

Систематика четырехчленных золотых уравнений Фибоначчи

Масштабы использования математико-гармонических структур в прикладных исследованиях непрерывно возрастают. Речь идет не только о классическом золотом сечении и хрестоматийных числах Фибоначчи, но и их многочисленных обобщениях и вариациях: числах Трибоначчи, уравнении Падована-Газале, обобщении А. П. Стахова и др. (Газале, 2002; Стахов, 1912; Григорьев, Мартыненко, 2012).

В статье, опубликованной ранее (Мартыненко, 2009), предложена систематика «золотых» неполных (трехчленных) уравнений Фибоначчи произвольной степени, имеющая вид треугольника, вершиной которого являются классическое уравнение золотого сечения. Корнем всех этих уравнений является золотое число φ . Треугольник предсказывает все уравнения с таким решением. Число их бесконечно. Эта числовая фигура обладает рядом дополнительных замечательных свойств. Примечательно, что коэффициенты при первом, втором члене и значения свободного члена также выстраиваются в свои треугольники, отличающихся удивительной регулярностью, но каждый своей.

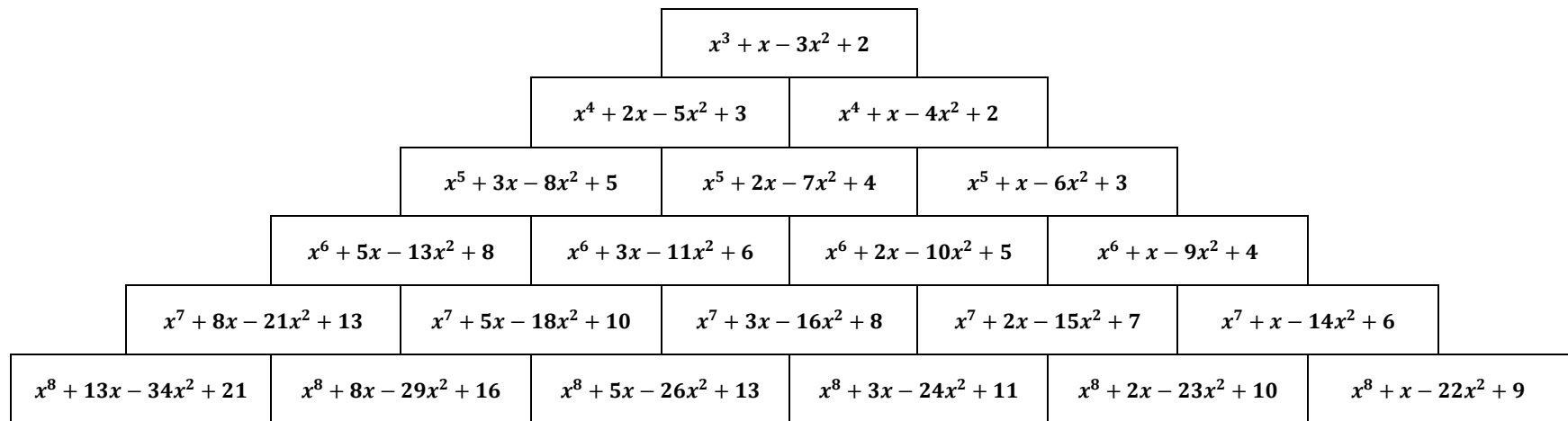
В данной статье рассматриваются четырехчленные уравнения такого типа. В этих уравнениях первый член (вершина треугольника) реализуется в степени не ниже третьей, а второй имеет фиксированную степень, которая ниже первой. Эти члены образуют сумму или разность. Остальные два члена «подстраиваются» под первые два, но так, чтобы решением уравнения было золотое число.

