А.П. Стахов

Некоторые замечания по поводу новой книги С.А. Ясинского «Золотое» сечение в стандартизации и теории измерения

Как и предыдущая книга С.А. Ясинского **«Основы динамических аналогий в исследовательской деятельности»**, его новая книга мне в целом понравилась. И я приветствую ее размещение на сайте АТ. Не со всеми положениями его книги я согласен, но самое главное, что в книге ведется настоящее научное обсуждение довольно сложной проблемы – проблемы «золотого сечения» и его истории - без навешивания ярлыков и оскорбительных выражений типа «лженаучная идиома», «кастрюльно-алюминиевые пропорции», «золотые подвески» и т.д. Это показывает, что С.А. Ясинский является настоящим ученым, который ищет ИСТИНУ, а не пытается сводить счеты или проводить ревизию «теории золотого сечения» на основе личных предпочтений или антипатий к тем или иным исследователям.

Я хотел бы высказаться по поводу некоторых утверждений С.А. Ясинского, с которыми я не согласен.

По поводу *p*-чисел Фибоначчи и золотых *p*-сечений

Вопрос о том, кто ввел в рассмотрение рекуррентную формулу для *p*-чисел Фибоначчи и понятие «золотого *p*-сечения», до сих пор является предметом дискуссии. На с. 35 Ясинский ссылается на книгу американского математика Пойа «Математическое открытие», изданную в 1962 г. и переизданную на русском языке в 1970 г. В этой книге, по мнению Ясинского, *«приведены ответы и алгоритмы формирования так называемых А.П. Стаховым «рядов р-чисел Фибоначчи» (или «обобщенных чисел Фибоначчи»), то есть р-«золотых» последовательностей Фибоначчи и Пойа, от которых легко перейти к нахождению так называемых А.П. Стаховым «золотым р-пропорциям (или «золотым р-сечениям) или «обобщенным золотым пропорциям» (сечениям), то есть к р-золотым числам Фибоначчи-Пойа».*

Я согласен с тем, что Пойа первым обнаружил связь чисел Фибоначчи с треугольником Паскаля и, исследуя так называемые «диагональные суммы» треугольника Паскаля, **наметил путь к открытию *p*-чисел Фибоначчи**. Но между «наметить путь» и «решить задачу» все же большая разница. Если стать на эту позицию, то математик, который первым ввел простейшее квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ «наметил путь» к введению уравнения «золотой пропорции» $x^2-x-1=0$ и уравнения $x^2-px-1=0$, задающего «металлические пропорции». Подчеркиваю, что Пойа в своей книге не привел рекуррентную формулу для *p*-чисел Фибоначчи:

$$F_p(n)=F_p(n-1)+F_p(n-p-1);\; F_p(1)=F_p(2)=...=F_p(p+1)=1, \qquad (1)$$

где p=0, 1, 2, 3, ... – заданное целое число.

Он только **«наметил путь».** Впервые формула (1) появилась в статье **Витенько И.В. и Стахова А.П. Теория оптимальных алгоритмов аналого-**

цифрового преобразования. В кн. «Приборы и системы автоматики», вып. 11, Харьков, изд-во Харьковского университета, 1970. С.А. Ясинский прекрасно об этом знает. И он прекрасно знает, что Витенько и Стахов обнаружили рекуррентною формулу (1) без всякой связи с треугольником Паскаля, а при ращении задачи синтеза «оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования». Хочу также обратить внимание на тот факт, что книга Пойа вышла в русскоязычном варианте в 1970 г., то есть, в тот же год, когда была опубликована статья Витенько и Стахова. Поэтому никакого заимствования у Пойа не было.

Еще более удивительным является утверждение С.А. Ясинского о том, что от формулы (1) «*легко перейти к нахождению так называемых А.П. Стаховым «золотых р-пропорциям (или «золотым р-сечениям) или «обобщенным золотым пропорциям» (сечениям), то есть к р-золотым числам Фибоначчи-Пойа*». Этим самым он подтверждает, что «золотых *p*-пропорций» (сечений) в книге Пойа и в помине не существует (**«легко перейти»** не значит, что Пойа ввел золотые *p*-сечения). Кроме того, непонятно, от чего **«легко перейти»**, потому что формулы (1) в книге Пойа нет. Другими словами, Пойа не имеет никакого отношения к введению понятия «золотое *p*-сечение» и поэтому приписывание Пойа того, чего он не сделал, то есть, открытия *«р-золотых чисел Фибоначчи-Пойа»*, является неправомерным (поскольку Пойа не вводил это понятие). Впервые это понятие было введено А.П. Стаховым в книге «**Введение в алгоритмическую теорию измерения»** (1977), в которой на с. 111 рассмотрен предел, к которому стремится отношение соседних *p*-чисел Фибоначчи:

$$\underbrace{\lim}_{n\to\infty}\frac{F_p(n)}{F_p(n-1)}=\Phi_p, \qquad (2)$$

где Φ_p - положительный корень следующего алгебраического уравнения:

$$x^{p+1}-x^p-1=0.$$

Это и есть строгое математическое определение понятия «золотых *p*-пропорций», которые являются обобщением классической «золотой пропорции» (p=1).

