразований автор приходит к выводу, что в проекции на горизонтальную плоскость xy траектория представляет собой прецессирующий овал, близкий к эллипсу. В проекции на вертикальную плоскость – траектория качается от параллели b до параллели c (см. рисунок 7.1).

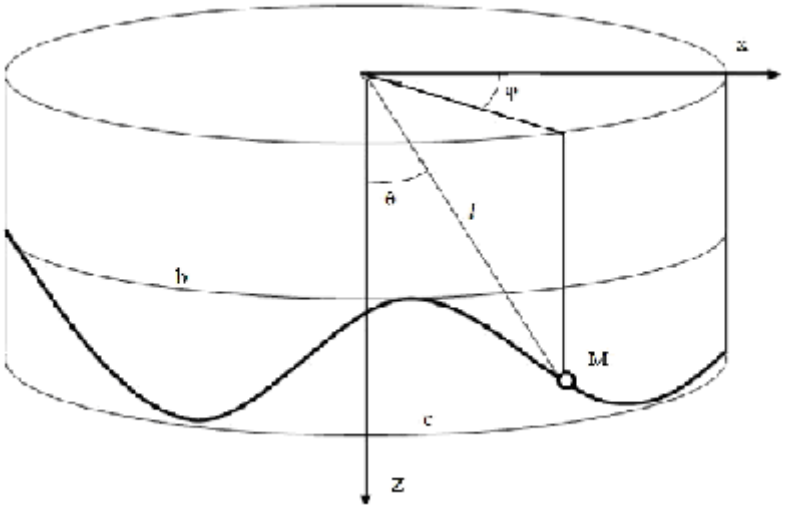


Рис. 7.1. Примерный вид решения Валле-Пуссена[40] (рис. авт.)

Аналитическое решение, полученное Валле-Пуссеном, выражается в виде двух интегралов

$$T = l\int_{b}^{c} \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}} \quad , \qquad (7.1)$$

где T – полупериод движения маятника, l – длина маятника, b и c – параллели максимального подъема и опускания траектории, соответственно, φ(z) - эллиптическая функция:

[38] Закон сохранения энергии (Прим. авт.).
[39] Закон сохранения кинетического момента (Прим. Авт.).
[40] Оговоримся сразу, Валле-Пуссен не приводит рисунка своего решения, по причине указанной далее (Прим. Авт.).

$$\varphi(z) = (l^2 - z^2)(2gz + h) - C^2, \qquad (7.2)$$

здесь l – длина маятника, g – ускорение свободного падения, h – полная механическая энергия, C – кинетический момент.

Второй интеграл решения записывается в виде:

$$\Theta = Cl \int_b^c \frac{dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{\varphi(z)}} \quad , \qquad (7.3)$$

здесь Θ - амплитуда угла θ (см. рисунок 1), остальные обозначения совпадают с обозначениями (10) и (11).

Глядя на рисунок можно сразу указать ошибку автора. Дело в том, что «эллипсы» на параллелях b и c имеют разные размеры полуосей. Потому, что поверхность, по которой движется сферический маятник, не цилиндр, а сфера. Наверняка именно поэтому Валле-Пуссен не приводит рисунок полученного решения. Более того, из интеграла (12) следует, что окончательное решение автор получает все-таки в сферических координатах, хотя и в неявном виде. Но аналитические результаты не вызывают сомнений. В них изменение больших полуосей «эллипса» получаются автоматически в процессе вычислений.

Другие авторы, например, П. Аппель [13] и Н.Н.Бухгольц [26] сразу вводят сферические координаты. В результате П.Аппель, практически повторяя математический метод вывода (за исключением системы координат), получает тот же самый результат вплоть до обозначений. Н.Н.Бухгольц за счет введения другой подстановки получает конечный интегралы в несколько ином виде.

Так интеграл полупериода движения сферического маятника получен в виде:

$$T = \int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{F(u)}} \quad , \qquad (7.4)$$

здесь T - полупериод обращения маятника по орбите; u – новая переменная, $u = cos\ \varphi$; а $F(u)$ определяется выражением:

$$F(u) = \left(h + 2\frac{g}{l}u \right)(1 - u^2) - c^2 \quad . \qquad (7.5)$$

Остальные обозначения совпадают с (7.1) и (7.2).

«Поскольку F(u) многочлен третьей степени относительно u, то стоящий в правой части интеграл будет эллиптическим. Т.о. зависимость между u и t, а следовательно и между φ и t может быть выражена с помощью соответствующей эллиптической функции, называемой эллиптической функцией Вейерштрасса» [26].

А вертикальная амплитуда качания орбиты выражается интегралом:

$$\Theta = c \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{(l^2 - u^2)\, F(u)} \quad , \qquad (7.6)$$

То, что решения, приведенные в учебниках П.Аппеля и Н.Н.Бухгольца, аналогичны, хорошо видно из сравнения рисунков 7.2 и 7.3.

Отметим главное сходство между интегралами (10), (121) и (13), (15). Все интегралы полученных решений являются уравнениями с одним единственным неизвестным. В уравнениях (10) и (12) – это координата z, а в (13) и (15) – это переменная u.

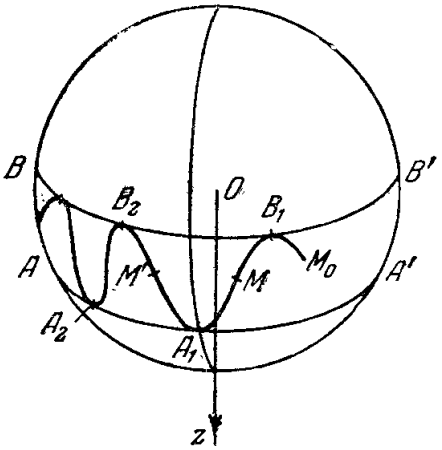


Рис. 7.2. Движение сферического маятника из учебника П.Аппеля [13].

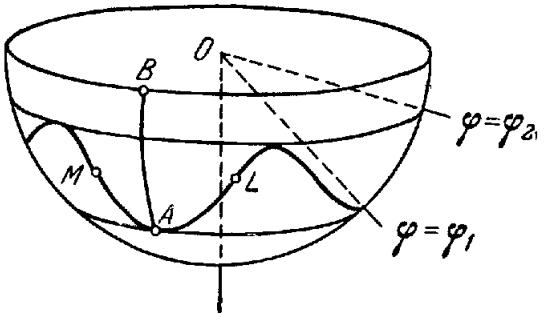


Рис. 7.3. Движение сферического маятника из учебника Н.Н.Бухгольца [26]

Несколько иной подход применили авторы в [34]. Они рассматривают движение обычного плоского маятника на вращающейся платформе. Авторы статьи не указывают, что случай движения плоского маятника на вращающейся платформе идентичен сферическому маятнику, тем не менее, полученные ими решения полностью совпадают с решениями сферического маятника.

Проанализируем полученные решения. Во-первых, отметим, что получено не одно уравнение с одним неизвестным, а два уравнения с одним неизвестным. Причем одно уравнение дает решение движения тяжелой точки вдоль траектории, а второе – движение самой траектории в пространстве. Т.о., задача сведения к одномерному случаю не выполнена до конца. Тем не менее, полученные решения позволяют получить зависимость координат точки в трехмерном пространстве в зависимости от времени.

Что примечательно, хотя уравнений два, но они независимы друг от друга, что и дает возможность решить задачу движения. Явным недостатком полученных решений является появление эллиптических интегралов в решениях. Проблема в том, что эллиптические интегралы не решаются аналитически, а их значения можно получать только численными методами. По-видимому, это является неизбежным следствием применяемых методов.

7.3. Сведение к одномерной задаче

Анализируя различные источники, мы приходим к выводу, что решение физических задач только тогда приводят к полному решению в элементарных функциях, когда задачу удается свести к одномерному случаю. В противном случае задачу либо не удается решить, либо решение становится таким сложным, что исследовать полученное решение до конца не удается. Например, «в большинстве случаев (например, в задаче трех тел) не удается ни решить систему дифференциальных уравнений движения, ни достаточно полно исследовать поведение решений» [14] и даже «анализ общей потенциальной системы с двумя степенями свободы выходит за рамки возможностей современной науки» [14]. В тоже время анализ системы с одной степенью свободы решается в полном объеме. Более того, некоторые задачи, которые удалось решить полностью, например, задача Кеплера, решена полностью, именно методом сведения к одномерному случаю.

Ввиду особой важности рассмотрим пример сведения механической задачи к одномерному случаю подробно.

«Определение. Системой с одной степенью свободы мы будем называть систему, описываемую одним дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \quad . \tag{7.7}$$

Кинетической энергией называется квадратическая форма

$$T = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} \quad . \tag{7.8}$$

Потенциальной энергией называется функция

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi \quad . \tag{7.9}$$

Заметим, что потенциальная энергия определяет *f*» [14].

Отметим, те факты, которые опустил уважаемый автор. Во-первых, функция f входит и в уравнение движения (1) и под интеграл потенциальной энергии (3). Тогда из (3) следует, что

$$\frac{dU}{dx} = f(x) \quad . \tag{7.10}$$

Подставляя (4) в (1) окончательно получим уравнение движения в форме

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad . \tag{7.11}$$

Во-вторых, движение материальной точки определяется только одним уравнением, либо в форме (7.7), либо в виде (7.11) которое зависит только от одной переменной.

В-третьих, для того, чтобы существовало уравнение движения в виде (7.11), поле в котором движется материальная точка должно быть потенциальным. Т.е. должно

существовать потенциальная энергия в виде (7.9). Дальше будет ясно, зачем мы акцентируем внимание на этих пунктах.

Ввиду важности метода сведения двумерной задачи к одномерной приведем доказательство полностью.

«Закон сохранения кинетического момента позволяет свести задачу о движении в центральном поле к задаче с одной степенью свободы. Благодаря этому, движение в центральном поле можно исследовать полностью.

Сведение к одномерной задаче. Рассмотрим движение точки (массой 1) в центральном поле на плоскости:

$$\frac{d^2 r}{d t^2} = -\frac{\partial U}{\partial r}, \qquad U = U(r) \qquad . \tag{7.12}$$

По закону сохранения кинетического момента величина $M = \frac{d\varphi(t)}{d t} r^2(t)$ постоянна.

Теорема. При движении материальной точки единичной массы в центральном поле ее расстояние от центра поля меняется так, как *r* в одномерной задаче с потенциальной энергией

$$V(r) = U(r) + \frac{M^2}{2r^2} \qquad . \tag{7.13}$$

Величина V(r) называется эффективной потенциальной энергией.

Доказательство. Дифференцируя соотношение $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} e_r + r\frac{d\varphi}{dt} e_\varphi$, находим

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \cdot \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)^2\right) \cdot e_r + \left(2 \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + r \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) \cdot e_\varphi . \tag{7.14}$$

Ввиду центральности поля

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial U}{\partial r} e_r . \tag{7.15}$$

Поэтому уравнение движения в полярных координатах принимает вид

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \cdot \left(\frac{d\varphi}{d t}\right)^2 = \frac{\partial U}{\partial r}, \qquad 2 \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + r \cdot \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) = 0 \quad . \tag{7.16}$$

Но по закону сохранения кинетического момента

$$\frac{d\varphi}{d t} = \frac{M}{r^2} \qquad . \tag{7.17}$$

Поэтому

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial r} + r \cdot \frac{M^2}{r^4} \text{ или } \quad \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial r}, \text{ где } V = U + \frac{M^2}{2r^2} \text{» [14].} \qquad (7.18)$$

Проанализируем то, что «осталось за кадром». Самое главное, что доказательство остановилось в тот момент, как только первоначальная система уравнений движения была сведена к одному единственному уравнению, в котором присутствует одна единственная переменная (координата). Но именно это мы (см. выше) приводили в качестве необходимого условия существования одномерной динамической задачи. Второе необходимое условие – существование потенциального поля, выполняется изначально. Все остальные условия (центральность поля и закон сохранения кинетического момента), являются достаточными, а значит необязательными для того, чтобы решить поставленную задачу. Фактически эти дополнительные условия нужны только для выполнения математических преобразований, в результате которых достигается конечный результат.

Сформулируем основной принцип (в виде теоремы), который очевиден, но до сих пор не встречался в учебной и научной литературе.

Если в результате легитимных математических преобразований начальная система уравнений движения динамической системы сводится к единственному уравнению, содержащему единственную переменную, то такая динамическая система сводится к одномерной задаче. И все решения, полученные для одномерной системы, автоматически распространяются на первоначальную систему.

Под легитимными математическими преобразованиями мы понимаем любые математические преобразования, не противоречащие законам математики, например, переходы систем координат, подстановки, замены переменных и т.д. Не важно, каким путем, важно не нарушать законы логики и математики, главное результат.

Отметим еще одно, закон сохранения кинетического момента использован как математическая подстановка для замены переменных. Из уравнения:

$$M = \frac{d\varphi}{dt} r^2 \qquad (7.19)$$

выводится формула:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{r^2} \quad . \qquad (7.20)$$

Уже последняя формула используется как подстановка, чтобы исключить из уравнения движения переменную φ и заменить на переменную r.

Этот прием следует из известного принципа, что если существует уравнение

$$M(x, y) = 0 \quad , \qquad (7.21)$$

где M – любое математическое выражение, обусловливающее однозначную связь между переменными x и y.

Это означает, что переменные x и y не являются независимыми. Если можно вывести явную связь в виде

$$y = N(x) \quad , \qquad (7.22)$$

то, подставляя (9) в уравнения движения можно избавиться от одной из переменных.

Если x и y являются координатами, то говорят, что координаты не являются независимыми. Ту координату, которую можно исключить из уравнения движения подстановкой называют циклической.

Причем наличие закона сохранения кинетического момента является достаточным, но не обязательным (необходимым) условием. Различие состоит в том, что закон сохранения кинетического момента является частным случаем выражения (9). Поэтому, если существует закон сохранения кинетического момента, значит, существует частный случай функции (9) в виде (7), соответственно, не все координаты являются независимыми, и одна из координат может быть исключена из уравнения движения материальной точки.

Это отступление необходимо потому, что существует мнение, что привести задачу динамики к одномерной задаче можно, только если существует закон сохранения кинетического момента для центрального поля в классическом виде. Мы же утверждаем, что если существует соотношение связи между координатами в виде (9), где N – любое математическое выражение, то задача однозначно сводится к одномерной.

То, что вышесказанное, в том числе и основной принцип сведения к одномерной задаче не только не сформулирован, но и не используется, покажем на конкретном примере. В [14] приведен пример осесимметричного потенциального поля, далее приводится доказательство теоремы о сохранении кинетического момента относительно оси z [14]. Причем делается важное замечание «Доказательство сохраняет силу для всякого силового поля, у которого вектор силы F лежит в плоскости r и e_z» [14].

Причем, на примере сферического маятника хорошо видно, что если задачу не удается свести к одномерному случаю, то, хотя, задачу и удается решить, но решение оказывается сложным, т.к. решение не получается в элементарных функциях, а как минимум, в эллиптических. Все вышесказанное может помочь привести еще одно решение задачи движения сферического маятника, основанного на принципиально других начальных постулатах.

7.4. Сферическая механика

Еще в глубокой древности, изучая звездное небо, люди разработали сферическую геометрию. «По-видимому, первым обращением человечества к тому, что потом получит название сферической геометрии, была планетарная теория греческого математика Евдокса (ок. 408–355), одного из участников Академии Платона» [78].

«Сферическая геометрия – математическая дисциплина, изучающая геометрические образы (точки, линии, фигуры), находящиеся на сфере, и соотношения между ними» [18].

Причем в современном состоянии сферическая геометрия имеет явные ограничения. Это касается базовой системы координат (см. рис. 7.4).

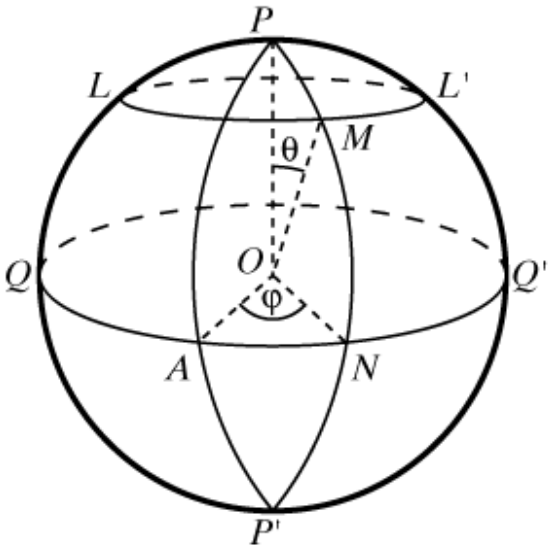


Рис. 7.4. Система координат современной сферической геометрии [17]

Из рисунка видно, что система координат (СК) привязана к евклидовому пространству. Эта традиция идет из основного источника и потребителя сферической геометрии – астрономии. В самом деле, когда наблюдатель находится в центре мира, а наблюдаемые объекты на поверхности небесной сферы, точнее, на проекции объектов на небесную сферу. Естественно отсюда возникают и задачи, решаемые астрономической сферической геометрией. Принято изучать и рассчитывать положения объектов на небесной сфере относительно наблюдателя в центре сферы. Фактически, правильно бы современную сферическую геометрию называть сферически-евклидовой геометрией.

Чтобы создать законченную истинную сферическую геометрию, необходимо отвязать систему координат (СК) от евклидовой и ввести истинную сферическую систему координат (СК) без привязки к евклидовому пространству. Такую возможность предоставляет дифференциальная геометрия.

Из курса дифференциальной геометрии известно, что кроме прямолинейных евклидовых координат задачи можно решать в криволинейных координатах. Причем такой переход иногда сильно упрощает процесс решения конкретной задачи. «Как показывают уже простейшие примеры, декартовых координат недостаточно для удобной аналитической записи многих конкретных задач» [12].

Далее написано: «отметим, что появление таких координат (называемых «криволинейными координатами») является не прихотью математиков, стремящихся ввести в рассмотрение все новые и новые объекты, а, в некотором смысле, практической необходимостью, иногда весьма полезной при конкретных вычислениях» [12].

В принципе, на сфере можно ввести много различных СК точно также как и в евклидовой геометрии. Рассмотрение различных систем координат в сферической геометрии начнем с прямоугольной СК.

Проведем два ортогональных больших круга на сфере (см. рис. 7.5). Один большой круг (экватор) обозначим СХ, другой (начальный меридиан) обозначим СУ.

Из сферической геометрии известно, что меридиан и параллель, в том числе и экватор, пересекаются всюду (кроме полюсов) под прямым углом.

Т.о. мы получим ортогональную СК на сфере.

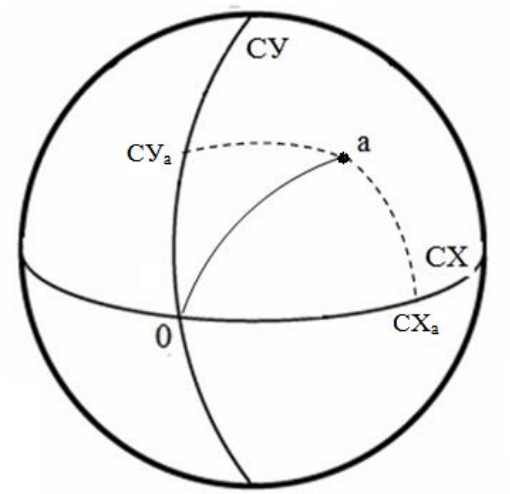


Рис. 7.5. Истинные сферические координаты (рис. авт.)

Проекции точки *a* (см. рис. 7.6) на оси координат будут проходить по геодезическим (отрезкам меридианов и параллелей) проходящим через точку *a* и оси координат. Ясно, что полученная система координат будет локальной, ортогональной и криволинейной. При этом она будет истинно сферической, т.к. полностью отвязана от евклидовой СК.

Необходимо сразу оговорить, введенная система координат очень похожа на географическую систему, т.к. имеют общую основу. Но в отличие от картографов мы будем исчислять координаты не в градусах широты и долготы, а в мерах длины (метрах, сантиметрах и т.д.) вдоль меридианов и широт. А для измерений пользоваться гибкой линейкой[41]. К сожалению, простым циркулем пользоваться не удастся, необходимо либо изобретать специальный циркуль, либо разрабатывать специальную методику работы с циркулем.

7.5. Полярная система координат на сфере

Т.к. введенная выше сферическая т-плоскость является поверхностью вращения, то естественно введение на ней полярной системы координат.

На сферической т-плоскости назначим полюс начала координат *O*[42] и проведем начальный меридиан *OB* (рис.7.7). Введем полярную систему координат (L_t, φ), где L_t – длина вдоль меридиана до точки *M*, а φ – угол между начальным меридианом и меридианом, проходящим через данную точку.

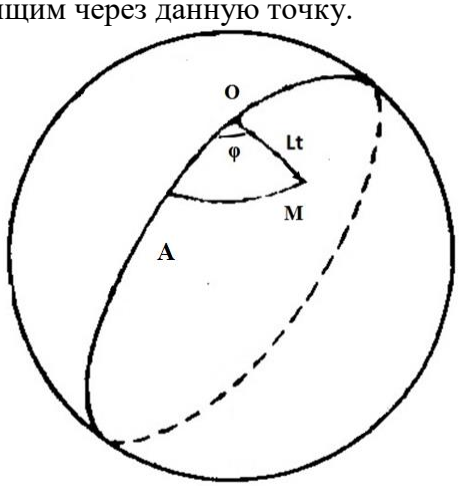


Рис.7.6. Полярные координаты на сфере (рис. авт.)

[41] Типа портновского (Прим. Авт.).
[42] Полюс, как обычно, назначается либо произвольно, либо исходя из удобства конкретной решаемой задачи (Прим. Авт.).

Понятно, что полярная система на сфере аналогична полярным координатам в евклидовом пространстве, за исключением того, что радиус-вектор будет **искривленным**. В то же время, данная система координат очень похожа на географическую систему координат, но широта точки вычисляется не в градусах, а в мерах длины вдоль меридиана.

7.6. Что такое вектор?

Несмотря на интуитивно понятный ответ на вопрос - что такое вектор? Понятие вектора, в различных разделах науки и техники различается и, иногда, довольно существенно.

Для примера приведем два определения понятия вектора.

«Под ***вектором*** в элементарной математике понимают направленный отрезок. Этот отрезок изображается стрелкой и обозначается или одной буквой со стрелкой ($\vec{a} \equiv AB$), либо, как мы условимся в настоящем издании, жирным шрифтом A, B, a, α,…» [11].

Для векторов введенных согласно такому определению существуют следующие свойства:

1. **a + b = b + a** (сложение коммутативно);
2. **(a + b) + c = a + (b + c)** (сложение ассоциативно);
3. **a + 0 = a** (существование нулевого вектора);
4. **a + (- a) = 0** (существование противоположного вектора);
5. $\lambda_1(\lambda_2\,\mathbf{a}) = \lambda_1\lambda_2\,\mathbf{a}$ (умножение на число ассоциативно);
6.. $(\lambda_1 + \lambda_2)\,\mathbf{a} = \lambda_1\,\mathbf{a} + \lambda_2\,\mathbf{a}$ (умножение на число дистрибутивно);
7. $\lambda\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\,\mathbf{a} + \lambda\,\mathbf{b}$ (сложение векторов дистрибутивно);
8. $0\,\mathbf{a} = \mathbf{a}\,0 = 0$ (умножение на ноль).

Это определение часто называют *определение вектора в геометрии*.

Дадим и другое определение понятия вектора, которое используется в линейной алгебре.

«Вектором в линейной алгебре называется любой объект линейного (векторного) пространства, если:

Определено правило, составляющее любым векторам **x** и **y,** третий вектор, называемый их суммой и обозначаемый ***x*** **+** ***y***;

Определено правило, составляющее каждому вектору ***x*** и каждому числу α новый вектор, называемый произведением α и ***x*** и обозначаемый α ***x***» [11]**.**

Причем, для векторов в линейной алгебре отмечается обязательное наличие приведенных выше свойств сложения и умножения.

Отметим существенные отличия в двух приведенных определениях *вектора*. Если в первом случае ясно говорится, что вектор – это отрезок прямой, то во втором это главное свойство опущено.

Второе определение более общее, и согласно второму определению под понятие вектор, попадают любые абстрактные математические объекты, лишь бы для них были определены правила сложения векторов и правила умножения вектора на число. Значит, под это определение подпадают, в том числе, и совершенно не геометрические объекты: матрицы, тензоры, функции и т.д. Которые, в общем случае, не могут быть изображены как отрезки прямых, тем не менее, они подпадают под общее определение вектора.

Здесь нелишне вспомнить про различия необходимых и достаточных (необязательных) свойств. Так, каждый направленный отрезок прямой является вектором, но не каждый вектор является отрезком прямой. Т.е., требование, чтобы вектор являлся именно отрезком прямой, является достаточным, но необязательным требованием, чтобы математический объект являлся вектором.

7.7. Понятие топологического вектора

Для того, чтобы построенная система координат имела смысл, необходимо ввести понятие вектора в новой системе координат. Авторы, чтобы не путать с вектором, который по определению прямолинейный, называют криволинейный вектор т-вектором или **кортом**, а единичный криволинейный вектор **фортом**.

Определение. Вектором в топологической системе координат[43] (т-вектором, кортом) будем называть направленный отрезок *геодезической* линии, принадлежащий топологической (в общем случае, неевклидовой) плоскости проходящий от начала в точке ***A*** и до конца в точке ***B*** (см. рис. 7.7).

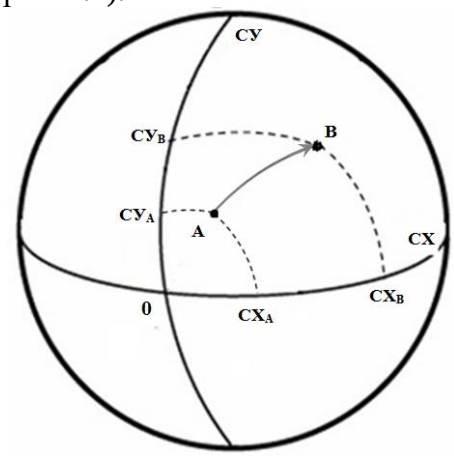


Рис. 7.7. Сферический вектор AB (рис. авт.)

Легко проверить, что полученный криволинейный вектор обладает почти всеми свойствами обычного прямолинейного вектора в евклидовых координатах[44].

Т.е. правила сложения векторов и правила умножения векторов на скаляр остаются без изменений. Это не надо доказывать отдельно, легко проверить, что в данном случае данные свойства зависят не от вида векторов, а от правил сложения и умножения чисел, в виде координат векторов. Естественным исключением будет определение длины вектора, т.к. теорема Пифагора в криволинейном пространстве не соблюдается[45]. Остальные свойства, как легко показать, будут идентичны свойствам евклидовых векторов. Т.е., правила сложения и правила умножения (скалярного, векторного и смешанного) будут совершенно идентичны. Для вычисления длины криволинейного т-вектора придется вводить другие правила.

7.8. Произведение т-векторов

Аналогично правилам евклидовых векторов введем понятия произведения т-векторов. Так скалярным произведением т-векторов будем называть скаляр, равный произведению длин т-векторов на косинус угла между ними. А векторным произведением т-векторов будем называть псевдовектор, равный произведению длин векторов, умноженной на синус угла между т-векторами. Не лишним будет упоминание про то, что углы между т-векторами отсчитываются по т-плоскости, а не в пространстве. Причем обозначения произведений т-векторов оставим прежнее, т.е. скалярное произведение будем обозначать обычными (круглыми) скобками

[43] Сферическая система координат (введенная выше) является частным случаем общего принципа введения топологической СК, которую можно ввести на любой неевклидовой плоскости (Прим. авт.)

[44] Этот прием называется наследование свойств, когда потомок (в данном случае, т-вектор) имеет некоторые свойства, совпадающие со свойствами родителя (в данном случае, обычных векторов евклидового пространства) (Прим. авт.).

[45] Для вычисления длины вектора придется пользоваться хорошо разработанными методами неевклидовой геометрии (Прим. Авт.).

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a \cdot b \cdot \cos \alpha = c,$$

где a и b – т-векторы, a, b – длины векторов (по геодезическим), α – угол между т-векторами, a, c – скаляры.

Аналогично, векторное произведение будем обозначать квадратными скобками:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = a \cdot b \cdot \sin \alpha = \mathbf{c}.$$

Примечание. По умолчанию, все т-вектора принадлежат одной и той же т-плоскости. Именно поэтому мы и называем вектор c – псевдовектором, потому, что он по определению перпендикулярен обоим векторам, лежащим в т-плоскости, а значит, перпендикулярен самой т-плоскости.

Понятие правой и левой тройки векторов, необходимые для операций с векторными произведениями, оставим без изменений. Важно отметить, что простые и замечательные свойства произведений векторов, такие, как равенство длины векторного произведения площади параллелограмма, построенного на векторах в евклидовом пространстве, в т-векторной алгебре, в общем случае, не работают. Дело в том, что площади треугольников, построенных в евклидовой плоскости и сферического треугольника на сферической поверхности не равны между собой. И любые другие фигуры на сфере и на евклидовой плоскости не равны между собой.

Также и смешанное произведение т-векторов лишено смысла. Т.к. векторное произведение двух т-векторов не принадлежит т-плоскости, а перпендикулярно ей.

7.9. Дифференцирование т-векторов

Аналогично, легко вводятся[46] и правила дифференцирования т-векторов, которые в основном, совпадает с правилами дифференцирования обычных евклидовых векторов.

Правила дифференцирования вектор-функции на неевклидовых поверхностях подробно описаны в курсах теории поверхностей и дифференциальной геометрии, например, см. [11] или [12]. Но, в отличие от дифференциальной геометрии, изначально привязанной к евклидовому пространству, мы предлагаем проделать ту же самую работу, но полностью отвязавшись от Евклида в чисто криволинейном пространстве. Это необходимо потому, что задачей дифференциальной геометрии является изучение свойств кривых линий и неплоских поверхностей. А нас интересуют движения материальной точки вдоль кривых и в пределах неплоских поверхностей. Другими словами, авторы не претендуют на создание еще одного раздела математики, а всего лишь стремятся получить еще один инструмент для решения физических задач, которые не решаются или полученное решение слишком сложное, если пользоваться имеющимися инструментами.

Отметим только несколько важных свойств т-векторов, необходимых в нашем случае: дифференциал т-вектора – это вектор, принадлежащий той же топологической т-плоскости, т.е. т-вектор. Причем т-вектор дифференциала ортогонален первоначальному т-вектору. Это следует из свойств операции дифференцирования. Так производная $\frac{dy}{dx}$, есть ни что иное, как предел изменения вектора вдоль y, к пределу изменения вдоль оси x, когда $\Delta x \to 0$. Т.е. производная y по x направлена вдоль Δy, соответственно ортогональна оси y. Точно также вводится понятие производной по времени t, т.е. вектора т-скорости.

[46] В математике, в отличие от физики, все математические понятия именно вводятся в соответствии с «общественным договором». Т.е., ученые договариваются между собой, что именно понимать под понятиями «вектора», «дифференциала», «интеграла» и т.д. И пользуются введенными понятиями в соответствие с договорными условиями введенных терминов (Прим. Авт.).

Аналогично существованию вектора градиента скалярного поля в евклидовом пространстве, можно ввести т-вектор градиента скалярного поля на топологической т-плоскости.

Только при всех перечисленных нововведениях не нужно забывать, что координаты неевклидовые. Другими словами, даже если некоторые уравнения и теоремы будут внешне похожими на обычные, это все-таки неевклидовые уравнения и теоремы.

Т.о. двумерное сферическое пространство, назовем ее т-плоскостью, введенное по указанным выше правилам, будет аналогично (но, не идентично!) обычной евклидовой плоскости (двумерной). Принципиальными отличиями будут два свойства. Во-первых, сферическая плоскость имеет конечные размеры, значит все объекты – линии и вектора будут иметь естественное ограничение по размерам[47]. Во-вторых, в сферической плоскости не выполняется теорема Пифагора, значит, длины отрезков, не совпадающих с координатными осями, придется вычислять по правилам криволинейных интегралов.

Другими словами, правила векторного исчисления и векторного анализа из обычного евклидового пространства можно переносить на искривленное т-векторное пространство. При этом необходимо в обязательном порядке учитывать два указанных выше исключения.

Понятно, что введенное понятие т-вектора является промежуточным между определением вектора в геометрии и определением вектора в линейной алгебре.

Сродство с геометрическим вектором состоит в том, что это направленный отрезок линии, который имеет ясный геометрический смысл. Но отличается от обычного геометрического вектора, тем, что он является отрезком не прямой, а в общем случае, криволинейной геодезической линией. Т.о., для т-вектора вычисление длины будет отличаться от соответствующих правил, принятых для геометрических векторов. Т.е., т-вектор, является геометрическим объектом, который можно нарисовать и представить, как направленную линию в пространстве. Этим он принципиально отличается от общих векторов в математике, которые невозможно ни представить, ни нарисовать в пространстве: матрицы, тензоры, функции и т.д.

7.10. Т-механика

Введенные выше понятия т-вектора, дифференциала т-вектора и т-вектор градиента скалярного поля позволяют легко разработать т-механику в искривленном т-пространстве как аналог механики Ньютона в евклидовом пространстве.

Покажем это на примере уже введенной сферической т-плоскости.

Основой механики Ньютона являются следующие понятия: перемещения, скорость, ускорение, силы, кинетической и потенциальной энергии.

Понятие перемещения из одной точки к другой не меняются вне зависимости, в каком пространстве они происходят, главное, чтобы были введены координаты точек. Это условие выполняется как в евклидовой, так и в сферической т-плоскости.

Скорость также легко вводится в сферической т-плоскости, как дифференциал перемещения по времени. Т-ускорение, также легко определяется, как дифференциал т-скорости по времени, либо как дифференциал второго порядка перемещения по времени. Естественно, что т-скорость и т-ускорение будут т-векторами.

Понятия кинетической и потенциальной энергии совершенно аналогичны в любом пространстве.

Остается только понятие силы, с ним сложнее, но ненамного.

В принципе можно ввести понятие т-силы, но останется проблема экспериментальной проверки уравнения второго закона Ньютона. Но можно поступить проще.

В современной механике уравнение динамики иногда записывают в виде:

[47] В геометриях Лобачевского и Римана такие ограничения отсутствуют (Прим. Авт.).

$$\frac{d\,mv}{d\,t}=\frac{\partial U(x)}{\partial x}\quad , \tag{7.23}$$

здесь mv – импульс, $U(x)$ - потенциальная энергия.

Фактически, в правой части указана не ньютоновская сила, а градиент потенциальной энергии.

Это «нововведение» появилось после работы Г. Герца «Принципы механики, изложенные в новой связи» [33]. В этой работе Г. Герц проводил исследования о возможности перейти в механике от аксиом Ньютона к более общим принципам и законам, чем заложены в ньютоновской механике. Естественно, что такая форма основного закона механики возможна, если материальная точка движется в потенциальном поле. Но мы не предполагаем других условий, поэтому данное ограничение для нас не существенно.

Примечание. Легко видеть, что тем же самым способом можно ввести т-механику в пространстве с любой топологией.

Центральное поле в т-механике

Введем определение центрального поля в т-механике, аналогично соответствующему понятию в евклидовой механике.

Определение. Векторное поле на сфере T^2 называется центральным с центром в O, если оно инвариантно относительно группы движений сферы, оставляющих точку O на месте.

Если точку О выбрать за полюс, то т-векторы т-сил, которые являются т-градиентами потенциальной энергии, в соответствии с вышеуказанными определениями, будут направлены вдоль меридианов.

Совершенно аналогично в т-механике доказывается теорема о потенциальности центрального т-поля $\boldsymbol{F}$. Причем формулировка данной теоремы аналогична соответствующей теореме ньютоновской механики:

Теорема. Всякое центральное т-поле $\boldsymbol{F}$ потенциально, а его потенциальная энергия зависит только от расстояния до центра поля, $\boldsymbol{U = U(r)}$.

Доказательство теоремы полностью повторяет аналогичное доказательство механики Ньютона, при замене евклидовых векторов на т-вектора [69].

Закон сохранения кинетического т-момента

Аналогично ньютоновской механике в евклидовом пространстве введем понятие кинетического т-момента.

Приведем длинную цитату из учебника, чтобы показать, что доказанные теоремы в евклидовой механике можно без потерь в доказательности переносить в т-механику.

«Определение. Движение материальной точки (массы 1) в центральном поле на плоскости определяется уравнением

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\Phi(r)\,e_r\quad , \tag{7.24}$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус вектор с началом в центре поля О, r – его длина, e_r – его орт. Будем считать нашу плоскость вложенной в трехмерное ориентированное евклидово пространство.

Определение. Моментом количества движения (или кинетическим моментом) материальной точки единичной массы относительно точки O называется векторное произведение

$$M=\left[r,\frac{dr}{dt}\right]. \tag{7.25}$$

Вектор М перпендикулярен нашей плоскости.

Лемма. Пусть, a и b два меняющихся со временем вектора в евклидовом ориентированном пространстве. Тогда

$$\frac{d}{dt}[a,b]=\left[\frac{da}{dt},b\right]+\left[a,\frac{db}{dt}\right]. \qquad (7.26)$$

Доказательство. Это следует из определения производной.

Теорема (закон сохранения кинетического момента). При движении в центральном поле кинетический момент М относительно центра поля О не меняется со временем.

Доказательство. По определению

$$M=\left[r,\frac{dr}{dt}\right] \quad . \qquad (7.27)$$

По лемме $\frac{dM}{dt}=\left[\frac{dr}{dt},\frac{dr}{dt}\right]+\left[r,\frac{d^2r}{dt^2}\right]$. (7.28)

Из уравнения движения ввиду центральности поля видно, что векторы $\boldsymbol{r}$ и $\frac{d^2r}{dt^2}$ коллинеарны. Итак, $\frac{dM}{dt}=0$, ч.т.д.» [69].

Поступим следующим образом, введем свои определения и покажем, что если доказательство теоремы не выходит за рамки применения общих свойств, то все доказательства можно перенести на неевклидовый случай.

Определение. Т-моментом количества движения (или кинетическим т-моментом) материальной точки единичной массы относительно полюса O, называется векторное произведение т-векторов:

$$\mathrm{M}=\left[r,\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}}\right] \quad . \qquad (7.29)$$

Вектор $\boldsymbol{M}$ ортогонален поверхности сферы, а $\boldsymbol{r}$ – т-вектор в сферическом пространстве[48].

Далее, лемма – это не более чем иллюстрация свойства производной. Но для свойств производной совершенно безразлично, какие именно объекты дифференцируются, опять же, отсылаем к главному принципу математики. Поэтому, независимо от того, какие именно вектора дифференцируются, обычные вектора в евклидовом пространстве или т-вектора в криволинейном пространстве, свойства производной останутся неизменными. Поэтому нет необходимости повторять доказательства леммы, якобы, в новых условиях.

Далее используется свойство производной вектора, состоящее в том, что производная вектора ортогональна к первоначальным векторам. Но это именно свойства производной вектора, а не свойство самого вектора.

Поэтому, независимо от того, какой именно вектор дифференцируется, производная вектора **всегда** будет перпендикулярна вектору. А дифференцирование дважды, поворачивает вектор два раза на 90^0, соответственно вторая производная вектора $\boldsymbol{r}$, поворачивается относительно первоначального вектора r ровно на 180^0, т.е. становится коллинеарной вектору.

[48] Для этого мы должны ввести понятие нормали к поверхности сферы и понятие трехмерного неевклидового пространства. Но подобные вещи уже давно и хорошо известны в неевклидовой геометрии, поэтому мы не будем на них останавливаться (Прим. Авт.)

Причем повторяем, это свойство дифференцирования, а не свойство самого вектора. На этом доказательство заканчивается.

Легко видеть, что, если мы, меняя свойства вектора, оставляем неизменными свойства дифференцирования, можем воспользоваться доказанной теоремой, заменяя в нужных местах, обычный евклидовый вектор на т-вектор, а евклидову плоскость на т-плоскость или поверхность сферы. Смысл доказательств от этого не изменится.

Вводя понятие кинетического т-момента, мы придем к доказательству закона сохранения кинетического т-момента на сфере, соответственно и к аналогам законов Кеплера на сфере. Причем, как это ясно из предыдущего, все доказательства будут аналогичны соответствующим доказательствам ньютоновской механики. В соответствии с основным принципом математики, сформулированным в самом начале статьи.

В результате мы получим обоснование того, что в случае движения материальной точки по поверхности сферы в центральном т-поле, материальная точка будет двигаться по тем же законам и правилам, которые выполняются для движения материальной точки в евклидовом пространстве в центральном евклидовом поле. Другими словами, движение по сферической поверхности будет совершаться по законам Кеплера в интерпретации сферических координат. Т.е., движение будут совершаться по эллипсам, но эллипсам, нарисованным не на евклидовой плоскости, а на поверхности сферы или т-плоскости.

7.11. Переход задачи движений сферического маятника к одномерной

Сделаем тоже, что уже проделано в евклидовой механике Ньютона, а именно переход к одномерной задаче.

«Закон сохранения кинетического момента позволяет свести задачу о движении в центральном поле к задаче с одной степенью свободы. Благодаря этому движение в центральном поле можно исследовать полностью» [69]. Посмотрим, есть ли у нас возможность повторить тоже самое, но у же в т-механике. И такая возможность есть, благодаря наследованию свойств[49].

Снова приведем длинную цитату из учебника, чтобы показать, что и в этом случае доказанные теоремы в евклидовой механике можно без потерь в доказательности переносить в т-механику.

«Сведение к одномерной задаче. Рассмотрим движение точки (массы 1) в центральном поле на плоскости:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} \quad . \tag{7.30}$$

Естественно перейти к полярным координатам $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{\varphi}$.

По закону сохранения кинетического момента величина $M = \frac{d\varphi(t)}{dt} r^2(t)$ постоянна (не зависит от t).

Теорема. При движении материальной точки единичной массы в центральном поле ее расстояние от центра меняется так, как r в одномерной задаче с потенциальной энергией

$$V = U(r) + \frac{M^2}{2r^2}. \tag{7.31}$$

[49] Чуть дальше мы дадим определение наследования и как эффективно использовать правила наследования (Прим. Авт.)