Можно предположить, что существует универсальное уравнение с произвольным числом членов, корнем которых будет золотое число. Пока такое уравнение нам найти не удалось. Но на этом пути мы попытались кое-что сделать, построив систему из 18 (!) треугольников, в клетках которых представлены четырехчленные уравнения, корнем которых является число Фидия. Эта система дает исчерпывающее описание четырехчленных уравнений.

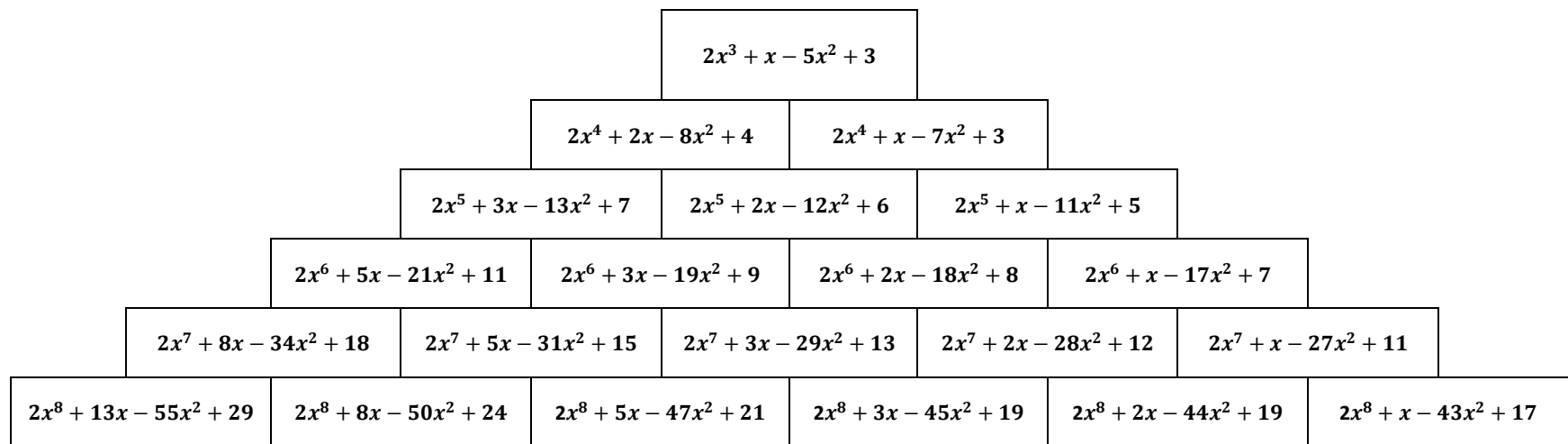
Теперь рассмотрим, как строится эта 18-членная система.

1. Минимальная степень первого члена равна 3.
2. В первой триаде треугольников степень второго члена постоянна (она равна единице и более)
3. В первой девятке берем разность между первым и вторым членом
4. Во второй триаде степень второго члена возрастает на единицу. И далее прирост тот же.
5. Коэффициенты при втором члене в каждой триаде увеличиваются в соответствии с числами натурального ряда.
6. Остальные коэффициенты подбирались интуитивно. В начале были трудности, но затем по мере прорисовывания закономерностей в таблице коэффициенты проставлялись автоматически.

Приведем три иллюстративных треугольника:



Треугольник 1



Треугольник 2

$3x^3 + x - 7x^2 + 4$											
$3x^4 + 2x - 11x^2 + 5$			$3x^4 + x - 10x^2 + 4$								
$3x^5 + 3x - 18x^2 + 9$		$3x^5 + 2x - 17x^2 + 8$		$3x^5 + x - 16x^2 + 7$							
$3x^6 + 5x - 29x^2 + 14$		$3x^6 + 3x - 27x^2 + 12$		$3x^6 + 2x - 26x^2 + 11$		$3x^6 + x - 25x^2 + 10$					
$3x^7 + 8x - 47x^2 + 23$		$3x^7 + 5x - 44x^2 + 20$		$3x^7 + 3x - 42x^2 + 18$		$3x^7 + 2x - 41x^2 + 17$		$3x^7 + x - 40x^2 + 16$			
$3x^5 + 13x - 76x^2 + 37$		$3x^8 + 8x - 71x^2 + 32$		$3x^8 + 5x - 68x^2 + 29$		$3x^8 + 3x - 66x^2 + 27$		$3x^8 + 2x - 65x^2 + 26$		$3x^8 + x - 64x^2 + 25$	

Треугольник 3

Рассмотрим некоторые свойства этих треугольников. Начнем с треугольника 1.

