С.Л. Василенко

Эквивалентные формы квадратичных последовательностей

Всё новое – хорошо одетое старое

Часто говорят, "новое – хорошо забытое старое".

Отчасти это правильно. Но не всегда.

Например, в математике такой принцип чаще всего не работает.

Как правило, новые формы оригинальны по своей сути, и не могут квалифицироваться "забытым старым".

В то же время многие модели как бы произрастают из имеющихся знаний, развивая их.

Поэтому здесь более уместной является русская поговорка, приведенная в эпиграфе.

Новое – не просто одетое, но хорошо приодетое старое.

То есть с явными признаками нестандартных подходов и оригинальных решений.

Истоки... К данной статье-зарисовке нас подтолкнула работа А. Майбороды [1] с интригующим названием: «Новый способ получения чисел Фидия и Татаренко».

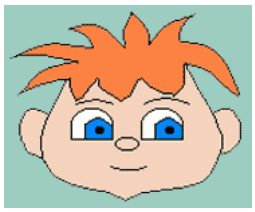
Что поделаешь? – Свежая информация естественно вызывает повышенный интерес.

В статье представлен оригинальный способ взаимного сопоставления-уравнивания положительных корней алгебраического квадратного уравнения.

Хотя, следует отметить, с самого начала нечто на уровне интуиции всё-таки указывало на узнаваемость форм и подсказывало: что-то подобное уже встречалось.

Другими словами, имеем новое как хорошо забытое, чем хорошо одетое старое.

Да и при всём уважении к творчеству А. Татаренко, результаты которого мы специально отмечали и аргументировано отстаивали в работе [2], вряд ли корректно высказываться о каких-то именных числах, давно известных до него.



А был ли мальчик?[1] Можно вспомнить, как около четырёх лет назад на страницах АТ совершенно неожиданно возникла полемика с вовлечением в неё целого ряда авторов и выяснением первенства на так называемое «обобщённое золотое сечение» (?) в виде ... обычных корней квадратного уравнения[2]. Среди них: А. Татаренко, Н. Косинов, С. Ясинский, В. Шпинадель, М. Газале, Д. Капрафф.

С самого начала вся эта шумиха, с неясными приоритетами некого соревнования выглядела, по меньшей мере, небесспорной, что отмечалось в статье [2].

Оно и понятно. Известные с восьмого класса квадратичные решения вдруг произвольно стали именоваться «*новыми* математическими константами Природы» (?).

Да и речь в целом шла о давно известных в математике положениях, включая эквивалентные формы алгебраических и разностных уравнений, представление решений в виде непрерывных (возвратных дробей) и другие давно знакомые вещи.

Всё это больше походило на не оправданную необходимостью затею.

Вероятно, допустимо было говорить о каких-то свежих наблюдениях, интерпретациях и трактовках. Ибо тема математической новизны в явном виде просматривалась очень слабо.

Несмотря на это, вполне закономерно и адекватно исходному посылу недавно появились, и ещё будут отзываться эхом другие авторы-претенденты, заявляющие о своём первенстве в этом "беге на месте": Г. Аракелян [3], В. Шенягин [4].

---

[1] Устойчивое выражение русского языка, означающее сомнение в самом факте существования предмета обсуждения. Восходит к цитате из романа М. Горького «Жизнь Клима Самгина».

[2] Их ещё называли металлосодержащими пропорциями явно не из арсенала математической терминологии.

На наш взгляд, данный вопрос выяснения-определения сомнительного старта-забега себя полностью исчерпал.

Ибо отсутствует чётко выраженный предмет новизны в уже известных доселе квадратичных решениях и связанных с ними математических образах.

В тоже время допустимо говорить о тех или иных новых находках или, на худой конец, интересных толкованиях в пределах уже сформированного квадратичного поля.

То есть нужно не просто являть научному сообществу своё упоминание о квадратных уравнениях, но демонстрировать конкретные и научно обоснованные результаты с атрибутикой новизны. Без высокопарного слога о «новых константах Природы».

Тогда это увлекательно. Одновременно полезно и результативно.

Однако в любом случае, о каком-либо «обобщённом золотом сечении» (ЗС) говорить в данном случае просто не приходится, ибо ЗС – это **константа**.

Разве что позволительно рассуждать о развитии задачи ЗС, но уже с подключением новой терминологии без всякой позолоты.

