

Интегральное исчисление с константой золотого сечения. Часть 1

Не можешь взять интеграл – бери лопату.

Интегральные истоки золотого сечения.

Интегрирование, как обобщение суммирования (символ в виде удлинённой литеры s – *summa*), – одно из важнейших понятий математического анализа.

Возникает при решении многих задач, в том числе нахождении площади под кривой, пройденного пути при неравномерном движении, массы неоднородного тела, восстановления функции по её производной (неопределённый интеграл) и др.

Золотое сечение (ЗС) в своей классической постановке непосредственно связано именно с геометрическим определением площадей, хотя и выражено через пропорциональное деление фиксированного прямолинейного отрезка.

Достаточно вспомнить, что построение золотого сечения рассматривалось ещё Евклидом (предложение 11 второй книги «Начал») как раз в формулировке сравнения и равенства площадей [1, с. 75]: «Данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключённый между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке».

Древнегреческие математики не писали формул, а золотое отношение получали и выражали на языке геометрии: квадрат на большей части отрезка равновелик прямоугольнику, сторонами которого служат целый отрезок и меньшая его часть.

Таким образом, "площадочный" способ (метод) исторически стал доминирующим подходом к обоснованию и построению золотого сечения с его последующим аналитико-численным представлением и изучением.

С тех пор много воды утекло...

Золотая пропорция выросла из чисто геометрических штанишек и стала применяться для сравнения-сопоставления частей систем и/или объектов различной природы. В том числе и сложных геометрических фигур разнообразной формы, для которых просто невозможно обойтись без методов интегрального исчисления.

В настоящей работе рассматриваются определённые и неопределённые интегралы, которые содержат золотую константу в разных вариациях: пределы интегрирования, подынтегральная функция и/или собственно решение.

Для удобства изложения и наглядности восприятия многие из них снабжены геометрическим сопровождением в виде нахождения площади под заданной кривой.

Некоторые примеры ЗС через площади фигур.

Рассмотрим несложную задачу построения золотых сечений в обычном квадрате (с центром в точке O), в котором проведем полуокружность на отрезке AC как на диаметре и хорды AB , BC (рис. 1).

Без потери общности стороны квадрата примем равными 2.

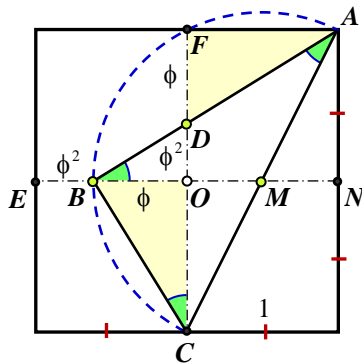
Площадь четверти квадрата равна $S_1 = 1$.

Построения и вычисления весьма простые, поэтому не будем их особо описывать и комментировать, а приведем только одно слово, которое в подобном случае писали математики в Древней Индии: «Смотри!» – рис. 1.

При сравнении площадей в данном случае вполне достаточно простых формул, для квадрата и прямоугольного треугольника.

Однако более сложные фигуры уже требуют привлечения методов интегрирования.

$$\Phi = (\sqrt{5} + 1)/2, \quad \phi = \Phi^{-1} = \Phi - 1 = (\sqrt{5} - 1)/2, \quad \phi + \phi^2 = 1$$



$AC = \sqrt{5}$	ЗС отрезков :	Отношения площадей :
$AB = \sqrt{1 + \Phi^2}$	$B = g(OE)$	$\frac{2S_{\Delta ABN}}{S_1} = \frac{S_1}{2S_{\Delta AFD}} = \Phi$
$BC = AD = \sqrt{1 + \phi^2}$	$D = g(FO)$	
$BD = \phi\sqrt{1 + \phi^2}$	$D = g(AB)$	$\frac{S_{\Delta AFD}}{S_{\Delta BDO}} = \Phi^2$
$2S_{\Delta ABC} = \sqrt{1 + \Phi^2} \sqrt{1 + \phi^2} = \sqrt{5}$	$O = g(NB)$	
$2S_{\Delta ABN} + 2S_{\Delta AFD} = \Phi + \phi = \sqrt{5}$		

Рис. 1. Золотые сечения (ЗС) отрезков и золотые отношения площадей фигур в квадрате

Так, в нашей работе [2] построена эксклюзивная функциональная кривая "золотого сердца" второго порядка $x^2 + \left(y \cdot 2\phi + \sqrt{|x| - (1-x)^2} \right) = 1$, которая отличается рядом замечательных свойств, в том числе:

- пересекает ось x в точках золотого сечения $\pm \phi$;
- расстояние между впадиной и острием равно константе золотого сечения Φ ;
- фигура имеет площадь $\pi\Phi/2$ и равновелика окружности радиусом $\sqrt{\Phi/2}$ и др.

Подчеркнем существенный момент по заданной теме:

площади "золотого сердца" и построенных на его основе золотых куполов, а также их геометрические центры (барицентры) определяются с помощью стандартных способов интегрирования.