Доказательство. Дифференцируя соотношение[50] $\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{dt}e_r+r\frac{d\varphi}{dt}e_\varphi$, находим

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)e_r+\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)e_\varphi \quad . \tag{7.32}$$

Ввиду центральности поля

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial U}{\partial r}e_r \quad . \tag{7.33}$$

Поэтому уравнение движения в полярных координатах принимает вид

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad . \tag{7.34}$$

Но по закону сохранения кинетического момента

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{M}{r^2} \qquad , \tag{7.35}$$

где M – независящая от t постоянная, определяемая начальными условиями. Поэтому

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{\partial U}{\partial r}+r\frac{M^2}{r^4} \quad \text{или} \quad \frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{\partial V}{\partial r}, \text{ где } V=U+\frac{M^2}{2r^2}. \tag{7.36}$$

Величина *V(r)* называется эффективной потенциальной энергией» [14].

Анализируя приведенное доказательство, замечаем, что все доказательство строится на свойствах разложения векторов на проекции координат, свойства дифференцирования векторов и подстановку в виде закона сохранения кинетического момента. В виду того, что разложение векторов на проекции на оси координат и свойства дифференциалов векторов, согласно принятым соглашениям, относятся к наследованным свойствам, т.е. остаются без изменений. Значит, проведенное доказательство можно автоматически переписать для случая т-механики, заменяя евклидовы вектора на т-вектора, а закон сохранения кинетического момента - заменив на (доказанный ранее) закон сохранения кинетического т-момента.

Легко видеть, что получено решение сферического маятника в элементарных функциях аналогично элементарному решению кеплеровского движения материальной точки в евклидовой плоскости. Но, в отличие от кеплеровского решения, сферический маятник будет совершать эллиптические движения, но не на евклидовой плоскости, а на поверхности сферы.

Полученное решение в элементарных функциях может быть легко перенесено в обычное евклидовое пространство, например, методами сферической геометрии или аналогичными методами из других разделов геометрии.

[50] Разложение вектора по ортам (Прим. Авт.).

7.12. Что такое принципы наследования и как их эффективно использовать

Выше мы показали, что если строго следовать пути доказательств, приведенных в литературе для обычных (евклидовых) векторов, но заменяя при этом все вектора на т-вектора, то сравнивая свойства обычных (геометрических) векторов и т-векторов можно доказать теоремы не только для обычных, но и для т-векторов. Но можно поступить проще, используя правила наследования.

Вообще правила наследования широко применяются в программировании, но его можно эффективно использовать и в математике.

Для этого введем понятие наследования, аналогичное соответствующему понятию в программировании. Для этого введем понятия «родитель» и «потомок».

Родителем называется математический объект, обладающий более общими свойствами, по сравнению с потомком. Потомком называется математический объект, обладающий всеми свойствами родителя, но и дополнительными свойствами, не имеющимися у родителя.

Например, четырехугольник является родителем ромба. Т.к. кроме того, что у ромба четыре угла и четыре стороны, у него есть дополнительное свойство: все четыре его стороны являются равными по величине. Причем, ромб является не только потомком четырехугольника, но и родителем для квадрата. Т.к. у квадрата не только все стороны равны, но еще и все углы прямые.

Эффективность принципа наследования состоит в том, что все доказанные теоремы для родителя автоматически, без дополнительных доказательств, могут быть перенесены на потомка. Другими словами, если какая-то теорема доказана для ромба, то она однозначно может применяться для квадрата. Это основано на том, что потомок обладает всеми свойствами родителя без исключений, а значит, все доказательства основываются на свойствах присущих, как для родителя, так и для потомка. Это называется принцип прямого наследования доказательств.

С обратным наследованием сложнее. Дело в том, что у потомка, кроме наследованных свойств, имеются и эксклюзивные свойства, присущие ему и его потомкам, но отсутствующие у родителей. Тем не менее, не все так плохо. Если какая-то теорема доказана для потомка, но использованием только наследованных свойств, то она может быть применена и для родителей. Например, если для доказательства теоремы для квадрата не использовалось свойство прямых углов, то следствия этой теоремы может быть без ограничений применяться и для ромбов. Это называется принцип обратного наследования.

Совершенно ясно, что принцип прямого наследования, может применяться без каких-либо ограничений, а вот принцип обратного наследования ограниченный. Т.е. применяя принцип обратного наследования, нужно строго следить, за тем, какие именно свойства потомка были использованы для доказательств.

Если бы этот принцип был известен в математике и широко использовался бы, то авторам не пришлось бы приводить длинные доказательства того, что в центральном т-поле имеет место теорема кинетического т-момента, а сведение решения сферического маятника к одномерному случаю не требуют дополнительных доказательств. Достаточно было бы просто указать, что соответствующие теоремы для евклидовой плоскости используют только те свойства евклидовых векторов, которые унаследованы от более общих т-векторов.

Принцип наследования свойств, на самом деле, широко используется в математике, но только в неявном виде. Принцип состоит в том, что если доказательства нужных теорем основаны на использовании наследованных свойств, то отдельных доказательств не требуются. Так, например, используя свойства дифференциалов, нет необходимости каждый раз доказывать, эти свойства в зависимости от того, какая именно функция дифференцируется. Или, например, нет необходимости каждый раз доказывать теорему Коши отдельно для

определенных интегралов и отдельно для несобственных или криволинейных интегралов. Мы использовали тот же самый принцип, но в явном виде.

Обсуждение результатов

Все предыдущие выкладки были необходимы только для того, чтобы прийти к выводу, что движение сферического маятника решается в квадратурах, но только на сферической поверхности. Точно также как в квадратурах решается задача Кеплера о движении материальной точки в центральном поле евклидовой плоскости.

Сформулируем кратко проделанный путь и полученные результаты. Введя новые понятия в виде сферической т-механики, мы в результате получили возможность решить задачу в элементарных функциях. Именно это и является основным достижением, скажем прямо, совсем не простого пути. Сравнивая полученные результаты можем резюмировать следующее.

Можно идти простым путем (на самом деле не таким уж и простым) не сворачивая никуда от евклидового пространства и в результате получить сложные, и скажем, для большинства людей непонятные эллиптические интегралы. Которые можно интегрировать только численными методами, затрачивая большие вычислительные мощности. Можно пойти другим путем, ввести т-механику в искривленном (в нашем случае сферическом) пространстве и в результате получить простое решение в элементарных функциях (квадратурах).

Единственная сложность такого пути будет состоять в том, что придется полученные траектории переводить от изображения на сфере в изображение в евклидовом пространстве. Но эти задачи давно и успешно решаются в сферической геометрии и дифференциальной геометрии. Поэтому вряд ли они вызовут большие сложности.

В принципе, подобный метод можно применять в любых случаях, если возможно вместо сложного пространственного движения подобрать двумерную поверхность, в рамках которой движется исследуемая материальная точка.

Если при решении задачи в евклидовом пространстве появляются дополнительные теоремы, облегчающие решение, то вполне возможно аналогичные теоремы могут проявиться и в неевклидовом. Таким примером явилась теорема о сохранении кинетического момента, позволяющая свести задачу кеплеровского движения к одномерной задаче на евклидовой плоскости. Анализ движения сферического маятника по поверхности сферы привел к аналогичной теореме о сохранении кинетического т-момента, и соответственно задача о сферическом маятнике свелась к одномерной задаче движения по сферической поверхности.

Для решения сферического маятника мы взяли сферическую поверхность именно потому, что исследуемый объект всегда остается в пределах сферической поверхности. В других случаях это может быть поверхность другой топологии.

Важно внимательно следить за наследуемыми свойствами. Потому, что при переходе от евклидового пространства к неевклидовому некоторые свойства объектов сохраняют свои свойства, а некоторые нет.

Совершенно естественно, что данный метод эффективен, только в случае если движение материальной точки происходит в рамках строго ограниченной поверхности, например, по поверхности сферы, если же движение материальной точки полностью свободно, то никакого выигрыша данная методика не дает, кроме дополнительных сложностей. Но если движение материальной точки происходит, не выходя за рамки определенной поверхности, то переход к топологической механике позволит, как минимум, перейти от трехмерного движения с уравнениями в трех координатах к плоскому случаю с двумя координатами. А если существуют дополнительные условия типа теоремы о сохранения кинетического момента в центральном поле, то появляется возможность свести задачу к одномерной и, тем самым, решить задачу полностью. Чего не позволяют попытки решения той же самой задачи напрямую в обычных евклидовых координатах.

Для примера приведем одну цитату и комментарии к ней.

«Старшие участники опытов часто заявляют, что это маятник Фуко и что наблюдаемые движения суть фигуры Лиссажу[51]. Вниманию учителя: оба эти утверждения неверны»[46]. Позволим себе поправить уважаемых авторов. Фигуры, которые выписывает маятник, не ограниченный в колебаниях одной плоскостью качания, к таким относится и сферический маятник и двухчастотный, который рассматривается в упомянутой статье, в самом деле, описывает фигуры Лиссажу, но только не в евклидовой плоскости, а на поверхности сферы. Попытки решения задачи движения неплоского маятника приводят к эллиптическим интегралам в трех координатах евклидового пространства, а переход к сферической т-плоскости сводит задачу к одномерной в элементарных функциях. Чему и посвящена данная статья.

Отметим также взаимоотношения с дифференциальной геометрией, которая занимается схожими проблемами. Эти взаимоотношения можно охарактеризовать двумя словами: никакого соперничества, только полное сотрудничество. Дело в том, что дифференциальная геометрия занимается изучением кривых линий и неплоских поверхностей методами анализа бесконечно малых [91]. Причем все исследования ведутся в рамках евклидового пространства. Предлагаемые методы алгебры и анализа т-векторов изначально оторваны от евклидового пространства. Соответственно, получаемые результаты будут оторваны от обычного евклидового пространства. Т.е. фактически не будут иметь практической пользы. Т.к. результаты исследования будут иметь реальную пользу только тогда, когда они будут переведены на язык обычной ньютоновской механики в обычном евклидовом пространстве.

Для этого и будет нужны методы дифференциальной геометрии. Взаимодействие предлагаемой т-механики и дифференциальной геометрии видятся следующим образом. Задача механики, не поддающаяся методам обычной ньютоновской механики, решается методами т-механики с привлечением алгебры и анализа т-векторов. А полученное решение в виде криволинейной траектории на неевклидовой поверхности переводится в пространственную траекторию в евклидовом пространстве методами дифференциальной геометрии.

7.13. О решениях математических задач в физике и в строительной механике

В различных технических приложениях, в частности в физике, в строительной механике, в транспортном строительстве, например, в сейсмике, описании механики строительных баб, подъемно-транспортных и дорожно-строительных машин, часто возникает необходимость применения моделей маятника. Эти задачи характерны наличием ограниченных степеней свободы и изменением ориентации движущихся тел.

Между тем такие задачи при внимательном рассмотрении оказываются обладающими определенной спецификой, требующей внимательного и тщательного рассмотрения.

В статье [69] приведены предложения по введению топологических векторов (кортов и фортов). Но некоторые аспекты проблемы были недостаточно освещены. Поэтому остановимся на некоторых из них подробнее.

В частности, в предыдущей статье не было акцентировано, в каких случаях выгодно применять топологические вектора, а в каких случаях их применение неэффективно либо вовсе невозможно.

В физике существуют различные задачи. Условно их можно разделить на простые и сложные. Простые задачи решаются просто, так сказать «в лоб». Причем понятие «простоты» физической задачи сводится не только к тому, чтобы было найдено решение, но и к тому, чтобы методика решения была интуитивно понятна, и полученный результат выражался в элементарных функциях. Сложные задачи, которые не решаются «в лоб», пытаются решать

[51] Имеются в виду движение двухчастотного маятника на вращающейся платформе (Прим. Авт.).

различными способами. Самый эффективный способ - это сведение условий задачи к уже известным решениям. Но такой способ не всегда реализуем. Для того, чтобы свести задачу к уже известным решениям, необходимо, чтобы существовали дополнительные теоремы, позволяющие свести одну задачу к решению другой задачи. В одних случаях такие дополнительные теоремы существуют, и задача сводится к решению уже известной задачи.

В других случаях таких вспомогательных теорем не существует, и задача не сводится к задачам, решение которых уже известно. В этих случаях задачу решают уже напрямую, тоже «в лоб», но уже с привлечением неэлементарных функций, например, эллиптических интегралов и т.д. Также надо отметить, что существует множество задач, которые вовсе не решаются ни каким образом, ни применением ни простых, ни сложных методов.

В динамике движения материальной точки во внешнем потенциальном поле, по-настоящему, решена одна единственная задача, это задача одномерного движения точки во внешнем поле. Так, в [43] сказано, буквально следующее: «В большинстве случаев (например, в задаче трех тел) не удается ни решить систему дифференциальных уравнений движения, ни достаточно полно исследовать поведение решений». Далее [43] уточняется: «Анализ общей потенциальной системы с двумя степенями свободы выходит за рамки возможностей современной науки».

Надо понимать, что решению не поддаются не только общие задачи динамики в трехмерном пространстве, но и некоторые двумерные задачи. Тем не менее, если трехмерные задачи движения выходят за рамки возможностей решения в элементарных функциях для современной науки, то некоторые задачи двумерного (плоского) движения, все-таки удается решить достаточно просто. В источниках, например, в [42], говорится: «Закон сохранения кинетического момента позволяет свести задачу о движении в центральном поле к задаче с одной степенью свободы. Благодаря этому движение в центральном поле можно исследовать полностью». Как и сказано выше, если существует дополнительная теорема, позволяющая свести задачу к уже известным решениям, то задача может быть решена полностью, если нет, то задача переходит в разряд сложно решаемых либо нерешенных задач.

В частности, в динамке материальной точки именно существование теоремы (закона) сохранения кинетического момента позволяет свести задачи плоского движения (задача Кеплера) к одномерному случаю и т.о., решить задачу полностью. Причем автор [42] специально оговаривает, что общая двумерная задача в современной науке не решается, а решаются только те частные случаи, для которых применима теорема (закон) сохранения кинетического момента относительно точки. Поскольку идентичной теоремы для трехмерного движения не существует, то и задачи динамики движения точки с тремя степенями свободы в современной науке простыми способами не решаются.

Надо отметить, что для трехмерного движения точки существует аналогичная теорема о сохранении кинетического момента относительно оси. Но только для осесимметричного поля [43], а не центрального, как в случае плоского движения. Проблема состоит в том, что, во-первых, вместо центрального поля вводится осесимметричное поле.

Задачи небесной механики имеют дело с центральными полями. Во-вторых, наличие теоремы о сохранении кинетического момента точки относительно оси не позволяет свести задачу к одномерному случаю, и даже свести, хотя бы к движению с двумя степенями свободы. Т.о. задача трехмерного движения с тремя степенями свободы переходит из разряда простых в разряд сложных задач.

Задача о движении сферического маятника относится к задачам трехмерного движения. Как сказано выше, в современной науке не сводится к одномерной задаче, соответственно она не может быть решена простыми методами в элементарных функциях. Тем не менее задача решена путем привлечения совсем не элементарных эллиптических интегралов [43].

Предлагаемый авторами статьи [62, 69] метод позволяет полностью решить задачу движения сферического маятника в элементарных функциях.

Прежде чем обсуждать непосредственно предлагаемый метод, необходимо ввести вводные понятия и определения. В частности, ввести понятие топологического (обобщенного) вектора.

В современной учебной и научной литературе широко используется понятие вектора. Приведем несколько определений вектора, встречающиеся в современной литературе.

«Под ***вектором*** в элементарной математике понимают направленный отрезок. Этот отрезок изображается стрелкой и обозначается или одной буквой со стрелкой ($a \equiv AB$) (рис. 7.8), либо жирным шрифтом **A, B, a, α**» [11].

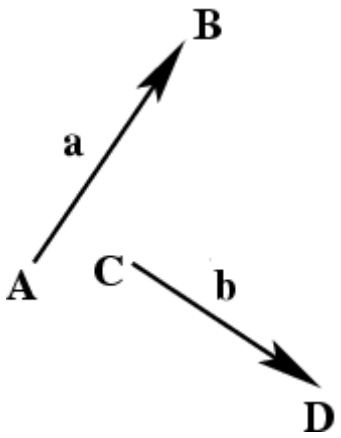


Рис.7.8. Векторы (рисунок авторов)

«Вектор представляет собой геометрический объект, характеризуемый длиной и направлением» [11].

«В геометрии вектором (в узком смысле) называется всякий направленный отрезок» [12].

«Вектором в пространстве (на плоскости) называется множество всех равных между собой направленных отрезков, начала и концы которых принадлежат пространству (плоскости)» [11].

Мы специально привели в одном месте несколько аналогичных определений одного и того же объекта, чтобы явно показать, что ни в одном из определений вектора не сказано, что отрезок линии, означающий вектор, обязательно должен быть отрезком прямой линии.

Тем не менее подсознательно под определением вектора понимается именно отрезок прямой и никакой другой линии.

Этот момент объясняется в средней школе при изучении начальной геометрии [например, см. 16]. После этого этот момент уходит в подсознание и становится догматом веры [38] и уже в вузовских учебниках не акцентируется, так как в этом нет нужды.

Любопытно определение вектора, приведенное в математической энциклопедии: «Вектор геометрический – направленный отрезок прямой евклидового пространства, у которого один конец (точка А) называется началом вектора, другой конец (точка В) концом вектора» [90]. Это определение интересно тем, что оно ясно указывает, что вектор – это не просто математический объект, а математический объект евклидового пространства. Причем никаких упоминаний о соответствующих объектах для неевклидовых пространств в современной учебной и научной литературе не встречается. Другими словами, векторы бывают только евклидовыми, а неевклидовых векторов как бы не существует.

Тем не менее, расширение понятия векторов для неевклидовых пространств можно ввести довольно легко. Для этого надо вспомнить два важных свойства прямых в евклидовом пространстве.

Отрезок прямой – наиболее короткое расстояние между двумя точками.

Прямая проходящая через две точки принадлежит той же плоскости, в которой лежат указанные точки.

Но, в неевклидовой геометрии это совсем не так. Во-первых, кратчайшим расстоянием между двумя точками в неевклидовой плоскости, является не прямая, а геодезическая. И во-вторых, прямая проходящая через две точки принадлежащих неевклидовой плоскости не лежит в той же неевклидовой плоскости. Т.е., определение вектора, как направленного отрезка прямой, для неевклидовой геометрии явно не подходит. А вот определение неевклидового вектора, как направленного отрезка геодезической кривой подходит абсолютно. Т.к. геодезическая в неевклидовой геометрии – кратчайшее расстояние между двумя точками неевклидовой плоскости. А также геодезическая, проходящая через две точки принадлежащих неевклидовой плоскости, принадлежит той же самой неевклидовой плоскости.

Сформулируем определение неевклидового вектора:

Топологический (неевклидовый) вектор – это направленный отрезок геодезической кривой (соответствующей геометрии) проходящий через две точки, принадлежащих одной неевклидовой плоскости. Причем одна точка (точка А) является началом топологического вектора, а другая (точка В) – концом топологического вектора. По определению геодезической, она принадлежит той же неевклидовой плоскости, в которой расположены точки А и В.

Легко видеть, что принятию такого определения топологических векторов не мешает ничего, кроме привычки называть вектором именно отрезок прямой и никакой другой линии. По сути это определение не является чем-то принципиально противоречащим современному определению вектора, принятого в современной науке, кроме как расширение понятия евклидового вектора на неевклидовые пространства.

Для того, чтобы понять, для чего нужны топологические векторы, обратимся к тензорному анализу. Такой переход не является неестественным, т.к. векторы являются частным случаем тензоров.

Так в [12] сказано следующее: «Векторы, матрицы и тензоры – это упорядоченные множества величин. *Вектор* является одномерным упорядоченным множеством, т.е. величиной, для описания которой необходим один индекс. *Матрицы* представляют собой двумерные множества, для упорядочивания которых нужны два индекса. Наиболее общей упорядоченной величиной является тензор. Число индексов, необходимых для построения тензора называется его рангом. Таким образом, вектор является тензором первого ранга, матрица – тензором второго ранга, а *скаляр* – тензором нулевого ранга» [12].

Мы вынуждены от векторного анализа перейти к тензорному, потому, что с одной стороны, тензоры являются обобщением понятия векторов и все проблемы, появляющиеся в тензорном анализе, автоматически появятся и в векторном анализе. А с другой стороны – проблема, которая обсуждается в данной статье, в векторном анализе не описана. Проблема состоит в символах Кристоффеля.

«Величины $\Gamma^{j}{}_{ik}$ называются коэффициентами связности или символами Кристоффеля. Если координаты декартовы, то e_n – постоянные векторы, поэтому $\Gamma^{j}{}_{nk} \equiv 0$, тогда как для криволинейной системы координат $\Gamma^{j}{}_{ik}$ не равны нулю» [30].

Причем, «Величины $\Gamma^{j}{}_{ik}$ являются функциями координат и называются символами Кристоффеля или коэффициентами связности» [30]. Если выражается точнее, то символы Кристоффеля являются функциями связи между старыми и новыми системами координат. Именно поэтому при переходе от декартовых к декартовым же координатам символы Кристоффеля тождественно равны нулю, а при переходе от декартовых к криволинейным координатам это уже не так.

Остается понять, так ли уж важны и нужны символы Кристоффеля при решении задач в неевклидовой геометрии?

Оказывается, что тут все дело в первоначальной постановке задачи.

Если мы пойдем традиционным путем, а именно для начала введем в пространстве декартову систему координат в рамках евклидовой геометрии, а затем перейдем к неевклидовой (криволинейной) системе координат, то символы связности или символы

Кристоффеля появятся автоматически, как необходимая связь между различными геометриями.

Второе свойство символов связности, хотя и не оговаривается специально, тем не менее, явно следует из свойств символов Кристоффеля. Так в [40] сказано, что если в пространстве кроме декартовой системы координат $\boldsymbol{R_i}$ имеется некоторая криволинейная система координат $\boldsymbol{X^j}$, то «рассмотрим производные векторов базиса $\partial R_i / \partial X^j$. Поскольку при фиксированных значениях i и j, объект $\partial R_i / \partial X^j$ тоже является вектором, то его можно разложить по векторам базиса R_j:

$$\frac{\partial R_i}{\partial X^j} = \Gamma_{ij}^k R_k \quad . \tag{7.37}$$

Коэффициенты разложения $\Gamma^j{}_{ik}$ называют символами Кристоффеля»[30].

Отсюда ясно, что символы Кристоффеля появляются только при операции дифференцирования векторов, заданных в декартовой и криволинейных базисах. Именно поэтому в тензорной алгебре, где отсутствуют дифференциальные операторы, символы Кристоффеля отсутствуют.

Но главный недостаток символов Кристоффеля не в том, что они существуют, а в том, что они не являются тензорами. «Символы Кристоффеля не являются компонентами тензора, при переходе из одной системы координат в другую они преобразуются по закону, отличному от тензорного» [40].

Т.о., как только мы включаем операции дифференцирования векторов, то автоматически получаем символы Кристоффеля в дифференциальные уравнения.

В векторном анализе в явном виде символы Кристоффеля не появляются, но т.к. выше сказано, что векторы являются частным случаем тензоров, как тензоры первого ранга. То совершенно ясно, что в векторном анализе будут те же проблемы, что и в тензорном. Т.к. в векторном анализе также применяются операции дифференцирования векторов.

Перейдем теперь к решению физических задач, в частности, к решению задач механики.

Дело в том, что все уравнения механики векторные, т.е., неизбежны операции с векторами. Причем под решением задач механики понимается интегрирование векторных уравнений. При этом, если интегрирование дифференциальных уравнений механики в евклидовом пространстве в декартовых координатах не вызывает никаких трудностей, чуть сложнее процесс интегрирования в евклидовом пространстве полярных координатах, при решении задачи Кеплера. Интегрирование уравнений движения материальной точки, поддается решению только в отдельных случаях, остальные задачи, а тем более решение задач механики в случае трехмерного движения материальной точки «выходит за рамки возможностей современной науки» [14].

Причина таких сложностей объяснена выше. Все дело в том, что интегрируются уравнения, построенные на криволинейных координатах, жизненно связанных с декартовыми координатами изначального базиса.

Эту связь между декартовыми и криволинейными координатами оборвать невозможно, т.к. хотя задачу решают в криволинейных координатах, но векторы при этом декартовые. Потому что других векторов в современной литературе не существует.

Вот таким образом и получается, что сначала мы создаем искусственные трудности, а затем героически боремся с трудностями, которые создали своими руками. Судя по результатам, трудности нас побеждают.

Результаты следующие: интегрирование уравнений в неевклидовом пространстве вызывает настолько большие трудности, что в решения получены только в виде сложных функций, либо в виде эллиптических интегралов, либо в виде бесконечных рядов. Причем

эллиптические интегралы даются либо в виде таблиц, либо в виде тех же бесконечных рядов. Фактически решение дается приближенно при ограничении членов бесконечного ряда, а точное решение для аналитического исследования параметров движения не поддается усилиям.

Исходя из вышеизложенного, трудность интегрирования в том, что в дифференциальные векторные уравнения движения точки входят члены, не только описывающие движение самой точки, но и члены, описывающие взаимную связь между евклидовым и неевклидовым базисами. Те самые символы связи, например, символы Кристоффеля или другие, но одинаковые по смыслу. Причем, если старый и новый базисы декартовые, то никаких трудностей в интегрировании уравнений не возникает.

Обсуждение полученных результатов.

Предложение авторов состоит в том, что законы механики не должны зависеть от геометрии. Т.е. силы и реакции материальной точки на внешние силы одни и те же независимо от того, в каком базисе описывается движение.

Соответственно, если описывать движение материальной точки под действием внешних сил в любом базисе, законы движения должны быть идентичны. Соответственно, если в дифференциальных уравнениях движения будут отсутствовать члены, описывающие связь между различными базисами, то независимо от того, в каком базисе написаны уравнения, интегрироваться они будут одинаково.

Чтобы достичь такого состояния необходимо ввести топологические (неевклидовые) векторы. Потому, что именно из ситуации, когда задача описывается в неевклидовом базисе, а векторы в евклидовом и возникает связи между старыми и новыми базисами уже на стадии постановки задачи и соответственно на стадии написания дифференциальных уравнений, которые необходимо интегрировать. В этом случае никак не удастся избавиться от членов связи между старым и новым базисом. Если же ставить задачу изначально в неевклидовом базисе, и ввести понятие неевклидовых векторов соответствующей геометрии, то члены дифференциального уравнения отражающего связи базисов исчезнут. И дифференциальное уравнение будет интегрироваться одинаково в любых базисах.

Переход к декартовой системе координат, в которой необходимо получать окончательное решение необходимо делать не на этапе постановки задачи, а только после получения решения дифференциальных уравнений в неевклидовом пространстве.

В этом случае, перевод решения в виде траектории движения не вызывает ни каких сложностей. Т.к. никаких уравнений решать не надо, нужно только перевести координаты неевклидовой поверхности в трехмерное евклидовое пространство. Подобный переход не вызывает никаких трудностей.

Если решение задачи больших колебаний плоского маятника при использовании топологических векторов не вызывает никаких трудностей вообще [70], т.к. переводит задачу из трехмерного движения в одномерный, вдоль линии траектории, которая из-за наличия связи является частью окружности. То в случае сферического маятника задача сложнее, но ненамного. В [70] приведено доказательство закона сохранения кинетического момента для неевклидового пространства. Доказательство основано на постулате принципа наследования свойств математических объектов [там же].

В данном случае, этот принцип гласит, что если при доказательстве теоремы или закона не применяется в явном или неявном виде требование обязательного свойства векторов быть только прямыми и никак иначе, то этот закон или теорема может быть сформулирована и доказана для векторов любых геометрических свойств. Если нет требования, что вектор должен быть прямым, значит, то же самое может быть применено для вектора любой кривизны.

Далее задача движения сферического маятника на неевклидовой поверхности (сфере) решается точно также, как и задача Кеплера путем перевода задачи к одномерной [69]. Причем специально оговаривается, что именно наличие закона сохранения кинетического момента позволяет решить задачу плоского движения материальной точки в центральном поле [69].

7.14. Выводы

1. Переход от трехмерного движения сферического маятника к задаче движения того же маятника по неевклидовой плоскости (сфере) сводит задачу к двумерному движению. Доказательство закона сохранения кинетического момента для топологических векторов в неевклидовом пространстве [62] сводит задачу к одномерному случаю в неевклидовом пространстве.

2. Т.о. задачи больших колебаний плоского маятника и движения сферического маятника интегрируется в элементарных функциях, чего невозможно достичь в рамках современной науки, при обязательном использовании только евклидовых векторов.

3. С учетом положений данного научного исследования авторами вводятся **законы топологической механики:**

– Для любой замкнутой механической системы сохраняется количество движения.

– Для любой механической системы существует топологическая система неэвклидовых координат и векторов в наиболее простом виде, в которой будут выполняться первый, второй и третий закон классической механики (законы Ньютона).

– Возможность определения, движется тело по прямой или по кривой, определяется принятой системой координат.

– Возможность определения является ли движение относительным или переносным (истинным и кажущимся) определяется условиями приложения сил.

– Сила действия равна силе противодействия, только в случае, когда системы взаимодействующих тел либо неподвижны, либо движутся без линейного ускорения.

– Тело, на которое не действуют силы, либо равнодействующая сил равна нулю, либо остается в покое, либо движется вдоль траектории, на которой инерциальность движения сохраняется.

– Имеет значение масштаб (величина кривизны). Прямолинейно и равномерно тело может двигаться только при полном отсутствии связей, препятствующее такому движению. При наличии связей, инерциальное движение может быть криволинейным, а в поле нелинейных сил даже неравномерным.

– Если на тело действует сила, но существует связь, которая ограничивает движение тела, то сила продолжает действовать на тело и, в тоже время, тело действует на связь с силой, стремясь двигаться вдоль вектора силы, а со стороны связи на тело действует сила противодействия. При этом, сила действия и сила противодействия действуют и на тело и на связь.

Основной смысл введения понятия топологических векторов в том, чтобы получить уравнения динамики в наиболее простом виде.

В механике существуют три вида сил инерции: реальные по Ньютону, кажущиеся Эйлеровы, фиктивные по Даламберу. Силы инерции по Ньютону – это реальные физические силы реакции материальных точек на ускорения, и действуют они на то тело, со стороны которого действует сила, т.е. ускоряющее тело или материальную точку. Они действуют в неподвижной инерциальной системе отсчета. Эйлеровы силы инерции – это кажущиеся силы, которые вводятся в неинерциальных системах отсчета, и действуют на ускоряемое тело. Даламберовы силы инерции – это фиктивные силы, которые вводятся искусственно в математические уравнения, по принципу Даламбера, чтобы свести уравнения динамики к уравнениям статики. Их действие приписывается к ускоряемому телу, как и эйлеровых сил. Понятие абсолютно твердого (недеформируемого) тела – это абстрактное упрощение вполне логичное и допустимое для случая малых скоростей и ускорений. В условиях этого постулата тело реагирует так, как будто все силы приложены только к центру масс, при поступательном движении, а при вращении, тело вращается так, что как будто не возникает внутренних сил, и тело вращается как единое целое, таким образом, что все его части сохраняют взаимную ориентацию. В случае перехода к большим скоростям и ускорениям, необходимо переходить

к определению твердого деформируемого тела. Согласно этому определению между отдельными частями твердого тела действуют силы инерции по Ньютону, которые невозможно игнорировать. Т.к. эти силы действуют в неподвижной системе отсчета, значит, внутри вращающегося тела действуют реальные физические силы инерции по Ньютону, причем в неподвижной системе отсчета, именно этим определение деформируемого тела отличается от определения абсолютно твердого тела. Таким образом, согласно работам А.Ю.Ишлинского внутри вращающегося тела действуют не только эйлеровы силы инерции во вращающейся системе отсчета, но и реальные (физические) центробежные силы по Ньютону. Точно также реальные физические силы инерции, по Ньютону, действуют внутри любого тела движущегося с ускорением, если не считать это тело абсолютно твердым и не деформируемым.

Глава 8. Применение криволинейных векторов в прикладных задачах машиностроения

8.1. Особенности заготовительных операций гибки с растяжением в авиастроении

Формообразование сложнопрофильных деталей в авиастроении на автоматизированных профилегибочных машинах относится к операциям объемного совмещенного пластического формообразования. Заготовка подвергается существенным изменениям своей первоначальной формы (прямолинейной, реже - криволинейной) и испытывает значительные деформации и смещения сечений [1].

Формообразованием на профилегибочных машинах в авиастроении изготовляются листовые и профильные заготовки.

Процесс занимает одно из ведущих мест по трудоемкости в изготовлении самолета или другого изделия авиационной техники. Трудоемкость изготовления гнутых профилей составляет 25 - 27 % от общего объема.

К формообразуемым деталям относят стрингеры, шпангоуты, пояса нервюр и лонжеронов.

Профилегибочные машины с ручным управлением получили широкое распространение в начале пятидесятых годов прошлого века в связи с началом выпуска цельнометаллических фюзеляжей самолетов. За счет ее использования в технологии изготовления сложнопрофильных деталей удалось предотвратить потерю устойчивости плоской формы профиля при формообразовании, повысить точность изготовления деталей из авиационных сплавов.

Современные автоматизированные профилегибочные машины, оснащенные датчиками линейных и угловых перемещений, получили возможность осуществления формообразования по перемещениям, а также по скоростям перемещений.

В числе выпущенных и выпускаемых машин необходимо выделить ПГР-6, ПГР-7, ПГР-6А, ПГР-6АД. Последние две оснащены УЧПУ 2Р32М.

Внедрение профилегибочных машин с числовым программным управлением, таких, как ПГР-6АД, при программировании методом обучения позволяет неограниченное число раз воспроизводить эмпирически подобранную программу перемещения рабочих органов по координатам.

Основными отличительными чертами рассматриваемых процессов формообразования являются приложение растягивающих усилий, выводящих материал заготовки в зону пластических деформаций, и использование шаблона или пуансона, задающих требуемый контур.

Гибка с растяжением с опорой на пуансон позволяет значительно уменьшить пружинение детали, возникающее вследствие неравномерности изгибных нормальных напряжений по сечениям, а также повышать точность изготовления детали в поперечном сечении за счет предотвращения потери устойчивости плоской формы (закручивания, малковки, серповидности) [22].

Особенности летательных аппаратов определяют конструкционные и обусловленные ими взаимно противоречивые требования к материалам.

Как правило выбор материала в сторону улучшения конструкционных свойств приводит к возможному ухудшению показателей технологичности.

В авиастроении применяются материалы с низким удельным весом и достаточной прочностью - алюминиевые, магниевые, титановые сплавы, упрочняемые и неупрочняемые термической обработкой.

Число деталей из профилей может достигать десятков тысяч, общая их длина - до 30 км, размеры деталей от 25 до 1000 мм, масса может меняться от 0,01 до 25 кг.

К числу технологических параметров относят пластичность, обрабатываемость резанием, свариваемость.

Последовательность приложения нагрузок вида «изгиб – растяжение», «растяжение – изгиб», «растяжение - изгиб – растяжение» может иметь различные результаты по увеличению или уменьшению погрешностей формообразования в зависимости от угла гибки, условий формообразования и других факторов.

В частности, последовательность «изгиб – растяжение» позволяет достичь наибольшей точности на малых углах гибки.

Выбор и задание регулируемых направляющих параметров (момента, скорости, перемещения, силы) в зависимости от входных факторов может оказывать влияние различной степени на вариации выходных параметров.

Условие освобождения профиля, ориентированного «полкой внутрь», могут привести к растяжению профиля или боковому изгибу.

Рекомендуется освобождать профиль из пуансона ударами по торцу детали в осевом направлении.

Прикатка доводочным устройством внешнего слоя профиля может привести к различным результатам в зависимости от числа проходов и усилия прижима ролика.

При формообразовании могут иметь место кратковременные нестационарные и динамические процессы, они приводят к возникновению отклонений от нормального режима, или даже к аварийной ситуации.

В основном эти явления возникают при отладке управляющей программы.

При воспроизведении отлаженной программы вероятность их возникновения достаточно низка.

Сквозная технология основана на компьютеризации групповой технологии, комплексной системе обеспечения качества.

Система была апробирована при создании спортивного самолета Як-54 от создания математического макета изделия до проектирования и объемной увязки узлов и деталей изделия, оснастки, обработки деталей на станках с ЧПУ и технологическом роботе гибки с растяжением, обрабатывающих центрах, измерения и контроля деталей с помощью сравнения измеряемой поверхности с ее математической моделью на координатно-измерительной машине «Поли» (Италия).

Использование координатно-измерительной машины в связке с технологическим роботом для гибки с растяжением позволило серьезно повысить уровень и культуру производства, получить значительный эффект от обеспечения качества изготовления и сокращения номенклатуры оснастки (контурных шаблонов, пескослепков и др.).

На рис.8.1 показаны основные элементы системы качества и сквозной компьютеризированной технологии проектирования и изготовления авиационной техники. Особо стоит отметить элементы технологической подготовки производства профильных заготовок.

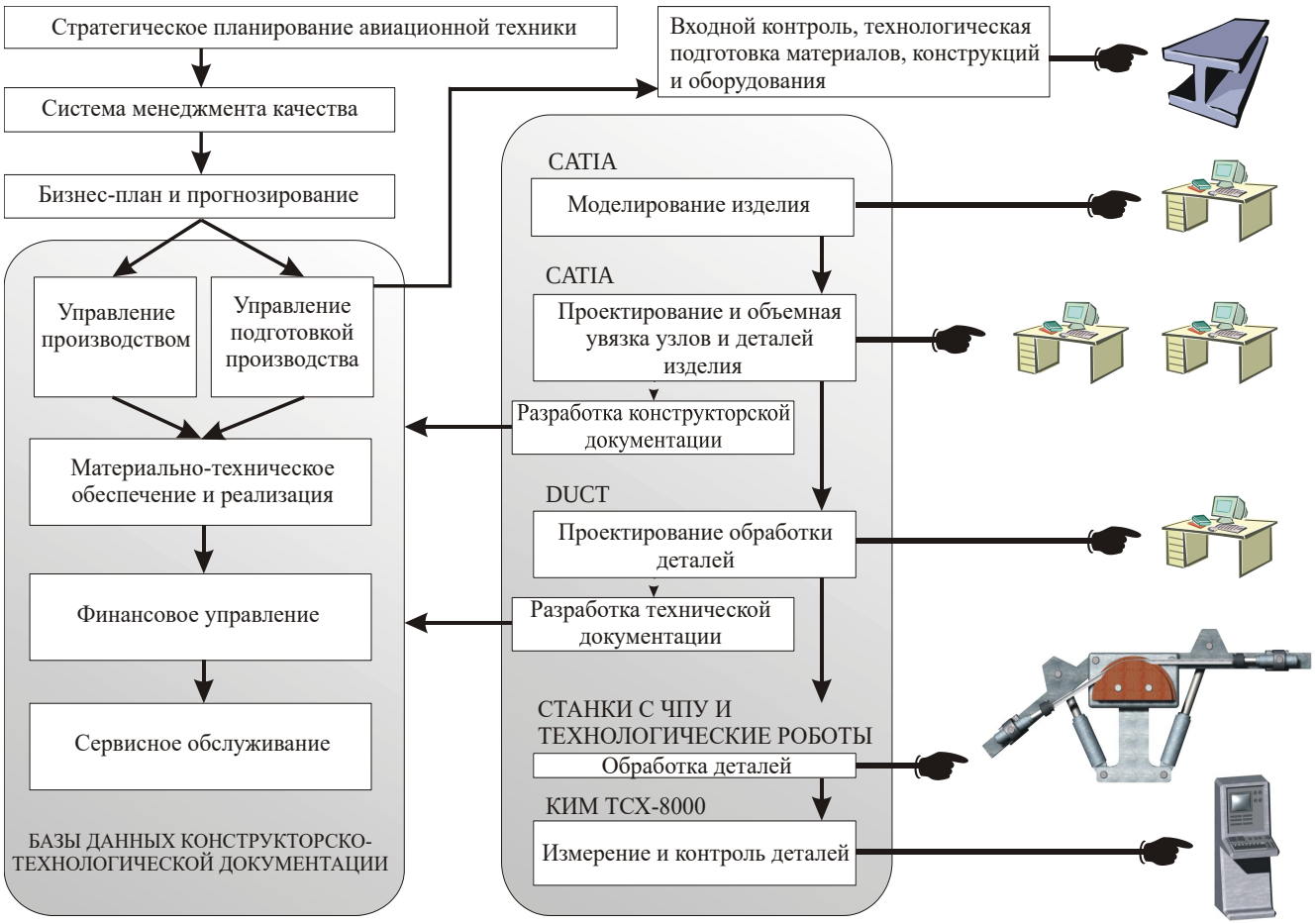


Рис. 8.1. Элементы системы качества и сквозной компьютеризированной технологии проектирования и изготовления авиационной техники

Типовой чертеж сложнопрофильного сборочного авиационного изделия, изготавливаемого методом гибки с растяжением приведен на рис.8.2.

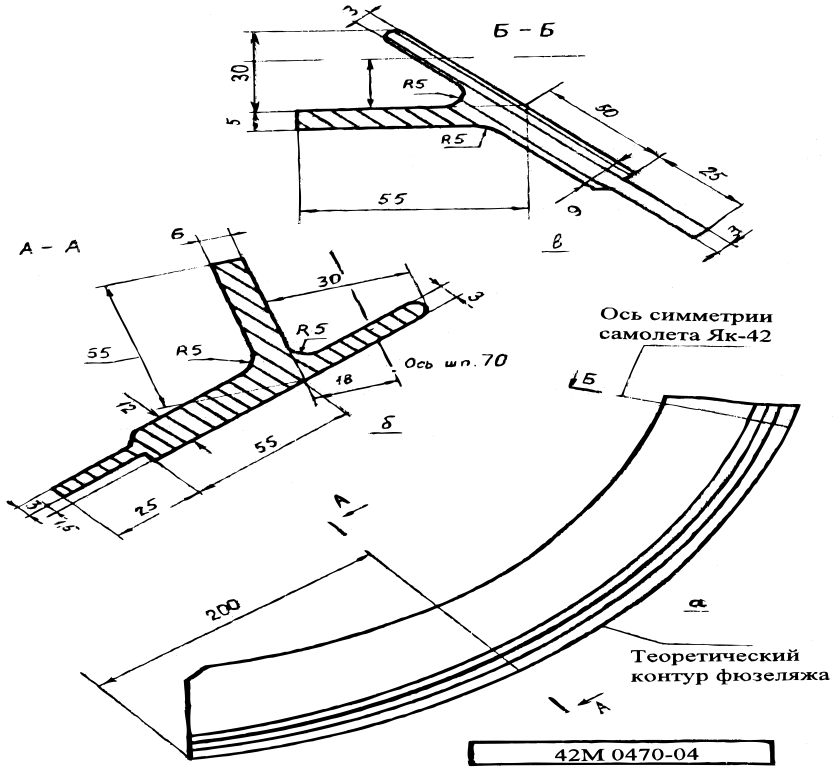


Рис.8.2 Сложнопрофильное сборочное изделие самолета ЯК-42

Твердотельная визуализация компоновки ПГР-6АД представлена на рис.3.