Безусловно, каждый из упомянутых авторов внёс определённую лепту и свежее дыхание в квадратичную модель. Хотя бы своим упоминанием о ней и привлечением внимания читательской аудитории к данной тематике.

Сохранение огня не менее важно его добычи. Но, в конечном итоге, от огня важнее поступление тепла и света, чем много дыма.

Естественно, прорыв в научных знаниях вокруг квадратного уравнения так и не произошел. Как и не прозвучало наличие-присутствие очевидных признаков победы в некоем марафоне-соревновании научных идей на квадратичной беговой дорожке.

В то же время вполне допустимо говорить о некотором развитии и усовершенствовании известных положений, включая вопросы практических приложений.

Вполне понятное, реалистичное, скромное, но достойное занятие. Итак...

Обобщённые квадратичные последовательности Люка.

Определение. <u>*Квадратичные последовательности*</u> (КП) – числовые ряды вида $f_n = mf_{n-1} + qf_{n-2}$ с произвольными коэффициентами (m, q) и начальными условиями $(f_0,\ f_1)$, не равными одновременно нулю.

Одним из распространённых случаев КП являются числа Люка.

Они образуются рекуррентно по формуле $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ с начальными числами $(L_0, L_1) = (2,\ 1)$ и соответствуют квадратному уравнению $x^2 = x + 1$:

$$\{L_n\} = 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76...$$

Это обычная последовательность Фибоначчи, только с изменённой парой исходных чисел. Вместо $(0,\ 1)$ принято $(2,\ 1)$.

Развитие этой задачи в пределах изменения коэффициентов приводит к квадратному уравнению общего вида $x^2 = mx + q$ и его возвратному (разностному) аналогу $\mathrm{L}_n = m\mathrm{L}_{n-1} + q\mathrm{L}_{n-2}$ с начальными условиями $(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1) = (2,\ m)$. Здесь в обозначениях специально изменён курсив $L_n \to \mathrm{L}_n$, чтобы показать отличие от чисел Люка.

Рассматривая уравнение $x^2 = mx + q$, в работе [5] методом индукции получена аналитическая (явная) формула для обобщённой последовательности Люка:

$$\mathrm{L}_n = \lambda^n + (-q)^n \lambda^{-n}. \qquad (1)$$

как обобщение формулы Бернулли–Бине[3] $F_n\sqrt{5} = \Phi^n - (-\Phi)^{-n}$,
где $\lambda = \lambda(m, q)$ – положительный корень общего квадратного уравнения

$$\lambda = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4q}}{2}.$$

В частном случае для чисел Люка имеем $L_n = \Phi^n + (-1)^n \Phi^{-n}$, где $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – константа золотого сечения.

Умножив равенство (1) на степень корня λ^n, приходим к уравнению

$$\left(\lambda^n\right)^2 - \mathrm{L}_n \cdot \lambda^n + (-q)^n = 0. \qquad (2)$$

Решая новое квадратное уравнение (2) относительно λ^n, находим

$$\lambda^n = \frac{\mathrm{L}_n + \sqrt{\mathrm{L}_n^2 - 4(-q)^n}}{2}. \qquad (3)$$

В частности для нечётных значений n получаем:

$$\lambda^n = \frac{\mathrm{L}_n + \sqrt{\mathrm{L}_n^2 + 4q^n}}{2}, \quad n = 2k + 1.$$

Иначе говоря, между корнями двух взаимосвязанных квадратных уравнений соблюдается следующее равенство:

$$\lambda(m, q)^n = \lambda\left(\mathrm{L}_n, -(-q)^n\right).$$

То есть n-я степень положительного корня квадратного уравнения $x^2 - mx - q = 0$ равна положительному корню квадратного уравнения $y^2 - \mathrm{L}_n y + (-q)^n = 0$.

Кстати вовсе не обязательно огранивать задачу лишь действительными решениями.

Ничто не мешает нам перейти и в область комплексных коэффициентов и корней.

Данные соотношения не изменяются.

Усложняются только реализации эквивалентных возвратных (рекуррентных) последовательностей.

Для чисел Люка приведенное преобразование было рассмотрено в нашей работе [6].

В частном случае для коэффициента $q = 1$ и нечётных элементов ряда $n = 2k + 1$ формула приобретает вид

$$\lambda^n = \frac{\mathrm{L}_n + \sqrt{\mathrm{L}_n^2 + 4}}{2}.$$

Именно эта форма незримо легла в основу частных наблюдений А. Майбороды [1], которые, по сути, основаны на значениях обобщенных последовательностей Люка (табл. 1).