Ещё один немаловажный аспект о значимости интегрального исчисления с константой золотого сечения обусловлен поиском форм связи между основными математическими константами. По аналогии с «теорией всего» – гипотетической объединенной физико-математической теорией, которая описывает известные фундаментальные взаимодействия.

О связи фундаментальных констант.

В литературе и социальных сетях Интернет часто можно встретить различные соотношения, объединяющие константы различной природы, например:

$$\alpha^{20} \approx \sqrt[13]{\pi\Phi^{14}} \cdot 10^{-43}, \quad \Phi \approx \sqrt{\frac{5}{6}} \pi, \quad \phi = \Phi^{-1} \approx \frac{5e}{7\pi} \quad \text{и т.п.}$$

Конечно они приближенные, и в работе [3] о базовых соотношениях между фундаментальными константами показано, что явные конечные аналитические зависимости $F(\pi, e, \Phi) \approx 0$ малопредставительны и непродуктивны.

Правда есть и точные равенства, типа безусловного тождества $\Phi = 2 \cos \pi/5$.

Но о функциональной связи $\Phi(\pi)$ здесь говорить не приходится, ибо число π играет роль условного искусственно-договорного заместителя развернутого угла.

При этом одно и то же математическое свойство выражается двумя эквивалентными способами, но разными буквами. Нет и буквального соотношения с числом π , ибо косинус $\cos(\pi/5)$ – не есть самостоятельное число.

Или взять формулу $\Phi = e^{\operatorname{arsh} 1/2}$ (Г.Аракелян, 2011).

Она не содержит сколь отличительной функциональной связи $\Phi(e)$ с признаками новизны, а является обыкновенной, если не сказать заурядной перезаписью (сложением, формальным объединением) двух тождеств-определений:

логарифма $x \equiv e^{\ln x}$ и гиперболического аресинуса $\operatorname{arsh} x \equiv \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Строгие математические взаимосвязи $F(\pi, e, \Phi) = 0$ можно образовать лишь на уровне предельных процессов, в виде рядов, непрерывных дробей, бесконечных сумм или интегралов. Тогда они выглядят точно, элегантно, достоверно и теоретически осмысленно.

Тождества Рамануджана.

Всё буквально преобразуется, когда за математический синтез берется великий мастер числовых форм – гениальный Рамануджан. Так или иначе, но числа e , π и корень из пяти (предвестник золотого сечения) присутствуют в его нетривиальных формулах с абсолютной точностью в их предельном представлении.

На основе корня из пяти $\sqrt{5}$ индийский математик вывел ряд интересных форм с использованием непростых непрерывных (цепных) дробей и бесконечных сумм.

Отдельные из них включают выражения, дающие почти целые числа.

Например, соотношение [4, № 352; 5, с. 8]

$$\frac{1}{1+} \frac{e^{-2\pi}}{1+} \frac{e^{-4\pi}}{1+} \frac{e^{-6\pi}}{1+...} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) e^{2\pi/5} = (\sqrt{\Phi+2} - \Phi) e^{2\pi/5} \approx 0,9981.$$

и его мультипликативная противоположность [6]

$$1+ \frac{e^{-2\pi}}{1+} \frac{e^{-4\pi}}{1+} \frac{e^{-6\pi}}{1+...} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) e^{-2\pi/5} = (\sqrt{\Phi+2} + \Phi) e^{-2\pi/5} \approx 1,0019.$$

Другое равенство из той же серии [5, с. 8; 35]

$$\frac{1}{1+} \frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+} \frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+} \frac{e^{-6\pi\sqrt{5}}}{1+...} = \left(\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{5^{3/4}} \cdot \phi^{5/2}} - \Phi \right) e^{\frac{2\pi}{\sqrt{5}}} \approx 0,99999920.$$

Занимательно и такое тождество с переменными знаками в цепной дроби [4, № 352]

$$\frac{1}{1-} \frac{e^{-\pi}}{1+} \frac{e^{-2\pi}}{1-} \frac{e^{-3\pi}}{1+...} = \left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) e^{\pi/5} = (\sqrt{2-\phi} - \phi) e^{\pi/5} \approx 1,0451.$$

Или тождество с бесконечным ($n = 1, 2, 3, \dots$) суммированием [4, № 629]:

$$\frac{1/2 + \sum_n e^{-\pi n^2}}{1/2 + \sum_n e^{-5\pi n^2}} = \sqrt{5\sqrt{5}-10} = (2\Phi-1)\sqrt{2\Phi-3} \approx 1,0864.$$

Ещё одна бесконечная сумма [4, № 606]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}-2)^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{[\ln(\sqrt{5}+2)]^2}{12} \approx 0,2376$$

или с представлением через константу золотого сечения

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\Phi - 3)^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{[\ln(2\Phi + 1)]^2}{12} \approx 0,2376.$$

Продолжая тему с корнем из пяти, можно напомнить и другую формулу [4, № 642], запись которой после устранения ошибок или опечаток имеет вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1}\right) \frac{5^{-n}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{2j+1}\right) \frac{5^{-n}}{2n+1} = \frac{\pi^2}{4\sqrt{5}} \approx 1,1035.$$

Далее перейдем к непосредственному исследованию различных "золотых" интегралов.