1. Коэффициенты при втором члене по диагонали, начиная с первого уровня (справа налево) образуют классическую последовательность Фибоначчи (3, 5, 8, 13...). То же самое относится и к свободному члену).
2. Коэффициенты при втором члене по диагонали образуют числа Люка (4, 7, 11, 19...), а при свободном члене — удвоенный ряд Фибоначчи (2, 4, 6, 10, 16...)
3. В третьей диагонали при движении сверху вниз имеем: для третьего члена — удвоенный ряд Фибоначчи, для свободного — ряд Люка, а в четвертой диагонали для третьего члена — утроенный ряд Фибоначчи, для свободного — аналогичный удвоенный ряд.

Теперь перейдем к движению по диагонали слева направо для тех же членов.

Например, для свободного члена имеем такие числа: 2, 3, 6, 9, 14... При смещении диагонали на один шаг: $F_n + F_{n-1} - 2$. При смещении на два шага: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} - 3$ и т. д.

И, наконец, по горизонтали числа при втором члене образуют числа Фибоначчи, а разности чисел при контактных третьем и свободном членах также образуют числа Фибоначчи.

Аналогичная картина наблюдается и для двух других треугольников.

Любопытно, что коэффициенты при каждом члене также образуют треугольники, которые тоже обладают фибоначиевыми свойствами, перекликающиеся со свойствами основных треугольников.

Треугольник второго члена	Треугольник третьего члена	Треугольник свободного члена
1	3	2
1 1	5 4	3 2
2 1 1	8 7 6	5 4 3
3 2 1 1	13 11 10 9	8 6 5 4
5 3 2 1 1	21 18 16 15 14	13 10 8 7 6
8 5 3 2 1 1	34 29 26 24 23 22	21 16 13 11 10 9

Треугольники коэффициентов четырехчленных уравнений, построенные на основании треугольника 1

Итак, в дополнение к систематизации золотых трехчленных фибоначиевых уравнений (Мартыненко, 2012) предложена систематика четырехчленных уравнений аналогичного типа. Систематика представляет собой множество, состоящее из 18 взаимосвязанных треугольников. Система иллюстрируется тремя треугольниками, каждый из которых предсказывает бесконечное множество уравнений с фибоначиевыми коэффициентами. При увеличении количества членов ситуация принципиально измениться не может, только станет еще более сложной. Но это не просто сложность. Это сложность, в которой царит порядок. Фибоначиевое пространство имеет организованный

характер, но в рамках бесконечности, то есть в совокупности уравнений можно увидеть бесконечное множество, напоминающее Гильбертов отель. В каждом номере этого отеля только один постоялец. Это золотое уравнение Фибоначчи.

Литература

Газале М. Гномон: От фараонов до кварталов. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002

Григорьев Ю., Мартыненко Г., Типология последовательностей Фибоначчи: теория и приложения. Введение в математику гармонии. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012

Мартыненко Г. Я. Числовая гармония текста. СПб: Изд-во С.- Петерб. ун-та, 2009.

Мартыненко Г. Я. Типология последовательностей Фибоначчи: математико-лингвистический подход // Структурная и прикладная лингвистика. Вып. 9. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 2012.

Стахов А. П. Основы математики гармонии и ее приложения. В трех частях. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.

