С.Л. Василенко

Структурирование целого и его частей

«*Чрезмерное напряжение силы переходит в излишек, а чрезмерное расслабление – в слабость. Приведи себя в равновесие – только так ты сможешь достичь цели*».

Срединный путь, Будда.

"Золотая середина". В обиходе мы часто употребляем выражение «золотой середины», которое давно стало общераспространенной метафорой.

Возможно потому, что с соблюдением этого принципа наша жизнь становится более осмысленной, соразмерной и гармоничной.

Так сказать, в золотистых лучах ауры всеобщего благоденствия!

Крайности, как правило, несут за собой множество негативных последствий.

Аристотель считал, что добродетель – *золотая середина* между двумя крайностями. Перекос в сторону одной из крайностей способен превратить любую добродетель в порок.

Но правило золотой середины не универсально.

Так, оно не применимо к степени совершенства: уму, красоте, честности, здоровью...

Не подходит оно и ко многим геометрическим параметрам: середине страны, середине океана...

Зато правило золотой середины хорошо сочетается с *параметрами интенсивности*: мало−средне−много, низкий−средний−высокий и т.п.

Закон золотой струны Будды гласит: сильно натянуть – лопнет, слабо – провиснет, и только "золотое натяжение" даёт самый чистый тон.

Степень совершенства чаще всего достигает наивысших показателей именно при средних параметрах интенсивности.

Сегодня концепция «золотой середины» как никогда становится востребованной.

«С одной стороны, многочисленные религиозные и трансцендентальные мировоззренческие системы постепенно теряют под давлением науки и фактов реальной жизни свою прежнюю вескость. С другой стороны, раздробленная наука не в состоянии предложить новые морально-этические нормы жизни» [1].

Но «золотая середина» – не застывшая схема. «Объективная середина – это всегда динамическое равновесие противоположностей» [1].

Пока даже не задумываясь особо о том, что математически такая середина вовсе не находится чётко посредине.

Де-факто речь идёт об отказе от примитивного черно-белого двоичного мышления «да−нет» и переходе, как минимум, к троичному балансу разных противоположностей.

Но, с другой стороны, «золотая середина» – одновременно весьма вредный посыл, который ограничивает мышление и исподволь навязывает тезу, что решение всегда лежит между крайностями.

Очень часто правильное решение может быть самой крайностью или близким к ней.

"Золотая пропорция". В реальном мире абсолютное начало не существует либо полностью сокрыто. Оно способно генерироваться лишь в головах и воображении мыслящих существ, трансформируясь далее на язык абстрактной математики.

Для выражения абсолютных величин и перевода их в относительные характеристики человек ещё в глубокой древности придумал разного рода отношения и пропорции.

Так, «золотой пропорцией» в наше время обычно называют равенство двух отношений, возникающих в классической задаче о золотом сечении: *целое относится к большему, как оно – к меньшему* $1:b=b:a$.

Вообще-то вполне резонно и логично.

Хотя ещё античный философ Ямвлих отмечал, что «Пифагор нашёл "золотую пропорцию" $a:H=R:b,$ где H и R суть гармоническая и арифметическая средние между величинами a и $b,$ и что этому он научился у вавилонян» [2, с. 130].

Заметим, что «золотая пропорция» здесь представляет собой абсолютное тождество в виде равенства двух безальтернативных отношений.

Собственно, это обычные алгебраические преобразования, ибо $R=(a+b)/2,$ $H=2ab/(a+b),$ и произведение средних членов $R{\cdot}H$ равно произведению крайних членов пропорции $a{\cdot}b.$

Тем не менее, эта пропорциональность играла большую роль в пифагорейской теории музыки.

В обозначениях классической древности соотношения имели вид:

$$R-a=b-R, \qquad (H-a):a=(b-H):b.$$

И всё-таки данные выражения весьма слабо связаны с понятием пропорции, ибо здесь попросту нечего решать.

В конечном счёте, имеет место завуалированное тождество.

Чтобы как-то сберечь преемственность веков, и одновременно сохранить сложившееся современное понимание математической пропорции, соотношение $a:H=R:b$ целесообразно называть "золотой пропорциональностью" или тождественным равенством одного и того же отношения в двух разных транскрипциях.

Термин «золотая пропорция» остаётся за соотношением $1:b=b:a.$

Если первое равенство соблюдается для любой пары чисел $(a\ b)$, то второму соотношению соответствует одно единственное положительное решение, называемое константой золотого сечения или просто золотым сечением, равным

$$b=1-a=(\sqrt{5}-1)/2\approx 0{,}618.$$

Это не только неповторимая пропорция, но и особая симметрия.

«На основе пифагорейского теоретико-числового учения о гармонии формулировался еще один тип симметрии, ... который можно было бы назвать динамическим типом симметрии. Это – то, что впоследствии получило название *золотого деления*....

Динамической эту симметрию мы назвали бы потому, что она формулирует постепенный переход от целого к части; и так как этих частей может быть сколько угодно, то в порядке постепенности ими исчерпывается вся величина, взятая в целом,... путем постепенного перехода от большей части целого к его меньшей части» [3, ч. 7, гл. 6, § 1].