1) "Единичный" определенный интеграл.

$$I(\Phi) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^{\Phi} + 1)^{\Phi}} = 1.$$

Сначала найдем неопределенный интеграл методом замены переменных [7]:

$$\int \frac{dx}{(x^{\Phi} + 1)^{\Phi}} = \left| \begin{array}{l} t = \frac{x^{\Phi}}{x^{\Phi} + 1} \rightarrow x = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{\Phi}}, \quad \phi = \Phi^{-1} \\ dx = \phi \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\phi-1} \frac{1}{(1-t)^2} dt = \phi t^{\phi-1} (1-t)^{-\Phi} dt \end{array} \right| = \int \frac{\phi t^{\phi-1} (1-t)^{-\Phi}}{\left(\frac{t}{1-t} + 1\right)^{\Phi}} dt =$$

$$= \phi \int t^{\phi-1} (1-t)^{-\Phi} (1-t)^{\Phi} dt = \phi \int t^{\phi-1} dt = t^{\phi} + C = \left(\frac{x^{\Phi}}{x^{\Phi} + 1}\right)^{\phi} + C = \frac{x}{(x^{\Phi} + 1)^{\phi}} + C.$$

$$I(\Phi) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^{\Phi} + 1)^{\Phi}} = \left(\frac{x^{\Phi}}{x^{\Phi} + 1}\right)^{\phi} \Big|_0^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^{\Phi}}{x^{\Phi} + 1}\right)^{\phi} - 0 = 1.$$

В общем случае интеграл $I(a)$ существенным образом зависит от переменной a (рис. 2): $a < \Phi \rightarrow I(a) > 1$; $a > \Phi \rightarrow I(a) < 1$; $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = 1$.

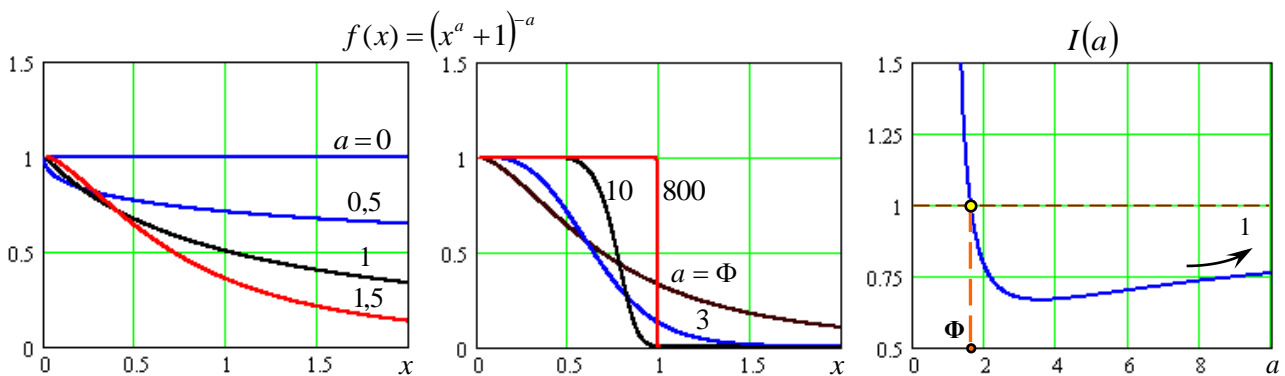


Рис. 2. Изменение подынтегральной функции $f(x)$ и определенного интеграла $I(a)$

Кроме того, интеграл $I(a)$ не имеет общего аналитического решения, во всяком случае, нам не удалось его найти. Да это собственно и неважно в рамках поставленных целей, – достаточно иметь общую картину изменения (табл. 1).

Таблица 1

Показатель степени, a	Значение интеграла $I(a)$	
Φ	1	
2	$\pi/4$	0,78540
3	$\frac{10\pi}{27\sqrt{3}}$	0,67178
3,54274	0,66568 – min	
4	$\frac{77\pi}{256\sqrt{2}}$	0,66817
8	$\frac{23\,960\,365}{268\,435\,456} \pi \cdot \csc\left(\frac{\pi}{8}\right)$	0,73276
20	0,83919	
100	0,94962	
$\rightarrow \infty$	$\rightarrow 1$	

Как видим, константа золотого сечения Φ дает строго единичное значение $I(\Phi)=1$.

Ему можно придать смысл некоего целого, к которому одновременно стремится и предельная "конструкция". А число Φ играет роль "единичного регулятора", подобно единичному магнитному полюсу.