Если в случае с «гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка» С.А Ясинский мог и не знать о препринте: **Стахов А.П., Ткаченко И.С. Об определении фибоначчиевых и люковых функций. Винницкий политехнический институт, Винница, 1988. Депонировано в УкрНИИНТИ 10.08.1988** и поэтому приписать это открытие Олегу Боднару, то в случае с *p*-числами Фибоначчи и золотыми *p*-сечениями достаточно сравнить книгу Пойа **«Математическое открытие»** (1970) с книгой Стахова «**Введение в алгоритмическую теорию измерения»** (1977), которые хорошо известны С.А. Ясинскому, чтобы убедиться в правдивости того, что написано по этому поводу выше. Поэтому, дорогой Сергей Александрович, у меня большая просьба не вводить в заблуждение читателей по поводу приоритета во введении рекуррентной формулы (1) для *p*-чисел Фибоначчи и формулы (2), задающей золотые *p*-сечения. Я хотел бы просить Вас указать, на какой странице книги Пойа приведена общая формула (1) для *p*-чисел Фибоначчи и формула (2), задающая золотые *p-сечения.*

<u>По поводу того, знали ли Пифагор, Платон и Евклид о «золотом сечении»</u>

Как известно, Пифагор не оставил после себя печатных трудов. Поэтому невозможно абсолютно достоверно доказать или опровергнуть: знал ли Пифагор о «золотом сечении»? Для ответа на этот вопрос необходимо обращаться не только к дискуссионным статьям **Белянина** и **Радзюкевича**, но и к работам более авторитетных ученых (с моей точки зрения). Я не буду обращаться к мнению **Эдуарда Сороко**, к работам которого (как и к моим, впрочем) отношение среди «золотосеченцев» далеко не однозначное. Я обращусь к мнению «независимого эксперта» доктора философских наук и кандидата физико-математических наук проф. **А.В. Волошинова** (автора нескольких великолепных книг, в частности, книги «Математика и искусство» (2000)). В книге «Венок мудрости Эллады» (2003) на с. 29 Волошинов написал:

«Особое внимание пифагорейцы уделяли пентаграмме – пятиконечной звезде, образованной диагоналями правильного пятиугольника. В пентаграмме пифагорейцы обнаружили все известные в древности пропорции: арифметическую, а также знаменитую золотую пропорцию или золотое сечение».

Подобного рода мнения можно встретить в трудах многих ученых, которые творили задолго до Волошинова: **Пачиоли, Кеплера, Цейзинга, Гика, Флоренского** и т.д.

Знал ли Платон о «золотом сечении»? Здесь я обращусь к мнению **Матилы Гика,** озвученном в книге «Эстетика пропорций в природе и искусстве». В качестве эпиграфа главы 1 «О пропорции» Гика взял цитату из «Тимея» Платона: *«Но невозможно сочетать две вещи без наличия третьей: между ними необходим связующий элемент. Нет лучше связи, чем та, которая образует из самой себя и связуемых ею вещей одно и неделимое целое. И такова природа пропорции ...»*. Гика обращает внимание на тот факт, что в этой фразе Платона явно просматривается «золотая пропорция», хотя такого названия у Платона нет. Гика указывает, что эта пропорция названа Пачиоли «божественной пропорцией». Кеплер, первым упоминающий о значении этой пропорции в ботанике, говорит о ней, как о «бесценном сокровище, как об одном из двух сокровищ геометрии» и именует ее «Sectio divina” (божественное сечение). Леонардо да Винчи именует ее «Sectio aurea”, откуда и происходит название «золотое сечение» или «золотое число».

Но мы не имеем права не упомянуть и о мнении западных ученых, которые придерживаются точки зрения, противоположной мнению Белянина и Радзюкевича. Я хотел бы сослаться на мнение американского философа **Скотта Олсена,** автора книги **“The Golden Section: Nature’s Greatest Secret”** (2006). В этой замечательной книге, которая вызвала большой резонанс во всем научном мире, есть раздел “Plato’s Divided Line”. В этом разделе он доказывает, что, если внимательно прочитать Платона, то в его трудах можно найти золотое сечение! И к этому заключению Скотт Олсен пришел еще в 1983 г. в своей докторской диссертации *The Pythagorean Plato and the Golden Section: a Study in Abductive Inference* (кстати, это первая в истории науки докторская диссертация в области философских наук на тему «Платон и Золотое Сечение»).