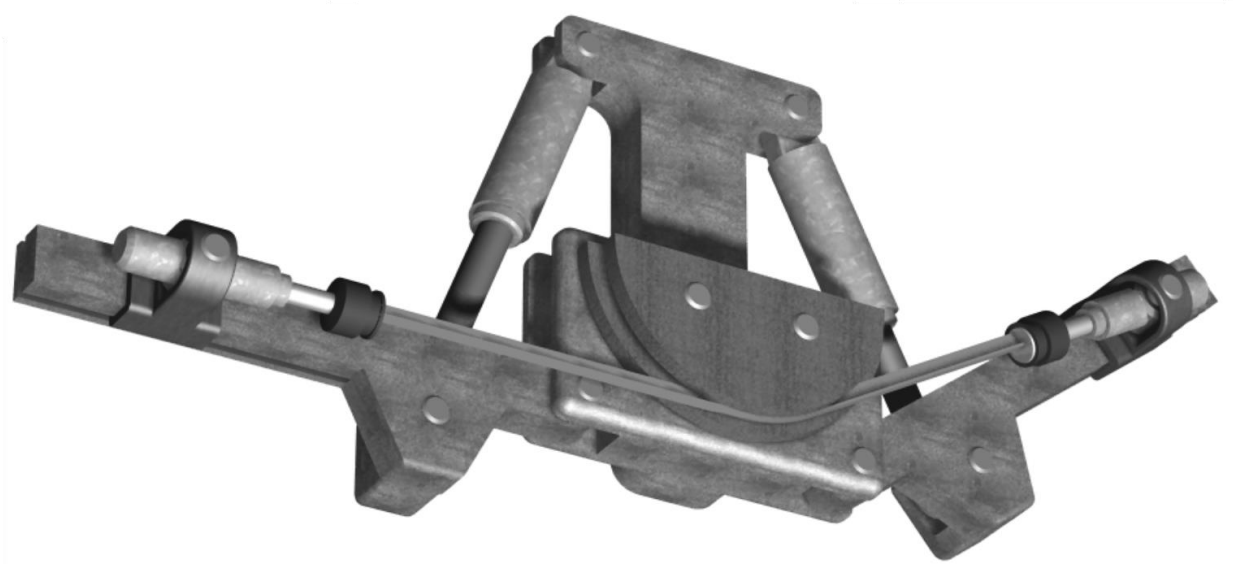


Рис. 8.3. Твердотельная визуализация компоновки ПГР-6АД

В технологии формообразования особо ответственных деталей в авиастроении применяется как один из элементов закалка, включающая нагрев под закалку, охлаждение и старение при комнатной температуре (естественное старение). При закалке добиваются перевода в твердый раствор максимально возможного количества упрочняющих элементов (меди, магния, кремния, цинка). Закалку проводят при температуре, несколько меньшей температуры максимальной растворимости в селитровых ваннах, находящихся на значительном (до 200 м) расстоянии от технологического оборудования. Время выдержки при температуре нагрева под закалку зависит от вида профильной заготовки, метода изготовления, марки сплава, толщины и ее вариации сечения, других влияющих факторов и параметров различной природы. Для нагрева тонких профилей обычно достаточно нескольких минут.

При охлаждении под закалку добиваются фиксации твердого раствора – сохранения в твердом растворе атомов легирующих компонентов, а также определенного минимального числа вакансий, которые определяют характер последующего упрочнения.

Максимальные прочностные свойства обычно достигаются после закалки с высокими скоростями охлаждения, которое проводят в воде или на воздухе. Теплоотвод при охлаждении ограничен сопротивление на поверхности контакта с окружающей средой (воздухом или водой) и отношением площади поверхности к объему. Скорость охлаждения на воздухе для профиля толщиной 3 мм составляет около 1 град/сек., в воде – около 1000 град/сек. (мгновенное охлаждение). Достоинством операции охлаждения в воде является незначительность остаточных деформаций формы профиля, напротив, охлаждение на воздухе приводит к значительному короблению длинномерных профилей, крайне неудобное при последующих операциях.

В результате остаточные деформации свежезакаленного профиля выглядит следующим образом: при закалке поверхностные слои оказывают сжимающее действие на внутренние, обратная реакция вызывает растягивающее напряжение на поверхности. При этом поверхностный слой пластически деформируется при растягивающих напряжениях, которые могут оказаться выше напряжения течения материала. В результате суммарного воздействия для полностью охлажденной детали ее поверхность находится под действием сжимающих напряжений, а сердцевина – растягивающих [22].

Это определяет неблагоприятные технологические условия для процессов механической обработки, при которых может произойти перераспределение поля напряжений и коробление профиля.

Ряд сплавов, применяемых в авиационной промышленности, имеет свойство существенного упрочнения (естественного старения при комнатной температуре). Время в течение полутора часов после проведения закалки и охлаждения называют временем удовлетворительной технологической пластичности, далее - время неудовлетворительной технологической пластичности.

На ЗАО «Саратовский авиационный завод» из-за значительного расстояния от селитровых ванн до технологического оборудования было регламентировано проводить формообразование деталей методом гибки с растяжением и в условиях неудовлетворительной технологической пластичности (два часа после термообработки), в условиях, когда в течение дополнительного получаса заготовка претерпевает наибольшую скорость изменения механических параметров упрочнения.

На рис.8.4 приводятся типовые схемы упрочнения (изменения механических параметров) алюминиевых сплавов в процессе старения при различных температурах 1 – комнатной, 2 – нулевой, 3 – минус 18 ºС [23].

На ряде авиационных заводов для сохранения механических параметров свежезакаленных профилей используют промышленные холодильники. Зимой детали перед технологическими операциями хранят на открытом воздухе на улице.

В процессе упрочнения происходит образование зон внутри твердого раствора. Окончательно стабильное состояние сплав приобретает через несколько суток.

Мягкость и пластичность материала, минимальность сопротивляющихся сил и моментов в свежезакаленном состоянии определяет высокую эффективность операций формообразования и правки в течении полутора часов после термообработки.

Одним из интересных явлений, происходящих для подобных сплавов, оказалось изменение линейных размеров в процессе естественного старения после закалки и охлаждения в воду. Среднее удельное изменение размеров может составить через час после охлаждения 200 мкм/мм [23].

Практически скорость изменения механических свойств свежезакаленного материала соответствует скорости изменения продольных и поперечных размеров, то есть заготовка становится одновременно тверже и толще.

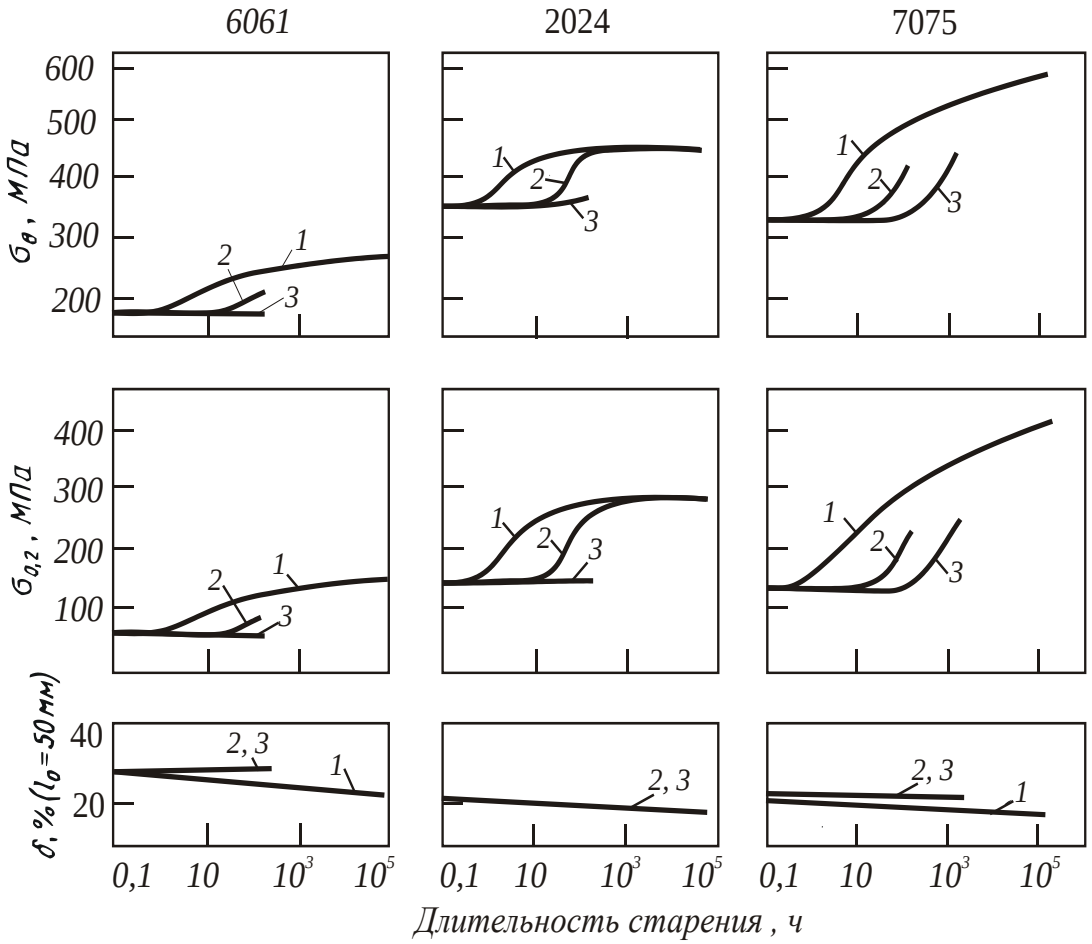
В этом случае также можно использовать разработанную методику сравнения процессов формообразования управления по силам и по перемещениям при наличии изменения (разброса) размеров профиля заготовок.

Модернизация методики заключается в переходе от вариации разброса размеров профиля на дополнительное наложение на него функциональной зависимости изменения размеров.

Однако качественная оценка и результаты практической работы со свежезакаленными профилями показали более чем значительную погрешность результатов расчета (до 150 %). В этих условиях было принято решение подробных количественных расчетов не проводить, а остановиться на адаптации способа обучения технологического робота формообразованию по перемещениям.

Параметры допусков по сечению в зависимости от номинального размера любого измерения профиля представлены на рис.5.

На рис.6 представлена типовая диаграмма отклонений контура гнутого с растяжением профиля от номинального контура.



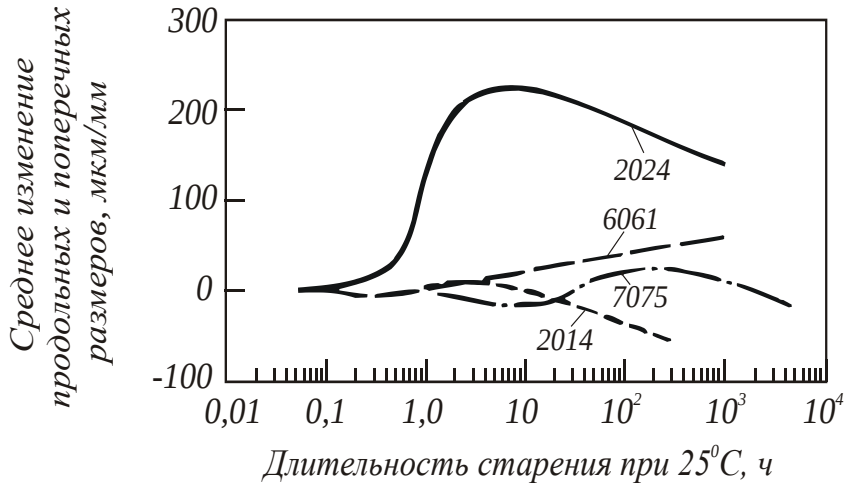


Рис.8.4. Среднее удельное изменение размеров в процессе старения при комнатной температуре листов, закаленных в воду *(L.A.Wolley, Alcoa Research Laboratories)*

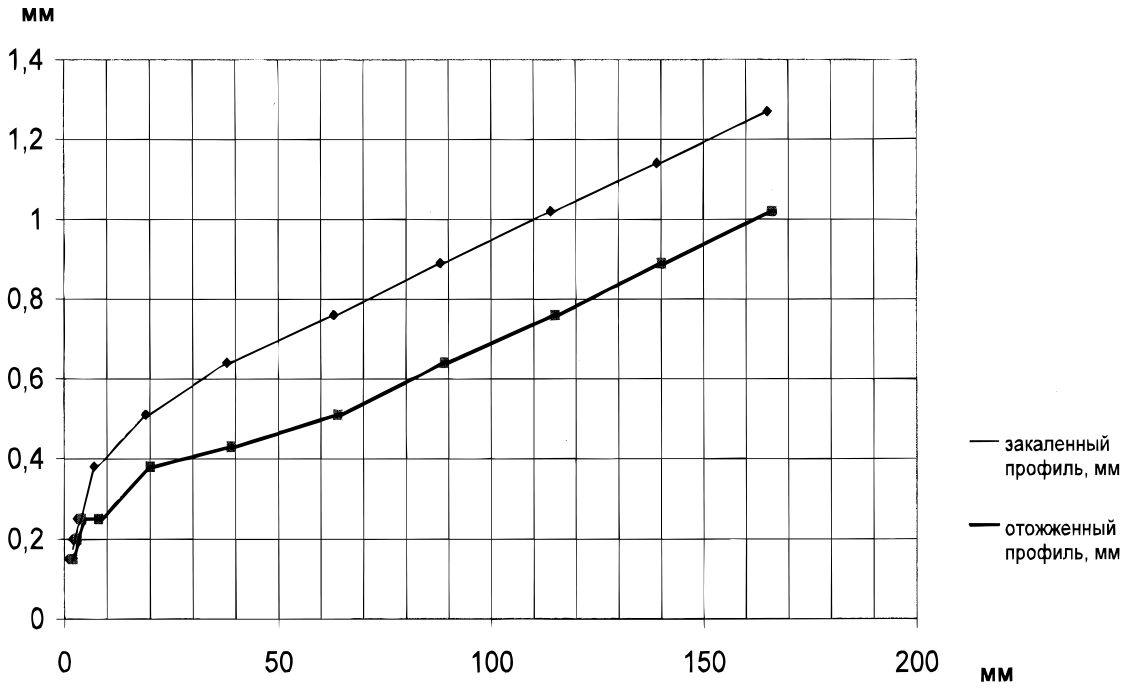


Рис.8.5. Параметры допусков по сечению в зависимости от номинального размера любого измерения профиля

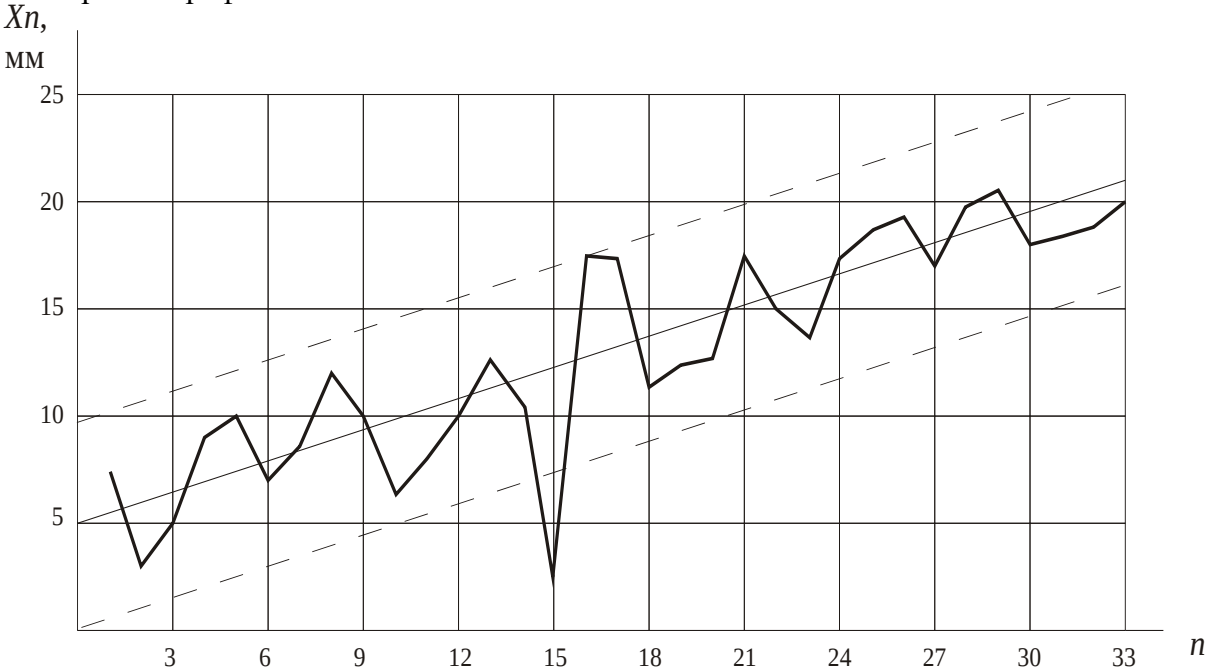


Рис. 8.6. Типовая диаграмма пружинения

Для обеспечения точности формообразования сложнопрофильных деталей на автоматических профилегибочных машинах одним из наиболее перспективных способов управления процессом, является метод управления роботом по перемещениям. Формирование программ перемещения рабочих органов при использовании этого метода проводится на основании специальных сеток опорных траекторий, которые представляют собой траектории перемещения концов заготовки или схватов робота в процессе гибки с постоянным усилием растяжением. В настоящее время при расчете этих траекторий используется модель нерастяжимой нити, наматываемой на контур шаблона (т.е. предполагается, что изгибная жесткость заготовки пренебрежимо мала). Преимущество данной модели - простота расчета, однако для повышения точности результатов необходимо более достоверное представление процесса формообразования деталей на автоматической профилегибочной машине.

Согласно типовому технологическому процессу формообразования сложнопрофильных деталей на автоматизированных профилегибочных машинах ПГР-6АД концы заготовки, прошедшей предварительную термообработку, зажимаются в патронах, после чего она рихтуется и растягивается на заданную величину относительного удлинения (по силе или по перемещению), но не более, чем на 4,0 %. На первой детали партии осуществляют гибку с растяжением по давлению в режиме «Обучение», во время которой измеряют с помощью датчиков линейных и угловых перемещений координаты узловых точек в обобщенной системе координат. Запоминают координаты и автоматически формируют управляющую программу гибки с растяжением по перемещениям, которую реализуют в автоматическом режиме при формообразовании по координатному замыканию последующих деталей с возможностью автоматической подналадки параметров программы по результатам контроля гнутых профилей. С помощью доводочного устройства осуществляют прикатку роликом внешнего слоя профиля для уменьшения остаточных деформаций пружинения.

Указанный способ обладает свойством малой чувствительности по отношению к изменениям механических свойств материала заготовки, а также малой чувствительностью от погрешностей размеров поперечного сечения заготовки.

В качестве примера приведем реализации автоматического формирования управляющих программ в случаях формообразования деталей 42МО468-00 гибкой с растяжением на ПГР-6АД с УЧПУ 2Р32М. Длина заготовок, соответственно, 2700 мм. Материал - алюминиевый сплав Д16ЧТ. Гибка осуществлялась «полкой наружу» и «бульбой по чертежу» - вверх. Детали подвергались предварительному отжигу. Углы наклона касательной к концам формообразующих контуров обтяжных пуансонов относительно нулевой линии машины составляют для детали 42М0468-00 - $43{,}5^0$. и $53{,}0^0$. Геометрия контурных шаблонов для каждой детали достаточно близка к параболическому закону, а изменение радиуса кривизны происходит в одном направлении.

В соответствии с алгоритмом функционирования по командам управляющей программы крылья и патроны растяжных цилиндров выходят в исходное положение, позиционируются патроны в положение зажима, вручную от кнопки на крыле зажимается заготовка в левом патроне, осуществляется наезд правым патроном на заготовку и ее зажим, поднимаются штоки защитного ограждения.

Производится предварительная рихтовка заготовки давлением в полостях растяжных цилиндрах, соответствующим установленному показанию вольтметра 0,85 В (0,85 МПа). После этого заготовка получает предварительную относительную деформацию 1,0 %. Сбрасывались показания датчиков координат и осуществляется гибка с растяжением по задаваемому на вольтметре «Усилие растяжения» давлению.

Одновременно, в процессе гибки профиля, в рассчитанных по командам управляющей программы координатах текущего угла наклона касательной к рабочему контуру пуансона относительно нулевой линии станка (30 узловых точек) производится измерение и запоминание в соответствующую зону памяти УЧПУ приращений перемещений зажимных патронов растяжных цилиндров.

После окончания процесса гибки с растяжением производится калибровка профиля заданными в программе перемещениями до 2,0-3,0 % относительно удлинения. Разжимаются кулачки патронов, штоки растяжных цилиндров совершают малые перемещения в сторону детали для ее физического освобождения, опускаются штоки ограждения.

Деталь вручную удаляется из зоны гибки во время функционирования команды «технологический останов», после чего по нажатию кнопки «пуск» продолжается выполнение программы перемещением рабочих органов в исходное положение для зажатия очередной заготовки. Программа может быть продолжена в режиме «Обучение», либо может быть осуществлен переход в режим «Автомат».

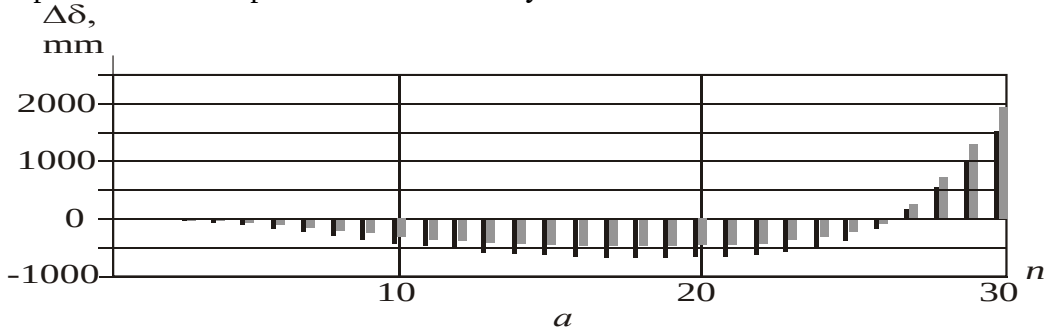
На рис.8.7 изображены результаты функционирования в режиме «Обучения» профилегибочной машины ПГР-6АД с УЧПУ 2Р32М при формообразовании деталей 42М0468-00. Причем: 1 - результаты гибки для левой части, 2 - для правой части зоны гибки.

На рис.8.7а изображены запомненные приращения перемещений патронов растяжных цилиндров при движении от одной угловой координаты к другой, на рис.8.7б изображены графики соответствующих перемещений патронов растяжных цилиндров, - приращения перемещений, - перемещения штока растяжного гидроцилиндра.

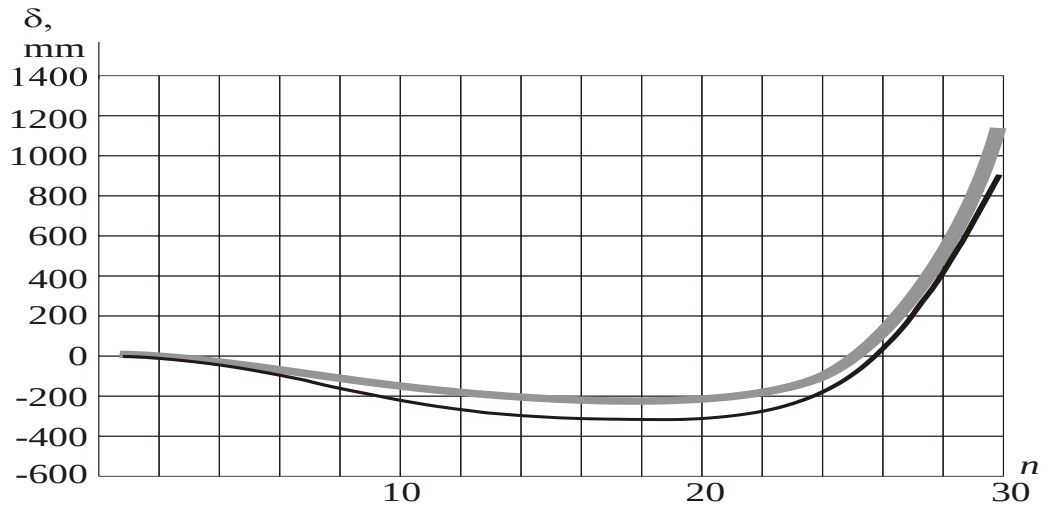
Характерной особенностью перемещения патронов являются первоначальное движение патронов в стороны от нулевой точки машины, а так же первоначальное возрастание модуля приращения.

Вследствие изменения в плоскости гибки геометрии контура обтяжного пуансона и обхода последнего растянутой заготовкой наступает момент, когда увеличение величины перемещения штока растяжного гидроцилиндра прекращается и начинается его уменьшение с увеличивающейся скоростью. Указанный процесс имеет место для обтяжных пуансонов с большими углами гибки и проявляется, начиная с диапазона 35,0-45,0^0.

Для контуров пуансонов с углами гибки, меньшими указанного диапазона, имеет место только участок с начальным возрастанием величины перемещения. В результате формообразования первой детали в режиме «Обучение» и автоматической записи координатных приращений получен набор пар приращений линейных и угловых обобщенных координат, по которым будет осуществляться после необходимой коррекции формообразование по перемещениям последующих деталей.



а



б

Рис.8.7. Сформированные в режиме обучения значения приращений и перемещений в реперных точках автоматизированной профилегибочной машины

8.2. Новые задачи совершенствования технологических роботов для силовых операций гибки с растяжением

Теория манипуляционных роботов в течение последних двух десятков лет прорабатывалась преимущественно к вспомогательным операциям свободного переноса объектов из одного положения в другое по заданным траекториям. Между тем во многих производственных системах роботы могут успешно выполнять технологические силовые операции, требующие отработки заданных программ силового воздействия на заготовки деталей в процессе формообразования, в условиях их пластического деформирования.

В авиастроении к наиболее сложным относятся операции изготовления криволинейных деталей методом гибки с растяжением с опорой на играющий роль шаблона формообразующий пуансон тонкостенных длинномерных заготовок, прокатных профилей из алюминиевых и титановых сплавов. Эти детали соединяются с другими и образуют несущие конструкции, силовые каркасы, в первую очередь, это шпаногоуты поперечных наборов фюзеляжей планеров самолетов, а также других основных частей изделий авиационной техники. Пример приведен на рис. 8.8.

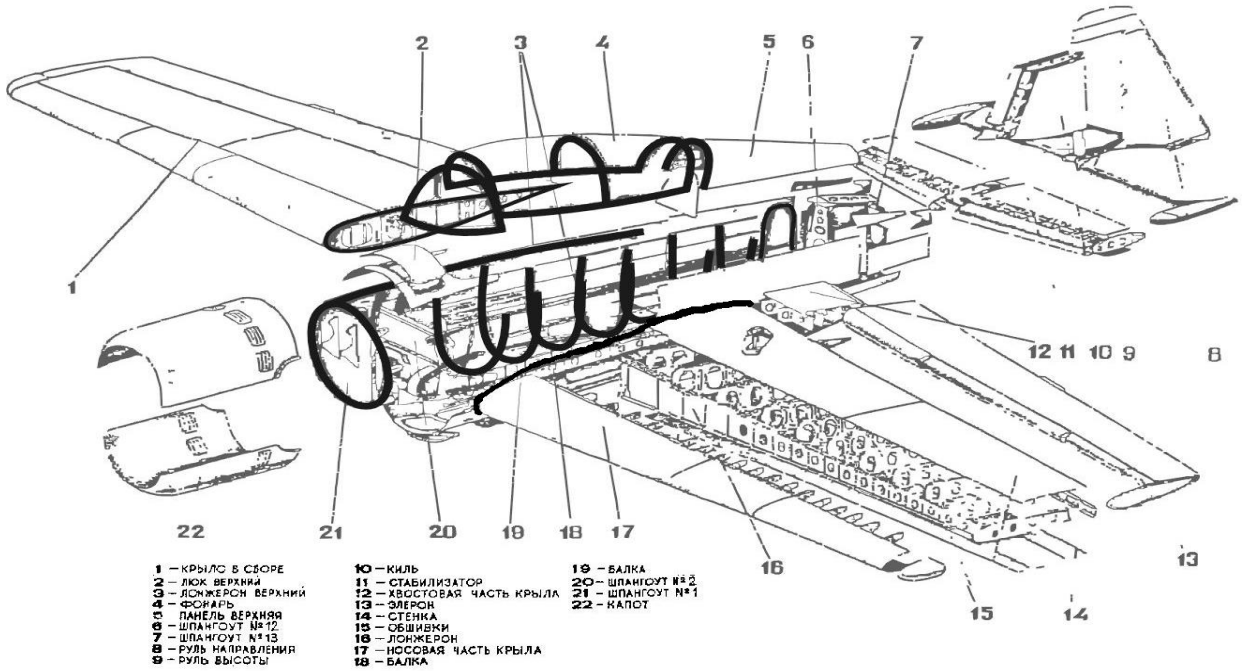


Рис. 8.8. Конструкторско-технологическое членение конструкции планера самолета с выделенными силовыми элементами, шпангоутами, образующие поперечные наборы каркаса, изготавливаемыми гибкой с растяжением

Видно, что указанные детали имеют большую кривизну, именно для них технология гибки с растяжением оказывается незаменимой. Отличительными особенностями требований к технологическому оборудованию и условий для гибки заготовок таких деталей в авиастроении являются: разнообразие типов и размеров, относительно малая серийность (несколько десятков, иногда единичное производство), довольно высокая требуемая точность. Существующие до сих пор и наиболее распространенные, обычные технологии гибки ориентированы на использование специальных гибочных машин с гидроприводом и ручным управлением, причем во многих случаях не удается обходиться без последующих трудоемких доводочных и подгоночных операций, часто велика доля бракованных изделий. При технологической подготовке к изготовлению мелкосерийных партий и единичных деталей для изделий авиационной техники во многих случаях отсутствуют справочные данные о допустимых и оптимальных параметрах процесса и законах их пространственно-временных

изменений, также на предприятиях нет практической возможности в проведении полных экспериментальных исследований.

Основной принцип рассматриваемых процессов гибки с растяжением заключается в приложении к заготовке захватными устройствами в дополнение к изгибающему моменту достаточно большой, но ограниченной растягивающей силы, выводящей материал заготовки близко к границе пластических деформаций, и в осуществлении изгибания за счет изменения направления силы, вследствие чего при увеличивающейся зоне прилегания по длине к поверхности жесткого, неподвижного шаблона или пуансона, задающего требуемый контур детали. Гибка с растяжением с перегибанием через пуансон приводит к выравниванию напряжений по значительным частям поперечных сечений. Это позволяет значительно уменьшить остаточное (после снятия нагрузок) пружинение детали, возникающее вследствие непостоянства изгибных нормальных напряжений в каждом из сечений, а также повышать точность сохранения угловой ориентации сечений детали за счет предотвращения возможной потери устойчивости плоской формы изгиба 1[22, 23]. Очевидно, что кривая контура пуансона должна сохранять один знак по всей длине.

Вопросы теории формообразования сложнопрофильных деталей на профи-легибочном оборудовании рассматривались в работах М.И. Лысова, И.М. Закирова (Казанский государственный технический университет) – вопросы теории и расчета процессов изготовления деталей методами гибки; С.С. Одинга, С.А. Лопасова (Воронежский технический университет) - вопросы создания САПР гибки с растяжением; А.Н. Громовой, В.К. Коробова, В.И. Зайцева, А.А. Галла (НИАТ, Москва), В.И. Максименкова (НИИ АСПК) – вопросы автоматизации процессов гибки с растяжением; а также М.Н. Горбунова, А.Д. Томленова и других исследователей. Технологическое оборудование для гибки с растяжением разрабатывалось в НИАТ, и изготовлялось Савеловском ПО «Прогресс», Гомельском станкозаводе, Волжском автозаводе. Аналогичными разработками оборудования для судостроительной промышленности занимаются в ГНТЦ ЦНИИ технологии судостроения (г. Санкт-Петербург, О. С. Куклин). За рубежом наибольшую известность получили разработки фирм Франции и ФРГ, например, АДБ (Нант), а также Отто Вольф Индустри-Анлаген Гезельшафт МВХ (Кельн). Одной из интереснейших разработок является машина для гибки с растяжением «Лаура» (Франция), эксплуатируемая на Самарском авиазаводе.

В теории автоматизации процессов гибки с растяжением значителен вклад российских ученых. В работах И.Б. Челпанова и А.В. Кочеткова в предметную область машиноведения и авиастроения было введено понятие специальных технологических роботов для силовых операций гибки с растяжением, применительно к ним сформулированы и формализованы задачи геометрии, кинематики и программного управления. Такие технологические роботы, механизмы манипуляторов которых предоставляют более широкие возможности, чем существующие машины для гибки с растяжением, целесообразно использовать при изготовлении длинномерных криволинейных силовых каркасов скоростных подвижных объектов: автомобилей, катеров, подводных аппаратов, самолетов, ракет и т.п.

1. Вопросы технологии гибки с растяжением

Гибка с растяжением часто применяется при изготовлении деталей из сплавов, относительно быстро изменяющих свои свойства. Изменение свойств материала заготовки связано со способом изготовления профиля (гибкой из листа или ленты на штампах, фрезерованием), но преимущественно термообработкой (отжигом, закалкой на воздухе или селитровой ванне). Для авиационных сплавов, упрочняемых термообработкой, в частности Д16Т, происходят значительные изменения механических свойств во времени, поэтому для этих сплавов разрешена гибка с растяжением в свежезакаленном состоянии только в течении первых двух часов. В соответствии с технологией, применяемой в авиационной промышленности, детали изготовляют обязательно партиями.

Изгиб и растяжение заготовки могут использоваться синхронно, или асинхронно, с разнесением по последовательным этапам. Последовательность приложения нагрузок в комбинациях «изгиб - растяжение», «растяжение - изгиб», «растяжение - изгиб - растяжение»

определяет различия результатов по увеличению или уменьшению точностей формообразования в зависимости от угла гибки, условий формообразования, ограничений и других факторов. В частности, последовательность «изгиб - растяжение» позволяет достичь наибольшей точности на малых углах гибки. Выбор и задание регулируемых параметров (изгибающего момента, растягивающей силы, скоростей и перемещения захватных устройств) в зависимости от факторов воздействий может оказывать влияние различной степени на вариации выходных параметров изготовленной детали. Использование достижений промышленной робототехники открывает широкие возможности программируемых машин для гибки с растяжением.

По смыслу любые задачи управления формообразованием сложно-профильных деталей на технологических роботах для силовых операций гибки с растяжением относятся к задачам терминального управления, поскольку результаты оцениваются по параметрам конечного состояния объекта производства. Поэтому программы изменения параметров управляемых технологических воздействий принципиально не могут быть выбраны однозначно. При этом нужно удовлетворять большому числу ограничений, учитывать возможности реальных датчиков, регуляторов и приводов исполнительных устройств, а также возможности измерения различных параметров состояния заготовки в процессе деформирования. Нужно дополнительноиметь в виду, что обычно существенны факторы неопределенности, отражающие различия материала заготовок, погрешности размеров сечений и т.д.

При построении алгоритмов управления необходимо учитывать то, что технологический процесс определяется геометрическими и силовыми параметрами, задаваемыми в системах координат, связанными с рабочими органами (захватными устройствами) робота, т.е. с концевыми сечениями заготовок, а непосредственно управляемыми являются другие параметры (перемещения штоков и давления в полостях растяжных гидроцилиндров). Эти обстоятельства представляют различную сложность в зависимости от того, осуществляется ли программирование устройств числового программного управления (УЧПУ) методом обучения, или аналитически. При программировании обучением программы могут быть определены запоминанием движений в ручных режимах по любым параметрам, лишь бы эти программы можно было воспроизводить и это давало бы однозначность последовательностей состояний в любой момент времени. Если при обучении регистрируются последовательности значений обобщенных координат по сигналам датчиков линейных перемещений и углов поворота, то в рабочих режимах, при воспроизведении, программы естественным образом задаются по этим же обобщенным координатам, а те же датчики используются как датчики обратных связей в контурах следящих систем. Однако при аналитическом программировании необходимо преобразование координат от концов заготовки к осям элементов исполнительных механизмов приводов (штокам гидроцилиндров).

Рассмотрим путь практического решения вспомогательной задачи указанного геометрического преобразования. Первоначально необходимо введение обобщенной системы координат, связанной с изменением взаимного положения пуансона, упругость которого вместе с креплением нужно учитывать, и пластически деформируемой заготовки. В зависимости от метода управления (он может быть координатным, силовым или комбинированным) нужно преобразовывать перепроектированием или линейные координаты, или силы, или и то и другое. Преобразование может быть непосредственным (когда формулы преобразования просты) или двухэтапным, с приведением к одной системе координат, с одной стороны, параметров изгиба заготовки, а с другой стороны, координат условного центра схвата (выраженных через обобщенные координаты механизма манипулятора) к единой, например, прямоугольной системе координат.

Стандартное программное обеспечение УЧПУ промышленных роботов предполагает программирование траекторий в явном виде. Однако существует другой способ программирования, при котором законы движения получаются, как решения в реальном

времени дифференциальных уравнений при определенных начальных условиях. Интегрирование дифференциальных уравнений осуществляется в реальном времени при работе приводов и перемещениях звеньев шаг за шагом. Следовательно, программная траектория не рассчитывается заранее, а определяется рекуррентно, в процессе самого движения.

При силовом и комбинированном управлениях тригонометрическим преобразованиям подвергаются силы и моменты. Исходно условия на силу растяжения и изгибающий момент задаются в последовательности точек схода изгибаемой заготовки с пуансона. Но при программном управлении силы и момент целесообразно приводить к концу заготовки или к центру захватного устройства, обычно представляющего собой схват зажимного типа.

Если схват самоустанавливающийся по углам поворота, а привод ориентирующей степени подвижности отсутствует, то сила и момент преобразуются к обобщенным силам в соответствии с кинематической схемой манипулятора. Важным преимуществом силового управления является то, что при постоянном сечении заготовки сила растяжения может быть постоянной или незначительно изменяющейся. Однако при переходе к обобщенным координатам и силам, развиваемыми приводами (гидроцилиндрами), для большинства кинематических схем манипуляторов получается, что обобщенные силы должны программно изменяться при этом часто в довольно широких пределах. В этом плане значительные преимущества имеют схемы, в которых растяжение создается специальными растяжными гидроцилиндрами, свободно качающимися и фактически следящими своими осями за касательными в концевых точках заготовки. Этим объясняется широкая распространенность указанных схем.

В процессе гибки с растяжением могут и должны измеряться как перемещения (и/или деформации), так и силы (и/или моменты). При выборе между основными путями программного управления (по деформациям или силам) следует отдавать предпочтение первому, по крайней мере, по двум причинам.

Во-первых, именно по деформациям налагаются ограничения, вытекающие из условия неразрушения заготовки. При наличии ярко выраженной горизонтальной площадки текучести диаграммы растяжения стабилизировать пластические деформации только по силам невозможно. Но при монотонном росте напряжений в процессе текучести и, следовательно, при существенном нарастании сил растяжения с деформациями при пластическом изгибе полне допустимо управление по силам путем их стабилизации на постоянных значениях.

Во-вторых, возможно комбинированное управление (по деформациям и силам). Тогда программа для УЧПУ задается линейной комбинацией деформаций (определяемых отклонениями обобщенных координат) и обобщенных сил. Особенности такого управления зависят от выбора коэффициентов в соответствующих слагаемых закона управления. Другая возможность комбинированного управления реализуется при переходе от программы одного вида к другой, что в теории управления квалифицируется как переменная структура. Идея сводится к тому, чтобы на первом этапе управлением (увеличением) силы растяжения довести материал заготовки до начала пластических деформаций, а затем, контролируя дополнительные деформации и ограничивая их, осуществлять изгиб. Такой способ дает значительные преимущества, когда момент начала пластических деформаций заранее не может быть оценен с удовлетворительной точностью вследствие разброса пластических характеристик материала, наличия остаточных напряжений, возникающих на предыдущих этапах технологического процесса, отличий размеров сечений от номинальных значений.

Выше была рассмотрена плоская задача пластического деформирования заготовок в одной плоскости. При рассмотрении возможностей пространственного изгиба заготовок в разных плоскостях авторами изучались различные варианты компоновок манипуляторов специальных технологических роботов для выполнения силовых операций гибки с растяжением. Предполагается, что поверхности пуансонов выпуклые и имеют двойную кривизну, чтобы надежно получать требуемую форму на поверхностях вырезаются канавки. Анализ возможностей получения различных пространственных форм стержней гибкой с

растяжением представляет достаточно сложную самостоятельную задачу. Исследуются вопросы формирование критериев обобщенных сил, координат и работы для технологических роботов для силовых операций гибки с растяжением. На рис. 8.9 представлено большое разнообразие вариантов кинематических схем.