2) Интеграл, в котором присутствуют числа: 0, 1, π , e , $\Phi = \phi^{-1}$.

По опросам американского математического журнала *The Mathematical Intelligencer* (1988) звание «самого красивого уравнения в математике» получило тождество Эйлера

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

которое в очень короткой и сжатой форме объединяет пять математических констант, в том числе 1 и 0, как нейтральные элементы по операциям умножения и сложения.

В наших работах [3, 8] оно чуть видоизменено подстановкой в него равенства $\phi^2 + \phi = 1$ для золотого сечения.

В результате получено математическое отношение шести констант математики – нуля, двух единиц (действительной 1 и мнимой i) и тройки "квадратичных" чисел (ϕ , π , e):

$$e^{i\pi} + \phi(\phi + 1) = 0, \tag{1}$$

которое названо базовым тождеством математических начал (основ) гармонии.

В таком виде тождество становится функционально совершенным и приобретает стройный гармонический образ, поскольку без параболы (через постоянную ϕ) равенство Эйлера было неполным (рис. П1).

Отличительные особенности образованного тождества:

1. В соотношении сохранена единица.
2. Одновременно посредством единицы привнесена константа золотой пропорции ϕ .

3. Тождество стало замкнутым относительно квадратичных закономерностей через тройку чисел (ϕ , π , e), характеризующих параболу, окружность (эллипс) и гиперболу.

4. Объединены основные арифметические операции: сложение, умножение и возведение в <нецелочисленную> степень.

Таким образом, тождество приобрело замкнутую законченную форму, стало гармоничным и по-прежнему красивым, как и всё у знаменитого Эйлера.

Можно встретить такое преобразованное равенство $e^{i\pi} + 2\Phi = \sqrt{5}$ с формальной заменой единицы, но оно сразу теряет шарм-лоск, присущий тождеству Эйлера, из-за отсутствия этой фундаментальной математической константы 1.

Теперь вернемся к основной теме с использованием интеграла, приведенного в справочнике [9, с. 558, № 14]:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} bx}{x(x^2 + z^2)} dx = \frac{\pi}{2z^2} \cdot \ln(1 + bz). \quad (2)$$

Положив параметры $z = 1$, $b = \phi = \Phi - 1$, с учетом золотого тождества $\Phi = 1 + \phi$ получаем простой и красивый результат

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \phi x}{x(x^2 + 1)} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \ln \Phi.$$

На этом можно и остановиться. Хотя, на наш взгляд, заслуживает внимания "взятие" данного интеграла (вместо безнадежного поиска лопатой корня квадратного) с применением подхода, придуманного великим немецким ученым Лейбницем в 17 веке [10].

Сначала найдем вспомогательный интеграл с положительными числами $a, b > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)} &= \frac{1}{a^2 - b^2} \int_0^{\infty} \frac{(a^2 + x^2) - (b^2 + x^2)}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)} dx = \frac{1}{a^2 - b^2} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{b^2 + x^2} - \frac{1}{a^2 + x^2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{a^2 - b^2} \left(\frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b} - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a^2 - b^2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}. \end{aligned}$$

Далее используем прием Лейбница-Фейнмана к функции $f(t) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} tx}{x(x^2 + 1)} dx$,

определяя её производную (без предварительного вычисления самого интеграла):

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} tx}{x(1+x^2)} dx = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\operatorname{arctg} tx}{x(1+x^2)} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} \cdot \frac{x}{(1+t^2x^2)} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+t^2x^2)} dx = \\ &= \frac{1}{t^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(t^{-2}+x^2)} dx = \left| \begin{matrix} a=1 \\ b=t^{-1} \end{matrix} \right| = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{\pi}{2t^{-1}(1+t^{-1})} = \frac{\pi}{2(1+t)}. \end{aligned}$$

Выполненное дифференцирование интеграла по переменной t правомочно, поскольку:

- подынтегральная функция в производной непрерывна по переменным x и t ;
- полученный после дифференцирования интеграл сходится равномерно, так как

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+t^2x^2)} dx \leq \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Функция $f(t)$ находится путем интегрирования её производной:

$$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{\pi}{2(1+t)} dt = \frac{\pi}{2} \cdot \ln(1+t) + C,$$

$$t=0 \rightarrow \int_0^{\infty} 0 \cdot dx = 0 = \frac{\pi}{2} \cdot \ln 1 + C \rightarrow C = 0.$$

После подстановки $t = \phi = \Phi - 1$, окончательно получаем искомый результат

$$I = \frac{\pi}{2} \cdot \ln(1 + \phi) = \frac{\pi}{2} \cdot \ln \Phi.$$

С учетом подстановки золотого тождества $\Phi^2 = 1 + \Phi$ в равенство (2) приходим к другому замечательному интегралу:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \Phi x}{x(x^2 + 1)} dx = \pi \cdot \ln \Phi = 2I.$$

По аналогии с базовым тождеством гармонии (1), приведенные интегралы объединяют пять математических констант $0, 1, \pi, e, \Phi = \phi^{-1}$.