Есть ли золотая середина в золотом сечении? Выражения со словом "*золотое*" (правило, годы, слова...) обычно несут в себе логические выверенные свидетельства неопровержимой истины и справедливости констатируемых фактов [4].

Правда, есть и ограничения.

Например, из нынешних символов можно упомянуть "золотую молодежь". Здесь и зависть, и классовое осуждение, и нарицательное название молодых людей, близких по смыслу к мажорам.

На первый взгляд вопрос подзаголовка выглядит необычно.

Середина – это место, более или менее одинаково удаленное от краев, или средняя часть чего-нибудь, равноотстоящая от границы или начала и конца этого "чего-нибудь".

Замечательный старый термин "золотая середина" Аристотель в свою очередь заимствовал у Демокрита для развития тезы о добродетели [5, с. 164].

Вспоминая древнегреческих мыслителей, очень важно помнить одну вещь.

«Следует различать среднее μεσόν как средний член, и "среднее" μεσότηφ как "заполненность" между краями. Это последнее "среднее" оказывается синонимом пропорции». «Для этого "среднего" характерно то, чего нет у других, а именно, что полусумма крайних членов равна среднему члену, рассматривается ли непрерывное "среднее" или раздельное, или его члены берутся перестановкой. Ведь средний член, сложенный с самим собой, либо средние члены, сложенные друг с другом, равны сумме крайних» [6, с. 47].

Сегодня образ "золотой середины" употребляется, как правило, в значении наилучшего (оптимального, идеального или безупречного) варианта решения.

Хотя он недостаточно точен и больше тяготеет к аллегории, чем к сущему понятию.

Термины "золотое сечение" (ЗС) или "золотая пропорция" наоборот скрупулезно истинны и с математической точностью (до радикала) означают пропорцию-отношение $(a+b):b=b:a=\Phi$ большей части b некоторого целого $a+b$ к его меньшей части a.

В абсолютной точности величины $\Phi=(1+\sqrt{5})/2$ одновременно заключена и сила, и слабость.

Слабость вытекает из крайне ограниченного круга задач, где ЗС проявляет себя в явном виде. Остальные исследования в этой области построены исключительно на гипотетических предположениях, чаще никак не обоснованных. Из чистого желания получить вожделенное значение, хоть чем-то напоминающее число Φ. Хотя бы в две похожие цифры.

Затем во всеуслышание объявляется о некой гармоничности полученного соотношения. Будто варианты типа 1:3 или 20:80 (по Парето) выглядят менее достойно.

В этом контексте пока золотой середины в золотом сечении нет...

Немного истории об истории. Первые отчётливые документальные упоминания прообраза ЗС мы находим у Евклида в его знаменитых "Началах".

Он не ссылается на других математиков, хотя, несомненно, основывается на результатах их исследований. Возможно, это традиция того времени. Однако допустимо говорить также о наличии элементов научного плагиата. Но это так, к слову.

В разных работах по истории науки показывается, что прототипом для труда Евклида послужили более ранние сочинения античных учёных.

В частности в книгах 1–4 прослеживается Гиппократ Хиосский [2, с. 183–190] с его "Началами", откуда Евклид собственно и взял название своих трудов.

В книгах 5–6 легко угадывается Евдокс Книдский [2, с. 253–261].

Поэтому не удивительно, что одна и та же задача о золотом сечении в его современном представлении ставится и излагается Евклидом по-разному. А именно в двух формах, которые в глазах греческого математика (IV века до н.э.) весьма различны и довольно далеки друг от друга.

Вторая книга в основном содержит предложения (теоремы), относящиеся к «геометрической алгебре». В шестой книге изложено учение о подобии геометрических фигур, которое завершает планиметрию.

Первая форма ЗС связана с отношением и равенством площадей [7, с. 75].

Предложение 2.11. Данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке[1].

То есть линия разделяется так, что больший отрезок является средней пропорциональной между всей линией и меньшим отрезком.

О всяком прямоугольном параллелограмме говорят, что он заключен между двумя прямыми, образующими прямой угол (определение 2.1).

[1] В нумерации 2.11 первое число означает 2-ю книгу "Начал", другое число – 11-е предложение.

Не исключено, что похожие формы были известны еще ранее египтянам.

Вторая форма ЗС известна как задача деления отрезка в *крайнем и среднем отношении* (КСО), и первое её описание звучит следующим образом:

Определение 6.3. Говорится, что прямая делится в *крайнем и среднем отношении*, если как целая к большему отрезку, так и больший отрезок меньшему [7, с. 173].

Построение, похожее на 2.11, приведено в предложении 6.30: данную ограниченную прямую рассечь в крайнем и среднем отношении [7, с. 213]. Хотя там уже другие буквенные обозначения, нежели в первой форме. А доказательство идет через пропорциональность отрезков и нахождение большего из них.