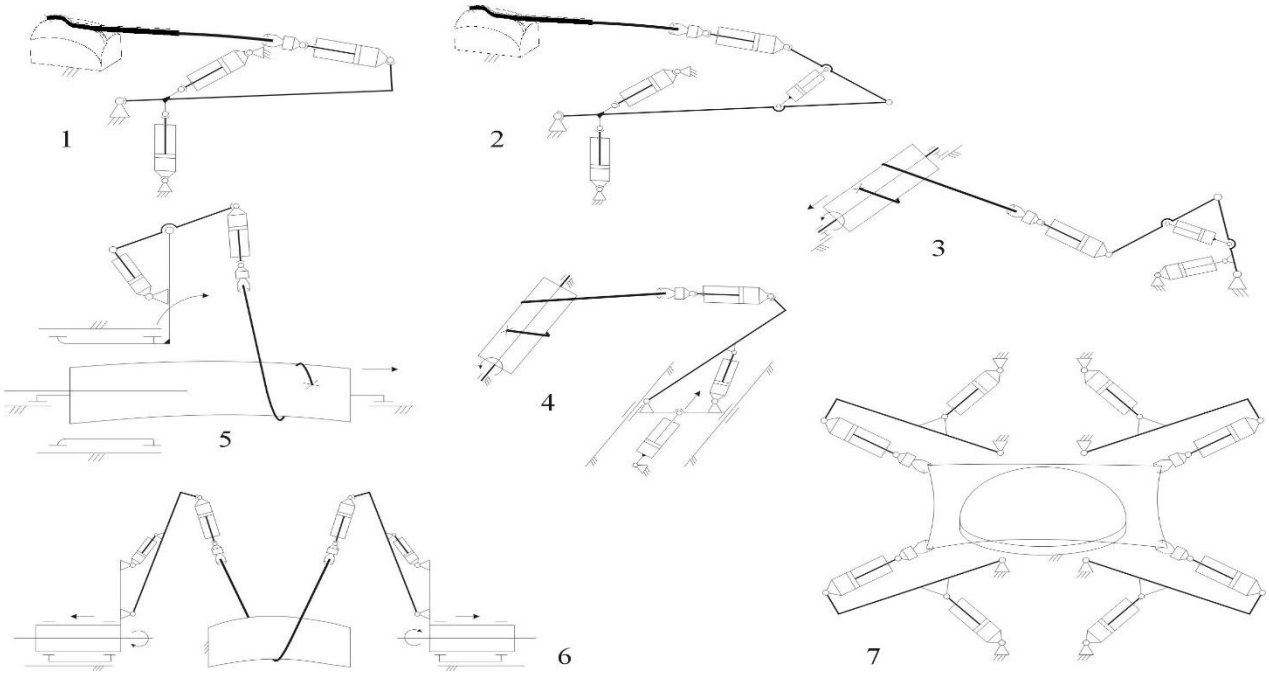


Рис. 8.9. Кинематические схемы (1-7) для реализации пространственного изгиба с растяжением

Некоторые из схем являются двусторонними симметричными, другие - односторонними, и тогда один из концов заготовки жестко закрепляется. Пуансон может быть неподвижным или подвижным, и тогда его положение задается самостоятельными приводами. Большое число приводов требуется для задания пространственных движений и произвольной ориентации сил. Большое число приводов при большом числе перекрестных кинематических связей определяет многосвязанность и многоконтурность структуры и взаимодействий вектора управления, с векторами задаваемых кинематических параметров и возмущающих воздействий.

Для структурной и параметрической оптимизации этих объектов ставятся задачи выбора, обоснования и формализации интегрального или комплексного показателя (критерия). При инженерном подходе можно сравнить несколько простых вариантов. Но при строгой постановке задачи оптимизации в качестве этого интегрального показателя выбран соответствующий целям и особенностям перемещения рабочих органов технологического робота для силовых операций гибки с растяжением знакоопределенный положительный (в частности, квадратичный) критерий академика А.А.Красовского, ранее им примененный для управляемых подвижных объектов. Он имеет смысл обобщенной работы. Функционал этого критерия в общем случае представляется в виде суммы

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \quad ,$$

где $J_1 = v_3\left[\left(x_1(t_2)\ldots, x_n(t_2)\right)\right]$ - заданная, обычно положительно знакоопределенная функция значений фазовых координат $x(t)$ в конечный момент времени $t = t_2$;

$J_2 = \int_{t_1}^{t_2} Q(x_1, \ldots, x_n t)dt$ - обобщенная взвешенная работа управлений,

$J_З = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{u_j}{k_j}\right)dt$ - обобщенная работа сигналов управления в оптимальной системе, $k[j]$ - коэффициенты усиления сигналов;

$J_4 = \frac{1}{p}\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{m}\left(k_j\sum_{k=1}^{n}J_{kg}\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^p dt$ - интегральная оценка качества переходных процессов и точности стабилизации желаемого невозмущенного состояния.

Смысл обобщенной работы, что важно для методов управления рабочими органами технологического робота для силовых операций гибки с растяжением, связан с ограничениями на обобщенные координаты и обобщенные силы, вытекающими из ограничений на мощности приводов. Выбор критерия представляется обоснованным в силу особенностей применения для робота различных комбинаций замыканий для каждого привода и локального контура управления (по перемещениям, по силам, по моментам, по скоростям перемещениям и др.). Обобщенные координаты представляются в виде независимых параметров x_i, $i = 1,2,\ldots,n$ различной размерности, число которых равно числу n степени свободы механической системы и которые в области определения однозначно определяют положение системы. Искомый закон движения системы в n обобщенных координатах формируется в виде уравнений

$x_i = x_i(t)$.

Обобщенные силы – параметры, выполняющие роль обычных сил, когда при изучении равновесия или движения механической системы ее положение определяется соответствующими обобщенными координатами. Каждой обобщенной координате x_i соответствует своя обобщенная сила Q_i. Элементарная работа ΔA_1 всех сил на возможном перемещении системы, при которой изменяется только координата x_1, получает приращение Δx_1. Тогда $\Delta A_1 = x$, т. е. коэффициент при ΔQ выражения ΔA и будет обобщенной силой Q_1. Аналогично определяются и $Q_2, Q_3, \ldots, Q_S$.

Размерность вектора обобщенной силы зависит от размерности обобщенных координат. Если x_1 имеет размерность длины, то Q_1 имеет размерность силы, если x_1 угол, то Q_1 имеет размерность момента силы и т.д. В состоянии равновесия все обобщенные силы равны нулю. При оптимальном управлении в соответствии с условием полной наблюдаемости предполагается осуществление измерения и использование для управления всех фазовых координат объекта. Часто реализуется прямое измерение всех фазовых координат.

Для использования этого критерия существует возможность применения методического подхода получения оценки наблюдаемости по Калману, в соответствии с которой измеряются все фазовые координаты прямым или косвенным путем. При косвенных измерениях измеряются величины, функционально или корреляционно связанные с фазовыми координатами. Косвенные измерения требуют значительного объема априорной информации о функциональных зависимостях между параметрами состояния объекта.

Конечно, могут быть случаи неполной наблюдаемости или невозможности прямого измерения части фазовых координат, либо отсутствия достаточного объема априорной информации. Этот случай требует применения оригинальных алгоритмов идентификации и синтеза управлений, как функций только измеримых фазовых координат. Разработаны методы формирования информационной базы для вычисления указанного критерия «обобщенная работа» в реальном времени применительно к управлению технологическим роботом для силовых операций гибки с растяжением.

6. Возможности применения многостепенных платформ
для гибки с растяжением

В настоящей работе также рассматривается возможность применения силовых многостепенных платформ (например, шестистепенной платформы Стюарта) в двухрукой компоновке технологического робота для силовых операций гибки с растяжением. Подобная платформа в принципе позволяет для любого положения задавать произвольные значения составляющих сил и моментов. Правая часть кинематической схемы силового робота для произвольной ориентации гидроцилиндра, задающего силу растяжения, представлена на рис. 8.10.

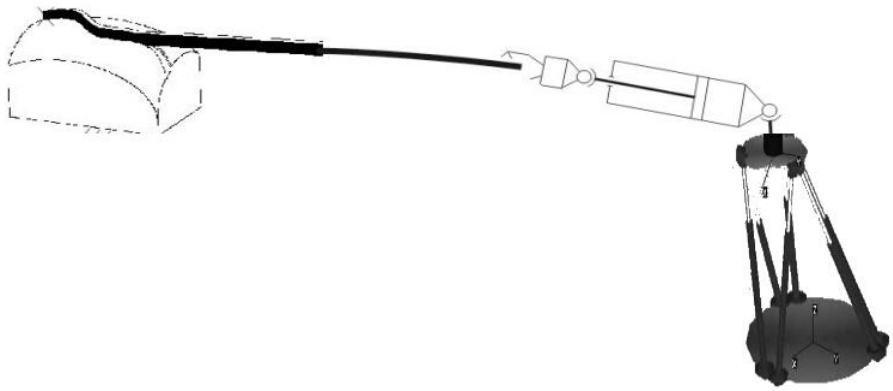


Рис. 8.10. Технологический робот для силовых операций гибки с растяжением на основе силовой платформы

Предполагается рассмотреть на математической модели задачу пространственного силового пластического деформирования профиля, как элемента сопряжения фюзеляжа самолета с крылом. Предварительный расчет рабочей зоны перемещений схвата робота и определение геометрических параметров силовой платформы был произведен с помощью имеющихся программных средств. В отличие от типовой рычажной схемы, основанной на применении самоустанавливающихся растяжного и гибочного гидроцилиндра, применение двух силовых платформ позволяет решить задачу пространственного изгибания. Предполагается при конструировании силовой платформы сохранить ранее используемые конструкции электрогидропреобразователей и датчиков обратной связи.

Задача ставится так. Известна форма обтяжного пуансона с пространственной кривизной рабочего контура. По размерам заготовки путем перерасчета по разрабатываемой программе должны быть определены координаты центра шарнира самоустанавливающегося растяжного гидроцилиндра, относительно которых с помощью существующей управляющей программы силовой платформы определяется приращения перемещений штоков ее гидроцилиндров.

С учетом сил трения между заготовкой и пуансоном считается, что исключено перетягивание друг друга силовых платформ. В случае применения самоустанавливающегося гидроцилиндра, располагаемого в центре площадки силовой платформы возможна реализация принципа обучения при гибке с растяжением постоянной силой, и сама задача программирования сил и движений существенно упрощается. В этом случае необходимо обеспечить перемещение центра точки качания растяжного гидроцилиндра по поверхности, образованной касательной контура обтяжного пуансона по эвольвенте с допустимой технологической погрешностью – ориентировочно 10 мм на 1º. Самоустанавливающийся гидроцилиндр должен создать необходимую силу растяжения, а далее реализовать корректирующее приращение перемещением штока.

Аналогично решаются вопросы обеспечения переходов различных типах замыканий (силовых, координатных, скоростных, адаптивных) в различных вариациях: между гидроцилиндрами силовой платформы, между силовыми платформами через деформируемую заготовку, от цикла к циклу и др. В частности, исследованиями [23] получено, что переход от

силового к координатному замыканию позволяет обеспечить слабую зависимость погрешностей формообразования от возможных изменений размерно-механических параметров заготовки, а использование корректирующих корректирующих приращений между последовательными циклами обработки позволит обеспечить слабую зависимость от изменений других возмущающих факторов и параметров различной природы.

Основные результаты.

1. Разработаны методология, принципы формирования координатной сетки для управления по деформациям и силам применительно к силовым операциям гибки с растяжением, методика формирования специального формализованного представления и описания схем и законов управления, позволяющая адекватно отражать структуру манипулятора и законы управления перемещениями его звеньев, описывать процессы управления формообразованием с законами управления по перемещениям, усилиям, моментам, скоростям перемещений, и их комбинациям, а также с устройствами переменной структуры.

2. Сформулирован обобщенный метод обеспечения высокой точности формообразования сложнопрофильных деталей на технологических роботах для гибки с растяжением, реализующий коррекцию формообразующего контура обтяжного пуансона, использования методов обучения и адаптации параметров управляющей программы.

8.3. Формирование координатной сетки и структуры комбинированного программирования технологических роботов для силовых операций

При проектировании системы управления автоматизированного профилегибочного станка ПГР-6АД (технологического робота для силовых операций гибки с растяжением – ТРГР) важны задачи выбора информационно достаточных параметров контроля и координатной сетки, обеспечивающих надежное и точное функционирование машины, а также возможности эффективного решения задач программирования, как в реальном времени, так и предварительно, например, в рамках специализированной САПР. Предполагается, что возможно, как аналитическое программирование, так и программирование обучением. Результатом расчетов при аналитическом программировании является формирование программ перемещения рабочих органов в рабочем пространстве машины для обеспечения точности формообразования.

Предварительно указывалось, что гибка с растяжением на ТРГР может осуществляться как по деформации, так и по усилию растяжения. В соответствии с этим возможно в различных случаях использование датчиков линейных перемещений, измеряющих перемещения (или их приращения) штоков растяжных цилиндров и углов поворота рабочих органов, а также средств измерения сил и деформаций различного типа. Из последних информативными, надежными и отработанными для профилегибочных станков являются датчики давления в полостях растяжных цилиндров, а также дефометры, устанавливаемые на неформообразуемый участок профиля в районе зажимного патрона. Другие типы средств измерений сил и деформаций в силу их меньшей информативности из-за особенностей функционирования, трудностей встраивания, ограниченности диапазонов и недостаточной точности целесообразно использовать при решении локальных задач, которые определяются различными условиями формообразования гнутых профилей широкой номенклатуры [22].

Точные датчики линейных перемещений необходимы при реализации гибки с растяжением по деформации (по перемещениям) и при программировании обучением во время силового управления формообразованием. Использование датчиков линейных перемещений позволяет обеспечить требуемую точность изготовления гнутых профилей.

Датчик линейных перемещений контролирует параметр положения зажимного патрона (например, штока самоустанавливаюшегося растяжного гидроцилиндра). Поворот (качание) штока вокруг оси не является параметром, непосредственно управляемым от УЧПУ, так как

не имеет собственных приводов. Датчиков перемещений и давлений достаточно при реализации элементарной операции растяжения (этапы рихтовки, предварительного растяжения, калибровки легкодеформируемых заготовок). Вместе с тем процесс гибки с растяжением требует контроля одного или нескольких угловых параметров положения формообразуемого профиля, либо положения рабочего органа машины. Угловые перемещения в зависимости от компоновки могут совершать несколько узлов машины - шток гибочного цилиндра, крыло, шток растяжного самоустанавливающегося гидроцилиндра.

Программные траектории движения зажимного патрона могут быть формализованы в различных системах координат, в частности, в декартовой (x, y) и в цилиндрической (r, φ) системах координат с центром в нулевой точке станка. Такое управление, при котором в программе задаются законы изменения координат, естественно называть координатным. С другой стороны, управление может осуществляться по программам изменения силовых параметров: сил и (или) моментов, такое управление следует считать силовым. Если в законах управления используются одновременно или последовательно программы изменения и координат и силовых параметров, то управление является комбинированным.

Рассмотрим сначала координатное управление [23]. Анализ возможных представлений программных траекторий показывает, что они могут служить в основном для математического описания самих траекторий, однако их непосредственное использование для формирования и реализации управляющих программ затруднено. открытыми остаются вопросы оптимального выбора числа и положения базовых точек в принятой системе координат для достижения требуемой высокой точности формообразования.

Также отметим, что различные геометрические параметры характеризуются различной информативностью, например, использование угла поворота гибочного цилиндра в качестве возможного параметра контроля затруднено из-за того, что его изменение в зависимости от угла поворота гибочного крыла не является монотонно возрастающим или убывающим. Его значения могут быть равны друг другу по разные стороны от максимума, в этом случае возможна неоднозначность в определении истинного значения угла поворота крыла. Помимо этого, диапазон изменения угла поворота гибочного гидроцилиндра составляет 5-7° и в силу малости может оказаться недостаточным для обеспечения точности измерения. Перемещения штока гибочного цилиндра в качестве углового параметра имеют недостаток существенной нелинейности в значительном диапазоне собственных перемещений. Наиболее информативным для процесса формообразования оказался угол между осью растяжного гидроцилиндра и поперечной нулевой линией, а в ряде случаев - угол поворота крыла.

При координатном управлении желательно перейти к такой системе координат, чтобы одна их координат характеризовала только удлинение заготовки, а другая - только изгиб. Это позволяет реализовать идеи автономизации управления, т. е. функционального разделения каналов управления. Геометрически это связано с выбором специальных систем координат. Координатная сетка строится следующим образом. Каждая из линий первого семейства строится, как эвольвента формообразующего контура обтяжного пуансона. Кинематическая модель при этом следующая: на профиле закреплен один конец нерастяжимой нити, перемещение второго конца нити дает эвольвенту. Семейство эвольвент получается, если задавать различную длину нити. Каждая из линий второго семейства линий координатной сетки представляет собой прямую - саму натянутую нить. В теории механизмов подобные геометрические образы используются в теории эвольвентного зацепления. Эвольвенты и эволюты зависят от профиля, для которого они строятся.

На рис.8.11 изображены схемы формирования координатной сетки для технологического робота гибки с растяжением, причем формообразуюшие контуры обтяжных пуансонов выполнены в виде: на верхнем примере рис.1 - окружности с радиусом кривизны R_a, на нижнем примере рис.1 – нескольких участков окружностей с радиусом кривизны R, R_1, R_2, R_3.

Налицо **применение топологических (криврлинейных векторов).**

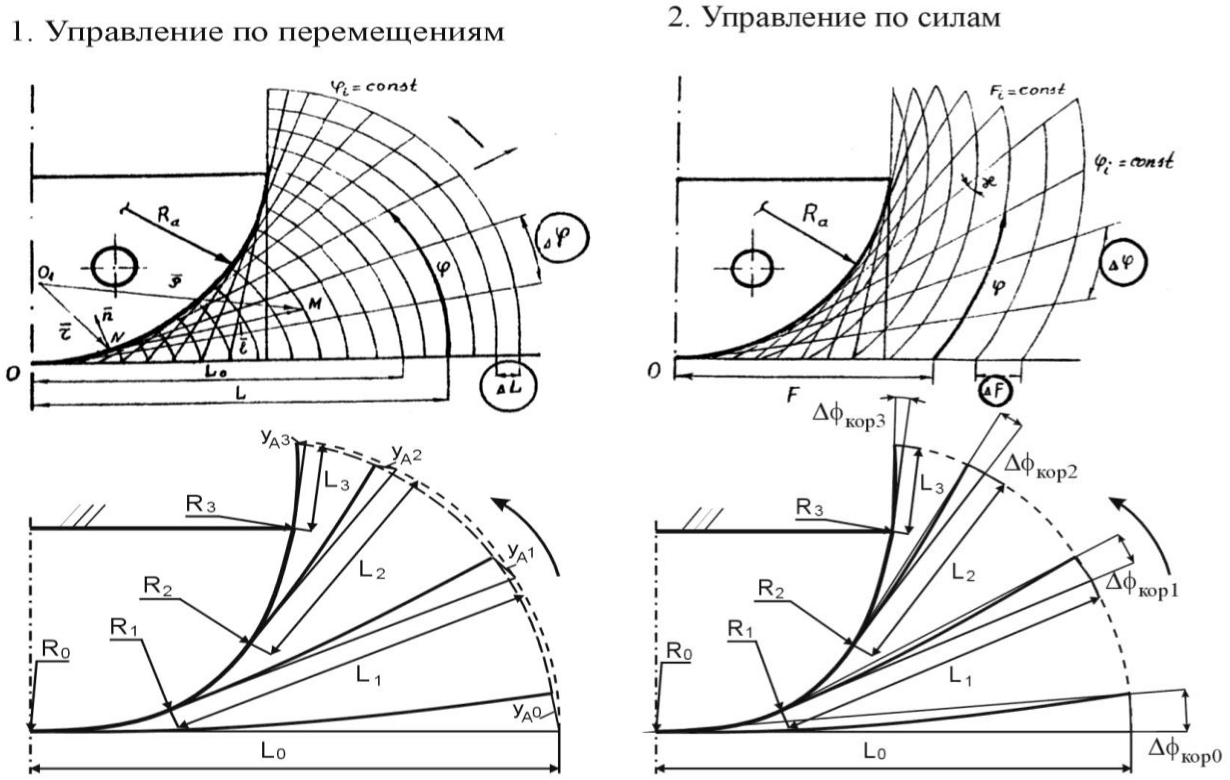


Рис.8.11. Схемы формирования координатной сетки для технологического робота гибки с растяжением при управлении по перемещениям и силам

Отметим некоторые особенности формирования координатной сетки для технологического робота для силовых операций. Основным базовым параметром является угол φ наклона касательной (в кинематической схеме - натянутой нити) в текущей точке схода профиля с формообразующего контура обтяжного пуансона. В свою очередь, линейный параметр координатной сетки (расстояние от точки схода с формообразующего контура до конца нити) является функцией текущего радиуса R кривизны контура пуансона, а также зависит от расстояния L_0 от нулевой точки до конца нити при предварительном растяжении. Траектория движения конца нити, сматываемой с профиля, как раз является эвольвентой (разверткой) геометрии контура обтяжного пуансона [76, 77].

Один и тот же контур пуансона имеет множество эвольвент, соответствующих различным значениям расстояния L_0. Траектория в виде эвольвенты пересекает касательные к формообразующему контуру пуансона под прямым углом. Обратно, нормаль к эвольвенте является касательной к контуру пуансона, являющегося, в свою очередь, эволютой траектории движения конца нити. Эвольвента обладает свойством уменьшения собственного радиуса кривизны по мере схватывания контура пуансона по увеличивающейся длине дуги. Очевидно, что траектория эвольвенты не проникает внутрь контура пуансона при постоянном знаке кривизны.

Отметим, что формируемая координатная сетка ТРГР является параметрической по координатам угла и линейного перемещения. Ее характеристики обеспечивают возможность формирования управляющей программы в соответствии с кинематикой движения рабочего органа ТРГР и для реализации самого управления процессом формообразования профильной заготовки (управления напряженно-деформированным состоянием профиля в реальном времени).

При использовании координатной сетки имеется две основные возможности формирования управляющей программы при координатном управлении [76, 77].

1. В абсолютных значениях (φ, L) угла φ наклона касательной к контуру пуансона и линейного параметра L, в качестве которого может выступать текущая длина прямолинейного

участка профиля (текущего радиуса кривизны траектории перемещения нулевой точки схвата), расстояние *b* от текущей точки эвольвенты, соответствующей начальному уровню размерной настройки, расстояние *a* от нулевой точки зажимного патрона до оси качания растяжного цилиндра.

2. В приращениях ($\Delta\varphi_i$, ΔL_i) указанных углового и линейного параметров перемещений, причем в общем (не всегда определенном) случае имеем (для дискретных значений текущего угла φ_i)

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1},\ d\varphi(t) = \varphi'(t)dt$$
$$\Delta L_i = L_i - L_{i-1},\ dL(t) = L'(t)dt \qquad (8.1)$$

Отметим, что фактор растяжимости заготовки (или требование задания удлинения) пока не учитывался.

Уравнение эвольвенты для траектории перемещения рабочего органа ТРГР может быть определено аналитическим путем (преобразованием известных уравнений в декартовой системе координат), а также в режиме «обучение» в координатах (φ_i, L_i) или в приращениях ($\Delta\varphi_i$, ΔL_i):

$$\varphi = \varphi(S),\ \Delta\varphi_i \approx d\varphi(S) = \varphi'(S)$$
$$L = L(S),\ \Delta L_i \approx dL(S) = L'(S) \qquad (8.2)$$

где *S* - длина дуги участка формообразующего контура пуансона.

Возможности применения силового управления, когда стабилизируются только силы и (или) моменты, а координаты не измеряются, проблематичны. Более эффективным (по точности, надежности формообразования для всей номенклатуры профильных заготовок) является комбинированное управление, которое рассматривается ниже.

При комбинированном управлении основной путь - задание усилия в зависимости от угла наклона касательной к контуру $F = F(\varphi)$. На рис.1 (справа) представлены наглядные изображения зависимости «угол наклона касательной - усилие растяжения» с соответствующим выполнением контуров правых частей пуансонов. В каждом конкретном случае вектор силы откладывается от точки касания касательной и контура пуансона (точки схода заготовки с контура пуансона). Если рассматривать множество различных точек касания, соответствующим различным значениям угла, и строить из этих точек векторы сил постоянного модуля, то после построения по их концам непрерывной кривой и повторения этой процедуры для различных значений модуля силы, получим сетки, изображенные на рис.1 (справа).

Перемещение по любой из кривой основной сетки соответствует изгибу с постоянным растягивающим усилием. Отметим ряд особенностей предлагаемого способа представления. Основным (базовым) параметром является угол φ наклона касательной в текущей точке схода профиля с контура пуансона (он же угол поворота оси растяжного гидроцилиндра в системе координат технологического робота). Базовый параметр определяет основу координатной сетки (лучи под углами φ). Во всех случаях предполагается, что сила растяжения направлена точно по касательной к контуру, следовательно, изгибающий момент пренебрежимо мал (теоретически равен нулю).

Схемы управления формообразованием сложнопрофильных деталей на ТРГР за счет регулирования растягивающей силы представлены на рис.8.12.

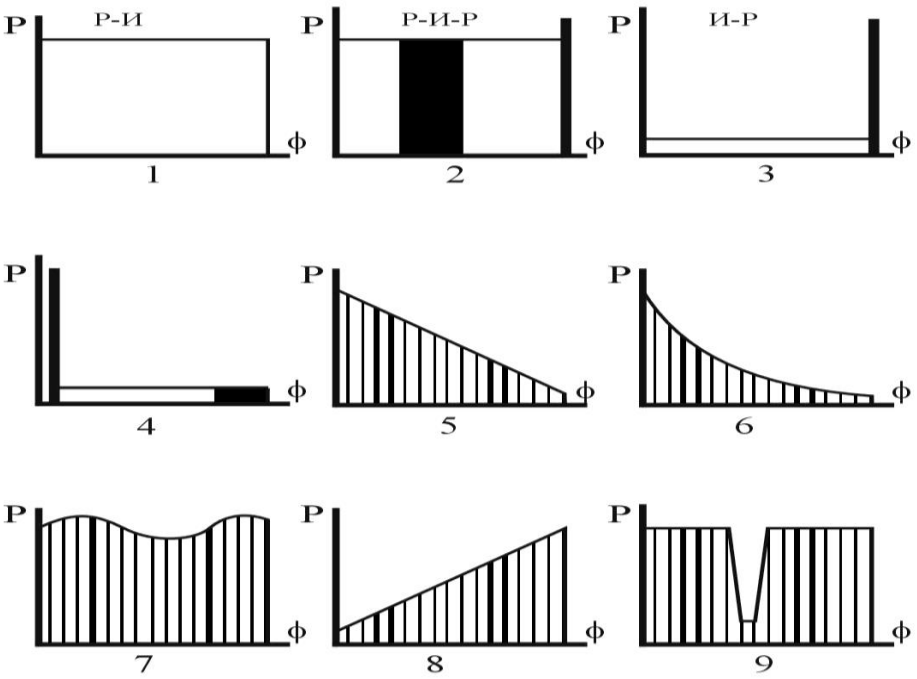


Рис. 8.12. Схемы управления формообразованием сложнопрофильных деталей на ТРГР за счет регулирования растягивающей силы

Аналогично координатному управлению имеется две возможности программирования управляющей программы: в абсолютных значениях угла φ и усилия растяжения F, а также в приращениях ($\Delta\varphi$, ΔF) углового и силового параметров. Для дискретных значений текущего угла имеем

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1},\ \Delta F_i = F_i - F_{i-1}, \qquad \varphi = \varphi(S),\ \Delta\varphi \approx d\varphi(S) = \varphi'(S)dS,$$
$$F = F(S),\ \Delta F \approx dF(S) = F'(S)dS, \qquad (8.3)$$

где S - длина участка формообразующего контура пуансона.

На рис. 8.13 и 8.14 изображены результаты функционирования в режиме «Обучения» профилегибочной машины ПГР-6АД с УЧПУ 2Р32М при формообразовании деталей 42М0468-00-29 и 42МО422-00-67. Причем: 1 - результаты гибки для левой части, 2 - для правой части зоны гибки. На рис. 8.13.а и рис.8.14.а изображены запомненные приращения перемещений патронов растяжных цилиндров при движении от одной угловой координаты к другой, на рис.8.13.б и рис.8.14.б изображены графики соответствующих перемещений патронов растяжных цилиндров, приращения перемещений и перемещения штока растяжного гидроцилиндра. Характерной особеностью перемещения патронов являются их первоначальное движение в стороны от нулевой точки ТРГР , а так же первоначальное возрастание модуля приращения. Вследствие изменения в плоскости гибки геометрии контура обтяжного пуансона и обхода последнего растянутой заготовкой наступает момент, когда увеличение величины перемещения штока растяжного гидроцилиндра прекращается и начинается его уменьшение с увеличивающейся скоростью.

Указанный процесс характерен для обтяжных пуансонов с большими углами гибки и проявляется, начиная с диапазона 35,0-45,0°. Для контуров пуансонов с углами гибки, меньшими указанного диапазона, имеет место только участок с начальным возрастанием величины перемещения. В результате формообразования первой детали в режиме «Обучение» и автоматической записи координатных приращений получен набор пар приращений линейных и угловых обобщенных координат, по которым будет осуществляться после необходимой коррекции формообразование по перемещениям последующих деталей.

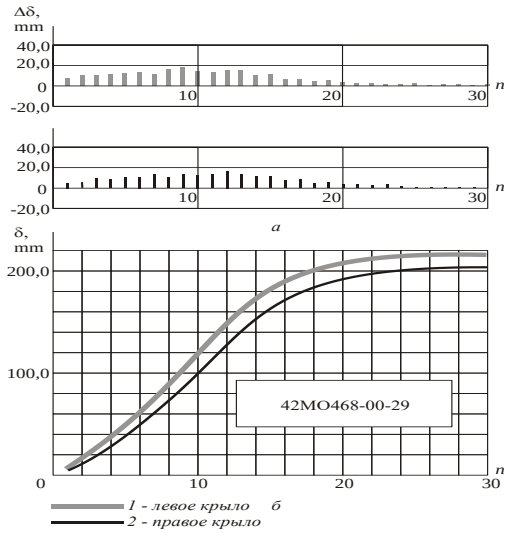


Рис. 8.13. Результаты функционирования режима «Обучения» ПГР-6АД с УЧПУ 2Р32М при формообразовании детали 42М0468-00-29

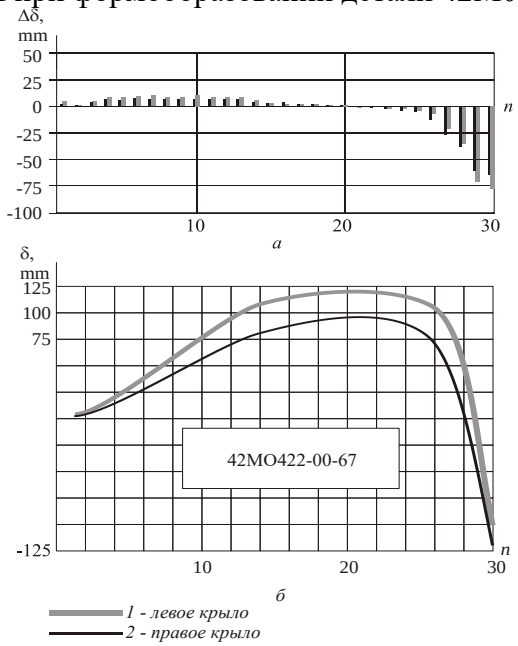


Рис. 8.14. Результаты функционирования режима «Обучения» при формообразовании детали 42М0422-00-67

Заключение.

Установлена возможность уменьшения случайной коррелированной составляющей погрешностей изготовления, вызванной влиянием различных возмущающих факторов и параметров различной природы за счет реализации контурного (координатного) управления на технологических роботах гибки с растяжением (ПГР-6АД) в сравнении с ручным управлением по давлению в растяжных самоустанавливающихся гидроцилиндрах на ПГР-6 (ПГР-7).

8.4. Объемное компьютерное моделирование конструкций технологических роботов для силовых операций гибки с растяжением

Существующие до сих пор и наиболее распространенные технологии гибки ориентированы на использование специальных манипуляторов с гидравлическими приводами и ручным управлением, причем во многих случаях не удается обходиться без последующих

трудоемких доводочных и подгоночных операций, поскольку разброс значений относительно среднего может превосходить на порядок максимальные отклонения, заданные чертежом.

При изготовлении мелкосерийных и единичных партий деталей для изделий авиационной техники во многих случаях отсутствуют справочные данные о параметрах процесса и их простанственно-временных изменениях.

Эффективность управления формообразованием во многом зависит от личного опыта рабочего.

Чтобы обеспечить высокое качество изготовляемых деталей и высокую надежность, гибочно-растяжные машины с ЧПУ должны иметь достаточно сложные кинематические схемы манипуляторов с оптимальными параметрами, новые системы числового программного управления с расширенными функциональными возможностями, развитое программное обеспечение, они должны быть быстро переналаживаемыми, адаптивными, приспособленными к мелкосерийному производству.

По большинству признаков такие машины относятся к специализированным технологическим роботам гибки с растяжением (ТРГР).

Однако до сих пор большой накопленный опыт роботостроения применительно к выполнению технологических операций гибки с растяжением практически не использовался.

С другой стороны, в робототехнике вопросы создания промышленных роботов для выполнения силовых функций и сложных технологических операций, когда необходимо воспроизводить сложные законы с одновременным контролем координат и силовых факторов, разработаны недостаточно.

Этот пробел дал импульс к большой серии прикладных исследований, посвященных этой проблеме, проводимых совместно сотрудниками СГТУ и СПбГТУ [76 - 77].

Внешний вид ПГР-6АД, ранее использованный на ЗАО «Саратовский авиационный завод», представлен на рис.8.15.

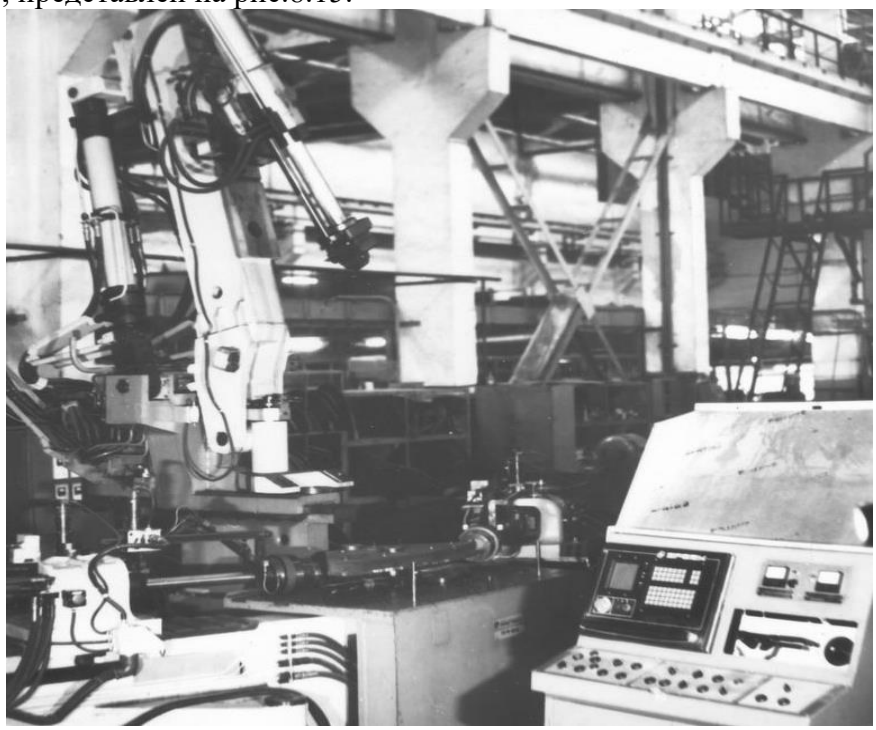


Рис. 8.15. Внешний вид ПГР-6АД

Промышленный робот, согласно ГОСТ 25686-85 «Манипуляторы, автооператоры и промышленные роботы (термины и определения)», может быть определен как «автоматическая машина, стационарная или передвижная, состоящая из исполнительного устройства в виде манипулятора, имеющего несколько степеней подвижности, и перепрограммируемого устройства программного управления для выполнения в производственном процессе двигательных и управляющих функций». В стандарте СЭВ 5949-

87 принято определение манипулятора робота как устройства «для выполнения двигательных функций, аналогичных функциям руки человека при перемещении объекта, имеющего несколько степеней подвижности». При этом под перепрограммируемостью понимается свойство робота изменять управляющую программу автоматически или при помощи человека-оператора. Какие-либо требования к структуре механизма манипулятора не ставятся, однако степеней подвижности должно быть несколько. Промышленные роботы используются как на вспомогательных операциях (например, погрузке - разгрузке), так и в основном технологическом процессе, как технологическое оборудование (например, как станок). К последнему виду относится и профилегибочная машина ПГР-6АД с УЧПУ 2Р32М, которую целесообразно считать промышленным роботом [77].

Схема профилегибочной машины (технологического робота гибки с растяжением - ТРГР) ПГР-6АД с УЧПУ 2Р32М (НИАТ, г. Москва, Савеловское СПО «Прогресс») представлена на рис. 8.16. На схеме автоматизированной профилегибочной машины обозначено: 1 - шкаф электроавтоматики, один из выходов которого связан со входом шкафа 2 гидроаппаратуры, 3 - стол машины, являющийся частью станины, 4 - обтяжной пуансон, 5 - ось качания растяжного цилиндра 6, 7 - зажимной патрон, 8 - каретка, 9 - шток растяжного гидроцилиндра, 10 - гибочное крыло, 11 - гибочный гидроцилиндр, 12 - формообразуемая гибкой с растяжением профильная заготовка, концы которой закреплены в зажимных патронах, а обтягивание происходит по контуру пуансона 4, 13 - УЧПУ 2Р32М, 14 - электропередача, 15 - гидропередача, 16 - ось передачи продольного перемещения штока гибочного гидроцилиндра 11 в угловое перемещение гибочного крыла, 17 - ось качания крыла, 18 - рабочая зона перемещения гибочного крыла, 19 - стол контроля, 20 - основание доводочного устройства, 21 - ограждение рабочей зоны. Конструкция ТРГР является симметричной относительно продольной нулевой линии.

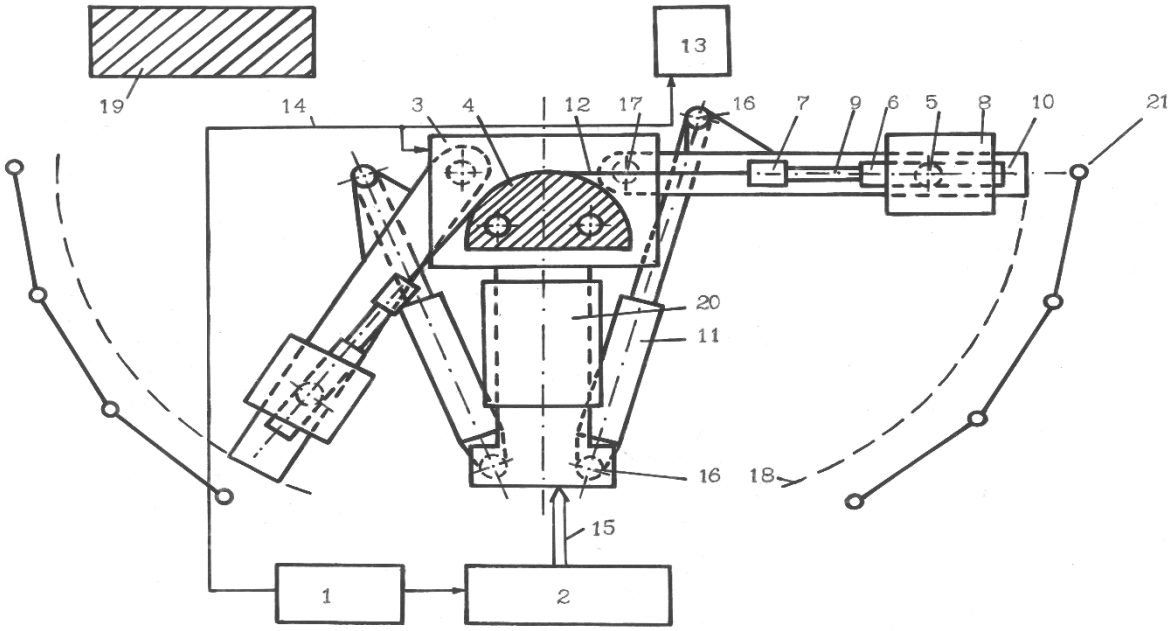


Рис. 8.16. Схема автоматизированной профилегибочной машины ПГР-6АД с УЧПУ 2Р32М

Представление данной машины как технологического робота гибки с растяжением (ТРГР) обосновано тем, что она предназначена для выполнения рабочих функций, которые аналогичны функциям рук человека при перегибании заготовки через неподвижную опору. Также используемое в основном технологическом процессе доводочное устройство может рассматриваться как манипулятор с ручным (полуавтоматическим) управлением. Для расширения функциональных возможностей машины и при усложнении технологических операций должно увеличиваться число степеней подвижности, что является дополнительным основанием для отнесения машины к промышленным (технологическим) роботам.

Ниже рассматриваются схемы манипуляторов, по которым реализованы ПГР-6, ПГР-6АД. Манипулятор, являясь основной частью технологического робота, выполняет двигательные функции. К объектам, применительно к исследуемому технологическому процессу, относят профильные длинномерные заготовки, отличающиеся по форме, длине, материалу и другим параметрам. Поэтому для обеспечения возможности перемещения схватов машины в задаваемой геометрией детали и пуансона рабочей зоне, требуется переналадка манипулятора. По кинематической схеме ТРГР может представлять собой одно-, двух- и многорукий робот. Исполнительным устройством наиболее распространенной схемы манипулятора является разветвленный шарнирно-рычажный многозвенный механизм, каждая из кинематических цепей (рук) которого состоит из звена переменной длины (растяжного самоустанавливающегося гидроцилиндра), гибочного крыла с гибочным цилиндром, задающим повороты крыла, каретки, схватов (зажимных патронов).

Две первые руки предназначены для гибки с растяжением при управлениях по деформации заготовки или по давлению в полостях растяжных цилиндров. Положение схвата левой или правой руки независимо контролируются по угловым перемещениям гибочного крыла и самоустанавливающегося растяжного гидроцилиндра, а также по перемещению штока растяжного цилиндра. Усилие контролируется по давлению в полостях растяжных цилиндров (или на выходе соответствующего задатчика), либо с помощью тензометрического преобразователя (при наличии последнего в системе контроля). В качестве примера отметим, что третья рука с прикаточным роликом функционирует по командам ручного управления с выносного пульта, а также по сигналам концевых ограничителей зоны прикатки, по давлению контролируется технологическое усилие прикатки.

К сенсорной системе или к устройствам очувствления относятся устройства контроля параметров внутреннего состояния ТРГР: датчики угловых и линейных перемещений, датчики давления, а также устройства контроля внешней среды: датчики касания, средства технического зрения и другие. К устройствам связи с оператором относят пульт управления УЧПУ с блоком индикации, пульт ручного управления доводочным устройством, блок связи с устройством вывода перфоленты, на которой записывается программа в режиме «Обучение». ЭВМ УЧПУ 2Р32М реализована на базе «Электроника НЦ80». Она имеет достаточно отработанное и развитое программно-математическое обеспечение, допускающее возможность гибкого программирования функций обработки информации и управления, возможность сопряжения с внешними управляющими и вычислительными устройствами, выполнения функции диагностики.