Совместим геометрию обоих интегралов на одном графике (рис. 3): площади, окрашенные разными цветами, равны между собой, – за счет разных скоростей уменьшения огибающих функций.

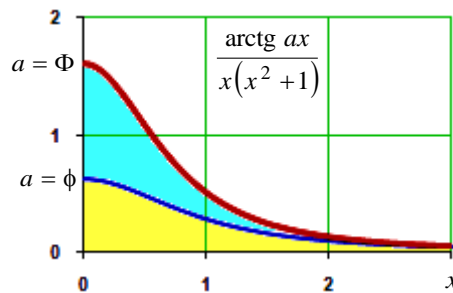


Рис. 3. Подынтегральные функции и площади соответствующих фигур, равные $0,5 \pi \ln \Phi$

Логарифм золотого сечения $\ln \Phi$ не менее важен в математике, чем сама константа. Отметим некоторые его свойства.

- Так, по разложению логарифма в ряд Маклорена $\ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, $|x| < 1$ имеем:

$$\ln \Phi = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{\phi^n}{n} = \sum_{n \geq 1} \frac{\phi^{2n}}{n} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{\phi^n}{n}.$$

- Известно также суммирование чисел Фибоначчи F и Люка L [11]:

$$\ln \Phi = \sum_{n \geq 1} \frac{F_n \Phi - F_{n+1}}{n} = \sum_{n \geq 1} \frac{\Phi^n - L_n}{n}.$$

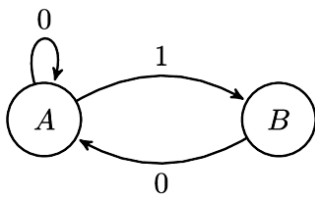
- Величина $x = \ln \Phi$ – действительный корень уравнения $e^x + e^{2x} = e^{3x}$ (А. Heinz, 2022);
- $\ln \Phi = \operatorname{arsh} 1/2 = \sinh^{-1} 1/2$, $\ln \Phi = \operatorname{arcsch} 2 = \operatorname{csch}^{-1} 2$ – значения обратных гиперболических (h) функций, соответственно аресинуса и ареакосеканса (от слова area – площадь);
- сумма бесконечного сходящегося ряда косинусов (с характерным делением на 5)

$$\ln \Phi = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\pi/5)}{n}.$$

- В работе [12] доказано, что любое иррациональное число $\underline{\gamma \geq \ln \Phi}$ имеет константу Леви $\beta(\alpha) = \pi^2 / (12 \ln 2)$, то есть существует трансцендентное число α такое, что $\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \ln q_m(\alpha)$, где $q_m(\alpha)$ – знаменатель m -й подходящей дроби разложения α в правильную цепную дробь.

- Энтропия сдвига золотого сечения [13].

Подсчитаем в графе количество путей длины n от A до B .



Для $n = 1$ есть один путь – 1.

Для $n = 2$ опять есть один путь – 01.

Для $n = 3$ уже два пути – 001, 101 и так далее.

Количество путей длины n от A до B равно в точности числу Фибоначчи F_n , и его можно вычислить через матрицу смежности S :

$$S^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

При рассмотрении бесконечной последовательности символов на бесконечной в обе стороны последовательности путей на графе, получим «подсдвиги конечного типа», как тип системы символической динамики. Данный подсдвиг известен как «сдвиг золотого сечения» и задается набором запрещенных слов $\{11\}$.

Топологическая энтропия такой динамической системы равна $\ln \Phi$.

3) Интегралы с логарифмом $\ln \Phi$.

Исходя из неопределенного интеграла [9, с. 92, № 13], можно определить $\ln \Phi$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right) + C;$$

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \Big|_0^{1/2} = \ln \Phi.$$

Развитием-обобщением данного интеграла являются такие интегралы:

$$\frac{1}{2n-1} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln \Phi,$$

$$\frac{1}{2n} \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln \Phi,$$

которые следуют из соотношения $(x - \Phi^m)(x - \phi^m) = x^2 - (F_{m-1} + F_{m+1})x + (-1)^m$, где F – числа Фибоначчи, $a = \frac{F_{2n} + F_{2n-2}}{2}$, $b = \frac{F_{2n+1} + F_{2n-1}}{2}$.