Что касается Евклида, то здесь ни у кого не вызывает сомнения, что в книге II Евклид рассмотрел задачу о «делении отрезка в крайнем и среднем отношении», получившего в современной науке название «золотое сечение». Я рад тому, что С.А. Ясинский тщательно проанализировал комментарии Мордухай-Болтовского, касающиеся «золотого сечения», и я с удовольствием привожу эти комментарии полностью:

«Теперь посмотрим, какое место занимает золотое сечение в «Началах» Евклида. Прежде всего, нужно отметить, что оно встречается в двух формах, разница между которыми почти неощутима для нас, но была очень существенной в глазах греческого математика V-VI-го веков до н.э. Первая форма, прототип которого мы видели в Египте, является в Книге II «Начал», а именно в Предложении 11 вместе с вводящими его предложениями 5 и 6; здесь золотое сечение определяется как такое, в котором квадрат, построенный на большем отрезке, равняется прямоугольнику на всей прямой и меньшем отрезке. Вторую форму мы имеем в определении 3 книги VI, где золотое сечение определяется пропорцией – как вся прямая к большему отрезку, так и больший отрезок к меньшему - и называется делением в крайнем и среднем отношении; в этой форме золотое сечение могло быть известным только со времен только со времен Евдокса. Интересно отметить, что предложениям 5, 6 и 11 книги II соответствуют предложения 27, 28 и 30 – шестой. Затем, предложения 5 и 6 книги II разорвали связь между предложениями 4 и 7, соответствующим нашим формулам квадратов суммы и разности; «та же фигура», о которой упоминается в предложении 7, строится в 4-м.

В книге XIII золотое сечение является в обеих указанных формах, а именно в первой форме в предложениях 1-5 и во второй – в предложениях 8-10. Правда в формулировке и тексте доказательства 1-5 предложений встречаются слова «в крайнем и среднем отношении», в доказательствах есть некоторые следы пользования пропорциями, но при внимательном чтении нетрудно заметить, что все эти места не связаны органически с общим текстом и легко из него могут быть исключены; все доказательство по существу ведется исходя из равенства на большем отрезке прямоугольнику ... Более того, предложение 2 книги XIII по существу равнозначно геометрическому построению предложения 11 книги II.

Все это позволяет думать, что предложения 4, 7, 8 книги II и предложения 1-5 книги XIII представляют остатки одного из самых древних в истории греческой геометрии документов, восходящего по всей вероятности к первой половине V века и возникшего в пифагорейской школе на основании того материала, который был привезен из Египта. Сравнительную древность этого документа можно установить из того обстоятельства, что предложения 4 и 7 книги II служат в ней для доказательства обобщенной теоремы Пифагора [квадрат стороны против острого и тупого угла (предложения 12 и 13 книги II)], которая, несомненно, была известна Гиппократу Хиосскому ... Несмотря на то, что первые пять предложений книги XIII составляют одно целое с рядом предложений книги II , нужно отметить, что при непосредственном использовании предложений книги II (в

особенности предложения 11, которое и дает построение золотого сечения) доказательства были бы в отдельных случаях значительно проще»

Дорогой Сергей Александрович! Вы даже не представляете, какой большой подарок Вы сделали, приведя эту цитату Д.Д. Мордухай-Болтовского, всем тем «золотосеченцам», которые не воспринимают «учение Белянина-Радзюкевича». В одной из своих статей (**«Владел ли Платон кодом золотой пропорции? Анализ мифа»** http://a3d.ru/archi/stat/no_mif.php) Белянин делает следующее громкое заявление:

«Остается только авторам подобных утверждений апеллировать к делению отрезка в среднем и крайнем отношении, которое впервые в истории математики появляется во второй книге «Начал» Евклида, жившего спустя 250 лет после Пифагора. Но и здесь любой вдумчивый исследователь увидит, что, выполняя деление отрезка в среднем и крайнем отношении, Евклид совершенно не апеллирует к пропорциональности, то есть фактически выполняет деление отрезка без понятия пропорции. По сути, в этом предложении Евклид ищет такое деление отрезка, когда площадь квадрата, построенного на большей части отрезка, равна площади прямоугольника со сторонами в виде всего отрезка и его меньшей части. В свете вышеизложенного приходим с неизбежностью к выводу, что от чисто геометрического деления отрезка в среднем и крайнем отношении в очень далеком прошлом до понимания золотой пропорции в ее современном толковании, «дистанция огромного размера».