Приложение

$x^3 + x^2 - 3x - 2$											
$x^4 + 2x^2 - 5x - 2$			$x^4 + x^2 - 4x - 3$								
$x^5 + 3x^2 - 8x - 6$		$x^5 + 2x^2 - 7x - 5$		$x^5 + x^2 - 6x - 4$							
$x^6 + 5x^2 - 13x - 10$		$x^6 + 3x^2 - 11x - 8$		$x^6 + 2x^2 - 10x - 7$		$x^6 + x^2 - 9x - 6$					
$x^7 + 8x^2 - 21x - 16$		$x^7 + 5x^2 - 18x - 13$		$x^7 + 3x^2 - 16x - 11$		$x^7 + 2x^2 - 15x - 10$		$x^7 + x^2 - 14x - 9$			
$x^8 + 13x^2 - 34x - 26$		$x^8 + 8x^2 - 29x - 21$		$x^8 + 5x^2 - 26x - 18$		$x^8 + 3x^2 - 24x - 16$		$x^8 + 2x^2 - 23x - 15$		$x^8 + x^2 - 22x - 14$	

$2x^3 + x^2 - 5x - 3$											
$2x^4 + 2x^2 - 8x - 6$			$2x^4 + x^2 - 7x - 5$								
$2x^5 + 3x^2 - 13x - 9$		$2x^5 + 2x^2 - 12x - 8$		$2x^5 + x^2 - 11x - 7$							
$2x^6 + 5x^2 - 21x - 15$		$2x^6 + 3x^2 - 19x - 13$		$2x^6 + 2x^2 - 18x - 12$		$x^6 + x^2 - 17x - 11$					
$2x^7 + 8x^2 - 34x - 24$		$2x^7 + 5x^2 - 31x - 21$		$2x^7 + 3x^2 - 29x - 19$		$x^7 + 2x^2 - 28x - 18$		$x^7 + x^2 - 27x - 17$			
$2x^8 + 13x^2 - 55x - 39$		$2x^8 + 8x^2 - 50x - 34$		$2x^8 + 5x^2 - 47x - 31$		$x^8 + 3x^2 - 45x - 29$		$x^8 + 2x^2 - 44x - 28$		$x^8 + x^2 - 43x - 27$	

$3x^3 + x^2 - 7x - 4$											
$3x^4 + 2x^2 - 11x + 8$			$3x^4 + x^2 - 10x - 7$								
$3x^5 + 3x^2 - 18x + 12$		$3x^5 + 2x - 17x^2 + 11$		$3x^5 + x^2 - 16x - 10$							
$3x^6 + 5x^2 - 29x + 20$		$3x^6 + 3x^2 - 27x + 18$		$3x^6 + 2x^2 - 26x + 17$		$3x^6 + x^2 - 25x + 16$					
$3x^7 + 8x^2 - 47x + 32$		$3x^7 + 5x^2 - 44x + 29$		$3x^7 + 3x^2 - 42x + 27$		$3x^7 + 2x^2 - 41x + 26$		$3x^7 + x^2 - 40x + 25$			
$3x^8 + 13x^2 - 76x + 52$		$3x^8 + 8x^2 - 71x + 47$		$3x^8 + 5x^2 - 68x + 44$		$x^8 + 3x^2 - 66x + 42$		$x^8 + 2 - 65x + 41$		$x^8 + x^2 - 64x + 40$	

$x^4 + x^3 - 5x - 3$											
$x^5 + 2x^3 - 9x - 5$			$x^5 + x^3 - 7x - 4$								
$x^6 + 3x^3 - 14x - 8$		$x^6 + 2x^3 - 12x - 7$		$x^6 + x^3 - 10x - 6$							
$x^7 + 5x^3 - 23x - 13$		$x^7 + 3x^3 - 19x - 11$		$x^7 + 2x^3 - 17x - 10$		$x^7 + x^3 - 15x - 9$					
$x^8 + 8x^3 - 37x - 21$		$x^8 + 5x^3 - 31x - 18$		$x^8 + 3x^3 - 27x - 16$		$x^8 + 2x^3 - 25x - 15$		$x^8 + x^3 - 23x - 14$			
$x^9 + 13x^3 - 60x - 34$		$x^9 + 8x^3 - 50x - 29$		$x^9 + 5x^3 - 44x - 26$		$x^9 + 3x^3 - 40x - 24$		$x^9 + 2x^3 - 38x - 23$		$x^9 + x^3 - 36x - 22$	