Например (рис. 4):

$$\begin{aligned} 1 \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= \ln \Phi, & \frac{1}{2} \int_1^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \ln \Phi; \\ \frac{1}{3} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= \ln \Phi, & \frac{1}{4} \int_1^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \ln \Phi; \\ \frac{1}{5} \int_0^{5,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= \ln \Phi, & \frac{1}{6} \int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \ln \Phi. \end{aligned}$$

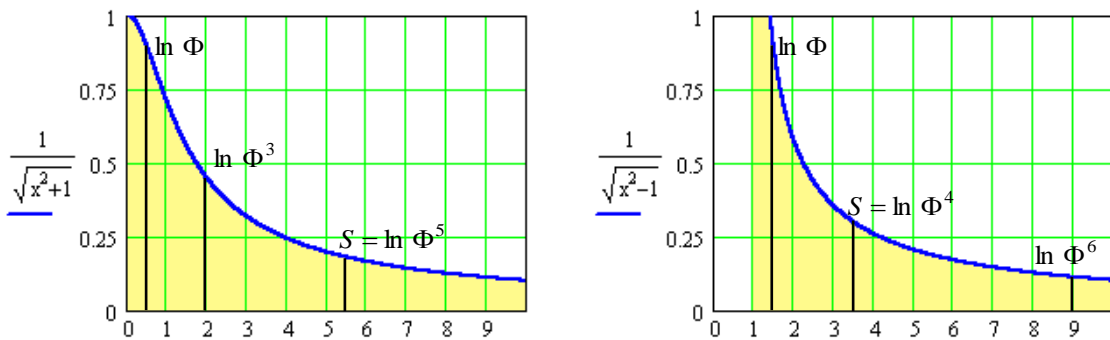


Рис. 4. Изменение подынтегральных функций, дающих $\ln \Phi$

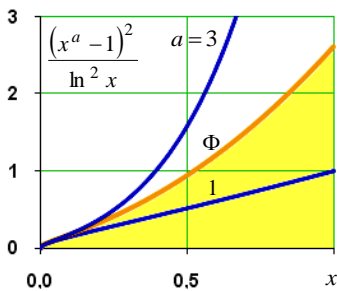
Или такой определенный интеграл, вывод которого приведен в работе [14]:

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cdot \ln x} dx = \ln \Phi.$$

4) Интеграл с "усиленным" логарифмом золотой константы.

$$\int_0^1 \frac{(x^\Phi - 1)^2}{\ln^2 x} dx = \sqrt{5} \ln \Phi.$$

Рассмотрим более общую зависимость [15] (см. рисунок):



$$F(a) = \int_0^1 \frac{(x^a - 1)^2}{\ln^2 x} dx,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^a - 1}{\ln x} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{ax^{a-1}}{1} x \right)^2 = a^2.$$

Найдем первую и вторую производные:

$$F'(a) = \int_0^1 \frac{(x^a - 1)}{\ln^2 x} dx = \int_0^1 \frac{2(x^a - 1)x^a \ln x}{\ln^2 x} dx = 2 \int_0^1 \frac{x^{2a} - x^a}{\ln x} dx;$$

$$F''(a) = 2 \int_0^1 \frac{2x^{2a} \ln x - x^a \ln x}{\ln x} dx = 4 \frac{x^{2a+1}}{2a+1} \Big|_0^1 - 2 \frac{x^{a+1}}{a+1} \Big|_0^1 = \frac{4}{2a+1} - \frac{2}{a+1}.$$

Интегрируем обратным ходом:

$$F'(a) = 2 \ln(2a+1) - 2 \ln(a+1) + C_1, \quad f'(0) = 0 = C_1;$$

$$F(a) = (2a+1) \ln(2a+1) - 2(a+1) \ln(a+1) + C_2, \quad f(0) = 0 = C_2.$$

Например,

$$F(1) = 3 \ln 3 - 4 \ln 2 = \ln 27/16 \approx 0,5232;$$

$$F(\Phi) = (2\Phi + 1) \ln(2\Phi + 1) - 2(\Phi + 1) \ln(\Phi + 1) = \Phi^3 \ln \Phi^3 - 2\Phi^2 \ln \Phi^2 =$$

$$= (3\Phi^3 - 4\Phi^2) \ln \Phi = (\Phi + \Phi^{-1}) \ln \Phi = \sqrt{5} \ln \Phi \approx 1,07602.$$

5) Интегралы, равные Φ .

а) Известен интеграл $I(a) = \int_0^\infty \frac{x^{2\pi/a-1}}{x^{2\pi} + 1} dx = \frac{1}{2 \sin \pi/a}, \quad a > 1.$

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{x^{2\pi/a-1}}{x^{2\pi} + 1} dx = \int_0^\infty \frac{x^{2\pi/a}}{x(x^{2\pi} + 1)} dx = \left| \begin{array}{l} x^{2\pi/a} = u, \quad 2\pi/a \cdot x^{2\pi/a-1} dx = du \\ dx = a/(2\pi) \cdot x/u \cdot du \end{array} \right| = \frac{a}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{u^a + 1} du.$$

Поскольку $\sin \pi/10 = \phi/2$, то $I(10) = \Phi$, то есть

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{x^{\pi/5-1}}{x^{2\pi} + 1} dx = \Phi.}$$

б) $\int_4^5 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4\sqrt{x}} \right) dx = \frac{1}{2} (3x + \sqrt{x}) \Big|_4^5 = \frac{1}{2} (15 + \sqrt{5} - 14) = \Phi.$