Обратим еще внимание на слово "*говорится*", – достаточно нетривиальное образование для вводимых определений с некими флюидами безысходности, которой приходится подчиняться, или наоборот широкой апробацией-одобрением всеми говорящими [9].

Например, Сергей Ясинский анатомирует или раскрывает слово "*говорится*" тем, что «по всей видимости, в окружении Евклида хорошо знали процедуру деления отрезка в КСО, то есть считали это деление общеизвестным фактом, который не требует специального доказательства и воспринимается всеми как общеизвестная процедура» [10, с. 63].

Нам представляется, что подобное объяснение типа "знали–не знали" некую процедуру верно, но неполно. Большая часть самой геометрии Евклида построена по такому объяснению. Тем не менее, слово "говорится" используется нечасто.

Скорее всего, это означает некий понятийный образ или словесную идиому, к которой, возможно, сам Евклид имеет субъективное отношение, но все-таки раз "говорится", то говорится. Тем более что книга II берет свои начала еще от пифагорейцев.

С чем же ассоциируется подобный образ?

Наиболее вероятно это вытекает из количества сравниваемых величин (а их три).

Причем одна из них (больший отрезок) используется два раза. Таким образом, данная словесная конструкция уже применялась до Евклида, а он принял ее как должное знание.

Да и куда деваться, если "говорится"?

Когда отношение формулировали или пытались как-то формализовать в виде записей, возникал *образ двух крайних и одного, но два раза повторяемого, среднего*.

Отсюда, видимо, и возникло название.

Характерно, что ситуация не изменяется, если из таких отношений будет выстроена целая цепочка, например, непрерывной пропорции, как в первых десяти предложениях 8-й книги [8, с. 42–53]. По-прежнему остаются два самых крайних предмета (величины) и некоторая «сборная средняя» посередине.

Одновременно такая форма определения в дополнение со словом "говорится" указывает на *неопределенную дистанцию* между двумя описанными формами ЗС.

Скорее всего, большого, а возможно, и непреодолимого по тем временам расстояния. В том числе, когда еще не было четкой и однозначной связи между произвольными числами и отрезками.

Например, согласно предложению 8.11 для двух квадратных чисел существует одно *среднее пропорциональное число* [8, с. 54], которое можно, по сути, вставить между этими квадратными числами [8, с. 315] и т.п.

А нам, чтобы понять Евклида и других древнегреческих мыслителей, недостаточно быть математиком или философом. Желательно чувствовать "дух" языка того времени и обладать высочайшей степенью мимикрии, чтобы растворяться в авторах [11].

Надо на время попытаться мыслить как они. И только в этом случае можно рассчитывать на успех в понимании и интерпретации трудных мест из их трудов.

Откуда пошло название КСО? – Древние греки записывали пропорцию в строчку, вроде $a:b=c:d$. В общем случае это была геометрическая пропорция. При такой записи члены $(a\ \ d)$ считались и назывались крайними, $(b\ \ c)$ – средними.

Делить в "крайнем и среднем отношении" (КСО) закрепилось за случаем, когда средние или крайние члены одинаковые, например $b=c$. Но точно никто не объясняет, почему эта традиция такова и откуда она пошла. К ней попросту давно привыкли. Терминологию можно попытаться выяснить, только обратившись к первоисточникам – греческим текстам.

Задача КСО – это, конечно, чистой воды пропорция $1:b=b:a$.

Здесь $(1\ \ a)$ – крайние члены пропорции, $(b\ \ b)$ – средние члены.

Буквой b для удобства обозначено большее, по сходности произношения звуков в русском и латинском языках. Единица – это ограниченная (целая) прямая.

Обычно названия отношений в определении Евклида как раз и увязывают с названиями элементов пропорции.

Но если внимательно присмотреться, то отсюда никак не выстраивается данное определение. Что-то элементарно не сходится.

А ведь «говорится...». То есть, задействован некий понятный многим на то время приём употребления словесных конструкций.

Андрей Никитин выдвинул любопытную версию [12] о происхождении понятия КСО из музыкальной гармонии, отталкиваясь от монохорда, при делении струны.

Почему бы и нет? – Если музыка в то время была главной в практическом приложении изучения и реализации знаний о гармонии мироздания.

Похожую мысль мы находим у Будды: «Музыка, которую ты хочешь извлечь из себя, зазвучит только тогда, когда струны не ослаблены и не перетянуты, а как раз посередине» (Срединный или восьмеричный путь).

Напомним, «монохордом назывался деревянный продолговатый ящик, приспособление, на котором была натянута струна, а по этой струне двигалась приставка, дававшая возможность делить струну на определенные отрезки и сопоставлять эти отрезки со шкалой музыкальных инструментов» [3, ч. 7, гл. 6, § 1].

Мы не будем критиковать или подвергать сомнению музыкальные истоки, но попробуем высказать свою версию. На наш взгляд, более реалистичную. Хотя, как знать...

Логика построения КСО.