Это высказывание полностью противоречит мнению Мордухай-Болтовского, который в своих комментариях отождествляет «деление в крайнем и среднем отношении» с «золотым сечением». Кроме того, Мордухай-Болтовский в этом высказывании обращает внимание на две формы задачи о «делении отрезка в крайнем и среднем отношении». При этом *«вторую форму мы имеем в определении 3 книги VI, где золотое сечение определяется **пропорцией** – как вся прямая к большему отрезку, так и больший отрезок к меньшему - и называется делением в крайнем и среднем отношении; в этой форме золотое сечение могло быть известным только со времен Евдокса»*. **В этой связи возникает вопрос: а читал ли Белянин «Начала» Евклида в переводе Мордухай-Болтовского? Или может быть Ясинский и Белянин читали различные версии «Начал» Евклида с комментариями Мордухай-Болтовского?**

Это высказывание дает также ответ на вопрос: знал ли Пифагор о «золотом сечении»? Обсуждая задачу о «золотом сечении», Мордухай-Болтовский делает два интересных замечания:

1. *Первая форма, **прототип которого мы видели в Египте**, является в книге II «Начал», а именно в Предложении 11 вместе с вводящими его предложениями 5 и 6; здесь золотое сечение определяется как такое, в котором квадрат, построенный на большем отрезке, равняется прямоугольнику на всей прямой и меньшем отрезке.*

2. *Все это позволяет думать, что предложения 4, 7, 8 книги II и предложения 1-5 книги XIII представляют остатки одного из самых древних в истории греческой геометрии документов, восходящего по всей вероятности к первой половине V века и **возникшего в пифагорейской школе на основании того материала, который был привезен из Египта».***

Таким образом, в задаче о «золотом сечении» Мордухай-Болтовский видит «египетский след» и явно намекает на Пифагора, который 22 года провел в Египте и привез оттуда огромное количество египетских математических знаний, включая «теорему Пифагора» и «золотое сечение». Отсюда вытекает, что Мордухай-Болтовский, в отличие от Белянина и Радзюкевича не сомневался в том, что не только Екврид, но и Пифагор и древние египтяне знали о «золотом сечении».

Из этого анализа, дорогой Сергей Александрович, вытекает, что Ваша защита Белянина и Радзюкевича (с. 65) является абсолютно необоснованной. Мордухай-Болтовский полностью разбивает **«правоту научных позиций и мыслей таких ученых как А.В. Радзюкевич и В.С. Белянин».**

О гипотезе Прокла

Высказывание Мордухай-Болтовского является еще одним подтверждением правильности так называемой «гипотезы Прокла», которую я проанализировал в статье **Гипотеза Прокла: новый взгляд на "Начала" Евклида и Математика Гармонии** http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322026.htm.

Согласно этой гипотезе, главной целью, которую ставил Евклид при написании своих «Начал», было создание геометрической теории Платоновых тел, которые выражали «Гармонию Мироздания» в греческой науке. Эта теория изложена Евклидом в 13-й, то есть, завершающей книге. Для создания геометрической теории додекаэдра, гранями которого являются «правильные пятиугольники», Евклид уже в книге II вводит «золотое сечение», а затем в книгах 6 и 13 развивает это понятие, **формулируя его в виде пропорции**. Так что Мордухай-Болтовский показывает, что «золотое сечение» буквально пронизывает все «Начала» от книги II до книги XIII.

На основании «гипотезы Прокла» я выдвинул гипотезу, что на Евклида повлияла греческая «идея Гармонии», а сами «Начала» и являются исторически первой попыткой создать **«Математическую теорию гармонии Мироздания».** И именно поэтому развиваемая мною «Математика Гармонии» (как, впрочем, и «золотая» математика Ясинского) в своих истоках восходят к «Началам» Евклида.

И в заключение я в который раз хотел бы привести высказывания двух гениальных ученых **Иоганна Кеплера** и **Алексея Лосева**, касающиеся «золотого сечения».

Иоганн Кеплер

«В геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем».

Алексей Лосев

«Космос античным мыслителям периода зрелой классики представляется не просто некоей отвлеченной неопределенностью, (в таком случае он был бы только чистой мыслью), но совершенно живым и единораздельным телом

содержащим в себе нерушимую цельность, несмотря на бесконечные различия всех его проявлений. С точки зрения Платона, да и вообще с точки зрения всей античной космологии мир представляет собой некое пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического деления - золотого сечения (то есть, целое относится в нем к большей части, как большая часть к меньшей). Этому закону, кстати сказать, древние греки подчиняли и свои архитектурные сооружения. Их систему космических пропорций нередко в литературе изображают как курьезный результат безудержной и дикой фантазии. В такого рода объяснениях сквозит антинаучная беспомощность тех, кто это заявляет. Однако понять данный историко-эстетический феномен можно только в связи с целостным пониманием истории, то есть, используя диалектико-материалистическое представление о культуре и ища ответа в особенностях античного общественного бытия».

И лучше не скажешь! «Вперед к Платону!» - таким должен стать девиз современной науки.