в) $\int_{\pi/5}^{\pi/2} 2 \sin x dx = -2 \cos x \Big|_{\pi/5}^{\pi/2} = -2 \cdot \left(0 - \frac{\Phi}{2} \right) = \Phi.$

г) $\frac{5}{\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{1+x^{10}} dx = \Phi, \quad \frac{5}{\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^{10}} dx = \phi.$

Для доказательства воспользуемся общей формулой из справочника неопределенных интегралов [9, с. 29, № 5] при $n = 10, m = 0$ и $m = 2 \left(k' = \frac{2k+1}{2n} \pi \right)$:

$$\int \frac{x^m}{x^{2n} + 1} dx = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin k'(m+1) \cdot \operatorname{arctg} \frac{x - \cos k'}{\sin k'} - \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos k'(m+1) \cdot \ln(x^2 - 2x \cos k' + 1).$$

Синусы и косинусы зависят от m и k , $\phi' = \sqrt{1 - \phi^2/4}$, $\Phi' = \sqrt{1 - \Phi^2/4}$:

	$m = 0$					$m = 2$				
k	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
$\sin k'(m+1)$	$\phi/2$	$\Phi/2$	1	$\Phi/2$	$\phi/2$	$\Phi/2$	$\phi/2$	-1	$\phi/2$	$\Phi/2$
$\cos k'(m+1)$	ϕ'	Φ'	0	$-\Phi'$	$-\phi'$	Φ'	$-\phi'$	0	ϕ'	$-\Phi'$

Как видим, значения косинусов при суммировании взаимно уничтожаются, поэтому вторая сумма в определенном интеграле равна нулю.

Значения арктангенсов для пределов интегрирования $(0, \infty)$ составляют:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{x - \cos k'}{\sin k'} = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arctg} \frac{0 - \cos k'}{\sin k'} = \operatorname{arctg} \frac{-1}{\operatorname{tg} k'} = k' - \frac{\pi}{2} = (-0.4, -0.2, 0, 0.2, 0.4) \cdot \pi.$$

Для нижнего предела интегрирования $x = 0$ произведения синусов на арктангенсы также взаимно уничтожаются. В итоге определенные интегралы равны первой сумме при верхнем пределе интегрирования (рис. 5):

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^{10}} dx = \frac{1}{5} \cdot (\phi + \Phi + 1) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{5} \Phi,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^{10}} dx = \frac{1}{5} \cdot (\phi + \Phi - 1) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{5} \phi.$$

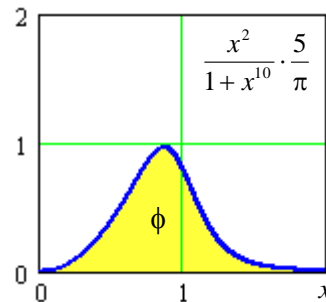
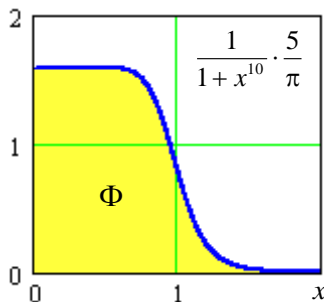


Рис. 5. Интегралы, равные константе золотого сечения $\Phi = \phi^{-1}$

Вторая функция имеет максимум, который определяется через производную:

$$\left(\frac{x^2}{1+x^{10}} \right)' = \frac{2x - 8x^{11}}{(1+x^{10})^2} = 0, \quad x = 1/4^{0,1} \approx 0,8706 \rightarrow f_{\max} \approx 0,9650.$$

Итак, мы рассмотрели несколько примечательных золотых интегралов.

Точнее их лучше называть "золотоносными", поскольку в своем решении они содержат константу золотого сечения в разных вариациях. Но это не столь важно.

Далее, уже без вводной части и предварительных описаний, нас ждет приличная подборка разнообразных золотых интегралов. Помимо чисто учебной направленности многие из них вскрывают глубинные процессы в теоретическом обосновании и прикладной интерпретации такого феномена, как золотое сечение.

Как бы там ни было, но всё начиналось с геометрии и определения площадей талантливыми древнегреческими учеными, которые без формул и интегрирования умудрялись создавать шедевры математического искусства. – Окей.

To be continued...