$2x^4 + x^3 - 8x - 5$											
$2x^5 + 2x^3 - 14x - 8$			$2x^5 + x^3 - 12x - 7$								
$2x^6 + 3x^3 - 22x - 13$		$2x^6 + 2x^3 - 20x - 12$		$2x^6 + x^3 - 18x - 11$							
$2x^7 + 5x^3 - 36x - 21$		$2x^7 + 3x^3 - 32x - 19$		$2x^7 + 2x^3 - 30x - 18$		$2x^7 + 2x^3 - 29x - 17$					
$2x^8 + 8x^3 - 58x - 34$		$2x^8 + 5x^3 - 52x - 31$		$2x^8 + 3x^3 - 48x - 29$		$2x^8 + 2x^3 - 47x - 29$		$2x^8 + 2x^3 - 46x - 27$			
$2x^9 + 13x^3 - 94x - 55$		$2x^9 + 5x^3 - 84x - 50$		$2x^9 + 3x^3 - 78x - 47$		$2x^9 + 2x^3 - 76x - 45$		$2x^9 + x^3 - 75x - 44$		$2x^9 + 5x^3 - 74x - 43$	

$3x^4 + x^3 - 11x - 7$											
$3x^5 + 2x^3 - 19x - 11$			$3x^5 + x^3 - 17x - 10$								
$3x^6 + 3x^3 - 30x - 18$		$3x^6 + 2x^3 - 28x - 17$		$3x^6 + x^3 - 26x - 16$							
$3x^7 + 5x^3 - 49x - 29$		$3x^7 + 3x^3 - 45x - 27$		$3x^7 + 2x^3 - 43x - 26$		$3x^7 + x^3 - 41x - 25$					
$3x^8 + 8x^3 - 79x - 47$		$3x^8 + 5x^3 - 73x - 44$		$3x^8 + 3x^3 - 69x - 42$		$3x^8 + 2x^3 - 67x - 42$		$3x^8 + x^3 - 65x - 40$			
$3x^9 + 13x^3 - 128x - 76$		$3x^9 + 8x^3 - 118x - 71$		$3x^9 + 5x^3 - 112x - 68$		$3x^9 + 3x^3 - 108x - 66$		$3x^9 + 2x^3 - 106x - 65$		$3x^9 + x^3 - 104x - 64$	

$x^5 - x - 4x^2 + 1$						
$x^6 - 2x - 6x^2 + 1$		$x^6 - x - 7x^2 + 2$				
$x^7 - 3x - 10x^2 + 2$		$x^7 - 2x - 11x^2 + 3$		$x^7 - x - 12x^2 + 4$		
$x^8 - 5x - 16x^2 + 3$		$x^8 - 3x - 18x^2 + 5$		$x^8 - 2x - 19x^2 + 6$	$x^8 - x - 20x^2 + 7$	
$x^9 + 8x^3 - 26x - 5$		$x^9 + 5x^3 - 29x - 8$		$x^9 + 3x - 31x^2 - 10$	$x^9 + 2x - 32x^2 - 11$	$x^9 + x - 33x^2 - 12$