Система управления отличается характером выполнения задач позиционирования, сложностью ПМО, применением современных контрольных устройств и методов управления. Последнее отличие характеризует ТРГР как технологический робот с адаптивным управлением.

Система управления ТРГР функционирует автоматически, причем оператор участвует в процессе работы только на операциях установки и снятия согнутого профиля, а также при управлении формообразованием в режиме «Обучение». Управление ТРГР может осуществляться как по жесткой, заранее заданной программе, так и адаптивно, с формированием управления в реальном времени в зависимости от результатов контроля текущего состояния формообразуемого профиля и, если это необходимо, упругих деформаций узлов машины.

Проведен сравнительный анализ использования машины ПГР-6АД с УЧПУ 2Р32М с манипуляторами с ручным управлением ПГР-6, ПГР-7. Определены преимущества и недостатки.

Преимущества.

1. Расширенные кинематические и силовые возможности задания координатных, линейных и угловых перемещений, сил и моментов.

2. Возможность формирования различных законов управления по координатам и силам в различных комбинациях.

3. Возможность выбора параметров различных законов управления с тем, чтобы обеспечивалась устойчивость процесса формообразования.

4. Реализация автоматического задания относительной деформации предварительного растяжения.

5. Реализация наиболее точного для малых углов гибки режима изгиб - калибровка, а для больших углов - комбинированных режимов.

6. Оперативное использование средств измерения и автоматического введения коррекции.

7. Слабая зависимость от изменений размерно-механических параметров заготовок и обтяжного пуансона за счет использования контурного управления в условиях полной или частичной неопределенности.

8. Возможность увеличения диапазона припуска на операции предварительного формообразования фрезерованием или обсечки на штампе.

9. Возможность компенсации ряда частных погрешностей изготовления и установки формообразующего контура обтяжного пуансона при гибке в реальном времени.

10. Возможность автоматической диагностики рабочих органов, средств контроля и управления, УЧПУ, своевременная остановка при возникновении аварийных режимов.

11. Автоматизация ряда вспомогательных операций: включение ограждения, разжатие патронов и освобождение заготовки, выход в исходное положение.

12. Повышенная производительность.

Недостатки.

1. Высокая стоимость, большое подготовительное время (на тестирование, подготовку управляющей программы).

2. Требование высокой квалификации оператора и технолога.

3. Сложность ремонта.

Кинематическая схема механизма позволяет дать представление о возможностях выполнения движений, однако она не несет информации о размерных параметрах и взаимном расположении элементов конструкции машины и, соответственно, об ограничениях, накладываемых на реально допустимые движения механизма [75].

Предложен подход к устранению этих недостатков. С этой целью разработана методика моделирования конструкций манипуляторов с применением современных программных средств (учебного варианта системы автоматизированного проектирования SolidWorks). С использованием данной методики создается объемная компьютерная модель манипулятора, которая дает наглядное представление о его механике и возможностях движений с учетом конструктивных ограничений. Особенностью данной модели является представление элементов конструкции манипулятора в виде объемных тел при сохранении возможности их взаимных перемещений согласно заданным кинематическим параметрам (типам кинематических пар).

На рис. 8.17 представлен созданный пример такой модели.

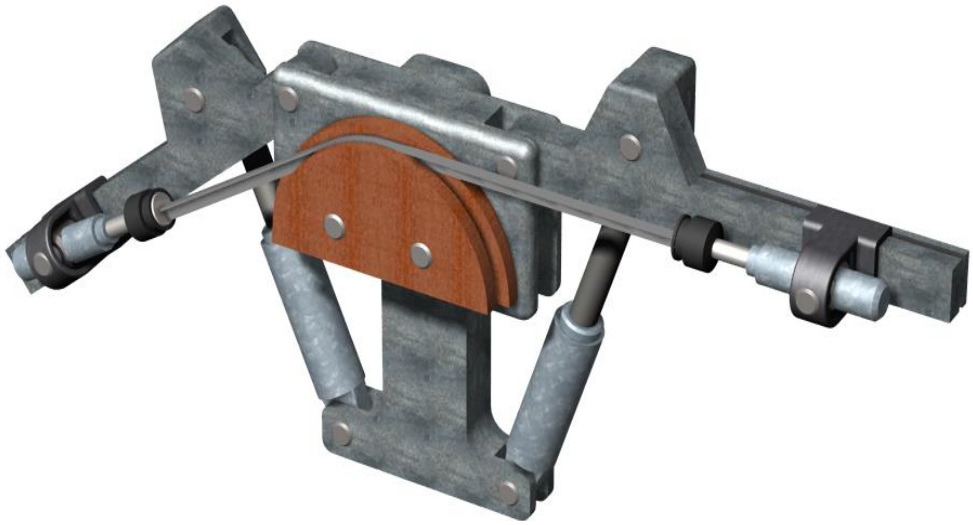


Рис.8.17. Созданный пример твердотельной модели робота для силовых операций

Система SolidWorks предназначена для объемного моделирования. Программно система реализована для работы в средах Windows 95/98, NT. Базовыми понятиями системы являются «деталь» (part) и «сборка» (assembly).

«Деталью» называется объемная модель одиночного элемента (обязательно цельного, не имеющего не связанных между собой частей). "Сборкой" являются детали или другие сборки (подсборки), соединенные между собой с учетом используемых типов кинематических пар. Моделирование проводится в стандартной системе координат, которая задается в виде трех взаимно перпендикулярных плоскостей (Plane1, Plane2, Plane3) и точки начала отсчета координат.

Новая деталь создается командой «новая деталь» (New - Part). При создании детали вводятся понятия «эскиз» (sketch) и «метод» (feature). «Эскиз» представляет собой плоское контурное изображение, являющееся основой для проведения объемных построений. Эскиз строится в заранее выбранной плоскости. Как правило, для эскиза первого элемента выбирают одну из базовых плоскостей, однако можно построить и дополнительную плоскость, используя команду «вставить вспомогательную плоскость»..

Система предоставляет семь стандартных алгоритмов построения вспомогательных плоскостей: параллельным смещением на заданное расстояние относительно другой плоскости; поворотом на заданный угол вокруг указанной оси (линии) относительно другой плоскости; построение, нормали криволинейной поверхности в указанной точке; плоскость параллельную заданной в указанной точке; плоскость перпендикулярную к кривой в указанной точке; плоскость, проходящую через заданные линию (ось) и точку; плоскость, проходящую через три заданные точки.

Под используемыми при построении плоскостями понимаются не только специально построенные вспомогательные плоскости, но и плоские поверхности моделируемой детали. Система также позволяет строить вспомогательные оси. После указания плоскости эскиза, выбором команды «эскиз» (sketch) производится переход в режим черчения. В данном режиме для построения линий используются специальные инструменты, условно их можно разбить на три группы:

1. Построения: линии; дуги из центральной точки; дуги, как касательной; дуги через три точки; окружности; эллипса; сплайна; прямоугольника; точки; оси.

2. Проведение преобразований: зеркало (симметричный перенос объектов относительно указанной оси); скругление (проводит построение касательной дуги заданного радиуса между двумя указанными элементами чертежа); дополнение (дополняет указанный элемент до достижения другого элемента); преобразование объекта (позволяет получить для указанного объемного объекта его проекцию на плоскость эскиза, а также изменять размеры

этой проекции); обрезка (позволяет интерактивно удалять отдельные объекты и элементы объектов).

3. Настройка зависимостей: размер (позволяет задать точный размер объекта или его элемента, размер может быть задан в виде зависимости (формулы) от размерных параметров других элементов модели, если размер элемента не соответствует заданному, то элемент будет преобразован, так чтобы соответствие выполнялось); добавление зависимости (накладывает на указанные элементы чертежа геометрические условия (ограничения) такие, как вертикальность, горизонтальность, коллинеарность, перпендикулярность, параллельность, соосность, симметричность, зафиксированность и др.); поиск равных (ищет на чертеже элементы равной длины и устанавливает для них зависимость приравнивания); управление зависимостями (позволяет просматривать и удалять зависимости, наложенные на элементы).

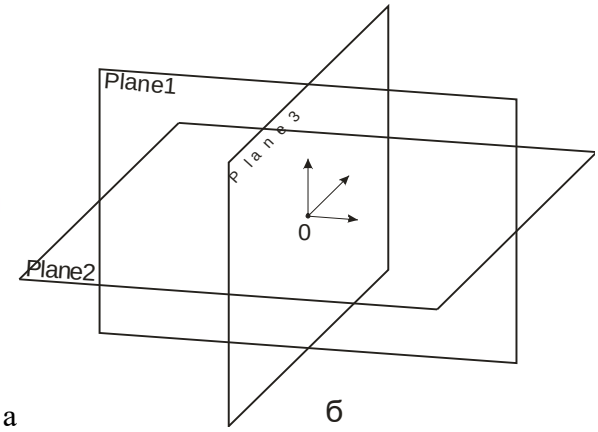
Использование инструментов последней группы особенно эффективно в тех случаях, когда в дальнейшем, по ходу моделирования требуется изменение какого-либо размерного параметра чертежа так, чтобы при этом остальные элементы эскиза тоже изменились заданным образом (или остались неизменны).

«Методами» называют совокупность преобразований, которые позволяют формировать свойства моделируемых объектов. Методы могут быть стандартными, встроенными в систему SolidWorks, библиотечными, подключаемыми отдельно, и пользовательскими, созданными пользователем. К основным стандартным методам относятся: экструзия (выдавливает, формирует из плоского эскиза призму с заданными параметрами); вырез экструзией (формирует из плоского эскиза вырез в теле модели в виде призмы с заданными параметрами); разворот (формирует из плоского эскиза, имеющего ось, объемное тело вращения); вырез разворотом (формирует из плоского эскиза вырез в теле модели в виде поверхности вращения); фаска (формирует на указанной кромке фаску с заданными параметрами); скругление (формирует для указанных поверхностей или кромок скругление (галтель) с заданными параметрами); изгиб (формирует изогнутый элемент профиль поперечного сечения, которого задается одним эскизом, а профиль изгиба - другим); «лофт» (loft, формирует объемную модель из указанной последовательности эскизов поперечных сечений заданным образом).

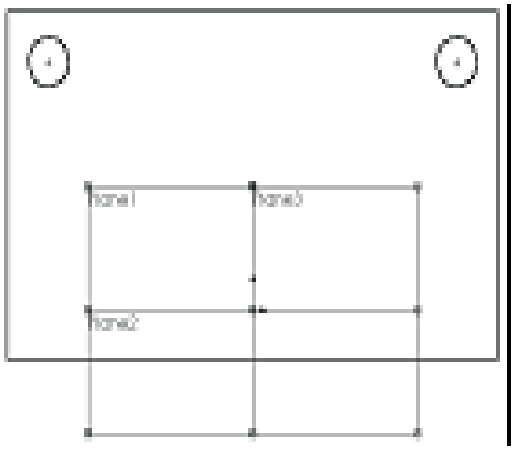
На рис.8.17 а приведен пример поэтапного создания детали «основание», входящей в сборку моделируемого манипулятора (рис. 8.17). Деталь «основание» (рис. 8.17,а) является базовой деталью конструкции манипулятора, к которой крепятся остальные элементы конструкции в местной системе координат (рис. 8.17 б). На рис. 8.17,в представлен эскиз базового элемента детали основание. Эскиз выполнен в плоскости Plane1, при его построении использованы инструменты «прямоугольник» и «окружность». Для получения из эскиза объемного объекта воспользуемся методом «экструзия» (выдавливание). Задав величину экструзии, получим объемную деталь, представленную на рис. 8.17,г. Скруглим края модели с помощью метода «скругления», для которого задаем радиус скругления и указываем поверхности, края которых необходимо скруглить (рис. 8.17,д). Путем параллельного смещения относительно плоскости Plane1, получим новую вспомогательную плоскость, в которой создадим эскиз (рис. 8.17,е), необходимый для дальнейших построений. С использованием метода экструзии, преобразуем полученный эскиз в элемент объемной модели (рис. 8.17 3,ж). Проведем построение нового эскиза (рис. 8.17,з) и методом выреза экструзией получим вырезы заданной ширины в теле модели (рис.3,и). Подобным образом сделаем вырезы и в другой части модели (рис. 8.17,к). Сформируем цилиндрические стержни для крепления изгибного шаблона, с этой целью в фронтальной плоскости детали построим эскиз в виде двух окружностей и применим к нему метод экструзии (рис. 8.17,л). На заключительном этапе сформируем, используя метод «фаска», на полученных стержнях фаски и создадим вспомогательные оси, проходящие через центры отверстий детали (рис. 8.17,м). Данные оси в дальнейшем будут использованы на этапе создания сборки.



а



б



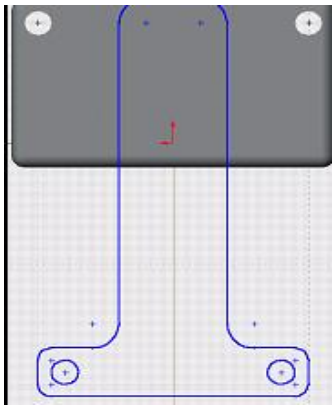
в



г



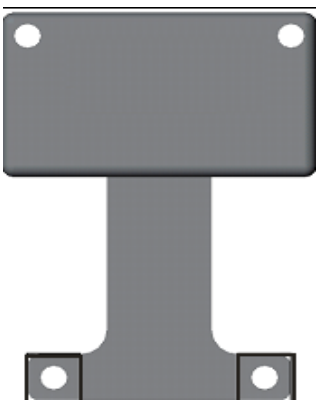
д



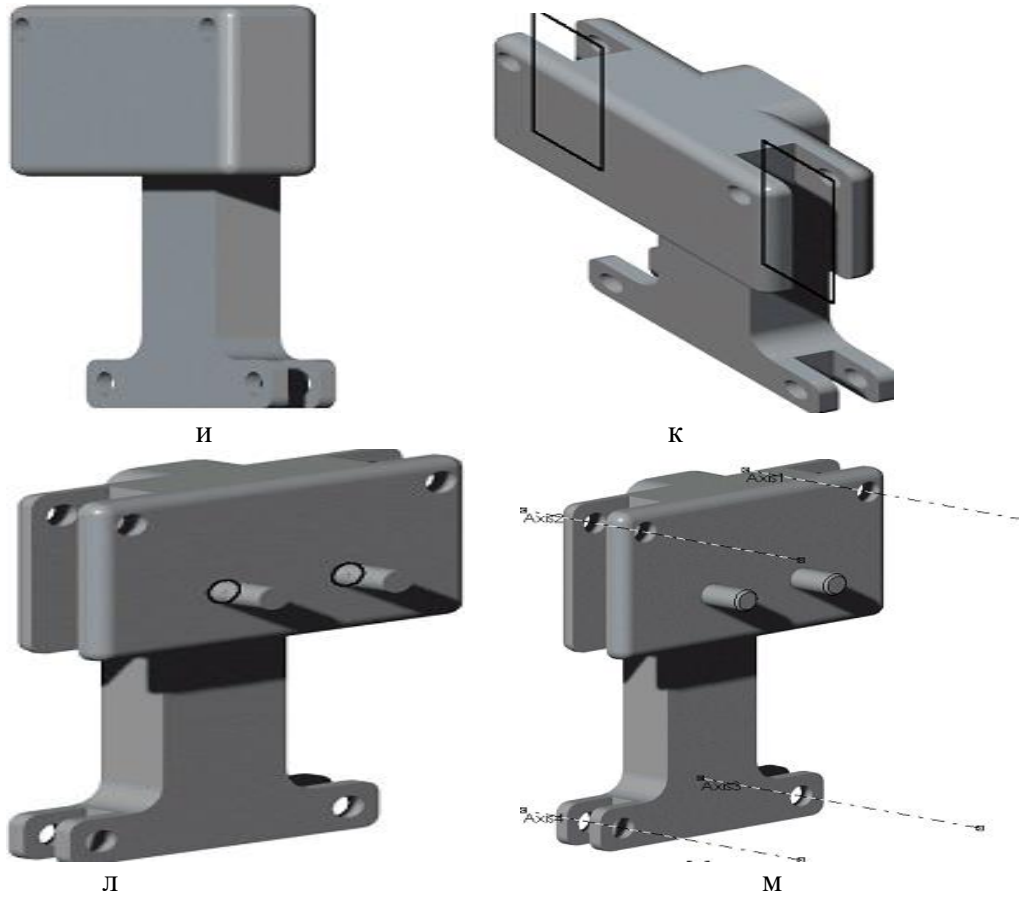
е



ж



з



и к

л м

Рис.8.17. Поэтапное твердотельное конструирование базовой детали

Новая сборка создается командой «новая сборка» (New - Assembly). Компоненты детали и (или) подсборки в сборку вставляются либо в готовом виде из файла командой «вставить деталь из файла» (Insert - Component - From file), либо сразу же и создается, и вставляется новый компонент (т.е. вначале создается новая деталь, затем записывается в файл и лишь потом вставляется в сборку) командой «вставить новую деталь» (Insert - Component - New).

На этапе сборки появляются новые управляющие команды (инструменты): редактировать деталь - входит в режим редактирования указанной детали; показать/спрятать компонент - данный режим дает возможность временно прятать некоторые компоненты для упрощения работы со сборкой; перемещать компонент - позволяет поступательно перемещать выбранный компонент; вращать компонент вокруг его центральной точки; вращать компонент вокруг заданной оси; соединить - позволяет соединить заданной зависимостью два указанных компонента.

Обсуждение результатов. О последнем инструменте следует рассказать подробнее. Инструмент соединение позволяет наложить зависимости на поверхности, грани, вершины (особые точки детали), а также вспомогательные плоскости и оси двух указанных компонентов. Система предоставляет семь типов подобных соединений (зависимостей): совпадение, указанные элементы будут накладываться в пространстве друг на друга; перпендикулярность; «тангенциальность», указанные элементы сопрягаются по касательной; соосность; дистанция, располагает указанные элементы на заданном расстоянии друг от друга; угол, располагает указанные элементы под заданным углом относительно друг друга.

Полученная модель дает наглядное представление о конструкции и возможных движениях манипулятора. На рис.8.18 представлена модель манипулятора на этапе изгиба с растяжением сложнопрофильной детали. На данных рисунках отчетливо видны ограничения, накладываемые на движения манипулятора элементами конструкции.

Модель позволяет сформировать дополнительные критерии оценки параметров конструкции манипулятора на основании зависимостей между соотношением размеров элементов конструкции и технологическими характеристиками механизма.



Рис.8.18 Объемное компьютерное моделирования манипуляторов технологических роботов для силовых операций

На рис.8.19 представлены результаты твердотельного моделирования обрыва профиля в процессе гибки с растяжением.

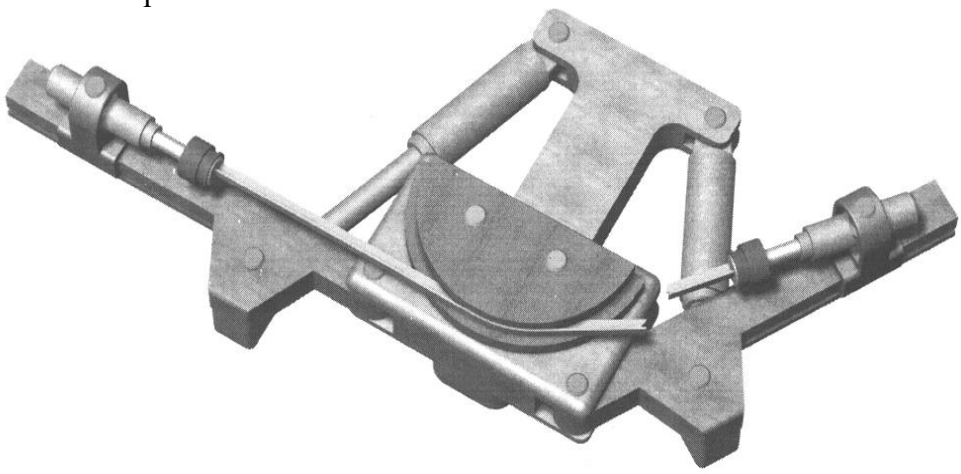


Рис.8.19. Твердотельное моделирование обрыва профиля при гибке с растяжением

Для разработанной модели можно сделать следующие **выводы**:

- максимальный угол изгиба заготовки доступный манипулятору в частности зависит от соотношения расстояния между осями качания крыльев и ширины шаблона;

- угол качания растяжного гидроцилиндра ограничен соотношением размеров гидроцилиндра и каретки;- расстояние между плоскостью качания крыльев и плоскостью качания изгибных цилиндров влияет на величину паразитных изгибающих моментов в шарнирах поворота плечей;

- соотношение между размером изгибных гидроцилиндров и расстоянием между плоскостью качания крыльев и плоскостью качания изгибных цилиндров ограничивает максимальный доступный угол поворота крыльев;

Для моделируемых моделей манипуляторов система SolidWorks позволяет проводить исследования динамики механизма.

Средствами системы SolidWorks для моделируемых манипуляторов могут быть получены точные чертежи, в том числе чертежи в электронном виде, совместимые с форматом системы AutoCAD.

8.5. Особенности кинематического замыкания технологического робота для силовых операций гибки с растяжением

Формообразование сложнопрофильных деталей на автоматизированных профилегибочных машинах относится к операциям объемного совмещенного пластического формообразования. Заготовка подвергается существенным изменениям своей первоначальной формы (прямолинейной, реже - криволинейной) и испытывает значительные деформации и смещения сечений [73 - 77]. В ряде случаев эти машины можно относить к технологическим роботам для совмещенных силовых операций гибки с растяжением [76 - 77].

Эти машины, оснащенные датчиками линейных и угловых перемещений, получили возможность осуществления формообразования по перемещениям, а также по скоростям перемещений. Чтобы обеспечить высокое качество изготовляемых деталей и высокую надежность, они должны иметь достаточно сложные кинематические схемы манипуляторов с оптимальными параметрами, новые системы числового программного управления с расширенными функциональными возможностями, развитое программное обеспечение, они должны быть быстро переналаживаемыми, адаптивными, приспособленными к мелкосерийному производству. Основными отличительными чертами рассматриваемых процессов формообразования являются приложение растягивающих усилий, выводящих материал заготовки в зону пластических деформаций, и использование шаблона или пуансона, задающих требуемый контур. Гибка с растяжением позволяет значительно (на порядок) снизить негативный эффект пружинения детали по сравнению с гибкой без растяжения.

Особенности летательных аппаратов определяют конструкционные и обусловленные ими взаимопротиворечивые требований к материалам. Как правило выбор материала в сторону улучшения конструкционных свойств приводит к возможному ухудшению показателей технологичности. В авиастроении применяются материалы с низким удельным весом и достаточной прочностью - алюминиевые, магниевые, титановые сплавы, упрочняемые и неупрочняемые термической обработкой.

Формообразованием на профилегибочных машинах в авиастроении изготовляются листовые и профильные заготовки. Процесс занимает одно из ведущих мест по трудоемкости в изготовлении самолета или другого изделия авиационной техники. Трудоемкость изготовления гнутых профилей составляет 25-27 % от общего объема заготовительного производства планера самолета. К формообразуемым деталям относят стрингеры, шпангоуты, пояса нервюр и лонжеронов. Число деталей из профилей может достигать десятков тысяч, общая их длина - до 30 км, размеры деталей от 25 до 6000 мм и более, масса может меняться от 0,01 до 25 кг.

Значительная группа причин обусловлена влиянием системы «заготовка - обтяжной пуансон - исполнительные устройства» на процесс формообразо-вания. Среди причин и доминирующих факторов, влияющих на возникновение погрешности детали, связанных с заготовкой, можно выделить вариации размерно-механических параметров. К размерным параметрам относятся изменения размеров поперечных сечений по длине, толщины полки, а также их различия в партии.

Изменение свойств материала заготовки связано со способом изготовления профиля (гибкой из листа на штампах, фрезерованием), а также термообработкой (отжигом, закалкой на воздухе или селитровой ванне). Для авиационных сплавов, упрочняемых термообработкой, в частности Д16Т, происходят значительные изменения механических свойств во времени, поэтому для этих сплавов разрешена гибка с растяжением в свежезакаленном состоянии только в течение первых двух часов. В соответствии с технологией, применяемой в авиационной промышленности, детали изготовляют обязательно партиями [75].

Гибка с растяжением с опорой на пуансон позволяет значительно уменьшить пружинение детали, возникающее вследствие неравномерности изгибных нормальных напряжений по сечениям, а также повышать точность изготовления детали в поперечном

сечении за счет предотвращения потери устойчивости плоской формы (закручивания, малковки, серповидности).

Современным и малочувствительным к погрешностям параметров поперечного сечения и к механическим свойствам материала профиля является способ гибки с растяжением по деформациям (перемещениям зажимных патронов), реализованный на автоматизированных профилегибочных машинах ПГР-6АД с УЧПУ 2Р32М (НИАТ, г. Москва, Савеловское СПО «ПРОГРЕСС»). Их внедрение при программировании методом обучения позволяет неограниченное число раз воспроизводить эмпирически подобранную программу перемещения рабочих органов по координатам.

На схеме ПГР-6АД обозначены: 1 - шаблон (обтяжной пуансон), 2 - изгибаемая заготовка, 3 - схват манипулятора, 4 - растяжной гидроцилиндр, 5- гибочное крыло, 6 - гибочный гидроцилиндр. Схема имеет две степени подвижности на каждую «руку» (рис.8.20).

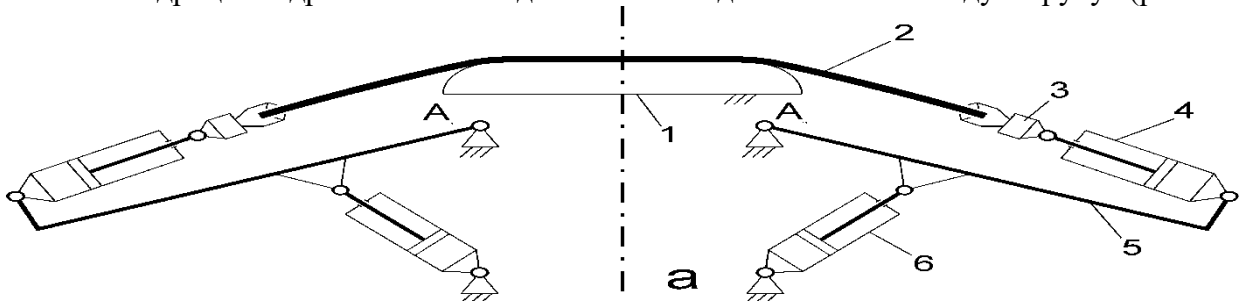


Рис. 8.20. Кинематическая схема ПГР-6АД

Совместно с Гнитько В.Б. создана объемная компьютерная модель манипулятора технологического робота, которая дает наглядное представление о его механике и возможностях движений. Подобная модель позв проводить исследования кинематики и динамики проектируемого механизма. На рис. 2 представлен пример такой модели для манипулятора, реализованного по кинематической схеме рис.1. Средствами системы SolidWorks для моделируемых манипуляторов могут быть получены точные чертежи, в том числе чертежи в электронном виде, совместимые с форматом системы AutoCAD.

Твердотельная визуализация ПГР-6АД представлена на рис.8.21.

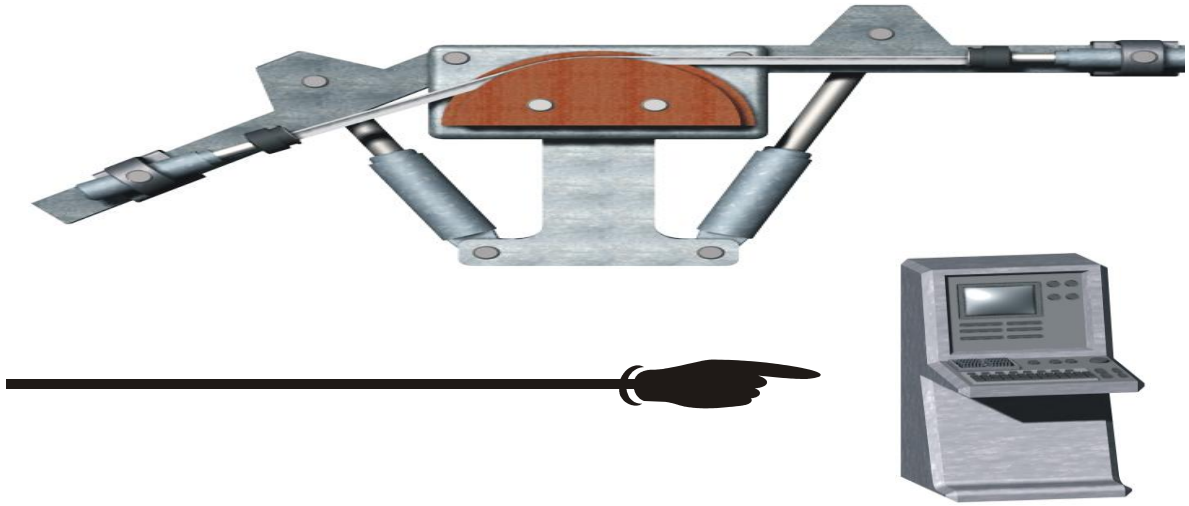


Рис.8.21. Твердотельная визуализация ПГР-6АД

Уточнен способ формирования сетки опорных траекторий при подготовке управляющей программы для автоматизированной профилегибочной машины в режиме «Обучение» и калибровки и последующей корректировки управляющей программы.

Согласно типовому технологическому процессу формообразования сложнопрофильных деталей на машинах ПГР-6АД концы заготовки зажимаются в патронах, после чего она рихтуется и предварительно растягивается на заданную величину

относительного удлинения (по силе или по перемещению), но не более, чем на 4,0 %. На первой детали партии осуществляют гибку с растяжением по давлению в режиме «Обучение», во время которой измеряют с помощью датчиков линейных и угловых перемещений координаты узловых точек траекторий. Запоминают координаты и автоматически формируют управляющую программу гибки с растяжением по перемещениям, которую реализуют в автоматическом режиме при формообразовании последующих деталей с возможностью автоматической подналадки параметров программы по результатам контроля гнутых профилей. С помощью доводочного устройства осуществляют прикатку роликом внешнего слоя профиля для уменьшения остаточных деформаций пружинения. Указанный способ обладает свойством малой чувствительности по отношению к изменениям механических свойств материала заготовки, а также малой чувствительностью от погрешностей размеров поперечного сечения заготовки.

В технологическом процессе через формообразуемую деталь и деформируемый обтяжной пуансон происходит взаимодействие двух рук технологического робота для силовых операций. Возможны такие нестационарные эффекты как перетягивание детали в одну из сторон. Интересно, что привода обеих рук могут программироватся по давлению в растяжных гидроцилиндрах (силам), по линейным и угловым перемещениям и их скоростям в разных обобщенных технологических системах координат.

Достаточно эффективным для предотвращения динамических процессов является один из видов комбинированного управления: растяжение по силе, гибка по координатным перемещениям. Напротив, гибка по силам, а растяжение по координатам в ряде случаев может привести к возникновению динамических процессов - раскачке крыльев и недопустимому утонению профиля.

Другой вид комбинированного управления применяется при гибке с растяжением по контурам пуансонов, имеющих минимальный радиус кривизны на отдельных участках. При этом на участках с большим радиусом кривизны формообразование ведется по перемещениям, а на участках с малой кривизной переходят на управление по усилиям (достаточно малым давлениям в полостях растяжных гидроцилиндров). В обоих случаях повороты гибочных крыльев производят по координатным перемещениям.

Качественный анализ управления вида «скорость – скорость» показал, что при пропорциональном увеличении скоростей перемещения рабочих органов (для увеличения производительности) процесс формообразования на большей части контура гибки может быть устойчивым с обеспечением траектории эвольвенты и заданных параметров напряженно-деформированного состояния профиля. Однако на конечных участках гибки при торможении будут резко возрастать усилия растяжения, обусловленные значительными затратами энергии гидросистемы на поддержание заданной скорости. Это будет вызывать увеличение вероятности обрыва профиля и его недопустимое утонение.

Наиболее устойчивым и отработанным представляется управление вида: перемещение растяжения - перемещение гибки в заданные узловые точки. Перемещения между узловыми точками производятся по законам интерполирования с указанием скоростей перемещений рабочих органов, что обеспечивает согласованное перемещение рабочих органов по траектории, близкой к эвольвенте.

Реализация режима «перемещение – перемещение» без указания скорости в управляющей программе на ТРГР осуществляется при использований значений скоростей, заданных в программе электроавтоматики оборудования.

Использование в качестве управляющего параметра момента в целом соответствует формообразованию по давлению. Отметим, что более рациональным представляется формообразование по давлению.

Наиболее простым и чаще всего применяемым на практике является формообразование вида «усилие – усилие» (манипуляторы с ручным управлением). Однако при реализации малых и больших усилий могут происходить динамические процессы, приводящие к

изменению скоростей перемещений рабочих органов и изменению напряженно-деформированного состояния профиля при формообразовании.

Многовариантность комбинированного управления формообразованием может быть пояснена с помощью достаточно общей формализации для двурукой схемы технологического робота

2Х - 1Х - З - Д - З - 1Х - 2Х ,

где 1 и 2 обозначают номера звеньев технологического робота, отсчитываемые от детали Д, а под Х понимается управление приводом по параметрам: У - усилие, С - скорость, М - момент, П - перемещение (П - поступательное, П - вращательное или поворотное).

В формуле может использоваться символ Q, обозначающий шарнир, З - схват робота (зажимной патрон). Кроме этого, Х может представляться в виде дроби, например, П/У. Это означает, что в процессе формообразования детали управление сначала осуществляется по перемещению, а в конце гибки - по усилию. Обозначение Д(Ф) определяет дополнительную фиксацию детали и (или) пуансона вертикальным или осевым усилием.

Для однорукой схемы технологического робота формализация комбинированного управления упрощается:

З - Д - З - 1Х - 2Х.

Приведем некоторые примеры:

2П - 1П - З - Д - З - 1П - 2П, 2У - 1У - З - Д - З - 1У -2У,

З - Д - П /С - П/У, З - Д - З Q 1У Q 2П, З - Д - З Q 1П Q 2У .

Перемена мест видов управления на соседних звеньях одной руки, как это представлено на двух последних примерах, придает процессу формообразования новые свойства и изменяет старые. Например, в последнем примере более высока вероятность возникновения динамических процессов раскачивания звеньев при формообразовании, приводящих, в ряде случаев, к недопустимому утонению профиля и его обрыву.

Запишем возможные расширения формализации для перспективных компоновок технологических роботов, включающих доводочное устройство прикатки роликом Р (1) и автономно управляемый обтяжной пуансон О (2):

1. *Р - 1Х - 2Х*
2Х - 1Х - З - Д(Ф) - З - 1Х - 2Х,
О - 1Х - 2Х ,

2. *Р - 1Х - 2Х*
2Х - 1Х - З - Д(Ф) - З - 1Х - 2Х
2Х - 1Х - О О - 1Х - 2Х .

Последовательность приложения нагрузок вида «изгиб - растяжение», «растяжение – изгиб», «растяжение - изгиб – растяжение» определяет различные результаты по увеличению или уменьшению погрешностей формообразования в зависимости от угла гибки, условий формообразования и других факторов. В частности, последовательность «изгиб – растяжение» позволяет достичь наибольшей точности на малых углах гибки. Выбор и задание регулируемых направляющих параметров (момента, скорости, перемещения, силы) в зависимости от входных факторов может оказывать влияние различной степени на вариации выходных параметров.

Неудачный выбор способа управления формообразованием в зависимости от размерно-механических параметров увеличивает погрешность формообразования. К погрешности настройки кинематической схемы относятся погрешности задания расстояния между центрами качания крыльев, диапазон рабочих перемещений зажимных патронов и другие.

При построении алгоритмов управления необходимо учитывать то, что технологический процесс определяется параметрами, задаваемыми в системах координат, связанными с концевыми сечениями заготовок, а непосредственно управляемыми являются другие величины (обобщенные координаты штоков и давления в полостях растяжных гидроцилиндров).

Эти обстоятельства представляют различную сложность в зависимости от того, осуществляется ли программирование методом обучения или аналитически. Построение сетки опорных траекторий может проводиться как коррекция траекторий, построенных на основании модели нерастяжимой нити. При программировании же обучением программы в принципе могут быть заданы по любым параметрам, лишь бы эти программы можно было воспроизводить и это давало бы однозначность состояния в любой момент времени [8, 9].

Если при обучении регистрируются последовательности значений обобщенных координат по сигналам датчиков линейных перемещений и углов поворота, то в рабочих режимах, при воспроизведении, программы естественным образом задаются по этим же обобщенным координатам, а те же датчики используются как датчики обратных связей. При аналитическом программировании необходимо преобразование координат от концов заготовки к осям элементов исполнительных механизмов.

Важным преимуществом силового управления является то, что сила растяжения может быть постоянной или незначительно изменяющейся. Однако при переходе к обобщенным координатам и силам, развиваемым приводами, для большинства схем получается, что обобщенные силы должны изменяться при этом в довольно широких пределах. В этом плане значительные преимущества имеют схемы, в которых растяжение создается специальными растяжными гидроцилиндрами, качающимися и фактически следящими за касательными в концевых точках заготовки. Этим объясняется широкая распространённость указанных схем.

При выборе между основными путями (управления по деформациям или силам) в принципе следует отдавать предпочтение первому по, крайней мере, по двум причинам. Во первых, именно по деформациям налагаются ограничения, вытекающие из условия неразрушения. Во-вторых, при наличии ярко выраженной площадки текучести стабилизировать пластические деформации только по силам невозможно. Но при монотонном нарастании сил растяжения или при их стабилизации пластический изгиб вполне допустим.

При комбинированном управлении программа задается по линейной комбинации отклонений, обобщенных координат и обобщенных сил. Особенности такого управления зависят от выбора коэффициентов в соответствующих слагаемых закона управления.

Другая возможность комбинированного управления как раз и реализуется при переходе от одной программы к другой, что в теории управления квалифицируется как переменная структура. Идея сводится к тому, чтобы на первом этапе увеличением силы растяжения довести заготовку до начала пластических деформаций, а затем, контролируя дополнительные деформации и ограничивая их, осуществлять изгиб. Например, для компенсации эффекта перетягивания детали руками робота стоит для симметричных пуансонов обучать деталь по силе на одной руке, а на другой – воспроизводить запомненные приращения перемещения.

Такой способ дает значительные преимущества, когда момент начала пластических деформаций заранее не может быть оценен с удовлетворительной точностью вследствие разброса характеристик материала, наличия остаточных напряжений, возникающих на предыдущих этапах технологического процесса, отличий размеров сечений от номинальных значений.

Тогда формализация предлагаемого способа будет иметь вид

$2П^{о}_{в}\ (t_3,\ t_4\ )$ - $1П^{о}_{п}(t3\ ,t\ 4)$ – З – Д - З - $1У^{к}_{п}(t_1\ ,t_2\ )$ - $2П^{к}_{в}(t_1\ ,\ t_2)$,

где $[t_1,t_2\ ]$, $[t_3,t_4\ ]$ - последовательные интервалы времени изготовления детали, индекс «к» определяет контроль и запоминание при формообразовании по усилиям и перемещениям в режиме «Обучение» перемещений штоков самоустанавливающихся гидроцилиндров первой руки, индекс «о» определяет воспроизведение в реальном времени перемещений штоков гидроцилиндров второй руки. $П_п$ - поступательное, $П_в$ - вращательное или поворотное

Использование предлагаемого способа для симметричных деталей позволило обеспечить устойчивость и надежность процесса формообразования и оперативного формирования параметров управляющей программы в режиме «Обучение». Время подготовки управляющей программы сократилось с 12 часов (использование САПР гибки с растяжением) до 10-20 мин. в режиме «Обучение».

Вывод. Представлено формализованное описание кинематического замыкания и процесса взаимодействия двух и трехрукой схемы технологического робота для совмещенных силовых операций гибки с растяжением и раскатки роликом.

На рис. 8.22.а изображен вид сбоку ПГР-6АД с УЧПУ 2Р32М с доводочным устройством. На сварной стойке 1 доводочное устройство монтируется на хвостовой балке машины. В верхней части стойки имеются прямоугольные направляющие, в которых посредством гайки 2, штурвала 3 и винта 4, закрепленного в стойке, корпус 5 доводочного устройства. В нем посредством крестовины 6 и осей 7 и 8 монтируется штанга 9, несущая на направляющих 10 доводочную каретку 11, которая при помощи винта 12, гайки и съемной рукоятки устанавливаются на четырехгранник 13 винта 12 и может быть установлена в требуемую позицию по направляющим 10 штанги 9 и зафиксирована шпонкой в одном из пазов. Поворот штанги 9 в горизонтальной плоскости относительно оси 7 и перемещение ее в вертикальное нерабочее положение относительно оси 8 осуществляется гидроцилиндрами 14 и 15. На оси 7 закреплено три кулачка, определяющих последовательность функционирования 14 и 15 и ограничивают угол поворота штанги в горизонтальной плоскости.

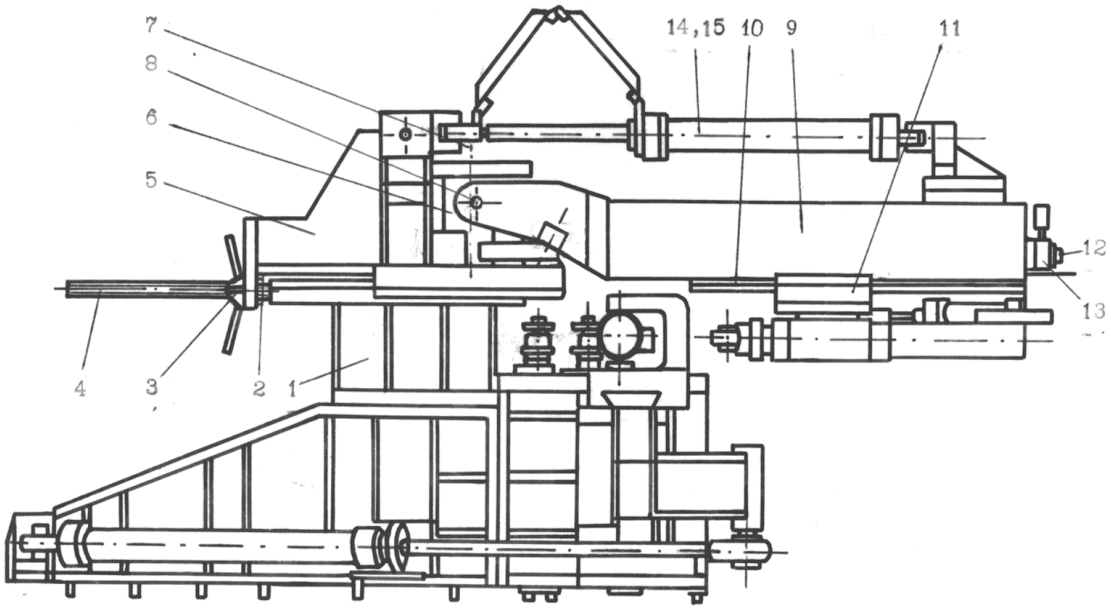


Рисунок 8.22.а. – Вид сбоку автоматизированной профилегибочной машины ПГР-6АД с УЧПУ 2Р32М

Доводочное устройство предназначено для уменьшения остаточных деформаций пружинения за счет раскатки роликом наружной поверхности. Устройство конструктивно реализовано в виде автономной третьей руки.