Приложение

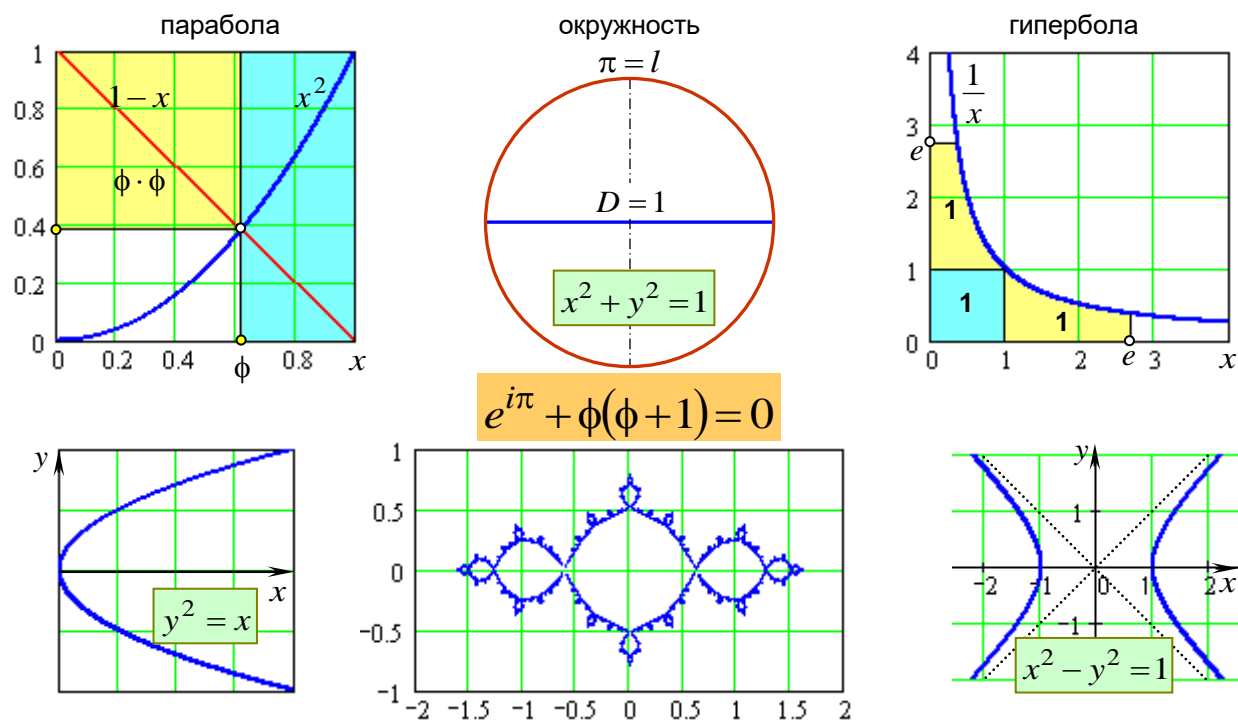


Рис. П1. Аналитико-геометрическая интерпретация "квадратичных истоков" для фундаментальных математических констант (ϕ , π , e) как триномиально-квадратичный код мироздания

Литература:

1. Начала Евклида. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.
2. Василенко С.Л. Синтез моделей "золотого сердца" и куполов на основе золотой пропорции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28582, 08.08.2023. – <http://www.trinitas.ru/doc/0016/001h/00165380.htm>.
3. Василенко С.Л. Базовые соотношения между фундаментальными константами // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17327, 20.02.2012. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161934.htm>.
4. Ramanujan S. Journal of the Indian Mathematical Society. – <http://www.ims.res.in/~rao/ramanujan/collectedpapers/question/qJIMS.htm>.
5. Hardy G.H. Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work: 3rd ed. – New York: Chelsea, 1999.
6. Weisstein E.W. Ramanujan Continued Fractions // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – <http://mathworld.wolfram.com/RamanujanContinuedFractions.html>.
7. Интеграл с золотым сечением и красивым ответом. – 2021. – <https://www.youtube.com/watch?v=RBLqQL9Lld4>.

8. Василенко С.Л. Базовое тождество математических основ гармонии // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16069, 10.09.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161700.htm>.

9. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.

10. Интеграл с арктангенсом, золотым сечением и трюком Лейбница. – 14.06.2023 – <https://www.youtube.com/watch?v=kbPGwgWIKsE>.


11. Brown C. The natural logarithm of the golden section // The Fibonacci Quarterly, 55.5 (2017), 42-44. – <https://www.fq.math.ca/Papers1/55-5/Brown.pdf>.

12. Ваха С. Levy constants of transcendental numbers // Proc. Amer. Math. Soc. – **137** (7), 2009, 2243-2249. – <https://www.ams.org/journals/proc/2009-137-07/S0002-9939-09-09787-1/S0002-9939-09-09787-1.pdf>.

13. Capobianco S. Introduction to Symbolic Dynamics. Part 4: Entropy; The entropy of the golden mean shift, Institute of Cybernetics at TUT, 2010. – <https://cs.ioc.ee/~silvio/slides/sd4.pdf>.

14. Most beautiful integration techniques that are rare or unusual, 2021. – <https://www.youtube.com/watch?v=2m1XbGhHXhY>.

15. Golden integral with golden ratio. <https://www.youtube.com/watch?v=kfG8IGHbtaY>.

© ВаСиЛенко, 2023 
Украина, Харьков

$$\frac{d \text{ MILK } \text{ can }}{dx} = \text{ cheese } \text{ slice}$$

$$\int \text{ MILK } \text{ can } dx = \text{ cow}$$