Версия 1. Сколько прошло времени, но абсолютное большинство современных учёных до сих пор не знают, почему задача ЗС в своей второй транскрипции именуется как задача о *крайнем и среднем отношении*.

Пропорцией называется равенство двух отношений, то есть $a:b=c:d$. Числа a и d называются крайними членами, а числа b и c – средними членами пропорции.

Главное свойство пропорции, которое знали ещё до Пифагора: произведение *крайних* членов пропорции равно произведению её *средних* членов.

Произведение греки выражали геометрически через площадь прямоугольника.

Другими словами, прямоугольник со сторонами крайних членов пропорции равен прямоугольнику со сторонами её средних членов.

Получается, что задача ЗС – это задача на равенство площадей через пропорцию, а конкретно, через крайние и средние члены пропорции $1:b=b:a$ или $b\cdot b=1\cdot a$.

То есть квадрат на большем отрезке $(b\cdot b)$ равен прямоугольнику на прямой (целом, 1) и меньшем отрезке $(1-b)$.

Ещё Евклид упоминает слова «Говорят, что».

Получается, это не его определение. Причём оно дано в шестой книге, уже позже задачи ЗС во второй книге.

Так что в чистом виде музыка прослеживается слабо. В основном, знания о пропорции.

Версия 2. Будем теперь идти последовательно по определению.

Хотя и не сразу, но довольно уверенно просматривается другая интерпретация.

Итак, выражение «в крайнем и среднем отношении» предполагает бесспорное наличие двух отношений: крайнего отношения и среднего отношения.

Это их названия или собственные имена.

Далее следует конкретика описаний двух отношений: Ц/Б и Б/М.

В итоге, получаем очевидное соотнесение (в порядке следования):

крайнее отношение – это отношение целого (прямой) к большему отрезку;

среднее отношение – это отношение большего отрезка к меньшему.

Пока ещё окончательная логика присвоения названий от нас сокрыта. Но мы уже близки к разгадке.

Обратимся к простым схематическим рисункам

Точка сопряжения с ***краю***

Точка сопряжения в ***середине***

Что же мы видим? Целое и большее имеют слева общий край. И одновременно точку отсчёта от этого края вправо.

Большее и меньшее имеют одну общую точку сопряжения, находящуюся где-то в середине целого отрезка.

Таким образом, название отношения Ц/Б "крайним" обусловлено наличием у них общего совпадающего края или крайней точки целого.

Наименование отношения Б/М "средним" вызвано присутствием у отрезков совместной точки, расположенной в середине целого.

Для двух сопоставляемых отрезков:

крайнее отношение соотносится с их стыковкой по краю;

среднее отношение соотносится с их стыковкой посередине.

И всё становится на свои места.

Одно соприкосновение концов с краю, другое – в средине!

Любопытно и другое. Золотая середина в древности была. А вот золотого сечения не было. Могло быть, но не стало. И это не случайно.

То есть никакого броского эпитета данной задаче не приставили. Ибо её не выделяли.

А вот пропорции присвоили имя собственное «о крайнем и среднем отношении».

Для древних важнее всего была пропорциональности, среди которых только основных насчитывался десяток. Всё остальное вторично.

Про обобщение. Переходя к более сложным построениям, мы всё же не будем употреблять словосочетание «обобщение золотого сечения», поскольку оно невольно выводит на некорректный термин «обобщённое золотое сечение». В математике золотое сечение – это не только деление, но и фундаментальная константа.

Поэтому лучше использовать понятие «*расширения* или *обобщения задачи* ЗС».

Терминологически данные выражения более-менее выверены, непротиворечивы и далеки от расплывчатого обобщения конкретного числа.

Трибоначчи, *n*-боначчи... Проследим метаморфозы крайнего и среднего отношений при расширении (усложнении) задачи ЗС путём добавления дополнительных слагаемых отрезков.

Деление целого на три отрезка.

Целое 1 так относится к большему b как оно к меньшему c, а то, в свою очередь, – к своему меньшему $a = 1 - b - c$:

$$\frac{1}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{1-b-c}.$$

Отсюда находим: $c = b^2$ и $\frac{1}{b} = \frac{b^2}{1-b-b^2}$, откуда $b^3 + b^2 + b - 1 = 0$.

Это и есть характеристическое алгебраическое уравнение трибоначчи для большей части b целого.

Итак, здесь получается одно крайнее отношение и два средних.

Назовём описанное деление «задачей о крайнем и двух средних отношениях».

Соответствующее характеристическое уравнение для отношения целого к большему $x = 1/b$ имеет вид:

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0.$$

Если говорить про *обобщение задачи ЗС* (но не самого числа ЗС!), то можно обратиться к известной модели n-боначчи.

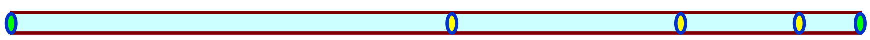
Это, пожалуй, наиболее правильное и логически верное направление, органически вытекающее из задачи золотого сечения, не выходя за пределы планиметрии.