Угол поворота штанги устройства - $\pm 90^0$. Угол поворота доводочного гидроцилиндра - $\pm 25^0$. Ход штока гидроцилиндра доводочного – 500 мм. Усилие прижима доводочного ролика – 5-30 кН.

В качестве рабочей жидкости используется масло индустриальное И-30А (ГОСТ 20779-75). Датчики давления подключены в штоковые полости гидроцилиндров для выдачи электрического сигнала, пропорционального давлению в цилиндре. Скорость поворота доводочного устройства определяется настройкой дросселя с обратным клапаном. Контроль давления осуществляется манометром, а управление – клапаном давления с пропорциональным управлением

Компоновка доводочного устройства для поверхностной обработки соответствует схеме 1Bz 2Bz 3Пу (рис. 8.22, б и в). Особенность технологии и работы штока гидроцилиндра вызывают необходимость в ориентации штока доводочного гидроцилиндра с раскаточным роликом (рабочий орган) по нормали к поверхности гнутого с растяжением профиля. В случае

отклонения оси рабочего органа от нормали начинается недопустимое протекание рабочей жидкости между штоком и корпусом гидроцилиндра [116].

Как видно в схеме компоновки поменялись местами два движения – сначала ориентирующая степень свободы, после – поступательное движение. Однако принципиально задача ориентации рабочего органа по нормали к обрабатываемой поверхности не изменилась.

В процессе серийного изготовления особо ответственных силовых профилей для самолета Як-42, отличающихся увеличенной толщиной бортов профилей, были определены параметры рабочей зоны перемещения рабочего органа (рис.8.23 - +_45^0, Rмал=0,5 м, Rбол=1,2 м), максимальные отклонения оси рабочего от нормали к типовым обтяжным пуансонам (в виде сегментов окружностей и парабол). Определены законы регулирования для гидроцилиндра углового поворота в соответствии с отклонением от нормали.

Практически способ поверхностной обработки заключается в ручном управлении прикаткой роликом по отдельным сегментам контура обтяжного пуансона, для которых отклонение от нормали не превышало ±15^0.

Управление ориентацией оси рабочего органа в ручном режиме потребовало значительного времени тренировки для оператора ПГР-6АД с УЧПУ 2Р32М.

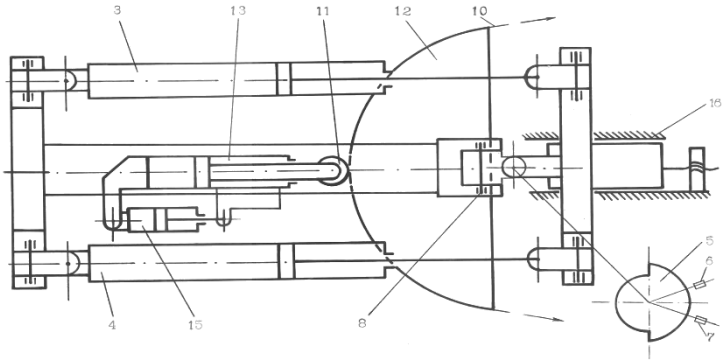


Рис. 8.22.б. Вид сверху доводочного манипулятора ПГР-6АД

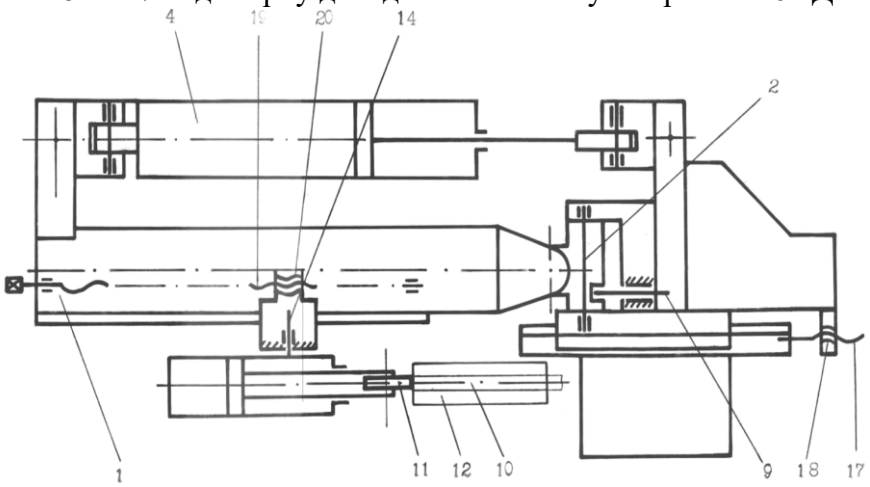


Рис. 8.22.в. Вид сбоку доводочного манипулятора

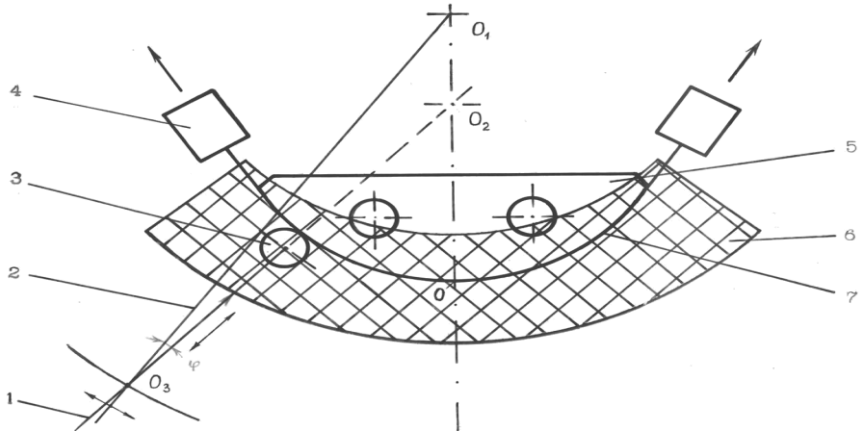


Рис. 8.23. Определение рабочей зоны доводочного манипулятора

На рис. 8.24 изображена схема пластического деформирования поверхностного слоя гнутого с растяжением профиля при раскатке роликом. Размеры борта *bxp, y* – горизонтальная ось, $\rho_{дет}$ – радиус кривизны поверхностного, ρ_o – радиус кривизны нейтрального слоя, σ_o - напряжения после снятия нагрузок, $P_{пр}$ – усилие раскатки, $\sigma_{y(x)}$ – напряжения в зоне раскатки. Раскатка роликом создает дополнительные остаточные деформации и напряжения, которые препятствуют значительному пружинению профиля после снятия нагрузки. Подробно процесс собственно раскатки исследовался Н.В.Бодуновым (Казанский ГТУ). Им получена приблизительная формула для расчета усилия Р раскатки

$$P = \frac{\pi b\left(4\delta G - \sigma_{xp} h\right)}{\ln\left(1 + h^2 / 2\delta Rp\right)}, \qquad (8.4)$$

$G = E/3$,

где δ - прогиб борта профиля при раскатки, определяющий величину относительного обжатия *E*обж = δ/h , h – толщина борта, Rp - радиус раскаточного ролика.

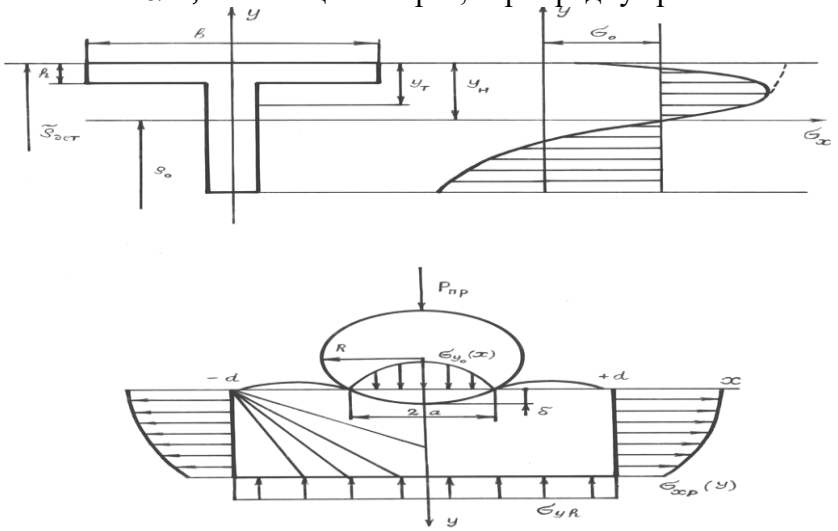


Рис.8.24. Анализ напряженно-деформированного состояния поверхности профиля при раскатке роликом

Пример управления точностью формообразования с помощью доводочного устройства. В процессе определения коэффициента относительного влияния усилия раскатки на изменение пружинения гнутого с растяжением профиля использовалась методика профессора В.И.Ершова (МАТИ-ГТУ).

Определялась зависимость изменения относительного пружинения от отношения прижима ролика к ширине прокатываемого борта профиля. Было проведено 10 опытов. За счет

применения эконометрического подхода, описанного в главе 2 и в приложении 2, определен коэффициент относительного влияния, который был оценен в среднем для партии деталей равным – 0,054.

Это означает, что при изменении усилия прикатки на 10 % относительное пружинение изменится на 0,54%. С учетом значимости толщины борта профиля 20 мм сокращение времени на ручную доводку может составить от 0,1 до 0,3 часа.

Данная оценка является приблизительной, однако может быть использована в качестве базового параметра алгоритма управления в задачах сравнения различных методов управления с помощью пульсирующей подналадки.

Формула моделирования имеет вид

$$x_n = X_n - U_n$$

$$U_n = U_{n-1} + \Delta U_n \quad , \qquad (8.5)$$

$$\Delta Un = rZ_{n-1}$$

где x_n - значение пружинения для управляемого процесса, X_n – значения пружинения для исходного управляемого процесса, U_n – приведенный управляющий фактор в n-ом цикле формообразования, ΔU_n - приращение управляющего фактора, r – коэффициент приведения в задаче моделирования, Z_{n-1}- значение управляющего фактора.

Возможно использование отработанных алгоритмов адаптивных знаковых и пропорциональных подналадок, ранее использованных в диссертации В.И.Ермолаева. В качестве критерия управления используется декоррелированность остаточных пружинений в виде оценки коэффициента корреляции соседних отклонений выходного параметра.

В результате моделирования по исходной выборке было получено уменьшение среднего значения остаточных пружинений на 20 %. Диапазон регулирования прикатки роликом 10-20 кН. Исходное остаточное пружинение в диапазоне 4-12 мм на 1 м после прикатки с управлением усилием 1-8 мм. Приведенные данные являются типовыми для алюминиевых сплавов АМГ, Д16Т после предварительной термообработки. Пример типовой программы использования пульсирующей подналадки приведен на рисунках 8.25. Типовой пример применения математического моделирования приведен на рисунке 8.26. Разработанный автором алгоритм применения доводки раскаточным роликом на автоматизированной профилегибочной машине и его регулирование приведен на рисунке 8.27.

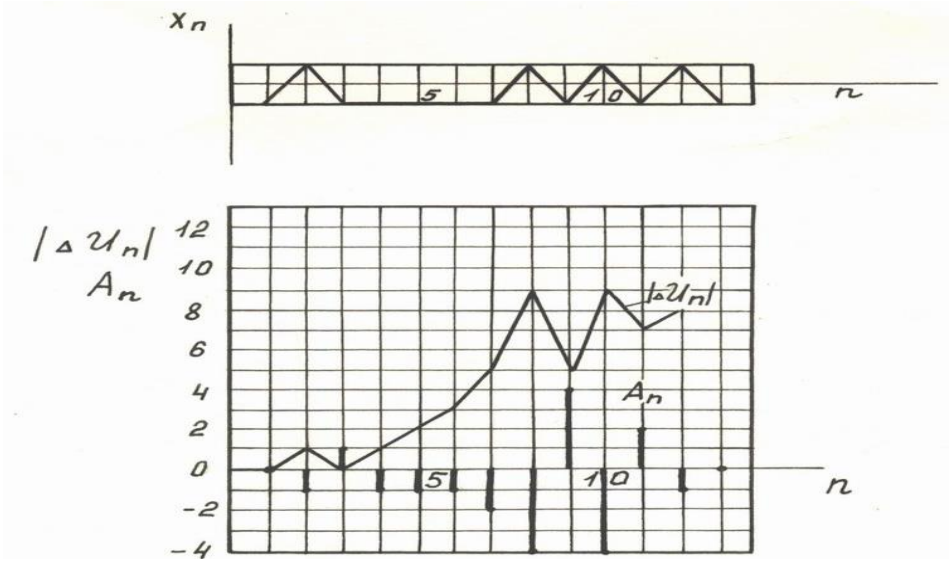


Рис. 8.25. Пример практической реализации знаковой пульсирующей подналадки при использовании доводочного устройства



Рис. 8.26. Пример математического моделирования адаптивной пропорциональной пульсирующей подналадки

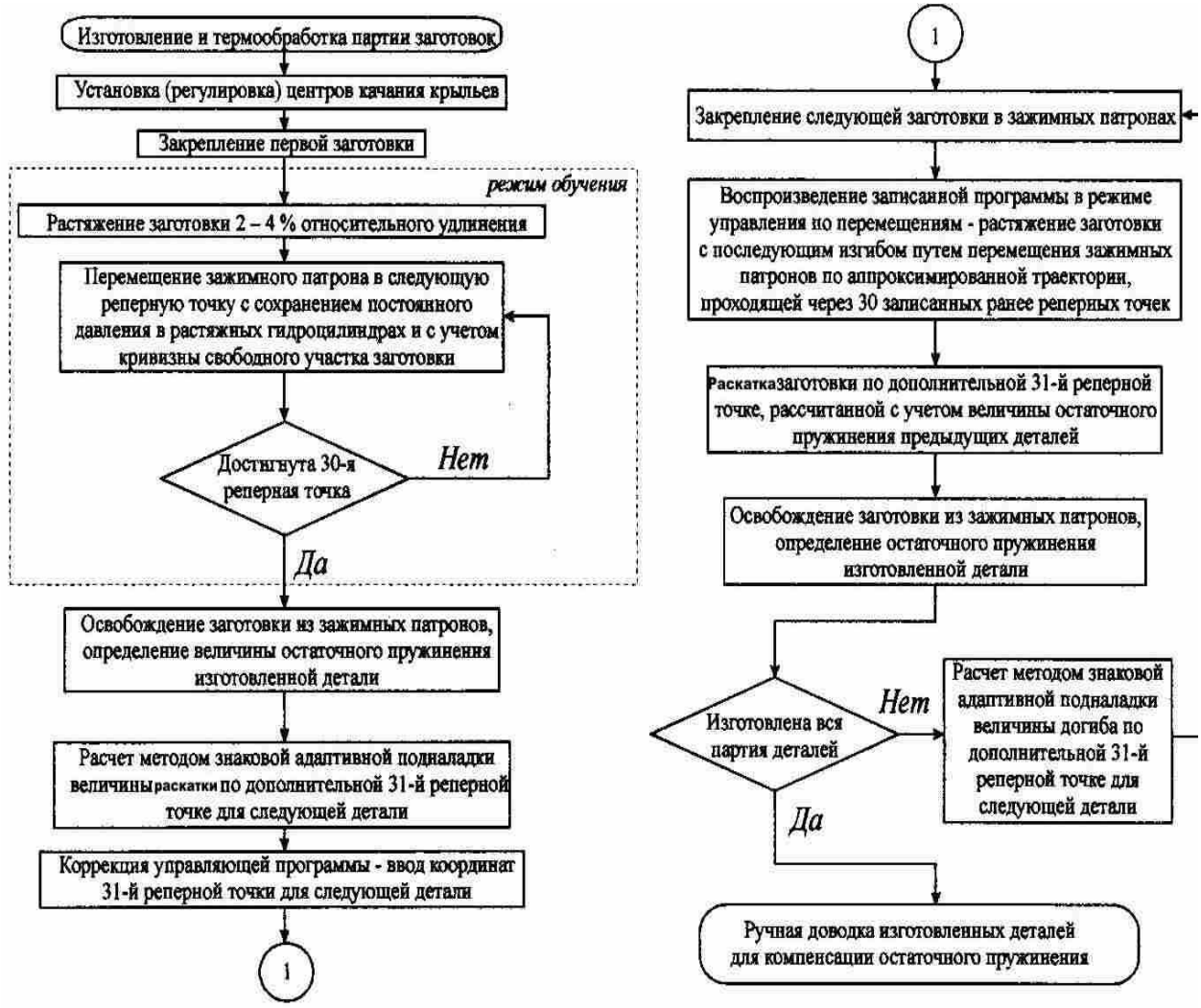


Рис. 8.27. Алгоритм применения доводки раскаточным роликом на автоматизированной профилегибочной машине

На рис. 8.28. представлены результаты снижения погрешностей формообразования для случаев формообразовния с применением знаковой подналадки (два верхних - дисперсия 1,38 и 2,25 мм остаточного пружинения), для применения пропорциональной подналадки (два средних –дисперсия 1,71 и 1,9 мм) и без применения прикатки роликом (два нижних –

дисперсия 2,29 и 2,22). Исходные параметры давления в силовом гидроцилиндре доводочного устройства выбирались по технологическому процессу равными 22,0 кН.

Реально уменьшение погрешности пружинения по контуру заготовки сократилось с 5,5 до 2,5 мм, что допустимо для данной технологии и может быть легко компенсировано коррекцией контура пуансона. Пример показывает эффективность применения адаптивных пропорциональных подналадок, которые рекомендуются к расширенному применению.

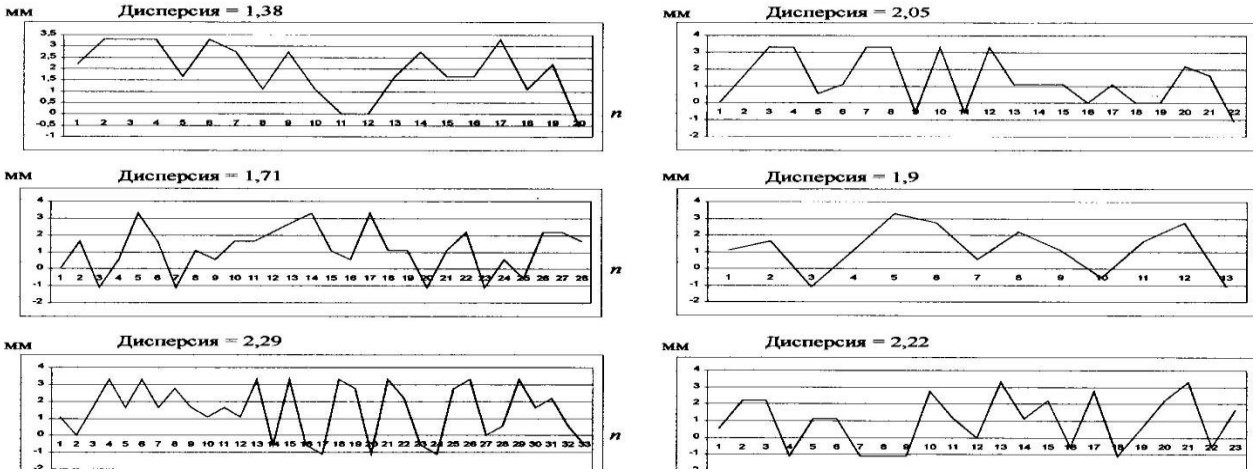


Рис. 8.28. Результаты снижения погрешностей формообразования

2. Поставлена и отработана в реальном производстве задача комплексирования сенсоров системы управления автоматизированной профилегибочной машины ПГР–6АД и управления точностью формообразования доводочных операций.

3. Для определения корректирующих приращений управляющей программы УЧПУ 2Р32М на основе применения эконометрического подхода определен базовый коэффициент относительного влияния усилия раскатки на изменение пружинения гнутого с растяжением профиля.

4. Предложены и отработаны алгоритмы коррекции управляющей программы на основе пульсирующих подналадок.

Глава 9. Прикладные задачи применения топологических векторов

9.1. Анализ возможностей применения рядов Фурье в дорожной отрасли

В последнее время большое внимание в практике дорожного строительства уделяется проблеме ровности. Такое повышенное внимание объясняется тем, что ровность автомобильной дороги во многом определяет безопасность движения транспортных средств. При анализе ровности автомобильных дорог широко используется анализ Фурье.

«Преобразование Фурье стало мощным инструментом, применяемым в различных научных областях. В некоторых случаях его можно использовать как средство решения сложных уравнений, описывающих динамические процессы, которые возникают под воздействием электрической, тепловой или световой энергии. В других случаях оно позволяет выделять регулярные составляющие в сложном колебательном сигнале, благодаря чему можно правильно интерпретировать экспериментальные наблюдения в астрономии, медицине и химии» [19].

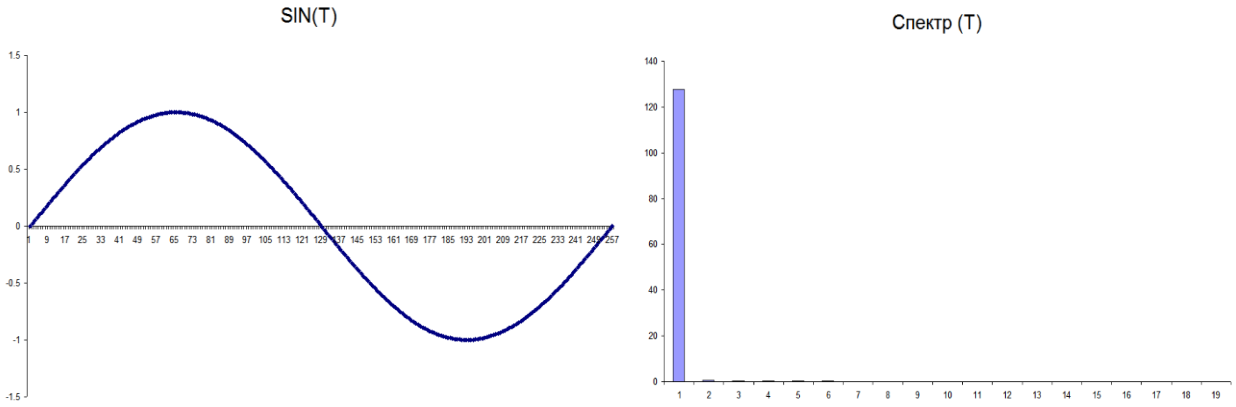
Преобразования Фурье применяется и при анализе ровности автомобильных дорог именно потому, что неровности на дорогах представляют собой повторяющиеся отклонения от идеальной поверхности.

Основной задачей, которая решается преобразованиями Фурье является разложение сложных колебаний рельефа на периодические составляющие (спектр). Подобное разложение называется спектральным анализом. Предполагается, что разложение сложносоставного профиля на элементарные гармонические колебания позволят вычленить отдельные периодические отклонения от идеального профиля.

На самом деле это далеко не так. Точнее, не всегда, а только при выполнении определенных условий.

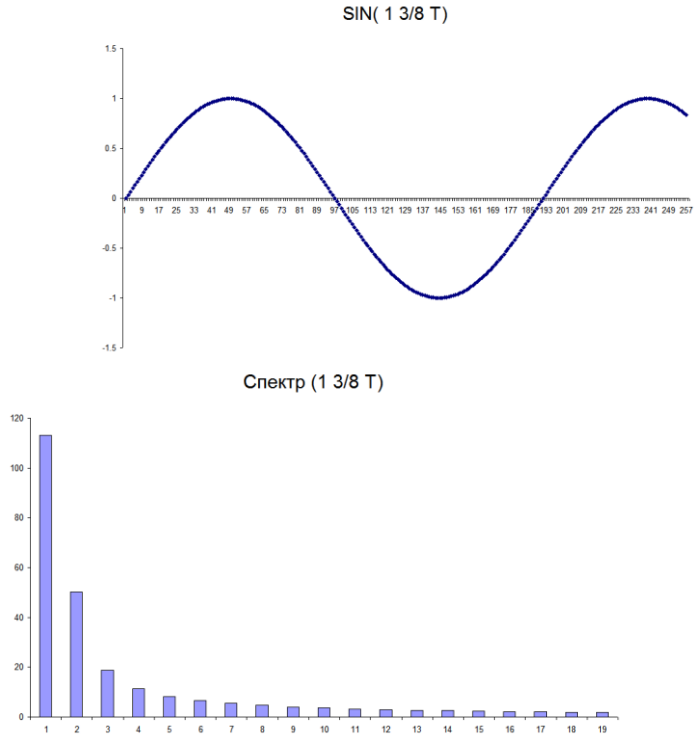
Случай простой синусоидальной функции.

Рассмотрим, какие условия должны быть выполнены, чтобы спектральный анализ на основе преобразования Фурье давали бы адекватные результаты. Для этого рассмотрим преобразование Фурье для простой синусоидальной функции, но будем рассматривать различные диапазоны анализа (рис. 9.1 – 9.4).



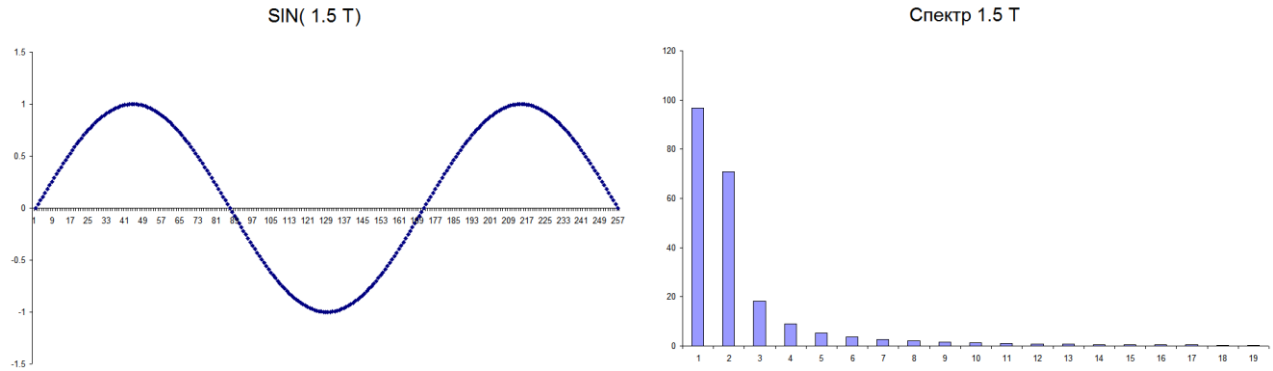
а) Анализируемая кривая б) спектр

Рис. 9.1. В диапазоне анализа укладывается ровно 1 период колебаний



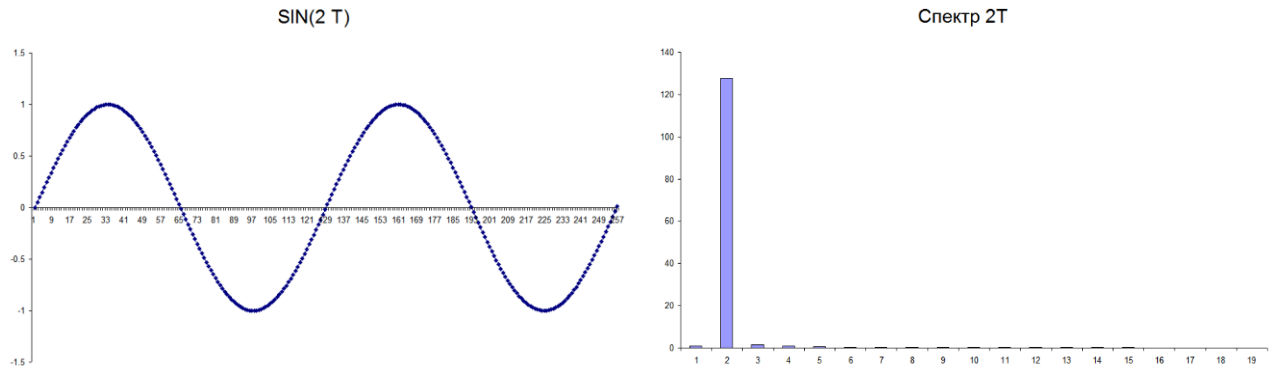
а) Анализируемая кривая б) спектр

Рис. 9.2. В диапазоне анализа укладывается больше одного периода колебаний



а) Анализируемая кривая б) спектр

Рис. 9.3. В диапазоне анализа укладывается ровно 1,5 периода колебаний



а) Анализируемая кривая б) спектр

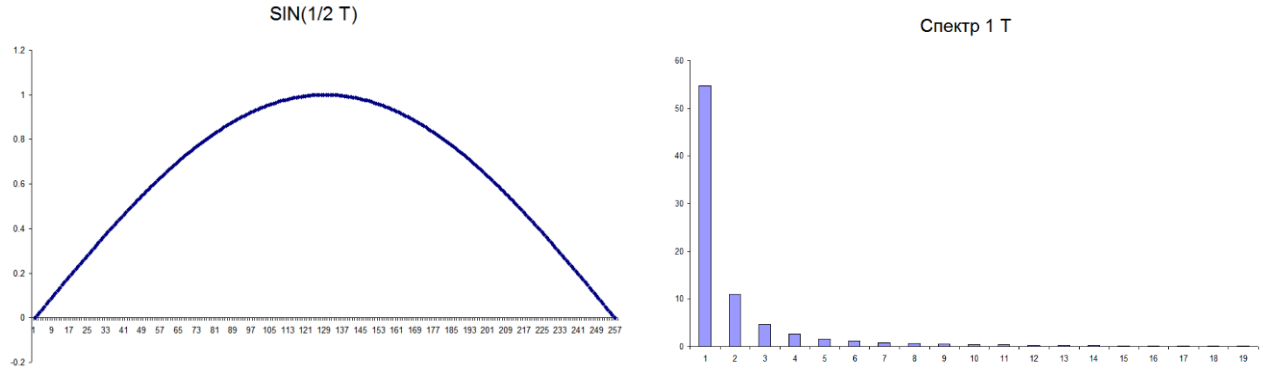
Рис. 9.4. В диапазоне анализа укладывается ровно двум периодам колебаний

На приведенных рисунках легко увидеть, что изначально одноколебательная кривая в результате преобразований Фурье дает сложный спектр, состоящий из нескольких колебаний.

Исключение составляют случаи, когда на анализируемом диапазоне укладывается ровно n периодов колебаний, где n – целое число. Только в этом случае спектр составляет одна единственная гармоника, и длина волны гармоники соответствует первоначальной кривой. В остальных случаях ни количество гармоник, ни длины волн гармоник не соответствуют первоначальной кривой.

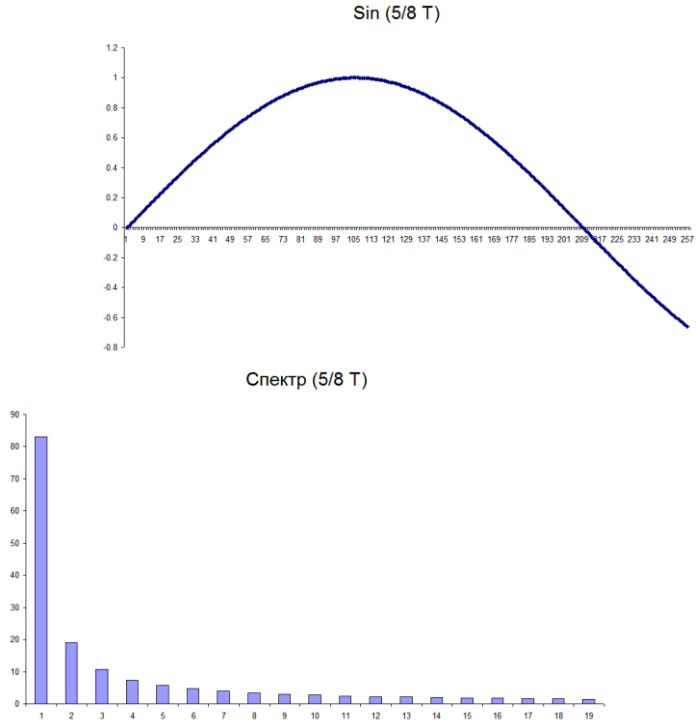
Случай длинных волн.

Еще хуже дело обстоит в случае длинных волн, когда длина волны превышает диапазон анализа (см. рис. 9.5 и 9.6).



а) Анализируемая кривая б) спектр

Рис. 9.5. В анализируемом диапазоне укладывается половина длины волны



а) Анализируемая кривая б) спектр

Рис. 9.6. В анализируемом диапазоне укладывается больше половины длины волны

Обсуждение результатов.

На рис. 9.5 и 9.6 видно, что и в этом случае простое колебание дает спектр сложных колебаний. Но, что еще важнее, основной вклад в спектр дает первая гармоника. Согласно правилам разложения функции, в ряд Фурье, первая гармоника – это колебание с длиной волны равной диапазону анализа.

В данном же случае приведена попытка анализировать функцию, имеющую длину волны больше диапазона анализа.

Выводы.

Приведенные примеры показывают, что в случае, когда длина анализируемых волн меньше диапазона анализа, то результаты преобразований Фурье мало соответствуют реальности.

В случае длинных волн спектр, полученный в результате преобразований Фурье, не позволяет выделить регулярные составляющие, для которых необходима разработка специализированного математического обеспечения.

9.2. Математическое моделирование обобщенных координат распределения вяжущего и щебня при устройстве шероховатой поверхностной обработки

На основе анализа схемы распределения щебня совместно с определена структура математической модели обобщенной системы координат щебнераспределителя, обоснована ее применимость для битумо-щебнераспределителей, выбран алгоритм расчета и проведен вычислительный эксперимент.

Решение задачи устройства дорожных покрытий с шероховатой поверхностью с применением обобщенной технологической системы координат участка автомобильной дороги на основе цифровой модели его координат актуально для горных дорог и крутых виражей, пандусов зданий и сооружений, эстакад аэропортов, взъездовспусков на железнодорожных вокзалах, например, при устройстве антигололедных дорожных покрытий с шероховатой поверхностью.

При проектировании параметров управляющей программы автоматизированного битумощебнераспределителя рекомендуется определять обобщенную технологическую систему координат рабочего органа (направляющей щебня и осей форсунок) в виде совокупности сетки нормалей к поверхности дорожного покрытия и сетки эквидистант, точки каждой из которой равноудалены от поверхности дороги. Новизной модели является переход от эквидистанты на плоскости к эквидистанте пространственной поверхности дорожного покрытия. Эквидистанта (от позднелатинского aequidistans — равноудаленный) данной плоской кривой *L*, множество концов равных отрезков, отложенных в определенном направлении на нормалях к *L*. Например, эквидистанта окружности есть окружность.

Распределение распределяемых вяжущего и щебня по нормали к дорожному покрытию является главным условием обеспечения равномерности распределения материалов и требуемого качества (шероховатости и коэффициента сцепления).

Обобщенная система координат представляется как совокупность сетки нормалей к поверхности автомобильной дороги и сетки эквидистант (рис.9.7).

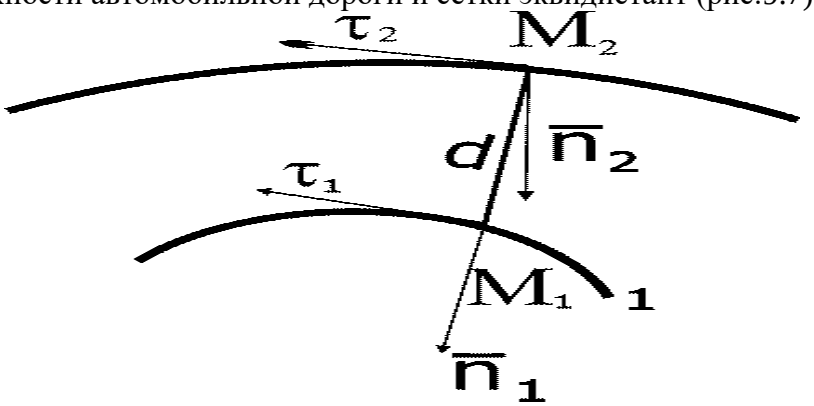


Рис. 9.8. Совокупность сетки нормалей ко всей поверхности дорожного покрытия и сетки эквидистант

Предложено обобщение математической модели А.У.Табылова (использованной для линии краевой шумовой полосы) в виде математической модели эквидистанты ко всей

поверхности дорожного покрытия и определены ограничения требуемых движений рабочего органа битумощебнераспределителя [116].

Формализуется уравнение исходной плоскости 1 (рис. 9.8) в параметрической форме с параметром s: x(s), y(s), радиус-вектор r(s), s – длина дуги. Запишем уравнение единичного вектора-касательной τ_1 в точке M_1 к кривой 1:

$$\tau_1 = \left(\frac{dr_1}{ds}\right)\left|\frac{dr_1}{ds}\right|^{-1}, \quad в \quad проекциях:$$

$$\tau_{1x} = \left(\frac{dx_1}{ds}\right)\left[\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{9.1}$$

$$\tau_{1y} = \left(\frac{dy_1}{ds}\right)\left[\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Векторная производная вектора τ_1 определяется из условия:

$$\left(\frac{d}{ds}\right)\left[\frac{dr_1}{ds}\right] = \left(\frac{d}{ds}\right)\left[\tau_1\left|\frac{dr_1}{ds}\right|\right] = \left(\frac{d}{ds}\right)\left|\frac{dr_1}{ds}\right|\tau_1 + \left|\frac{dr_1}{ds}\right|\frac{d\tau_1}{ds} \tag{9.2}$$

Второе слагаемое определяет орт нормали n_1:

$$\frac{d\tau_1}{ds} = \left|\frac{dr_1}{ds}\right|\frac{n_1}{\rho_1} \tag{9.3}$$

Отсюда определяется радиус ρ_1 кривизны траектории (если не задан)

$$\rho_1 = \left|\frac{dr_1}{ds}\right|\left|\frac{d\tau_1}{ds}\right|^{-1} = \left[\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{d\tau_{1x}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\tau_{1y}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\tau_{1z}}{ds}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{9.4}$$

Но он может быть также задан непосредственно (технологически, по чертежу). Определяется выражение для орта нормали и проекций:

$$n_1 = \rho_1\left|\frac{dr_1}{ds}\right|^{-1}\frac{d\tau_1}{ds}, \quad n_{1x} = \rho_1\left|\frac{dr_1}{ds}\right|^{-1}\frac{d\tau_{1x}}{ds}, \quad n_{1y} = \rho_1\left|\frac{dr_1}{ds}\right|^{-1}\frac{d\tau_{1y}}{ds},$$

$$n_{1z} = \rho_1\left|\frac{dr_1}{ds}\right|^{-1}\frac{d\tau_{1z}}{ds} \quad . \tag{9.5}$$

Положение точки качания M_2 определяется следующим образом

$$r_2 = r_1 - dn_1; \quad r_{2x} = x_2(s) - dn_{1x}; \quad r_{2y} = y_2(s) = y_1(s) - dn_{1y},$$

$$r_{2z} = z_2(s) = z_1(s) - dn_{1z} \tag{9.6}$$

где d – технологическое расстояние от дорожного покрытия до точки качания рабочего органа.

Далее процедура повторяется с целью определения нормали n_2 в точке M_2 к траектории перемещения точки качания рабочего органа. Находятся n_2, n_{2x} и n_{2y} и n_{2z}. После этого угол Θ ориентации между ортами нормалей n_1 и n_2 определяется по векторному произведению

$$sin\Theta = /n_1x \;\; n_2 /= n_1x \;\; n_2y + n_1y \;\; n_2x \;\; .$$

(9.7) Полученные выражения дают возможность обосновать необходимость коррекции на этапе наладки среднего положения конца рабочего органа.

В реальном времени информация о положении битумощебнераспределителя приходит в цифровом, а не в аналитическом виде. Поэтому нерационально из цифрового вида переходить к аппроксимации, например, сплайнами, проводить преобразования и далее опять переходить к цифровому виду. Поэтому было принято решение формализовать более простые вычислительные уравнения для определения геометрических параметров рабочих органов битумощебнераспределителя.

Задание законов изменения координат контрольной точки рабочего органа и углов ориентации могут быть различным. Наиболее удобна параметрическая форма, когда координаты и углы задаются в виде функции параметра s, изменяющегося в определенных пределах

$$X = X(s) \;\; , \; У = У(s) \;\; , \;\; Z = Z(s), \qquad (9.8)$$

$$Qx = Qx(s) \;\; , \; Qy = Qy(s) \;\; , \;\; Qz = Qz \; (s) \;\; ,$$

$$S = S(t) \;\; ,$$

где X , У , Z - координаты линейных степеней свободы, *Qx, Qy, Qz* – координаты угловых степеней свободы, *S, t* – параметры, например, длина дуги пути и время.

Однако если в устройствах управления используются современные средства вычислительной техники, могут быть использованы другие способы задания. Например, может быть записана система уравнений, численно решая которую можно получить значения координат и углов. Так определяются траектории известного вида (прямые, окружности, параболы различных степеней), проходящие через заданные точки (аналитический способ). Требуется, чтобы основание манипулятора и технологическое оборудование были точно привязаны к одной и той же системе координат.

В качестве основного принимается координатное (контурное) управление автоматизированным битумощебнераспределителя.