$2x^4 - x - 5x^2 + 1$							
$2x^5 - 2x - 8x^2 + 2$			$2x^5 - x - 9x^2 + 3$				
$2x^6 - 3x - 13x^2 + 3$		$2x^6 - 2x - 14x^2 + 4$		$2x^6 - x - 15x^2 + 5$			
$2x^7 - 5x - 21x^2 + 5$		$2x^7 - 3x - 23x^2 + 7$		$2x^7 - 2x - 24x^2 + 8$	$2x^7 - x - 25x^2 + 9$		
$2x^8 - 8x - 34x^2 + 8$		$2x^8 - 5x - 37x^2 + 11$		$2x^8 - 3x - 39x^2 + 13$	$2x^8 - 3x - 40x^2 + 13$	$2x^8 - x - 41x^2 + 15$	
$2x^9 + 13x - 55x^2 - 13$		$2x^9 + 8x - 60x^2 - 18$		$2x^9 + 5x - 63x^2 - 21$	$2x^9 + 3x - 61x^2 - 20$	$2x^9 + 2x - 60x^2 - 21$	$2x^9 + x - 59x^2 - 22$

$3x^4 - x - 8x^2 + 2$					
$3x^5 - 2x - 13x^2 + 4$			$3x^5 - x - 14x^2 + 5$		
$3x^6 - 3x - 21x^2 + 6$		$3x^6 - 2x - 22x^2 + 7$		$3x^6 - x - 23x^2 + 8$	
$3x^7 - 5x - 34x^2 + 10$		$3x^7 - 3x - 36x^2 + 12$		$3x^7 - 2x - 37x^2 + 13$	
$3x^8 - 8x - 55x^2 + 16$		$3x^8 - 5x - 58x^2 + 19$		$3x^8 - 3x - 60x^2 + 21$	
$3x^8 - 2x - 61x^2 + 22$		$3x^8 - x - 62x^2 + 23$			
$3x^9 + 13x - 89x^2 - 26$	$3x^9 + 8x - 94x^2 - 31$	$3x^9 + 5x - 97x^2 - 34$	$3x^9 + 3x - 99x^2 + 36$	$3x^9 + 2x - 100x^2 + 37$	$3x^9 + x - 101x^2 + 38$

$x^4 - x^2 - 2x - 1$					
$x^5 - 2x^2 - 3x - 1$			$x^5 - x^2 - 4x - 2$		
$x^6 - 3x^2 - 5x - 2$		$x^6 - 2x^2 - 6x - 3$		$x^6 - x^2 - 7x - 5$	
$x^7 - 5x^2 - 8x - 3$		$x^7 - 3x^2 - 10x - 5$		$x^7 - 2x^2 - 11x - 8$	
$x^7 - x^2 - 12x - 13$					
$x^8 - 8x^2 - 13x - 5$		$x^8 - 5x^2 - 16x - 8$		$x^8 - 3x^2 - 18x - 13$	
$x^8 - 2x^2 - 19x - 21$		$x^8 - x^2 - 20x - 34$			
$x^9 - 13x^2 - 21x - 8$	$x^9 - 8x^2 - 26x - 13$	$x^9 - 5x^2 - 29x - 21$	$x^9 - 3x^2 - 31x - 34$	$x^9 - 2x^2 - 32x - 55$	$x^9 - x^2 - 29x - 89$

$2x^3 - x^2 - 3x - 1$											
$2x^4 - 2x^2 - 4x - 2$			$2x^4 - x^2 - 5x - 3$								
$2x^5 - 3x^2 - 7x - 3$		$2x^5 - 2x^2 - 8x - 4$		$2x^5 - x^2 - 9x - 5$							
$2x^6 - 5x^2 - 11x - 5$		$2x^6 - 3x^2 - 13x - 7$		$2x^6 - 2x^2 - 14x - 8$		$2x^6 - x^2 - 15x - 9$					
$2x^7 - 8x^2 - 18x - 8$		$2x^7 - 5x^2 - 21x - 11$		$2x^7 - 3x^2 - 23x - 13$		$x^7 - 2x^2 - 24x - 14$		$2x^7 - x^2 - 25x - 15$			
$2x^8 - 13x^2 - 29x - 13$		$2x^8 - 8x^2 - 34x - 18$		$2x^8 - 5x^2 - 37x - 21$		$2x^8 - 3x^2 - 39x - 23$		$2x^8 - 2x^2 - 40x - 24$		$2x^8 - x^2 - 41x - 25$	