Соответственно система n-боначчи легко идентифицируется (квалифицируется) нами как *задача о крайнем и* $(n-1)$ *средних отношениях*: целое так относится к первому, как оно ко второму, которое, в свою очередь, – к третьему … и так далее до последнего <отрезка>:

$$\frac{1}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \ldots = \frac{g}{1-b-c-d-\ldots-g} \quad \Rightarrow \quad b^n + b^{n-1} + \ldots + b = 1;$$

$$x = \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad x^n = x^{n-1} + \ldots + x + 1.$$

Например, для четырёх отрезков $n = 4$ расположение трёх точек деления приобретает вид (задача о крайнем и трёх средних отношениях):



И так далее до бесконечности. В пределе $n \to \infty$ имеет место типичная дихотомия $\sum_n 2^{-n} = 1$ или задача «о крайнем и бесконечном количестве средних отношений».

При этом каждые два соседних отрезка относятся в соотношении $1:2$.

Задача о крайнем отношении. Если от золотого сечения пойти в сторону упрощения характеристического уравнения, то придём к соотношению $x - 1 = 0$.

Решением в этом случае становится само целое.

То есть, целое так относится к самому себе, как оно же – к целому.

Нечто формульной структуры $\frac{1}{1} = 1$.

Чисто алгебраически она выглядит вроде бы и правильно.

Однако в переходе на физические интерпретации кажущаяся очевидность нарушается.

В частности, в тех случаях, когда целое описывается размерными (мерными) переменными.

Так, величина $1/1$ по логике операции деления всегда является безразмерной.

Поэтому для размерных величин структура $1/1 = 1$ теряет смысл.

Заметим, что в данной задаче вообще отсутствует среднее.

Поэтому она спокойно можно называться «задачей о крайнем отношении».

Геометрические интерпретации. Рассмотрим квадратное уравнение $b^2 + b = 1$ – прототип большего отрезка при золотом сечении.

Данную модель можно интерпретировать на геометрическом языке через площади соответствующих прямоугольников.

$$\boldsymbol{b \cdot b \; + \; b \cdot 1 \; = \; 1 \cdot 1}$$

квадрат на отрезке — **прямоугольник на отрезке и прямой** — **квадрат на прямой**

Немного усложнено. Зато всё корректно.

Но можно и уменьшить количество сравниваемых фигур с трёх до двух.

Если одно слагаемое перенести вправо и выделить общий множитель в виде целого или исходной прямой, то приходим к наиболее простому толкованию золотого сечения, которое и приведено в "Началах" Евклида.

$$\boldsymbol{b \cdot b \; = \; 1 \cdot (1 - b)}$$

квадрат на отрезке — **прямоугольник на прямой и другом отрезке**

По сути, это есть не что иное, как одно из ключевых свойств математической пропорции: «перемножение членов пропорции крест-накрест».

Действительно, из классического определения ЗС «целое к большему, как большее к меньшему» следует:

$$\frac{1}{b} = \frac{b}{1-b} \qquad \Rightarrow \qquad b \cdot b = 1 \cdot (1-b).$$

Два слова о музыке. «Если уменьшить длину струны или флейты вдвое, тон повысится на одну октаву. Совершенно также, если уменьшать в отношении 3:2 и 4:3, то этому будет соответствовать интервалы квинта и кварта. Для пифагорейцев получило первостепенное значение то, что важнейшие гармонические интервалы могут быть получены при помощи отношений чисел 1, 2, 3, 4» [2, с. 132].

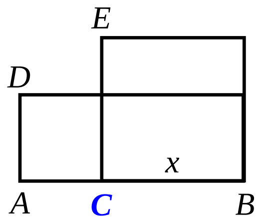
Они составляли знаменитую "тетраду" с треугольным числом 10 = 1 + 2 + 3 + 4.

Многие из арабских математиков занимались вопросами музыкальной науки и поиском пропорциональной связи высоты тона с длиной порождающей его струны. Приведем лишь слова великого мыслителя Востока – Абу Насра аль-Фараби (870–950) [13, с. 85]:

«*Отношение между тонами различной степени будет таким же, как отношение между длинами порождающих их струн*».

Подробное описание музыкально-числовых взаимосвязей представлено у А. Лосева в его описании пифагорейского учения о музыкальной гармонии [3, ч. 7, гл. 6, § 1].

Некоторые исторические подробности. А вот как описывает золотое сечение Исаак Ньютон, рассматривая приведение геометрических вопросов к уравнениям [14, с. 102–103]: «Если, например, требуется разделить прямую AB в C в среднем и крайнем отношении (рисунок), т.е. разделить её так, чтобы квадрат BE большей части был равен прямоугольнику BD из всей линии и меньшей части, то положите $AB = a$ и $BC = x$, тогда АС будет равно $a - x$ и $x^2 = a(a - x)$. Приведя это уравнение, мы получим, что $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ ».



Заметим, что ни формой записи, ни каким-либо специальным названием или другими формами акцентирования константа золотого сечения никак не выделена.

Более того, величина a даже не вынесена из-под знака радикала.