---

[3] Эту формулу опубликовал в 1732 г. великий швейцарский математик Даниил I Бернулли (1700–1782). Она была забыта более чем на столетие (!) до 1843 г., когда вновь была выведена французским математиком Жаком Бине (1786–1856). В литературе её часто связывают только с его именем, хотя ради исторической справедливости, следует называть, по меньшей мере, формулой Бернулли–Бине.

Таблица 1

Начальные значения обобщённых последовательностей Люка $L_n = mL_{n-1} + L_{n-2}$

m	n									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	**1**	3	**4**	7	**11**	18	**29**	47	**76**
2	2	**2**	6	**14**	34	**82**	198	**478**	1 154	**2 786**
3	2	**3**	11	**36**	119	**393**	1 298	**4 287**	14 159	**46 764**
4	2	**4**	18	**76**	322	**1 364**	5 778	**24 476**	103 682	**439 204**

В частном случае для обычных чисел Люка L_n имеем:

$$\Phi^n = \frac{L_n + \sqrt{L_n^2 + 4}}{2} \qquad - \quad n = 2k+1 \text{ – нечётные;}$$

$$\Phi^n = \frac{L_n + \sqrt{L_n^2 - 4}}{2} \qquad - \quad n = 2k \text{ – чётные.}$$

Эти соотношения частично исследованы нами в работе [6].

Наравне с общей формулой (3) они в очередной раз подтверждают основополагающую мысль о квадратичной сущности золотой пропорции [7]:

у константы золотой пропорции Ф нет ни одного свойства, которое не вытекало бы из квадратного уравнения общего вида.

Единственным исключением из данного правила является ортодоксальный образ гиперболических функций Фибоначчи–Люка (ГФЛ), которые не имеют своего прототипа для квадратного уравнения общего вида.

Нет, сами прообразы подобных функций, конечно, есть: в виде широко известных в математике непрерывных огибающих функций

$$\left.\begin{matrix} C(t) \\ S(t) \end{matrix}\right\rangle = \frac{\lambda^t \pm q^t \lambda^{-t}}{\sqrt{p^2 + 4q}}.$$

Только они не сводимы к ГФЛ, когда свободный член уравнения $q > 1$.

То есть ГФЛ теряют свойства преемственности или саморазвития.

И в методологическом плане выпадают из стройного квадратичного учения о золотой пропорции. Они утрачивают органически-преемственную связь с обычным квадратным уравнением общего вида при $q \geq 1$.

Это абсолютно непостижимо! – Современная теория моделей Фибоначчи настолько мощна, что спокойно выходит на просторы алгебраического уравнения произвольной n-й степени.

А тут связь неожиданно обрывается уже на самом низком уровне обобщения задачи.

То есть, дальше простого уравнения $x^2 = px + 1$ ГФЛ не работают.

Развитие задачи золотого сечения.

Довольно странно, но когда говорят о развитии задачи ЗС в пределах квадратного уравнения общего вида $x^2 = mx + q$, обычно ограничиваются положительным коэффициентом q.

Это касается и моделей с "металлическим окрасом" $x^2 = mx + 1$.

В то же время ничто не мешает усложнять задачу по пути отрицательных коэффициентов вроде $x^2 = mx - 1$. Например, модель $x^2 = 2x - 1$ или её эквивалентное представление $z_{n+1} = 2z_n - z_{n-1}$ представляет собой арифметическую прогрессию с исходным элементом z_0 и шагом $d = z_1 - z_0$.

В зависимости от пары начальных условий (z_0, z_1), что соответствует второму порядку модели, образуются те или иные числовые ряды:

$(z_0, z_1) =$ (0, 1) – натуральный ряд: 0, 1, 2, 3, 4...
(0, 2) – чётные числа: 0, 2, 4, 6, 8...
(1, 3) – нечётные числа: 1, 3, 5, 7, 9...

Поэтому можно сказать, что натуральный ряд – в определённом смысле обобщённая последовательность Фибоначчи. В ней будущее z_{n+1} определяется удвоенным настоящим $2z_n$ за вычетом прошлого z_{n-1}. Или плюс "зеркальное" (со знаком минус) прошлое.

Можно и преобразовать $z_n = (z_{n+1} + z_{n-2})/2$.