$3x^3 - x^2 - 5x - 2$											
$3x^4 - 2x^2 - 7x - 4$			$3x^4 - x^2 - 8x - 5$								
$3x^5 - 3x^2 - 12x - 6$		$3x^5 - 2x^2 - 13x - 7$		$3x^5 - x^2 - 14x - 8$							
$3x^6 - 5x^2 - 19x - 10$		$3x^6 - 3x^2 - 21x - 12$		$3x^6 - 2x^2 - 22x - 13$		$3x^6 - 21 - 23x - 13$					
$3x^7 - 8x^2 - 31x - 16$		$3x^7 - 5x^2 - 34x - 19$		$3x^7 - 3x^2 - 36x - 21$		$3x^7 - 2x^2 - 37x - 22$		$3x^7 - x^2 - 38x - 23$			
$3x^8 - 13x^2 - 50x - 26$		$3x^8 - 8x^2 - 55x - 31$		$3x^8 - 5x^2 - 58x - 34$		$3x^8 - 3x^2 - 60x - 36$		$3x^8 - 2x^2 - 61x - 37$		$3x^8 - x^2 - 62x - 38$	

$x^4 - x^3 - x - 1$				
$x^5 - 2x^3 - x - 1$		$x^5 - x^3 - 3x - 2$		
$x^6 - 3x^3 - 2x - 2$	$x^6 - 2x^3 - 4x - 3$		$x^6 - x^3 - 6x - 4$	
$x^7 - 5x^3 - 3x - 3$	$x^7 - 3x^3 - 7x - 5$	$x^7 - 2x^3 - 9x - 6$	$x^7 - x^3 - 11x - 7$	
$x^8 - 8x^3 - 5x - 5$	$x^8 - 5x^3 - 11x - 8$	$x^8 - 3x^3 - 15x - 10$	$x^8 - 2x^3 - 18x - 11$	$x^8 - x^3 - 19x - 12$

$2x^4 - x^3 - 4x - 3$				
$2x^5 - 2x^3 - 6x - 4$		$2x^5 - x^3 - 8x - 5$		
$2x^6 - 3x^3 - 10x - 7$	$2x^6 - 2x^3 - 12x - 8$		$2x^6 - x^3 - 14x - 9$	
$2x^7 - 5x^3 - 16x - 11$	$2x^7 - 3x^3 - 20x - 13$	$2x^7 - 2x^3 - 32x - 14$	$2x^7 - x^3 - 24x - 15$	
$2x^8 - 8x^3 - 26x - 18$	$2x^8 - 5x^3 - 32x - 21$	$2x^8 - 3x^3 - 28x - 23$	$2x^8 - 2x^3 - 29x - 24$	$2x^8 - x^3 - 40x - 25$

$3x^4 - x^3 - 7x - 5$				
$3x^5 - 2x^3 - 11x - 7$		$3x^5 - x^3 - 13x - 8$		
$3x^6 - 3x^3 - 18x - 12$		$3x^6 - 2x^3 - 20x - 13$		$3x^6 - x^3 - 22x - 14$
$3x^7 - 5x^3 - 29x - 19$		$3x^7 - 3x^3 - 33x - 21$		$3x^7 - 2x^3 - 35x - 22$
$3x^7 - x^3 - 37x - 23$				
$3x^8 - 8x^3 - 47x - 31$	$3x^8 - 5x^3 - 53x - 34$	$3x^8 - 3x^3 - 57x - 36$	$3x^8 - 2x^3 - 59x - 37$	$3x^8 - x^3 - 61x - 38$