Рассмотрим математическую модель ориентирующей степени свободы для рабочего органа манипулятора для поверхностной обработки. Уравнение касательной к плоской линии L (y=F(x)) в точке M(x,y) проходящую через точку N с текущими координатами X и У определяется по формуле

$$Y - y = F'(x)(X - x) \qquad (9.9)$$

В параметрическом виде

$$\left(\frac{(X - x)}{x'}\right) = \left(\frac{(Y - y)}{y'}\right) \qquad (9.10)$$

где x′, y′ - производные по параметру.

Соответственно, уравнение нормали определяется выражением

$$Y - y = -\frac{(X - x)}{F'(x)} \qquad (9.11)$$

или в параметрическом виде

$$(X - x)x' + (Y - y)y' = 0 \qquad (9.12)$$

Например, уравнение нормали к эллипсу имеет вид

$$\frac{(X - x)y}{b^2} = \frac{(Y - y)x}{a^2} \;\; . \qquad (9.13)$$

При внешней простоте задачи техническая реализация встречает серьезные трудности. Случайный разбос, а также случайные скачкообразные выбросы результатов измерений затрудняют процедуру аппроксимации степенным полиномом и вносят свою долю в общую

погрешность. Выбор варианта аппроксимирующего полинома для $y = F(x)$ также определяет методическую погрешность.

С учетом вышесказанного предлагается упрощенный способ определения координат реперных точек сетки программирования.

Вместе с тем процедура программирования требует информации для ограниченного количества реперных точек опорной траектории, относительно которых проводится линейная или круговая интерполяция. При усилении жесткости увеличение количества реперных точек не вызывает трудностей в программировании и реализации программы. Для дискреты и погрешности ориентирования равных $1{,}0^0$ рекомендуется увеличить количество реперных точек до 50.

Например, в результате измерения получено N точек измерения $\{Xj\ ,Zj\}$, $j = 1,\ldots,N$. Определим среднее количество к базовым точкам, которое будет в каждом из 30 интервалов разбиения для определения средней точки к = N/30. Найдем среднее значение координат точек в каждом интервале разбиения

$$X_i = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} X_j, \quad Z_i = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Z_j \quad . \tag{9.14}$$

Общий вид схемы определения координат реперных точек, расположенных на равном удалении между соседними базовыми точками приведен на рис. 9.9.

Проведено численное моделирование построения координатной сетки для определения перемещений контрольной точки рабочего органа битумо-щебнераспределителя. Пример иллюстрации результатов вычислительной процедуры приведен на рис. 9.10.

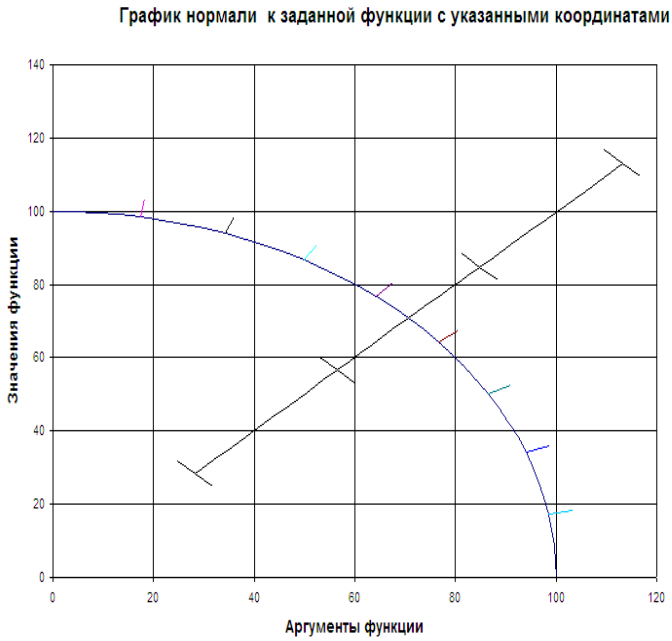


Рис.9.9. График нормали к заданной функции с указанными координатами

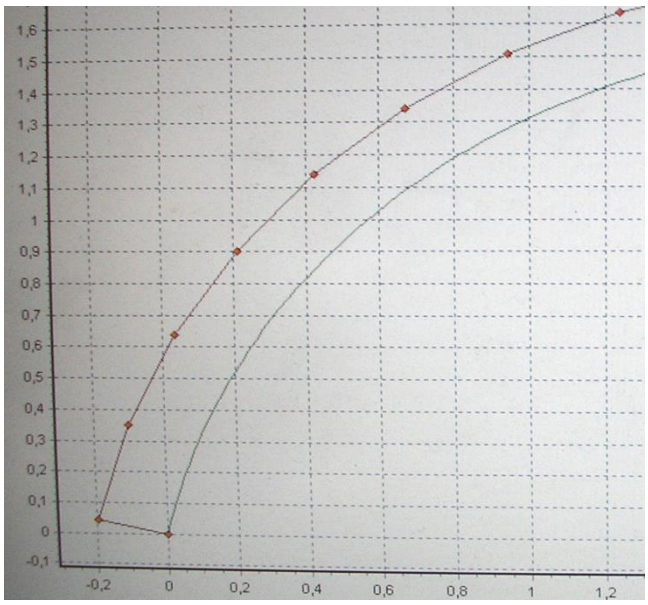


Рис. 9.10. Вариант программирования эквидистант заданных поверхностей и кривых

9.3. Измерения векторных и тензорных величин

Многие измеряемые физические величины (ФВ) являются по своей природе векторными или тензорными. К векторным ФВ относятся, например, радиус-вектор положения точки в пространстве, линейные скорости и ускорения точек тел и сред, угловые скорости и ускорения тел, силы, пространственно распределенные гидро- и аэродинамические нагрузки, напряженности электрического и магнитного полей, градиент гравитационного поля. Тензорными являются многие характеристики анизотропных объектов (например, для твердого тела — моментов инерции) или сред, а также производные векторов по радиусам-векторам; в задачах анализа прочности широко используются тензоры деформаций и механических напряжений, в гидроаэромеханике — скоростей деформаций. При измерении и воспроизведении при калибровке подобных величин в ограниченной степени учитывают их специфику, например, измеряя составляющие или проекции векторов и определяя их погрешности по отдельности. Однако целесообразно рассмотреть проблему измерения векторных и тензорных величин с общих позиций. Сегодня это представляется особенно важным, поскольку в некоторых областях техники (например, при определении параметров положения и движения подвижных объектов) без учета векторной или тензорной специфики измеряемых величин из-мерительные задачи не могут быть решены с требуемой степенью точности и надежности, а результаты измерений не могут быть представлены полно и наглядно.

Отметим сначала, что выбор измеряемой векторной физической величины (ВФВ) или тензорной физической величины (ТФВ) осуществляется в соответствии с общеизвестным подходом: в процессе решения технической задачи формулируется и представляется в формализованной форме измерительная задача, а затем устанавливается совокупность ФВ, измерение которых необходимо для ее решения. Целью измерения может быть получение полного представления (в пространстве для вектора — трех составляющих, а для тензора — девяти компонентов) или только некоторых из них. Если измерительные задачи остаются на уровне определения компонентов или проекций векторов и тензоров, они квалифицируются, как задачи совокупных или совместных измерений.

Как наиболее распространенная может быть выделена задача измерения радиуса-вектора R определенной материальной точки, а задача может быть или основной (как для навигации подвижных объектов, свободно перемещающихся в пространстве), или

вспомогательной (для установления, в какой точке пространства произведено измерение другой физической величины).

Важна также задача прямого определения направления векторов по результатам измерения углов, например, при так называемых угломерных методах измерений в навигации, когда может быть использован некоторый ориентир – принимаемый за точечный источник оптического, радиотехнического или другого сигнала, или излучения. В этом случае измерительную ось направляют на него, а затем измеряют углы между измерительной осью и осями выбранной системы отсчета. Как правило, в таких случаях модуль ВФВ интереса не представляет и не измеряется.

В области пространства, в которой существует векторное поле, зависимости векторов от координат в рассматриваемой области могут выражаться функциями определенного вида, получаемыми из законов физики (так, для твердых тел поля линейных скоростей и ускорений являются линейными функциями координат), или могут подчиняться сложным закономерностям, которые при наличии достоверной и адекватной математической модели могут быть рассчитаны, как например, в потоках жидкостей и газов в результате интегрирования дифференциальных уравнений Навье-Стокса в частных производных. Векторные поля могут быть стационарными или переменными во времени; в последнем случае добавляется еще один аргумент - время, и тогда измерения ВФВ являются динамическими.

Качественно специфичная группа задач измерения ВФВ возникает, когда искомый вектор U определяется или как производная по времени, или как интеграл по времени от непосредственно измеряемого вектора V. Кроме того, часто (например, при управлении движением подвижных объектов) встречаются задачи, когда искомые ВФВ связаны с непосредственно измеряемым ВФВ через дифференциальные уравнения, это имеет место в инерциальных модулях и системах.

Векторы и тензоры, способы их задания

Термин «вектор» в буквальном переводе с латыни означает «везущий» или «несущий». Векторное исчисление возникло из потребностей физики и прикладных наук. До середины XIX в. интуитивное понимание специфической природы векторов, конечно, существовало, но формальный математический аппарат отсутствовал, необходимые преобразования векторов в общем виде осуществлялись только громоздко через составляющие, как правило, проекции на оси прямоугольной системы координат. Введение векторных физических величин сопровождалось развитием математического аппарата векторного исчисления.

Следующим шагом явилось введение в рассмотрение векторных полей. Существенную специфику имеют задачи определения ВФВ, когда их поля неоднородны, а соответствующие векторы являются связанными. Связанный вектор V в общем случае имеет начальную точку (например, вектор силы - точку приложения), он характеризуется абсолютной величиной V (или модулем |V|) и направлением, а наглядно представляется в виде направленного отрезка прямой, исходящей из указанной начальной точки пространства. Э тот вектор однозначно определяется заданием трех проекций на оси, как скалярных величин Vx , Vy , Vz в пространстве и двух Vx , Vy - на плоскости. Измерение ВФВ в общем случае сводится к определению этих трех проекций.

Для описания свойств и преобразований векторов и тензоров используется аппарат мат-ричного исчисления. В последние десятилетия в связи с широким использованием компьютерных технологий в численных расчетах векторное описание заменяется четко формализованным матричным (вектору сопоставляется матрица-столбец), приспособленным для компьютерных расчетов. Иногда ВФВ представляются в виде квадратных матриц, причем обязательно антисимметричных.

Матричные представления могут далеко выходить за пределы прямых аналогий с векторами, например, матрицы-столбцы могут не соответствовать ВФВ, например, несколько ВФВ, имеющих различную природу и размерности, могут быть объединены в одну матрицу.

Термин «тензор» происходит от латинского слова, которое переводится как «напрягаю», «растягиваю» (это связано с тем, что в науке исторически первыми исследовались тензоры механических напряжений и деформаций).

Тензорные физические величины (ТФВ) или, конкретно, тензоры второго ранга (в физике рассматриваются также тензоры третьего ранга, но они в дальнейшем исключаются из рассмотрения) в математике обычно представляются в виде квадратных матриц размерности 3х3 в пространственных задачах и размерности 2х2 - в плоских. Тензорам не соответствуют такие наглядные образы, как векторам. По физическому смыслу необходимо выделить две группы тензоров:

- ТФВ, описывающие анизотропные свойства или состояния сред (например, свойства электрической проводимости, диэлектрической проницаемости, механического напряженного и деформированного состояния в среде);

- ТФВ, которые описывают изменение векторной величины в малой окрестности по произвольному направлению и математически представляются как производные ВФВ по радиусу-вектору (например, градиент гравитационного ускорения); если при этом вектор является производной скалярной величины (потенциала), то компоненты тензора определяются как вторые производные потенциала.

В общем случае тензор Т второго ранга определяется в пространстве девятью компонентами (все элементы квадратной матрицы могут быть независимы), однако часто тензоры являются симметричными и независимыми из них являются только шесть; встречаются также антисимметричные тензоры, у антисимметричного тензора независимыми являются три элемента. Не очень наглядным геометрическим образом симметричного тензора является эллипсоид, особыми являются три взаимно ортогональных направления его главных осей, в этих осях тензор становится диагональным; для двух из трех направлений главных осей диагональные элементы тензора принимают экстремальные (максимальное и минимальное) значения.

При решении практических задач, когда векторы задаются составляющими или проекциями на оси в трехмерном пространстве, используют помимо прямоугольных также и другие системы координат, в частности, цилиндрические, сферические, биполярные и др., что приводит к необходимости осуществления нелинейных преобразований от одних систем координат к другим. При этом векторная форма представления и аппарат векторной алгебры инвариантны относительно выбора типа и ориентации осей систем координат, и тогда оказывается возможным обеспечивать единство математического описания, абстрагироваться от выбора систем координат. Исторически после введения в рассмотрение векторов и тензоров многие физические законы стали записываться в векторно-тензорной форме. Только значительно позже стал использоваться матричный математический аппарат; инвариантность векторных и тензорных соотношений относительно систем координат сохраняется при символьной записи (в том числе при матричном представлении), но, конечно, не имеет места при конкретизации содержания матриц.

Принципиально важным и общим для всех вектор-ных величин является свойство линейности большой группы аффинных преобразований проекций векторов при перемещениях начальных точек и по-воротах прямоугольных систем координат (преобразование от одной системы координат к другой задается векторной формулой вида $V2 = AV1 + C$, где A - матрица направляющих косинусов) и свойство аддитивности векторов и их проекций.

В общем случае под измерением ТФВ Т понимается определение девяти ее компонентов (если тензор симметричный, то шести независимых). Однако в конкретных прикладных задачах достаточно информативными может быть только одна из компонент. Как и при измерении ВФВ, эти компоненты могут выбираться в различных системах координат. Для ТФВ существуют взаимно ортогональные главные оси, в этих осях тензор в пространстве имеет компоненты только по главной диагонали, и поэтому соответствующая матрица задается тремя главными диагональными компоненты $T xx$, $T yy$, $T zz$ (на плоскости - двумя:

Txx , Tyy). Переход к главным осям осуществляется применением указанного преобразования, в котором матрица *A* определяется однозначно с точностью до перестановки порядка осей. Если в определенных осях существует симметрия ТФВ, то это используется для нахождения главных осей. В прикладных задачах могут представлять интерес или все, или две главные компоненты или относительные различия между ними.

Принадлежность тех или иных физических величин к категории векторов и тензоров во всех разделах физики подробно обосновывается.

Это важно, поскольку в разных прикладных науках часто без всяких обоснований и только для сокращения записи уравнений взаимосвязи различных групп переменных формально вводятся якобы векторы, просто как совокупности однородных или даже неоднородных величин, имеющих различную физическую природу и не подчиняющихся никаким законам линейных преобразований (например, «вектор состояния», «вектор возмущающих параметров», «вектор регулируемых параметров», даже «вектор развития»). Часто при этом сами преобразования совокупностей параметров теряют смысл. Такое искусственное объединение не соответствует физическим представлениям, а определение параметров по экспериментальным данным не имеет отношения к измерениям векторных величин и вообще к метрологии. Применительно к ТФВ такое расширение понятия не распространено.

Кроме того, важно, что даже не все совокупности однородных скалярных величин, которым соответствуют пространственные образы, могут быть представлены в виде векторов. Так, не является вектором произвольный конечный угол поворота твердого тела, поскольку он не может быть представлен в виде векторной суммы последовательности углов поворота относительно разных осей; теория конечных углов поворота использует совсем иные представления и совокупности параметров (кватернионы, параметры Родрига-Гамильтона). Однако если углы поворота твердого тела малы, их можно приближенно рассматривать как векторы. Существуют также и другие способы задания величин, которые нельзя считать векторными. В дальнейшем рассматриваются только векторные величины в строгом, классическом смысле.

Задачи измерения и средства измерений векторных и тензорных величин. Существуют единые, интегрированные («в одном корпусе») средства измерений (СИ) с одним измерительным преобразователем (ИП) для всех составляющих ВФВ. Если ВФВ представляет собой градиент скалярной величины, то для определения каждой составляющей может быть использована система (как минимум, четырех разнесенных по осям координат ИП), и тогда в качестве оценок, составляющих вектора градиента, используются парные разности. Но обычно СИ ВФВ представляет собой систему несколько одноосных или однокомпонентных ИП с различным образом ориентированными измерительными осями (ИО), тогда каждый из ИП измеряет только одну скалярную величину, одну из составляющих (а именно, проекцию ВФВ на свою измерительную ось или один из компонентов ТФВ). Часто ИО ИП направляют по осям прямоугольной системы координат, но это не обязательно, в любом случае углы между осями должны быть известны. Однако не все типы ИП измеряют проекции вектора, в общем случае для ИП необходимо экспериментально определять диаграммы направленности и с их использованием этих диаграмм определять векторы. В трехкомпонентных СИ, одновременно измеряющих все три проекции ВФВ, три ИО такого СИ не обязательно ортогональны (трехкомпонентные сейсмометры, магнитометры и др.). Но в большинстве случаев СИ ВФВ представляют собой измерительные системы, основу которых составляют три ИП трех составляющих векторов по отдельности.

В некоторых прикладных задачах часто представляют интерес только две или одна составляющая ВФВ. Но если требуется полное определение ВФВ, тогда необходима система нескольких, как минимум трех одноосных ИП. увеличение числа одноосных ИП сверх минимально необходимого (что квалифицируется, как структурная избыточность) позволяет повышать метрологическую надежность. При этом измерительные оси могут быть

ориентированы различным образом (существуют рекомендации, что их целесообразно направлять по вершинам или перпендикулярно граням правильных многогранников).

СИ ТФВ также чаще всего строится, как система одноосных ИП. Во всех случаях важна ориентация измерительных ос ей, а необходимое число СИ зависит от общих свойств или классификационных признаков ВФВ. Существует несколько классификаций ВФВ и ТФВ по разным признакам; для метрологии в первую очередь важен признак их изменчивости по пространству. Различают соответственно свободные векторы, постоянные для всех точек областей пространства, скользящие векторы, не изменяющиеся вдоль их направлений, связанные векторы, начальные точки которых вполне определенные. При изменении по точкам пространства вводятся понятия векторного или тензорного полей. В зависимости от классификационных признаков к средствам и методикам измерений предъявляют разные требования. Если векторы постоянны по определению для заданной области пространства (например, вектор угловой скорости твердого тела по всему его объему), тогда каждый из совокупности трех СИ, предназначенное для измерения одной составляющей ВФВ, должен быть расположен в пределах этой области. Угловая ориентация их ИО произвольна, но должна быть известна (предварительно определена по результатам калибровки) с требуемой точностью. Если кинематически и конструктивно обеспечивается определенность и постоянство с высокой точностью ориентации оси вращения твердого тела, то считается предпочтительным, чтобы измерительная ось ИП была параллельна ей, но это не обязательно; при непараллельности должен быть точно известен угол между осями, и тогда модуль вектора определяется по проекции. Но если ориентация оси вращения не определена или не может быть обеспечена с требуемой точностью, необходимо три одноосных ИП.

Векторы могут оставаться постоянными по модулю и направлению только для определенного класса переносов начальной точки (например, вектор силы при перемещении точки вдоль линии действия), и тогда измерительную ось СИ следует располагать именно по этой линии. Если же векторы изменяются по пространству (например, линейные ускорения твердых тел, механические напряжения упруго деформируемых тел), то для измерений характеристик векторного поля необходимо увеличивать число одноосных ИП и размещать их в различных точках пространства в различной угловой ориентации.

Далее рассматривается задача измерения ВФВ в одной точке пространства, в ней вектор полностью определяется тремя компонентами. В практической деятельности используют несколько полностью взаимно математически эквивалентных методов покомпонентного измерения ВФВ V заданием трех скалярных величин. Эти три компонента могут быть выбраны по-разному, при этом каждому выбранному варианту соответствует вы-бор определенной системы координат. При этом чаще всего встречаются два варианта:

1. Измеряются модуль V вектора V и два угла (первый - между направлением вектора заданной плоскостью, а второй – между проекцией и осью на указанной плоскости); этому соответствует задание ВФВ в сферической системе координат. Это чаще всего встречается в приборах, предназначаемых для определения координат удаленных объектов в пространстве. Могут решаться задачи определения только модуля вектора или только направления вектора в пространстве.

2. Измеряются составляющие *Vx, Vy, Vz* вектора в прямоугольной системе координат или проекции на любые три оси, при этом направление этих осей должно быть тем или иным образом определено. Затем, если это требуется, расчетным путем определяется модуль ВФВ (как корень квадратный из суммы квадратов проекций) и углы ориентации вектора, (через направляющие косинусы углов). Этот вариант, как правило, реализуется тогда, когда измерения ВФВ производятся с помощью трех одноосных СИ с взаимно ортогональными ИО, он типичен для рабочих автономных измерений на подвижных объектах, когда направление вектора изменяется во времени и практически невозможно ориентировать измерительную ось по измеряемой ВФВ.

3. Определяются только углы, когда по осям карданова подвеса три ИП измеряют углы Эйлера-Крылова. Это типично для многих оптических и электронных ориентаторов.

Задачи определения направлений ВФВ в пространстве, их хранения и воспроизведения были исключены из классической метрологии на основании того, что направление не является физической величиной, важные, актуальные и практически важные и решаемые вопросы сохранения и передачи направлений в пространстве, а также возникающих при этом погрешностей метрологией не изучались по указанным принципиальным соображениям. Кроме того, нужно учитывать, что выбор систем координат предусматривает задание направлений осей координат, что как будто тоже исключается из рассмотрения. Распространено мнение, что вполне достаточно метрологии плоских углов; однако в действительности это явно сужает возможности применения общих понятий, поскольку направления могут определяться не только плоскими углами, а множеством других способов. Точное определение направлений в пространстве для решения большой группы измерительных задач (в первую очередь, в астрономии, геодезии, а также в навигации) играет иногда не менее существенную (а иногда и более важную) роль, чем точное измерение модуля ВФВ. В векторном исчислении, как разделе математики, задание «чистых» направлений осуществляется введением ортов, единичных векторов i, которые задают направления как самих векторов, так и осей координат. При этом сам вектор *V* представляется в виде произведения модуля на орт, т.е. *Vi V*. Если бы не приведенное выше возражение, в рамках метрологии можно было бы в случае необходимости рассматривать раздельно задачи измерения или того, или другого.

Если ВФВ существует как векторное поле во всех точках некоторой области пространства и существует распределение по пространству, как функция координат *V(x, y, z)*, то измерительная задача квалифицируется, как задача определения этой функции. Если при этом распределение ВФВ зависит также от времени *V (x, y, z, t)* то поле является нестационарным. При изучении нестационарных, непостоянных по пространству векторных полей также имеется своя специфика.

В общем случае при измерении ВФВ в точках или малых областях пространства поля необходимо знать (задавать или измерять с требуемой точностью) координаты точек измерения в пространстве (обычно это делается по сеткам с точно известными координатами узлов или по последовательностям точек на контурах), это требование относится к измерениям параметров полей любых величин (как скалярных, так и векторных).

Необходимо выделить важный частный случай измерений, когда векторное поле является потенциальным, а подлежащая измерению векторная величина V представляет собой градиент потенциала скалярной величины (потенциала) Ф, т.е, когда *V = grad* Ф. При этом помимо прямых измерений часто, когда это возможно и целесообразно, совокупные измерения градиента в малой области вблизи заданной точки осуществляются с помощью четырех ИП (непосредственно измеряющих разности потенциалов, как скалярных величин), три из которых разнесены по трем направлениям относительно этой точки в пространстве (желательно по осям прямоугольной системы координат). По этим разностям, как приближенные значения производных вычисляются параметры градиента.

Четыре разнесенных ИП потенциалов иногда конструктивно объединяют в единую измерительную систему (модуль). Естественно, дискретизация процедуры определения производных приводит к дополнительным погрешностям измерений, которые необходимо учитывать. В зависимости от физической природы ВФВ в одних случаях бывает возможен только первый путь прямых измерений, в других случаях - только второй путь совокупных измерений.

При измерениях ТФВ, представляющих собой градиенты ВФВ, также используются совокупные измерения, для чего используется система, включающая определенное число ИП векторов в разнесенных точках пространства (обычно четырех, в начальной точке и трех в точках, смещенных по осям). В этом случае с помощью четырех ИП, три из которых разнесены относительно центра в пространстве (желательно по осям прямоугольной системы координат), непосредственно измеряющих разности векторов, между точками по трем направлениям из начальной точки. Затем по этим разностям, как приближенные значения производных,

вычисляются приращения измеряемой ВФВ, обычно раздельно по проекциям (в данном случае их двенадцать), и в этом случае рассчитываются все компоненты измеряемой ТФВ, как градиента. Поскольку система является информационно избыточной, то число измеряемых проекций можно уменьшить. Встречаются задачи, в которых ТФВ представляет градиент градиента скалярной величины П, т.е. $T = grad(grad\ П)$.

В этих случаях система для выполнения совокупных измерений строится на совокупности ИП, каждый из которых измеряет потенциал в своей точке. Составляющие тензора Т рассчитываются, как вторые разности. В классической схеме ИП, измеряющие проекции первого градиента, разносятся тройками по осям прямоугольной системы координат. Как и в случае измерений ВФВ четыре разнесенных СИ потенциалов иногда конструктивно объединяют в единую измерительную систему (измерительный модуль).

Выбор методов построения или материальной реализации опорных систем отсчета (иногда их называют методами аппаратурной реализации систем координат) определяется конкретной измерительной задачей. В простейшем случае, чаще всего при относительных измерениях, система отсчета может быть связана с подвижным объектом, на котором устанавливаются соответствующие СИ. Так делается, например, при измерении параметров деформаций несущих конструкций подвижных объектов относительно центральных частей, в частности, при измерении упругих перемещений под действием воздействий от волнения (для корпуса корабля) или турбулентности воздушной среды (для конструкций летательных аппаратов).

При определении и построении системы отсчета необходимо иметь опорную систему координат, по отношению к которой определяется положение других систем координат, в которых измеряются соответствующие ВФВ. Это не исключает измерение ВФВ непосредственно в опорной системе координат. Для перехода от одной системы к другой обычно используется аппарат матричных преобразований.

Аппаратурно это выражается в применении средств измерения углов между парами осей обеих систем координат. Еще раз подчеркнем, что под осями понимаются не математические понятия, а направления, определяемые соответствующими базовыми элементами.

Для реализации опорной системы координат используют разные физические принципы и методы, важно, чтобы выбранная опорная система координат была определена своими параметрами с возможно более высокой точностью и доступна для решения поставленной измерительной задачи. При измерении параметров полей ВФВ часто при переходе от точки к точке в общем случае приходится изменять также и ориентацию измерительных осей СИ, и при этом угловые параметры переориентации должны измеряться с высокой точностью, что необходимо учитывать. По отношению к измерениям ТФВ реализуются те же общие подходы, но с учетом более сложных свойств этих величин. Результаты измерения ТФВ могут быть представлены в различной форме (при этом параметры углового положения системы координат должны быть заданы или измерены). Основными являются следующие варианты:

1. В результате измерений должны быть определены все девять (для симметричных тензоров – шесть независимых) компонентов в выбранной системе координат,

2. Интерес представляют только некоторые элементы тензора Т (один или несколько).

3. Должны быть определены главные значения Txx, Tyy, Tzz и направления главных осей в пространстве.

По отношению к углам поворотов для ТФВ существуют инварианты; первым инвариантом является сумма диагональных элементов $I_1 = Txx + Tyy + Tzz$. Задачи определения инвариантов по результатам измерений встречаются довольно редко, однако свойство постоянства инвариантов часто используется как контрольное условие при численных преобразованиях (поворотах систем координат).

Погрешности измерения векторных величин.

Погрешности, как важнейшие метрологические характеристики (МХ) применительно к СИ ВФВ и результатам измерений имеют свою специфику, хотя общий подход к

представлению и описанию погрешностей (или неопределенности) измерения векторных величин, к методам их оценивания и нормирования в основных чертах аналогичен тому, который имеет место при измерении скалярных величин.

Погрешность измерения ВФВ включает основные составляющие: инструментальные погрешности СИ и погрешности метода измерений. Также сохраняются и общие подходы к оцениванию случайных и систематических составляющих указанных погрешностей. В то же время имеются и принципиальные отличия. Здесь будут рассмотрены лишь самые общие вопросы определения, нормирования и расчета погрешностей измерения

ВФВ, детально этот вопрос в силу его широты выходит за рамки настоящей статьи. Очевидно, что в общем случае погрешность измерения ВФВ является вектором, представляющим собой векторную разность измеренной ВФВ и «истинного» или «опорного»" вектора этой величины (как отмечалось выше, понятие «значение» не применимо для ВФВ). Далее погрешности делятся на основные и дополнительные. Значительная часть дополнительных погрешностей обусловлена влияющими величинами, которые сами по себе могут быть скалярными или векторными. Аналогичное положение имеет место и для ТФВ. При расчете составляющих погрешностей измерения свободных векторов, не изменяющихся при параллельном переносе в любую точку или однородных векторных полей, исходными являются линеаризованные соотношения вида в матричной форме $\Delta V = \Delta V^* + \Theta V$, где ΔV^* - вектор погрешностей измерения проекций вектора V на оси, а Θ – антисимметричная матрица малого угла суммарных погрешностей угловой ориентации системы координат, в которой производится измерение, и инструментальных погрешностей. Предполагается, что угловые погрешности ориентации осей имеют место только вследствие поворота всего измерительного трехгранника как жесткого целого (в действительности оси могут терять свойство взаимной ортогональности, и направления осей могут иметь независимые друг относительно друга угловые погрешности).

При измерении векторов, изменяющихся по пространству, или неоднородных векторных полей нужно учитывать погрешности положения точек измерения (расположения ИП). Если предполагать, что измерение вектора (по проекциям или иначе) осуществляется в точке пространства, для которой линейное смещение относительно номинального задается радиусом-вектором Δr , то возникающей при этом вектор дополнительной погрешности с точностью до слагаемых первого порядка малости будет определяться матричным выражением $H\Delta r$, где H – квадратная матрица (или тензор) частных производных всех проекций вектора V по всем координатам. Таким образом, хотя погрешность вектора есть вектор, но он выражается через тензор H второго порядка. Для обусловленной смещением точки измерения составляющей погрешности неоднородного тензорного поля записывается аналогичное соотношение большей размерности: $G\Delta r$, где G – прямоугольная матрица размерности 3x27 частных производных всех компонент тензора по всем координатам. Это выражение может быть также представлено через тензор третьего ранга. Учет заранее известных свойств симметричности или антисимметричности позволяет уменьшать размерности. Можно провести некоторую аналогию между указанными погрешностями (их можно трактовать, как погрешности привязки к осям координат) и хорошо исследованными погрешностями привязки к оси времени при динамических измерениях. Дополнительные погрешности, обусловленные влияющими воздействиями, с одной стороны, могут иметь различную природу, а с другой стороны, по-разному влиять на результаты измерений. Влияющие воздействия могут быть скалярными (например, температура окружающей среды) или векторными (например, виброускорения).

В первом случае при линеаризации зависимостей целесообразно вводить коэффициенты влияния; они могут быть одинаковыми или различными для составляющих измеряемого вектора, во втором случае влияние задается матрицей-столбцом. Когда осуществляется измерение скалярной величины, а влияющее воздействие представляет собой вектор, то влияние задается матрицей-строкой. Когда же при измерении ВФВ влияющее воздействие нужно представлять, как вектор, коэффициенты влияния должны в общем случае

определяют воздействие каждой проекции воздействия на каждую проекцию дополнительной погрешности, и воздействие задается квадратной матрицей коэффициентов влияния размерности 3х3. При этом оси координат для вектора V и вектора влияющего воздействия могут быть различными. Кроме того, могут быть различными сочетания типов координат (например, прямоугольные и сферические). В качестве примера можно привести известный факт зависимости дополнительной погрешности от воздействия силы тяжести, когда погрешность существенно зависит от угловой ориентации прецизионного СИ относительно вертикали. Известны измерительные задачи, в которых линеаризованные представления неприемлемы, тогда используют более сложные модельные представления дополнительных погрешностей (например, в виде рядов разложений в степенные ряды при сохранении нескольких слагаемых).

Погрешность измерения Δ Т тензорной физической величины Т представляет собой тензор того же ранга и той же размерности. Как и в случае ВФВ при расчете погрешностей измерения ТФВ нужно учитывать погрешности угловой ориентации системы координат, по осям которой измеряются компоненты тензора. Тогда исходными являются линеаризованные матричные соотношения вида $\Delta T = (\Delta T) + \Theta - 1\ T\ \Theta$, где Θ - антисимметричная квадратная матрица малого угла поворота (матрица погрешностей угловой ориентации системы координат). При нормировании погрешностей измерения ТФВ в основном применимы те же подходы, что и при измерении ВФВ. Однако следует иметь в виду, что при учете корреляционных зависимостей между компонентами и при измерении параметров ТФВ по пространству поля необходимо вводить в рассмотрение тензоры третьего ранга или совокупности матриц размерности 3 х 3.

В отношении динамических погрешностей до сих пор нет единства описания представления с другими погрешностями (для статических режимов измерений). Однако, во многих важных случаях, когда эти погрешности малы, может быть сохранен такой же подход, как к прочим дополнительным погрешностям, если ограничиться определенными видами функциональных зависимостей от времени.

Для ВФВ в каждом конкретном случае погрешности Δ V измерений зависят от измерительной задачи, метода использования результата измерения и метода измерения. Принципиальным является то, что в состав погрешности измерения ВФВ наряду с погрешностью средства измерения ее модуля и погрешностью установки входит также и погрешность средств аппаратурной реализации системы отсчета (в нее входят погрешности средств аппаратурной реализации базовой системы координат и погрешности средств, обеспечивающих преобразование перехода от этой системы к системе, в которой осуществляется измерение ВФВ). Рассмотрим некоторые примеры, поясняющие изложенное.

В случаях, когда ИО СИ представляется возможным совместить с требуемой точностью с направлением измеряемой ВФВ (например, при определении аномалий гравитационного ускорения поля Земли) погрешностью угловой ориентации часто можно пренебрегать, так как при малых углах между указанными направлениями эта погрешность имеет второй порядок малости (пропорциональна квадрату этого малого угла). Намного сложнее обстоит дело, когда направление ВФВ или известно с низкой точностью, или направление неизвестно и может изменяться в широких пределах (тогда оно определяется по результатам измерений проекций ВФВ на оси системы отсчета). В этом случае приходится учитывать несколько обстоятельств:

- аппаратурные методы и средства задания направлений разных осей системы отсчета могут быть неравноточными;

- в зависимости от условий измерения могут быть неравноточными и средства измерения составляющих ВФВ по осям системы отсчета (например, при измерении параметров движения в условиях Земли могут иногда существенно различаться погрешности измерения вертикальных и горизонтальных составляющих ускорений движения);

- погрешности СИ, ИО которых направлены по той или иной оси

системы отсчета могут существенно зависеть от углов между направлением ВФВ и направлениями этих осей вследствие поперечной чувствительности (хотя к большинству СИ

ВФВ предъявляется требование низкой поперечной чувствительности и эти требования выполняются);

- специфические погрешности могут возникать при измерении ВФВ в случае даже малых перемещений чувствительного элемента СИ в процессе измерения, когда модуль ВФВ является функцией линейного размера (например, на центрифуге, при измерении центробежного ускорения акселерометром имеет место перемещение чувствительного элемента,

что приводит к появлению дополнительной погрешности);

- для многих ВФВ встает задача их измерения на фоне другой ВФВ, имеющей ту же природу, но представляющей собой влияющий фактор (например, измерение параметров электромагнитного поля, создаваемого исследуемым устройством, на фоне электромагнитного поля Земли или измерение ускорения движущегося тела на фоне гравитационных ускорений, эквивалентных, как известно, ускорениям движения.

9.4. Ударные стенды

При испытаниях объектов на удар определяются такие свойства, как ударопрочность (условия, при которых не происходят поломки и другие необратимые явления) и удароустойчивость (способность нормально работать также во время действия ударного импульса).

Применительно к испытаниям на механические ударные воздействия вопросы необходимости создания и использования специальных стендов решаются неоднозначно. Часто в стендах как таковых нужды нет, вполне достаточно непосредственно воспроизводить реальные динамические ударные процессы. Так, если должна быть проверена сохранность, способность изделий сохранять работоспособность прибора при падении, в том числе и в упаковке, в таре с определенной высоты, то это проверяется при непосредственном воспроизведении такого падения; необходимо лишь оговорить высоту и жесткостные свойства основания, с которым происходит соударение (дерево, бетон, сталь). Естественно, типовые параметры такого удара (например, длительность, максимальные силы и ускорения) количественно не задаются, но могут быть определены по результатам специальных измерений импульсов ускорений при испытаниях. При испытаниях на стойкость по отношению к землетрясениям в ответственных случаях необходимо воспроизводить записанные ударные воздействия, которые считаются типичными.

Аппаратура военного назначения нужно проверять на ударное воздействие взрыва, для этого уже как правило нужны стенды. Неясно, можно ли всегда говорить об эквивалентности условий и параметров ударных воздействий в реальности и при испытаниях. В большинстве случаев требования к удару задаются нормативными документами и вопросы о соответствии не поднимается.

Встречаются также ситуации, когда при испытаниях нужно задавать ударные импульсы, но их параметры несущественны. Такое положение, например, имеет место по качеству звучания при проверке на отсутствие трещин в изделиях из материалов, которые при ударах звонко или глухо звенят. На слух интуитивно или с помощью приборов анализа при этом устанавливается показатель затухания колебаний во времени, и именно он является контрольным или диагностическим признаком. Испытания многих изделий на механические ударные воздействия высоких уровней (например, типичных для взрывов) часто оказываются наиболее тяжелыми по многим причинам, иногда требования к стендовым испытаниям на удары вообще не могут быть выполнены.

При формулировании требований к испытаниям необходимо рассматривать ударное воздействие, как импульсный процесс, характеризуемый определенной зависимостью от времени силы прикладываемой силы $F(t)$ или, чаще, импульсного ускорения $W(t)$, которое при испытаниях является ускорением стола, на который устанавливается объект. Именно ускорение ударного импульса измеряется с помощью датчика - акселерометра.

5.6 Испытания на акустические воздействия.

В настоящее время все больше внимания уделяется стойкости микромеханических приборов к акустическим воздействиям. Подобные испытания являются новыми. Для испытаний на акустические воздействия требуется специальные стенды. Для пробных исследовательских испытаний можно использовать устройства звуковоспроизведения мощных акустических систем. Но серьезная проблема заключается в построении замкнутой камеры с незначительными эффектами звукоотражения и с очень хорошей звукоизоляцией для обеспечения безопасности работающего персонала и отсутствия помех другому работающему оборудованию.

Звуковое давление в логарифмическом масштабе измеряется в размерных единицах, в децибелах (*дБ*). Технические средства измерения звукового давления широко используются, например, в охране труда. Существуют шкалы сопоставления уровней шумов, воспринимаемых человеком, и оцениваемых по приборам. Однако для испытаний приборов предусматриваются такие высокие уровни звуковых давлений, которые на порядки превосходят допустимые для человека. Новые стандарты диктуют требования к стойкости приборов вплоть до 170 *дБ* в полосе частот от 20 Гц до 10-12 кГц. Такие требования обусловлены различными, в том числе и тяжелыми, условиями эксплуатации микромеханических приборов на различных технических объектах. Например, при работе сваебойной машины или копра звуковая нагрузка составляет 110 дБ, шум от реактивной струи при взлете самолета, вблизи – 140 *дБ*, при взлете большой ракеты – 170 *дБ*.

Стол располагается напротив сопла акустической установки. Акустический датчик-преобразователь определяет уровень звукового давления в нескольких сантиметрах от испытуемого датчика. Испытания проводятся в следующей последовательности:

проводится контроль собственных шумовых характеристик гироскопа без вращения стола и с выключенной акустической установкой;

проводится контроль уровня шума гироскопа при заданной угловой скорости вращения стола;

включатся акустическая установка и определяется изменение показаний гироскопа при заданном звуковом давлении;

без изменения уровня звука изменяется направление вращение стола при сохранении заданного значения угловой скорости;

варьируется как величина скорости вращения, так и уровень звукового давления.

9.5. Малогабаритные упрощенные стенды для исследовательских испытаний

Для признания результатов испытаний, особенно на высоких уровнях (в частности, приемо-сдаточных, а тем более государственных) требуется аттестация методов и методик измерений, при использовании аттестованных стендов и необходимых образцовых средств измерений. Все это должно быть подтверждено правильно оформленными документами, иначе результаты испытаний могут не быть признаны.

Однако очень часто требуется проводить испытания оперативно, на различных этапах проектирования или даже научно-исследовательских работ. Дорогостоящие аттестованные и сертифицированные стенды и необходимые образцовые средства измерений имеются в специальных самостоятельных испытательных подразделениях очень крупных организаций, поэтому проведение подобных испытаний на таком оборудовании приводит к значительным потерям времени и требует нередко больших финансовых затрат, а иногда и становится практически невозможным. Такое положение часто является практически безвыходным, если объекты испытаний велики по массам и габаритам.

Между тем часто объекты испытаний, в первую очередь, микромеханические датчики имеют очень малые массы (десятки, максимум немногие сотни граммов), часто проведение их испытаний на стендах, когда-то создаваемых под большие, громоздкие комплексы абсурдно.

Существует острая необходимость в создании малогабаритных стендов, которые можно было бы устанавливать у разработчиков и наладчиков.

Такие стенды должны обеспечивать испытательные воздействия в достаточно широких диапазонах их параметров, часто более широких, чем обеспечивают аттестованные дорогостоящие стенды. Но они должны быть малогабаритными, не требовать специальных фундаментов, простыми по устройству, от них может не требоваться высокая точность. При проектировании подобных стендов нужно в первую очередь опираться на традиции стендостроения, которое хотя и не выделяется в самостоятельную отрасль, но имеет давние традиции. При этом необходимо находить наиболее подходящие прототипы, но при этом также искать новые пути.

Ниже описываются результаты предварительных проработок схемных и отчасти конструктивных решений перспективных малогабаритных (компактных, настольных) стендов, которые будут предназначаться для оперативных, исследовательских и отработочных испытаний ДУС, а также соображения по методикам испытаний. Предполагается, что такие стенды могут использоваться на рабочих местах разработчиков и наладчиков микромеханических приборов.