То есть ***натуральный ряд – это среднеарифметическое прошлого и будущего***.

А вот последовательность $z_{n+1} = 2z_n + z_{n-1}$ при $(z_0, z_1) = (0,\ 1)$ известна как числа Пели, при $(z_0, z_1) = (2,\ 2)$ – числа Пели-Люка[4]. И так далее.

Suum cuique (каждому своё). Нам глубоко импонирует стремление А. Майбороды терминологически зафиксировать "числа Татаренко" [1].

Но, к сожалению, это практически невозможно.

Анализируя тему в данном русле, следует не забывать ряд важных обстоятельств. Большая часть из них подробно изложена в совместной работе с Андреем Никитиным [2].

Наш соотечественник А. Татаренко, несомненно, стал одним из первых авторов, обративших внимание научной общественности на узость восприятия мира через "розовые очки в золоченой оправе".

За ним, бесспорно, сохраняется имидж славянского ученого, который *обозначил новый вектор и дал альтернативу в исследовании гармонии*, по сути, выведя ее из гипнотического состояния за пределы стесненных рамок золотого сечения (ЗС) и поставив на новые рельсы квадратичных решений *Tm*-гармоник.

Он первый, во всяком случае, из славян, кто обратил внимание на узость ЗС в гармонии и необходимость более широкого исследования пропорции. Для начала на примере квадратичных закономерностей, которые сами по себе достаточно основательны и важны при моделировании процессов и явлений в мироздании.

Нам остается только еще раз акцентировать внимание научного сообщества на философском осмыслении понятия гармоник А.Татаренко, как альтернативе ЗС, без какой-либо математической напыщенности, ибо тут она абсолютно не причем, и известна еще с древних времен вавилонской клинописи[5].

Не менее важным лейтмотивом здесь также является проведение неуклонной линии о преемственности русских (советских) научных традиций, дабы защищать интеллектуальное достояние наших ученых, включая вопросы приоритета идей, терминологии и др.

Но вот говорить об открытии числовых констант в данном случае не приходится.

---

[4] http://mathworld.wolfram.com/PellNumber.html.

[5] «За три тысячелетия до новой эры вавилоняне умели решать квадратные уравнения и знали теорему, которую сегодня совершенно необоснованно мы называем теоремой Пифагора» (с. 8). – Фрейденталь Г. Математика в науке и кругом нас: Пер. с нем. – М.: Мир, 1977. – 261 с.

Выделять «приоритет Александра Татаренко в открытии новых математических констант Природы», – значит, де-факто нивелировать его роль, поскольку данная словесная форма работает не столько на имидж, сколько во вред и против автора [8]:

– константы вовсе не новые, им столько же лет, сколько квадратному уравнению и иррациональным числам;

– сами по себе числа с упоминаемыми радикалами не являются открытием;

– данные математические константы к природе имеют весьма отдаленное отношение, поскольку это абстракции, хотя теоретически они могут моделировать отдельные природные процессы или явления.

Следовательно, говорить о математическом открытии А.Татаренко – нарочито делать ему медвежью услугу, поскольку ни открытия в области математики, ни самой математики у него нет. Никакая академическая структура это никогда не зафиксирует, и подобный пафос ему только вредит [8].

Всякому по заслугам его…

Литература:

1. *Майборода А.О.* Новый способ получения чисел Фидия и Татаренко // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17102, 14.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322082.htm.

2. *Василенко С.Л.*, *Никитин А.В.* Развитие математических основ гармонии в Tm-системе Татаренко // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16076, 18.09.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161704.htm.

3. *Аракелян Г.* О мировой гармонии, теории золотого сечения и её обобщениях // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17064, 06.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/2065-ar.pdf.

4. *Шенягин В.П.* «Пифагор, или Каждый создает свой миф» – четырнадцать лет с момента первой публикации о квадратичных мантиссовых *s*-пропорциях // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17031, 27.11.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322050.htm.

5. *Василенко С.Л.* Аналитика "золотых" пропорций // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14795 от 12.05.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321085.htm.

6. *Белянин В.С.*, *Василенко С.Л.* Золотые крупицы математики // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16935, 04.11.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322019.htm.

7. *Василенко С.Л.* Квадратичная природа золотой пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16049, 20.08.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161692.htm.

8. *Василенко С.Л.* Квадратичные цепные дроби (квадрацепи) // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15595, 10.10.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161557.htm.

© ВаСиЛенко, 2011