Примечательно, что Ньютон по нескольку раз переписывал, тщательно отшлифовывая, свои рукописи. Но число золотого сечения совершенно не зафиксировало его внимание.

На помощь приходят числа Фибоначчи. Примечательно, что для любого натурального n выполняется соотношение [15]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Вычисление определителей даёт формулу Кассини (1680): $F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$.

То есть, произведение "крайних" элементов $F_{n+1}F_{n-1}$ равно квадрату "среднего" элемента F_n^2 плюс-минус единица.

По мере роста чисел Фибоначчи единица всё меньше и меньше оказывает влияние на результат, и формула в пределе превращается в тождество $\frac{F_{n+1}}{F_n} \approx \frac{F_n}{F_{n-1}} \Rightarrow \Phi$.

Оно и естественно. В пределе числа Фибоначчи дают константу ЗС. Здесь любопытнее другое.

Расположим эти числа в порядке убывания $\boxed{F_{n+1}}\boxed{F_n}\boxed{F_{n-1}}$.

Тогда вырисовывается такая структурная схема: *крайнее* отношение F_{n+1}/F_n, как *край* к средине, равно *среднему* отношению F_n/F_{n-1} в виде *средины* к краю (с точностью до 1).

Понятно, числа Фибоначчи не были известны в древности. Но они, что называется, уже витали в воздухе. Приходя к античным учёным через иные формы и объекты восприятия.

А именно, через группы трёх величин.

Пифагорейская школа. Пифагорейцы разработали *теорию средних величин* в виде пропорций и отношений.

Средними величинами считались *группы таких трёх величин, средняя из которых есть функция двух крайних*.

Насчитывалось десять видов таких средних величин.

Три из них – среднее арифметическое, геометрическое и гармоническое – вошли в современную математику под названием непрерывных пропорций с соответствующими средними значениями:

Наименование	пропорция	среднее
арифметическ<u>ая</u> (ое)	$a-c=c-b$	$\frac{a+b}{2}$
геометрическ<u>ая</u> (ое)	$a:c=c:b$	$\sqrt{ab}$
гармоническ<u>ая</u> (ое)	$(a-b):(b-c)=a:c$	$\frac{2ab}{a+b}$

«Гармоническое "среднее" противоположно арифметическому, а посередине между ними как крайними находится геометрическое, имеющее одинаковое отношение как между меньшими членами, так и между большими; а мы видели, что равенство находится посередине между большим и меньшим» [6, с. 48].

«Гармоническое "среднее" называется так, потому что *арифметическое выделяется по количеству*, показывая равенство в интервалах между членами; а *геометрическое – по качеству*, давая подобные сопряжения между членами. А это "среднее" по виду таково, что *в нём не видно ни одного, ни другого*: ни в одних лишь членах, ни в одних лишь разностях, но частично в членах и частично в разностях. Ведь как больший член относится к меньшему, так и разность между большим и последующим средним относится к разности между меньшим и средним; и обратно» [6, с. 51].

Сами числа делились на простые и сложные (составные).

Среди последних выделялись *плоские* числа, получаемые путём перемножения двух чисел, отличных от 1, и *телесные* числа – при соответствующем умножении трёх чисел.

Плоские числа далее делились:

на *квадратные* (square number) числа $s_n = n^2$, получаемые от умножения двух одинаковых чисел;

прямоугольные или продолговатые (pronic[2], oblong[3], rectangular or heteromecic number) – фигурные числа вида $p_n = n(n+1) = 2t_n$, как произведение двух последовательных целых чисел или удвоенные треугольные t_n.

Квадратные и прямоугольные числа помимо указанной интерпретации их в терминах операции умножения нашли также своё истолкование в терминах операции сложения.

Квадратные числа n^2 получаются в результате сложения первых n нечетных чисел

$$s_n = n^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1).$$

Прямоугольные числа являются суммой четных и нечетных чисел:

$$p_n = n(n+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k .$$

Возможны здесь и рекуррентные формы.

Так, из очевидного алгебраического тождества:

---

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Pronic_number.

[3] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – http://oeis.org/A002378.

$$(n-1)^2 = n^2 - 2n + 1 \quad \Rightarrow \quad n^2 = (n-1)^2 + 2n - 1$$

следует рекурсия для квадратичных чисел через последовательное добавление к квадратам нечётных чисел $2n-1$:

$$s_n = s_{n-1} + 2n - 1 = n^2 .$$

Из простого преобразования $n(n+1) = (n-1)n + 2n$ вытекает рекурсия для прямоугольных чисел через рекуррентное прибавление чётных чисел $2n$:

$$p_n = p_{n-1} + 2n = n(n+1) = s_n + n .$$

И, наконец, мы подобрались к замечательной пропорции:

$$\frac{s_{n+1}}{p_n} = \frac{p_n}{s_n} \quad \Rightarrow \quad s_n s_{n+1} = p_n^2 .$$

Для выявления и описания свойств данных чисел Никомах Герасский (1-я пол. 2 в. н.э.) рассматривал их в виде совмещённых рядов:

1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		n
1		4		9		16		25		36		49		64		81		100		s_n
	2		6		12		20		30		42		56		72		90		110	p_n

Затем свойства ("дружбу") чисел он описывал примерно так [6, с. 44]:

- квадраты будут иметь между собой только нечётные разности, а прямоугольные (гетеромекные) числа – только чётные;
- если мы поместим прямоугольные числа между квадратами как средний член, то будут заметны упорядоченные сопряжения из трёх членов: ведь 9 к 6 даёт полуторное отношение, так и 6 к 4 и так далее;
- *как большее относится к среднему, так и среднее к меньшему*, и каждый раз не в одном и том же отношении, но в следующем по порядку.
- во всех соединениях *произведение крайних членов равно квадрату среднего*; и далее, крайние члены с добавлением удвоенного среднего поочерёдно всегда производят квадрат.
- сложением двух соседних членов всегда производятся упорядоченные треугольные числа, так что их природа является самой первоначальной: $1+2$, $2+4$, $4+6$, $6+9$, $9+12$, $12+16$, $16+20$, и далее тоже возникают треугольные числа, которые в свою очередь порождают многоугольные.

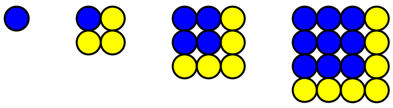
«Квадратные числа $\boldsymbol{s_n}$ получаются сложением последовательных нечётных чисел, а прямоугольные $\boldsymbol{p_n}$ – сложением последовательных чётных чисел... Всякое квадратное – среднее арифметическое своих прямоугольных соседей, а всякое прямоугольное – среднее геометрическое своих квадратных соседей» [16, с. 2].

Заметим, что большинство утверждений легко доказывается по индукции.

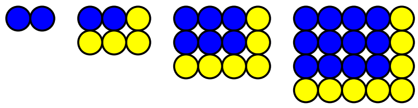
Однако пифагорейцы прекрасно обходились и без неё.

Как показано в ряде работ, для этого использовались гномоны (жёлтые уголки):

Квадратные числа



Прямоугольные числа



Пифагорейцам даже не нужно было доказывать многие равенства. Это очевидным образом следовало из самого построения. Например, наглядно видно, что каждый новый квадрат получается из старого прибавлением очередного нечетного числа и так далее.

То есть имеет место, своего рода, "визуальное" доказательство.

Теперь становится понятным, почему пифагорейцы утверждали, что «квадрат состоит из нечёта, а прямоугольник – из чёта».

Нельзя обойти стороной одно из замечательных свойств для прямоугольных чисел:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+1)}+\ldots = \sum\nolimits_{\boldsymbol{n}} \frac{1}{\boldsymbol{p_n}} = \mathbf{1}.$$

Бифуркация сознания. Сегодня нам понятно, почему золотое сечение сформировалось как геометрическая задача. С одной стороны, не была развита теория чисел, включая дробные вещественные и иррациональные.

С другой стороны, к этому привели поиски точного построения неподдающегося правильного пятиугольника.

На фоне понятных простых построений квадрата и шестиугольника это выглядело буквально вызовом пытливым умам древних мыслителей. Так сказать, стало делом чести.

Ну, и конечно, как один из примечательных частных случаев пропорции.

Если бы всего этого не было, то рано или поздно константу всё равно бы выделили среди прочих чисел, хотя бы при решении такой задачи: найти положительное число x, которое в сумме со своим квадратом x^2 даёт 1.

Понятно, что мы приходим к уравнению $x^2 + x = 1$ с корнем $\lambda = \Phi^{-1}$.

Хотя в такой постановке не так просто уловить изначальный физический смысл.

Поэтому, сдаётся, сегодня не совсем корректно говорить о числе Φ в "Началах" Евклида, как это делается, например, в работе [12].

Подобных чисел тогда не было. Более точно следует высказываться о геометрическом прообразе того, что мы сегодня называем числом Φ.

Вместо заключения. В задаче Евклида о золотом сечении «крайнее отношение», вероятнее всего, означает, что сравниваемые отрезки привязаны к краю. И отчёт ведётся от их общего края.

Соответственно «среднее отношение» характеризует состояние, когда сравниваемые отрезки сопряжены друг с другом где-то в середине, в смысле точки, находящейся в середине исследуемой прямой. И отчёт ведётся от этой точки, но уже в разные стороны.

В общей структуре знаний задача КСО была, можно сказать, рядовой, проходной.

В качестве определения Евклид написал это в шестой книге. А само золотое сечение во второй. Хотя это одно и то же.

К определениям греки подходили тщательно.

Плюс слово "говорится", что означает некую установленную договорённость, чуть ли не первопричину.

Всё это вкупе свидетельствует о том, что древним была хорошо известна задача, именуемая сегодня как задача ЗС.

Но они ей не придавали сколь заметного значения.

Сформулировали... Решили... Доказали... Начертили...

И пошли себе дальше изучать более серьёзные, как им тогда казалось, вещи.