9.6. Малая центрифуга

При перспективах применения ДУС и акселерометров на особо высокодинамичных объектах (ракетах малого радиуса действия, артиллерийских снарядах), на которых кратковременные линейные ускорения могут превышать 10^5 g, требуется создавать при испытаниях такие и более высокие уровни центробежных ускорений. Однако имеющиеся в организациях крупногабаритные испытательные центрифуги способны создавать ускорения лишь до $10^3\,g$, редко до $5\cdot10^3\,g$. Из приведенного в п. 5.2 условия (5.3) для получения больших центробежных ускорений нужно уменьшать диаметр ротора; применительно к испытаниям малогабаритных микромеханических приборов вполне возможно уменьшение радиуса R до 0,05 – 0,1 м. Подобные испытательные стенды пока не выпускаются. Но известны применяемые для отжима дешевые барабанные изделия бытовой техники с двигателями, имеющими частоту вращения порядка 20 тыс. об/мин и создающие ускорения на периферии барабана до $2\cdot10^4$ g. Создаваемые по их подобию малогабаритные стенды позволят на порядок повысить уровень воспроизводимых ускорений. Оценочные расчеты показывают, что на радиусе 50 мм можно получить перегрузки порядка 10^5 g, что намного превышает возможности современного испытательного оборудования. При этом привод должен обеспечивать частоту вращения n = 50 тыс. об/мин; такие двигатели выпускаются промышленностью и используются в точном приборостроении. Передача к ротору стенда должна быть прямой быть прямой. Ротор должен быть на упругих опорах, чтобы стенд работал далеко в зарезонансных режимах, при этом не потребуется его точная балансировка.

9.7. Роторный стенд, работающий на выбеге

Это альтернатива испытаний на поворотном стенде с высокоточным приводом, на котором можно задавать различные постоянные значения угловой скорости при калибровке ДУС. В описываемом ниже методе могут использоваться принципы калибровки и по образцовой мере, и по образцовому прибору. Ротор с установленным на нем калибруемым ДУС разгоняется любым приводом до угловой скорости, соответствующей границе диапазона, калибруемого ДУС, потом привод отключается, а калибровка производится на выбеге, при естественном медленном и плавном изменении угловой скорости ротора под действием момента сил сопротивления. При калибровке по образцовой мере по оси ротора должен быть установлен точный (образцовый) датчик угловой скорости или датчик угла, по сигналу которого можно с требуемой точностью определять текущие («мгновенные») или скользящие сглаженные значения угловой скорости.

Если по оси установлен образцовый датчик угла, то его сигнал преобразуется в сигнал угловой скорости, для многих датчиков углов такая функция предусмотрена в штатном программном обеспечении. Именно на выбеге одновременно регистрируются пары значений выходных сигналов образцового и калибруемого ДУС. При калибровке по образцовому прибору два ДУС (калибруемый и образцовый) устанавливаются на роторе, который может не иметь по своей оси датчик угла. В результате обработки данных по всему процессу выбега до остановки получаются данные для построения всей калибровочной характеристики, определения масштабного коэффициента и отклонений характеристики от линейной. Важно, что процесс уменьшения угловой скорости в процессе выбега плавный, в том числе и при приближении к нулю, подобную плавность в широких диапазонах в стендах с программно управляемыми приводами стендов трудно достижимо.

Подобный стенд может быть спроектирован и изготовлен с минимальными затратами. Для получения большого времени выбега и плавности желательно иметь ротор достаточно больших размеров и массы, подшипники должны быть с малым трением, чтобы время выбега составляло несколько минут. Тогда выбег будет происходить медленно и плавно, и можно будет пренебрегать динамическими погрешностями ДУС.

9.8. Маятниковый стенд

Получение угловых скоростей осуществляется при использовании одностепенной маятниковой конструкции с горизонтальной осью вращения и смещенным относительно нее центром тяжести. Принципиальная схема подобного маятникового стенда показана на рис. 9.11.

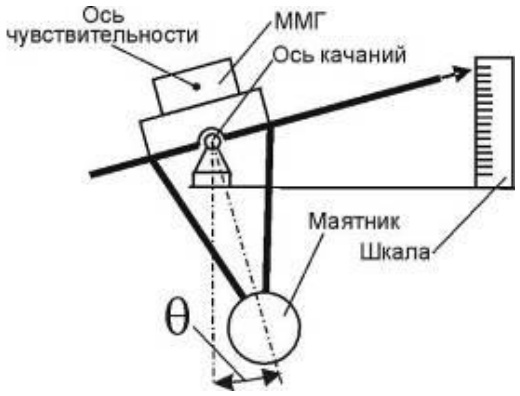


Рис. 9.11. Маятниковый стенд

Конструктивные схемы маятниковых стендов могут значительно отличаться от изображенной. При задании по упору определенного, известного или измеряемого начального углового отклонения φ_0 после освобождения происходят свободные колебания по закону

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \Omega t \quad (t) \quad \omega(t) = - \varphi_0 \Omega \sin \Omega t \qquad (9.15)$$

где Ω –собственная частота маятниковых колебаний. Таким образом, воспроизводится синусоидальный закон изменения угловой скорости, но частота может быть сделана очень малой. Для задания и/или измерения начального отклонения, которое равно амплитуде, датчик угла поворота маятника не обязателен, это угол начального отклонения может оцениваться или по сигналу специально установленного акселерометра, или по линейному смещению указателя смещения стрелки маятника, или зеркальным методом. Период свободных колебаний определяется по секундомеру.

На хороших опорах не представляет большой трудности получить очень медленное затухание свободных колебаний. Таким образом, реализуется схема калибровки по образцовому стенду (мере), но возможна также калибровка по образцовому прибору.

Смещением центра масс и другими приемами можно получать различные собственные частоты Ω маятниковых колебаний (без особых трудностей – в пределах от 1 ^{1}/с до 10 ^{1}/с. а угловые скорости – в пределах от 1 ^{0}/с до 100 ^{0}/с.

При низких частотах свободных колебаний динамическими погрешностями можно пренебречь, и тогда масштабный коэффициент калибруемого ДУС нужно оценивать по амплитудным значениям. Для оценивания динамических погрешностей следует воспроизводить максимальные из возможных частот Ω изменения угловой скорости, измерять и регистрировать синхронные значения сигналов испытуемого и образцового ДУС или их сдвиг по фазе. Для определения коэффициента простейшей модели динамической погрешности достаточно задавать частоты на полтора порядка ниже собственной частоты испытуемого ДУС. Тот же стенд может быть использован для определения влияния переменности угловой скорости на накопленную погрешность по углу. В этом случае результат оценивается по выходу первого интегратора; движение маятника нужно начинать с упора, и в конце процесса нужно привести подвижную часть к тому же упору. При этом на выходе первого интегратора будет накопленная ошибка по углу. Предположительно влияние переменной составляющей будет проявляться через нелинейность, целесообразно задавать различные значения амплитуд.

9.9. Малогабаритный ударный стенд для создания ударных ускорений малой длительности

Ударные воздействия с большими пиковыми значениями ускорений (от 10^3 g до 10^5 g и более) характерны для подвижных объектов, быстро набирающих большие скорости (порядка 10^3 м/с), при этом длительности импульсов ускорений имеют порядок одной или нескольких миллисекунд. Получение при испытаниях на стендах столь больших скоростей и длительностей ударов невозможно. Однако для ММГ, конструкции которых имеют низшие собственные частоты порядка 10 кГц возможно сокращение длительностей ударных импульсов на один-полтора порядка при сохранении эквивлентности воздействия на чувствительный элемент ММГ, т.е. при сохранении того же эффекта ударного воздействия длительность импульса может быть сокращена в десятки раз, до десятой миллисекунды. При этом соответствующее приращение скорости должно быть порядка десятков метров в секунду, что возможно получить на малогабаритных стендах. В отличие от традиционного способа разгона подвижной части с установленным датчиком под действием силы тяжести (такой способ позволяет получать скорости только меньше 10 м/с) предлагается использовать для разгона энергию предварительно напряженных пружин. Трехмерное изображение стенда, предварительно проработанного в ЦНИИ «Электроприбор», представлено на рис. 9.12.

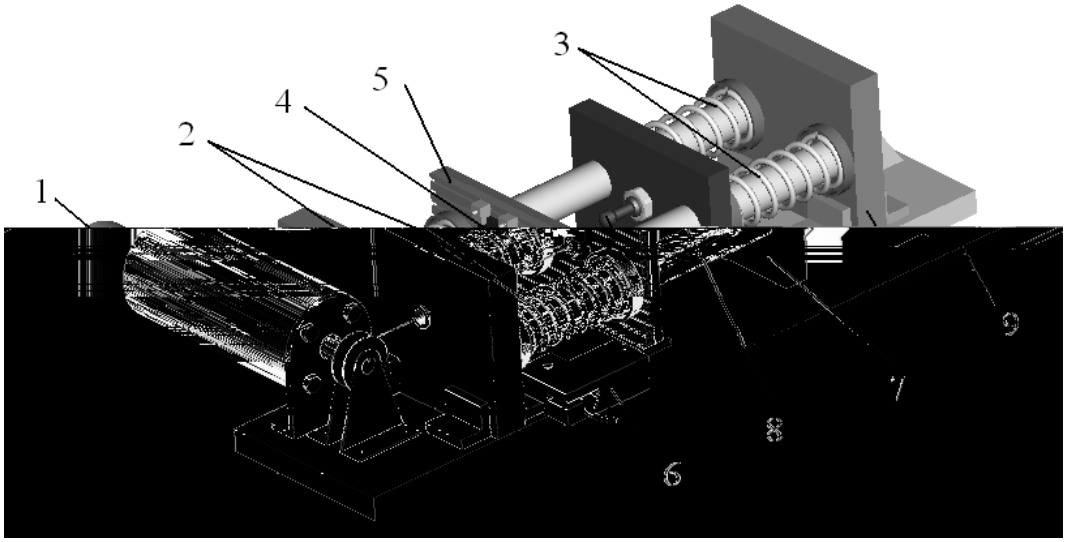


Рис. 9.12. Стенд ЦНИИ «Электроприбор»

Предварительно пружинным приводом 1 при помощи троса подтягивается стол 5 с установленными микромеханическими датчиками 4, сжимаются приводные пружины 2. Для фиксации стола во взведенном состоянии служит задвижка 6, освобождающая подвижную часть при пуске. При ударе стол контактирует с наковальней 7 через тормозное устройство 8, вся подвижная система амортизируются еще одними пружинами 3. Изображенные пружины – цилиндрические, винтовые, но это не обязательно, пружины могут быть, например, плоскими. Возможно воспроизведение упругой системы в виде профилированных пластинчатых пружин, как в арбалете или луке.

Для оценивания возможностей подобных стендов было проведено математическое моделирования ударного воздействия, подобраны и рассчитаны пружины сжатия. Было показано, что при сравнительно небольших габаритных размерах стенда (0,6 м), массе порядка 40 кг возможно получить скорость подвижной части перед ударом порядка 40 м/с, что на порядок больше, чем у стендов с разгоном силой тяжести. При тормозном пути 15-20 мм получаются пиковые значения ускорения порядка $15 \cdot 10^3$ g при длительности ударного импульса около 0,2 мс.

Предполагается, что требуемый тормозной путь и определяемое этим пиковое значение ударного ускорения могут быть получены при использовании специальных средств, таких как регулируемый пневмо- или гидродемпфер, амортизационные пружинные устройства или их комбинации. Именно от проработки этих устройств, допускающих регулировку и обладающих высокой стабильностью, будут зависеть перспективы создания и затем использования подобных ударных стендов.

Ударные маятниковые механизмы находят применение в маятниковых ударных копрах, других технологических машинах (например, для клепки) и ручном инструменте (отбойных молотках, ударных дрелях).

Маятниковый ударный копр изображен на рис. 9.13. На этапе подготовки образец установленной стандартной формы устанавливается на нижней позиции, маятник с ударной массой поднимается вверх до упора. При самом испытании маятник освобождается, набирает скорость и ударом разламывает образец.

Потеря энергии на разрушения определяется по разности углов и, следовательно, высот начальной и после удара. Подобными маятниковыми стендами оснащены все испытательные лаборатории сопротивления материалов.

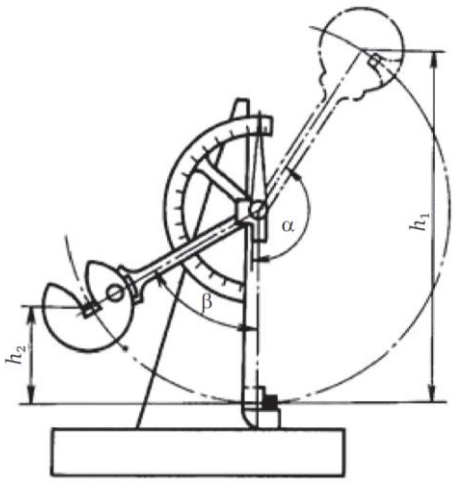


Рис. 9.13 Маятниковый ударный копр

Использование поворотного стола для определения накопленных ошибок по скорости и по углу

При использовании ДУС, в частности, ММГ в инерциальных модулях показатели их точности следует оценивать по результатам однократного, двукратного и трехкратного интегрирования. Имея калибровочные характеристики, ошибки на выходах интеграторов

можно расчетно оценить по результатам математического моделирования. Однако необходимо непосредственное экспериментальное определение влияние качки на накопленные ошибки по выходам интеграторов. Это влияние может быть оценено при установке ДУС на прецизионном роторном стенде, предназначенном для определения калибровочной характеристики, если задавать периодические законы изменения угла.

Но при отсутствии такого дорогостоящего стенда с программным управлением можно обойтись поворотной платформой, поворотным столом без датчика угла, но с дополнительными устройствами, а именно, устройствами точного фиксирования, упорами, желательно в двух нескольких положениях, но, возможно, только в одном. Такое устройство может быть квалифицировано, как одноосный поворотный стол для задания произвольных угловых движений с позиционированием в начальном и конечном положениях по упорам.

Испытуемый ДУС устанавливается на поворотную платформу, в определенном положении, с измерительной осью (или поперечной осью, если представляет интерес влияние поперечной составляющей угловой скорости) датчика параллельной оси, вокруг которой можно задавать повороты платформы последовательно в одну и другую стороны с помощью привода возвратно-поступательного движения или даже вручную. В течение интервалов времени, для которых накопленные ошибки по углу, скорости и остаются в допустимых пределах, поворотной платформе задаются возвратно-поступательные вращательные движения. Желательно, чтобы амплитуды и частоты угловых скоростей можно было варьировать, хотя бы в нешироких пределах. Для задания углов поворота со знакопеременными скоростями могут быть использованы любые средства, в частности электропривод нерегулируемой скорости, который реверсируется по сигналам конечных выключателей. При задании вращений вручную нет необходимости удерживать постоянные значения амплитуд и частот, естественная нестабильность этих параметров будет соответствовать случайному характеру угловых колебаний объекта в реальных условиях эксплуатации.

Важно, что начальное и конечное угловое положения платформы должны задаваться точно, механически, по жестким упорам. Если упоров два (безразлично, в одной стороне или в обоих), то должен быть заранее точно известен (измерен) угол между угловыми положениями платформы на одном и другом упорах. Но целесообразно в качестве основного режима выбрать такой, при котором при снятии с упора после серии угловых колебаний происходит возвращение в исходное угловое положение (на тот же упор), тогда приращение угла равно нулю, а значение сигнала на выходе первого интеграла представляет собой накопленное значение погрешности по углу.

Возвращение к упору может осуществляться многократно, по получаемым при этом значениям выходного сигналов интеграторов может быть построена непрерывная зависимость от времени накопленной погрешности по углу. Применительно к выходам второго и третьего интеграторов нужно вводить поправки, которые должны получаться интегрированием угла поворота. По сравнению с испытаниями на неподвижном основании в результаты естественным образом добавляется влияние нелинейности характеристики, хотя она сама при этом непосредственно не определяется.

Описанная процедура часто используется на практике, хотя она не нашла отражения в каких-либо нормативных документах по испытаниям.

В больших организациях имеются специальные подразделения, испытательные отделы, располагающие комплексами стендового оборудования. Парк стендов как правило, создавался десятилетиями, многие из стендов изношены, давно технически и морально устарели, в них отсутствуют средства автоматизации. Кроме того, они часто приспособлены для испытаний громоздких и тяжелых блоков, типичных для старой приборной техники, они не способны перекрывать диапазоны параметров воздействий в соответствии с современными стандартами.

Поэтому уже давно требуется замена стендового оборудования современным. По мере возможностей это делается, но нужно четко представлять спектр возможностей в этом направлении. Типичными можно считать следующие варианты.

1. В организации – изготовителе продукции, подлежащей испытаниям, прорабатываются возможности осуществления испытаний в другой организации или в отдельной, специально аттестованной испытательной лаборатории. При этом основным моментом является установление и документирование основных требований к испытаниям и согласование их с заказчиком продукции и с исполнителем, который будет проводить испытания.

2. Предварительно прорабатываются возможности испытаний изделий в самой организации-изготовителе. В этих случаях необходимо, с одной стороны, установить типовые требования, содержащиеся в стандартах и технических условиях на подобные конкретные изделия, а с другой — проанализировать сведения об имеющемся в организации испытательном оборудовании.

3. При отсутствии в организации-изготовителе испытательного оборудования ставится вопрос о приобретении стендов. Необходимо изучить все доступные материалы о серийно выпускаемых испытательных установках и, возможно, об отдельных разработках отечественных организаций, а также о стендах, выпущенных в единичных экземплярах или о нереализованных проектах, как возможных прототипах, а затем сопоставить их с требованиями к параметрам и режимам испытаний.

4. При установлении категорической необходимости создания новых стендов под новые требования нужно формулировать технические требования для разработки нового испытательного оборудования, предусмотреть необходимость и обеспечить его аттестацию и сертификацию, а также разработать методики испытаний на этих стендах.

5. В организации, получившей заказ на создание нового испытательного оборудования с формулировкой всех технических требований, нужно провести весь цикл, начиная с поэтапного проектирования, включая конструирование, представление рабочей документации, выбор комплектующих, размещение заказов на изготовление составных частей, сборку, монтаж и отладку.

6. Существующее испытательное оборудование, созданное в самой организации или полученное со стороны, без существенных изменений необходимо или модернизировать с целью расширения возможностей (например, изменения диапазона), или дополнить вспомогательными механическими устройствами, или повысить степень автоматизации, или встроить в единый комплекс с другим оборудованием.

7. При наличии необходимого испытательного оборудования необходимо разработать новые методики осуществления испытаний, обосновать задание режимов испытаний, выбрать те или иные алгоритмы обработки первичных данных, вторичной обработки, и соответствующее программное обеспечение, обеспечить регистрацию окончательных результатов и их представления.

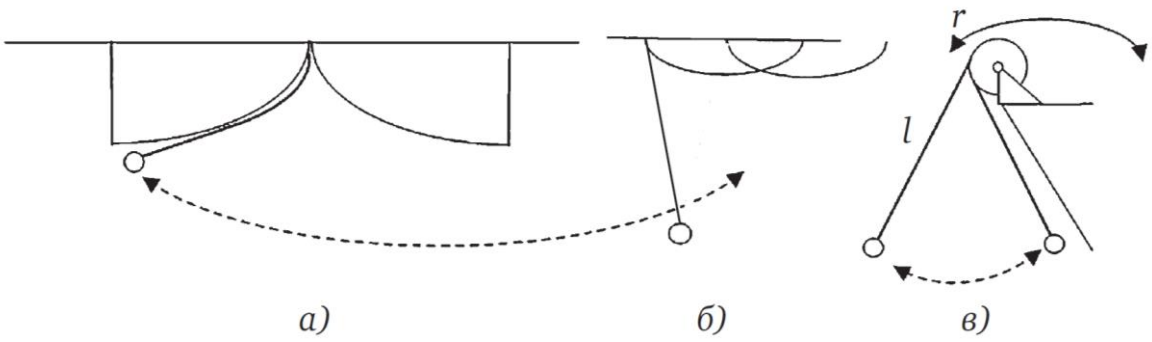
В конкретных ситуациях перечисленные задачи могут ставиться и решаться в различных комбинациях. Нужно быть готовым если не самостоятельно проводить указанные работы, то по крайней мере, хорошо понимать проблематику и активно участвовать в их выполнении на различных этапах испытаний.

9.10. Выводы

Рассмотрены вопросы планирования, организации и проведения испытаний микромеханических датчиков и приборов, в том числе микромеханических гироскопов, входящих в состав навигационных систем и комплексов подвижных объектов.

Использование шаблона для формирования траектории

Исторически определенный, но не столько теоретический, сколько практический интерес представляли задачи о математическом маятнике, у которого нить подвеса при колебаниях «ложится» на гладкий выпуклый профиль (рис. 1).



а) б) в)

Рис. 9.14. Маятник, ложащийся на профиль

В процессе колебаний зона, в которой осуществляется контакт с неподвижным профилем изменяется, причем она, естественно, зависит от амплитуды колебаний. Контур профиля может выбираться по-разному. Представляют особый интерес случаи, когда зона контакта захватывает небольшую часть длины гибкой нити подвеса маятника (рис. 1.1, б). Это делается тогда, когда опасен крутой перегиб нити в зоне заделки и нужно ограничивать снизу радиус ее кривизны. Отличием траектории от круговой в подобных случаях пренебрегают. Однако далее рассматривается общий случай большой длины контакта.

Одной из причин такого интереса является то, что соответствие между траекторией маятника и профилем описывается в терминах классической геометрии: профиль представляет собой эволюту, а траектория — эвольвенту (развертку). Из вариантов выбора профиля особое место отводится циклоиде.Известно, что в этом случае траектория концевой массы также представляет собой такую же, но смещенную циклоиду.

Другой динамический аналог такого маятника может представлять собой шаблон с желобом, по которому катится шарик.

9.11. Постановка задачи «активная прецессия»

Рассматривается задача раскручивания с угловым ускорением и последующей стабилизацией угловой скорости вращения тела на гибкой нити.

Близкий аналог - кручение связки ключей или брелка на пальце.

Тело (точка A_1 кончик стрелки массой m) подвешено на нерастяжимой нити в точке О.

Производят перемещение центра вращения (подвеса) из точки О в точку O_1.

Само тело, пытаясь возвратить положение устойчивого равновесия, перемещается из точки А в точку A_1.

Цикл повторяется.

Совершается вращение по часовой стрелке центра подвеса с радиусом r и угловой скоростью ω. Можно назвать их параметрами «активной прецессии».

С той же угловой скоростью при определенных условиях будет двигаться и тело.

Предполагается, что задача классифицируется как адаптивная, надо получить условия адаптации – согласованного движения центра подвеса и тела – одинаковости угловых скоростей.

Если радиус вращения r будет меньше, то угловая скорость ω будет больше.

Надо определить все возможные расчетные соотношения и решить на компьютере тестовую задачу.

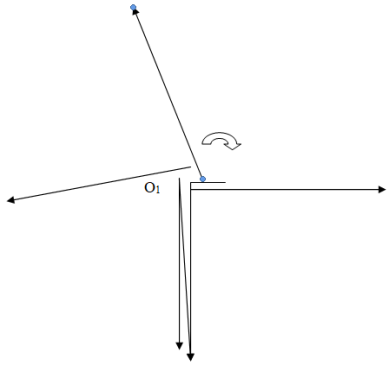


Рис. 9.15. Раскручивание тела на нити

Данная задача предлагается как тема дальнейших исследований в данной области.

Список литературы

1. Adlaj S. An eloquent formula for the perimeter of an ellipse // Notices of the AMS. 2012. 59(8). P. 1096-1097.
2. Bohnenberger Johann G.F. (1817) «Beschreibung einer Maschine zur Erläuterung der Gesetze der Umdrehung der Erde um ihre Axe, und der Veränderung der Lage der letzteren» («Описание машины для объяснения законов вращения Земли вокруг своей оси и изменения направления последней»). Tübinger Blätter für Naturwissenschaften und Arzneikunde. 1817. Vol. 3. P. 72—83.
3. Berthoz A., Graf Werner, Vidal Pierre Paul. The Head-neck Sensory Motor System. 1. Oxford University Press, 1992. 748 p.
4. Brinckmann E. Biology in Space and Life on Earth: Effects of Space- flight on Biological Systems. 1. Heppenheim: Wiley-VCH, 2007. P. 30.
5. de Nevers N. Air Pollution Control Engeneering. 2. The MkGraw-Hill Companies, Inc., 1999. C. 88. 586 c.
6. Liptak Bela G. Flow Measurement. CRS Press, 1993. P. 51. 211 p.
7. Poisson Simeon-Denis (1813) «Mémoire sur un cas particulier du mouvement de rotation des corps pesans» («Статья об особом случае вращательного движения массивных тел»), Journal de l'École Polytechnique. Vol. 9. P. 247—262.
8. Standish E.M. , Williams J.G. Chapter 8: Orbital Ephemerides of the Sun, Moon, and Planets // Интернет-ресурс: http://iau-comm4.jpl.nasa. gov/XSChap8.pdf.
9. Александрович Н. Основы астрономии: Учебный курс на базе основ физики и математики. Электронный ресурс: http://hea.iki.rssi. ru/~nik/astro/.
10. Амензаде Ю.А. Теория упругости: учебник для вузов. М.: Высшая школа, 1976. 272 с.
11. Аминов Ю.А. Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990. 215 с.
12. Анчиков А.М. Основы векторного и тензорного анализа. Казань: Казанский университет, 1988. 138 с.
13. Аппель П. Теоретическая механика. Статика. Динамика точки. Т. 1. М.: Физматгиз. 1960. 515 с.
14. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
15. Асеев А. Евклидова и неевклидова геометрия. URL: https://studfiles.net/preview/4251701/page:3/
16. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия 7-9 классы / М.: Просвещение, 2010. 384 с.
17. Балк М.Б. Элементы динамики космического полета. М., 1965. 340 с.
18. Берри А. Краткая история астрономии / пер. с англ. С.Г. Саймовского. М., 1946.
19. Брейсуэлл Р. Н. Преобразование Фурье // Scientific American. Издание на русском языке. 1989. № 8. - С. 48–56.
20. Бодунов Н. И., Закиров И. М., Бильченко Г. Г. К вопросу определения силовых параметров Формообразования профильных деталей на гибочно-растяжном оборудовании с программным управлением // Известия вузов. Авиационная техника. 1996. № 1. - С. 69-73.
21. Бодунов Н. М., Закиров И. М. Повышение точности изготовления деталей из профилей на станках ПГР с программным управлением // Кузнечно-штамповочное производство. 1992. № 9. - С. 17-20.
22. Бодунов Н. М. Разработка математической модели и методики расчета параметров процесса изготовления деталей из профилей на гибочно-растяжном оборудовании с программным управлением: Дисс. канд. техн. наук. – Казань : КТГУ, 1993. - 18 с.
23. Бодунов Н. М., Закиров И. М., Лысов М. И., Дружинин Г. В. Расчет параметров Формообразования профильных деталей обтяжкой с растяжением и радиальным сжатием / // Изв. вузов. Авиационная техника. 1994. № 3. - С. 60-65.

24. Бронштэн В.А. Как движется Луна? М.: Наука. 1990. 208 с.
25. Бронштэн В.А. Клавдий Птолемей. II век н.э. М.: Наука. 1988. 240 с.
26. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 1. М.: Наука. 1965. 468 с.
27. Валле-Пуссен Ш.-Ж. Лекции по теоретической механике. Т. 1. М.: ИЛ, 1948. 339 с.
28. Ван дер Варден Б. Пробуждающаяся наука II. Рождение астрономии / пер. с англ. Г.Е. Куртика. М.: Наука. 1991. 384 с.
29. Визгин В.П. Релятивистская теория тяготения. М.: Наука. 1985. 352 с.
30. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М.: АСТ: Астрель, 2005. 991 с.
31. Галилей Г. Диалог о двух системах мира. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. 380 с.
32. Галилей Г. Сочинения. Т. 1. М.-Л.: Гостехиздат, 1934. 696 с.
33. Герц Г. Принципы механики изложенные в новой связи. М.: АН СССР, 1959. 386 с.
34. Голубов Б.Н., Геворкян С.Г. Гравитационный эффект техногенного смещения оси вращения Земли и геологические следствия уточнения закона всемирного тяготения // Современные глобальные изменения природной среды / под ред. Н.С. Касимова и Р.К. Клиге. Т. 3: Факторы глобальных изменений. М.: Научный мир, 2012. С. 244-266.
35. Горбунов М. Н. Технология заготовительно-штамповочных работ в производстве самолетов. - М.: Машиностроение, 1981. - 224 с.
36. Гордиенко А.Б., Золотарев М.Л., Кравченко Н.Г. Основы векторного и тензорного анализа. Кемерово: Кемеровский гос. ун-т, 2009. 133 с.
37. Гусятников П.Б., Резниченко С.В. Векторная алгебра в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 1985. 232 с.
38. Делоне Б.Н., Райков Д.А. Аналитическая геометрия. Т. 2. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1949. 518 с.
39. Диментберг Ф.М. Винтовое исчисление и его приложение в механике. М.: Наука. 1965. 200 с.
40. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление: учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2001. 575 с.
41. Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М.: Высш. шк., 1983. 575 с.
42. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука. 1978. 456 с.
43. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука. 1968. 800 с.
44. Евстифеев М.И., Розенцвейн Д.В., Челпанов И.Б. Анализ прочности упругих подвесов микромеханических гироскопов // Гироскопия и навигация. 2009. №.3 – С.22-34.
45. Евстифеев М.И., Степанов О.А., Челпанов И.Б. Испытания микромеханических приборов. Учебное пособие. - Санкт-Петербург : Издательство ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». 2013. 210 с.
46. Журавлев В.М. Прецессия сферического маятника. URL: http:// www.spacephys.ru/pretsessiya-sfericheskogo-mayatnika
47. Журавлев В.М. Лаборатория космических исследований Интернет-источник: http://www.spacephys.ru/pretsessiya-sfericheskogo-mayatnika
48. Зельдович Я.Б. Двухчастотный маятник на вращающейся платформе. УФН. – r0412d.
49. Зигель К.Л. Лекции по небесной механике. М.: ИЛ, 1959. 300 с.
50. Идельсон Н.И. Этюды по истории небесной механики. М.: Наука. 1975. 496 с.
51. Иродов И.Е. Основные законы механики. М.: 1985. 248 с.
52. Кантор И.Л., Солодовников В.С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 144 с.
53. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. Т. 1 (кинематика, статика, динамика точки). М.: Наука, 1977. 480 с.
54. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Курс общей физики. В 2 т. Т. 1 Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / под ред. А.С. Кингсепа. М.: Физматлит, 2001. 560 с.
55. Клайн М. Математика. Поиск истины. М.: Мир. 1988. 295 с.

56. Колчинский И. Г., Корсунь А. А., Родригес М. Г. Бессель Фридрих Вильгельм // Астрономы. Биографический справочник. Киев: Наукова думка, 1977. 512 с.
57. Коперник Н. О вращениях небесных сфер. М.: Наука, 1964. 654 с.
58. Коперник Н. // Философский энциклопедический словарь. М.: Советская энциклопедия. 1983.
59. Котельников А.П. Винтовое исчисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. М. : КомКнига, 2006. 224 с.
60. Кочетков А.В., Федотов П.В. Анализ понятия «пространство» в общей теории относительности // Пространство и время. 2013. № 4(10). С. 42-49.
61. Кочетков А.В., Федотов П.В. Метод решения задачи двух тел // Науковедение. 2015. Т. 7, № 6. [Электронный ресурс]. URL: http:// naukovedenie.ru/PDF/70TVN615.pdf.
62. Кочетков А.В., Федотов П.В. Новые методические подходы решения сферического маятника в элементарных функциях. Введение в топологическую механику // Вестник Евразийской науки, 2019. № 2.
63. Кочетков А.В., Федотов П.В. Общая теория относительности и параметрический постньютоновский формализм // Интернет-журнал «Науковедение». 2012. № 4. [Электронный ресурс]. URL: http:// naukovedenie.ru_45tvn313.
64. Кочетков А.В., Федотов П.В. О соотношении методов расчета движения планет по Птолемею и Кеплеру (часть 1) // Интернет-журнал «Науковедение». 2014. Т. 7. № 4. [Электронный ресурс]. URL: http:// naukovedenie.ru/PDF/143TVN415.pdf.
65. Кочетков А.В., Федотов П.В. О соотношении методов расчета движения планет по Птолемею и Кеплеру (часть 2) // Интернет-журнал «Науковедение». 2014. Т. 7. № 5. [Электронный ресурс]. URL: http:// naukovedenie.ru/PDF/20TVN515.pdf.
66. Кочетков А.В., Федотов П.В. О соотношении методов расчета движения планет по Птолемею и Кеплеру (часть 3) // Интернет-журнал «Науковедение». 2014. Т. 7. № 5. [Электронный ресурс]. URL: http:// naukovedenie.ru/PDF/21TVN515.pdf.
67. Кочетков А.В., Федотов П.В. От Ньютона до параметризованного постньютоновского формализма: нули и единицы // Пространство и Время. 2013. № 4(14). С. 81—85.
68. Кочетков А.В., Федотов П.В. Проблемы гармонизации радикальных противоречий в аксиоматике естественных наук. М.: Машиностроение, 2015. 320 с.
69. Кочетков А.В., Федотов П.В. Решение задачи движения сферического маятника методом топологических векторов // Вестник Евразийской науки, 2019. № 6.
70. Кочетков А.В., Челпанов И.Б., Федотов П.В. Определение периода больших колебаний маятника в элементарных функциях // Измерительная техника. 2016. № 6. С. 39.
71. Кочетков А.В., Федотов П.В. Оценка проявления исторического менталитета в современной механике и физике // Пространство и Время. 2013. № 2(12). С. 62—71.
72. Кочетков А.В., Федотов П.В., Карнеев С.В. Проблемы длинных волн в дорожной отрасли // Грузовик. 2016. № 10. С. 45.
73. Кочетков А.В., Федотов П.В. Проявления исторического мышления в современной физике (Лекции для непрофессионалов). Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2001. 176 с.
74. Кочетков А. В., Зайцев В. М. Опыт разработки и эксплуатации профилегибочного станка ПГР-6АД с УЧПУ 2Р32М // Технология авиационного приборо- и агрегатостроения : Научн. произв. сб. - Саратов, 1994. № 1-2. - С. 6-9.
75. Кочетков А. В., Бржозовский Б. М., Челпанов И. Б. Исследование влияния износа формообразующего контура обтяжного пуансона на пружинение деталей // Известия вузов. Авиационная техника. 1995. № 4. - С. 42-46.
76. Кочетков А.В., Бржозовский Б.М., Челпанов И.Б. Формообразование сложнопрофильных деталей на технологических роботах гибки с растяжением.- Саратов : Сарат. гос. техн. ун-т., 1996. - 192 с.
77. Кочетков А.В. Формообразование сложнопрофильных деталей на технологических роботах гибки с растяжением: Дисс. докт. техн. наук: 05.02.05. -

СПб. : СПбГТУ, 1997. - 340 с.
78. Кранц П. Сферическая геометрия. М.: Изд-во ЛКИ, 2007. 96 с.
79. Вся высшая математика. Т. 3 / М.Л. Краснов, А.И. Кисилев, Г.И. Макаренко и др. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 240 с.
80. Кузнецов Б.Г. Проблема истинного движения Земли в «Диалоге» Галилея. // Труды Института истории естествознания и техники. М.: АН СССР, 1954. Вып. 1. С. 249—266.
81. Кунин С. Вычислительная физика. М.: Мир. 1992. 518 с.
82. Куртик Г.Е. Понятие скорости в античной науке: Аристотель-Птолемей / Исследования по истории физики и механики. М.: Наука, 1997. С. 219-248.
83. Лаврентьев М.М., Гусев В.А., Еганова И.А. и др. О регистрации истинного положения Солнца // ДАН СССР. 1990. С.Т. 315. № 2. С. 368—370.
84. Лакатос И. Фальсификация и методология научно-исследовательских программ. М.: Медиум, 1995. 235 с.
85. Лысов М. И. Теория и расчет процессов изготовления деталей методами гибки. - М.: Машиностроение, 1966. - 236 с.
86. Лысов М. И., Закиров И. М. Пластическое Формообразование тонкостенных деталей авиатехники. - М.: Машиностроение, 1983. - 176 с.
87. Маркеев А.П. Задача трех тел и ее точные решения // Соросовский Образовательный журнал. 1999. № 9.
88. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М: ЧеРо, 1999. 572 с.
89. Математика ее содержание, методы и значение. Т. 3 / под ред. А.Д. Александрова. М.: АН СССР, 1956. 336 с.
90. Математическая энциклопедия. Т. 1. М.: Советская энциклопедия. И.М. Виноградов. 1977. 576 с.
91. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: МГУ, 1980. 439 с.
92. Найдыш В.М. Концепции современного естествознания. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Альфа-М; ИНФРА-М, 2004. 622 с.
93. Небесная механика // Большая советская энциклопедия: В 30 т. М.: Советская энциклопедия, 1969-1978.
94. Нейгебауэр О. Точные науки в древности / пер. с англ. Е.В. Гохман; под ред. А.П. Юшкевича. М.: Наука, 1968.
95. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М.: Высш. шк., 1990. 607 с.
96. Николаев Ю.К. История создания гироскопов и гироскопических приборов // [Интерент-источник]: https://scientificrussia.ru/ articles/istoriya-sozdaniya-giroskopa-i-giroskopicheskih-priborov
97. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989. 688 с.
98. Одинг С. С., Сидоренко А. А., Лопасов С. А. и др. Система автоматизированного проектирования технологической операции и синтеза управляющих программ формообразования деталей из профилей / // Кузнечно-штамповочное производство. 1993. № 9. - С. 5-6.
99. Охоцимский Д.Е. Динамика космических полетов. Конспект лекций, прочитанных на механико-математическом факультете МГУ в 1962/1963 уч. г. М.: МГУ. 1968. 157 с.
100. Охоцимский Д.Е., Сихуралидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990. 448 с.
101. Паннекук А. История астрономии / пер. с англ. Н. И. Невской. М.: Наука. 1966. 590 с.
102. Парс Л.А. Аналитическая динамика. М.: Наука. 1971. 636 с.
103. Пельпор Д.С. Гироскопические системы. Ч. 1. Теория гироскопов и гироскопических стабилизаторов. М.: Высш. шк., 1971. 568 с.
104. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974. 176 с.
105. Птолемей К. Альмагест или математическое исследование в тринадцати книгах / пер. с древнегр. И.Н. Веселовского. М.: Наука. Физматлит, 1998. 672 с.

106. Пуанкаре А. Избранные произведения. В 3 т. Т. 1. М.: Наука, 1972. 999 с.
107. Разевиг В.Д. Цифровое моделирование многомерных динамических систем при случайных воздействиях // Автоматика и телемеханика. 1980. № 4. С. 177-186.
108. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. Л.: Гос. Изд. технико-теоретической лит-ры, 1950. 428 с.
109. Речкалов В.Г. Векторная и тензорная алгебра. Челябинск: Образование, 2008. 140 с.
110. Рублев А.Н. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии: учебник для втузов. М.: Высш. шк., 1972. 424 с.
111. Рябов Ю.А. Движения небесных тел. М.: 1977. 208 с.
112. Савченко В.Н., Смагин В.П. Начала современного естествознания. Концепции и принципы. Ростов-на-Дону: Феникс. 2006. 324 с.
113. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука. 1970. 492 с.
114. Струве В.Я. Этюды звездной астрономии. М: Академия наук СССР. 1953. 235 с.
115. Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука. 1968. – 800 с.
116. Табылов А.У. Обоснование параметров рабочего органа щебнераспределителя для устройства шумовой краевой полосы автомобильных дорог. – Алматы, КазАТК, дисс. … канд. техн. наук. 2007, 24 с.
117. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Высш. шк., 1986. 416 с.
118. Теория движения Луны // Интернет-ресурс: http://www. astrolab.ru/cgi-bin/manager.cgi?id=33&num=495.
119. Федосова М. Кругосвет. URL: https://www.krugosvet.ru/ node/41971?page=0,0 (дата обращения 16.04.2019).
120. Федосова М. Сферическая геометрия URL: http://masters. donntu.org/2014/fknt/nepochataya/library/article6.htm
121. Фларри П. Квантовая химия. Введение. М.: Мир. 1985. 472 с.
122. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гос. изд. тех.-теор. лит., 1955. 504 с.
123. Фрейман Л.С. К истории доказательства теоремы Кориолиса // Труды института истории естествознания и техники / гл. ред. Н.А. Фигуровский. Т. 10. М.: АН СССР, 1956. С. 213-244.
124. Хайкин С.Э. Силы инерции и невесомость. М.: Наука. 1967. 312 с.
125. Чеботарев Г.А. Аналитические и численные методы небесной механики. Л.: Наука, 1965. 367 с.
126. Челпанов И.Б. Автоматические технологические машины и оборудование. Испытания машин. – Санкт-Петербург : Изд-во СПбГПУ, 2008. 296 с.
127. Чернавский А.В. Дифференциальная геометрия. М.: МГУ, 2012. 91 с.
128. Шарипов Р.А. Курс дифференциальной геометрии: учеб. пособие для вузов. Уфа: Издание Башкирского университета, 1996. 211 с.
129. Шафаревич И.Р., Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия. М.: Физматлит, 2009. 512 с.
130. Эйнштейн А., Инфельд И. Эволюция физики. М.: Наука, 1965. 328 с.
131. Эпоха каталога, эпоха равноденствия, динамическое равноденствие // Интернет-ресурс: http://www.astronet.ru/db/msg/1190817/ node20.html.
132. Яковлев И.В. Необходимые и достаточные условия. URL: http:// mathus.ru/math/iff.pdf.

Кочетков Андрей Викторович
Федотов Петр Викторович

Топологическая механика

Монография издана в авторской редакции

Сетевое издание

Ответственный за выпуск – Алимова Н.К.

Научное издание

Системные требования:
операционная система Windows XP или новее, macOS 10.12 или новее, Linux.
Программное обеспечение для чтения файлов PDF.

Объем данных 8 Мб

Принято к публикации «28» мая 2024 года

Режим доступа: https://izd-mn.com/PDF/27MNNPM24.pdf свободный. – Загл. с экрана. – Яз. рус., англ.

ООО «Издательство «Мир науки»

«Publishing company «World of science», LLC

Адрес:

Юридический адрес – 127055, г. Москва, пер. Порядковый, д. 21, офис 401.

Почтовый адрес – 127055, г. Москва, пер. Порядковый, д. 21, офис 401.

https://izd-mn.com/

ДАННОЕ ИЗДАНИЕ ПРЕДНАЗНАЧЕНО ИСКЛЮЧИТЕЛЬНО ДЛЯ ПУБЛИКАЦИИ НА ЭЛЕКТРОННЫХ НОСИТЕЛЯХ