Любопытно в этой связи квалифицированное мнение А. Лосева о Платоне:

> «Платон утверждает в "Тимее", что два тела наилучшим способом могут быть объединены только так, что "первое так относится к среднему, как среднее к последнему, и, соответственно, последнее к среднему – как среднее к первому". Здесь стоит только под первой величиной понимать всю величину, а под последней величиной – меньшую величину, и мы сразу получим закон золотого деления: вся величина так относится к ее большей части, как ее большая часть – к ее меньшей части».
>
> «Правильность взаимного соотношения элементов куба настолько велика, что она даже не нуждается в золотом делении и даже превосходит его по своей правильности... проведение диагонали внутри куба приводит к получению равнобедренных прямоугольных треугольников, в отношении которых у Платона имеется особая симпатия».
>
> «Если же мы возьмем пирамиду, октаэдр и икосаэдр, то их грани уже не будут составлены из прямоугольных треугольников, но все же из треугольников равносторонних. Однако во всяком равностороннем треугольнике путем проведения его высоты мы находим два таких прямоугольных треугольника, в которых один катет вдвое меньше гипотенузы». – Тогда больший катет равен √3 – именно это для Платона является золотым делением.
>
> «Тут-то и возникает то замечательное явление, что Платон, в сущности говоря, пользуется не чем иным, как именно золотым делением, потому что √3 лишь незначительно отличается от числа 1,62..., характерного для золотого деления». Но «полного совпадения с золотым делением здесь не получается».
>
> «Таким образом, пирамида, октаэдр и икосаэдр, несомненно, содержат в своей структуре нечто весьма близкое к золотому делению. И это вовсе не плохо, поскольку художественное впечатление определяется не только законом золотого деления в точности, но и болей широкой областью различных числовых отношении... *Платон как раз и дает гораздо более общую формулу, а не только специально формулу золотого деления*, которую мы там упомянули не в целях математической точности, а, скорее, в целях приведения только одного из примеров художественного соотношения разных частей целого».

Что же отсюда следует?

Безусловно, античные учёные имели представления о золотом сечении.

Но, можно сказать, совершенно не выделяли его из других задач (на пропорцию)!

В частности, Платон создаёт более общую конфигурацию в структурировании гармоничной модели мироздания. С тем же корнем из трёх, характерного для куба, а не только специальную формулу золотого деления.

Да и правильные многогранники он вовсе не понимает чисто геометрически, а разумеет их как физические структуры. То есть, симметрично-гармоничное деление он воспринимает в философском осмыслении одинаково, что в соотношении ЗС, что корня из трёх и т.п.

Для него здесь важна не столько математическая точность, сколь принцип единения.

Но это уже несколько другая линия в структурировании целого и его частей, которая требует отдельного осмысления...

Литература:

1. Отто Эстерле. Стратегия "золотой середины". – 12.04.2000. – http://n-t.ru/tp/mr/szs.htm.
2. *Ван дер Варден*. Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции: Пер. с гол. – М.: Физматгиз, 1959. – 456 с.
3. *Лосев А.Ф.* История античной эстетики. Т.8. Итоги тысячелетнего развития. Книга 2. – М.: Фолио; АСТ, 2000. – 688 с. – http://psylib.org.ua/books/lose008/index.htm.

4. *Василенко С.Л.* Квазизолотая пропорция в структурированных системах // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16054, 30.08.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161694.htm.

5. *Иванов В.Г.* История этики Древнего мира. – Л.: ЛГУ, 1980. – 224 с.

6. *Никомах Герасский*. Введение в арифметику. – Новосибирск: АНТ, 2006. – http://www.nsu.ru/classics/bibliotheca/Nicomachus_Arythm.pdf.

7. *Начала Евклида*. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.

8. *Начала Евклида*. Книги VII–X: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1949. – 512 с.

9. *Василенко С.Л.* "Золотой разговор" с Евклидом // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15649, 12.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161575.htm.

10. *Ясинский С.А.* "Золотое" сечение в стандартизации и теории измерения. – СПб.: ВАС, 2008. – 160 с.

11. *Белянин В.С.* К вопросу об исторической теме при изучении золотой пропорции. – 2006. – http://www.a3d.ru/architecture/stat/183.

12. *Никитин А.В.* О "крайнем и среднем…" // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16772, 21.08.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321215.htm.

13. *Аль-Фараби*. Большая книга музыки / Французский перевод: R. d'Erlander, La Musique arabe, v.1. – Paris, 1930.

14. *Ньютон И.* Всеобщая арифметика или Книга об арифметическом синтезе и анализе: Пер с англ. и комментарии А.Юшкевича. – М.: Изд. АН СССР, 1948. – 442 с.

15. *Hoggat V.E.Jr*. Fibonacci and Lucas Numbers. – Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969. – 92 p.

16. *Никомах Герасский*. Теологумены арифметики. – Новосибирск: АНТ, 2007. – http://www.nsu.ru/classics/bibliotheca/Theologoumena.pdf .