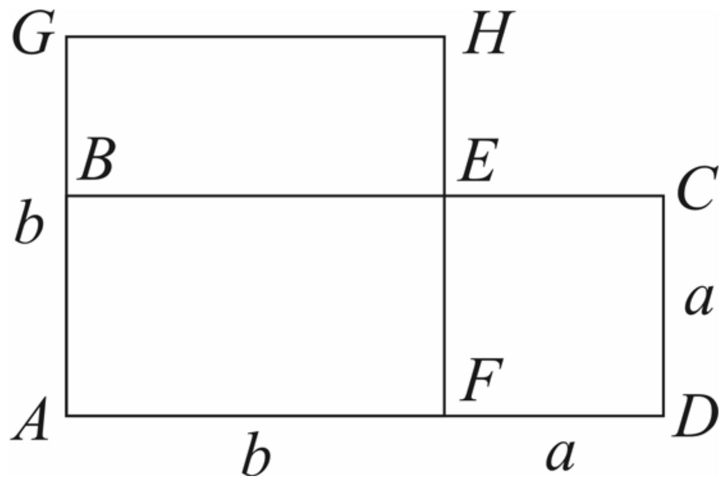
Г.Я. Мартыненко

Дополнение к интерпретации Золотого Сечения Эвклидом, навеянное статьей А.П.Стахова и обменом мнениями по электронной почте

Когда говорят о золотом сечении, то обычно имеют в виду принадлежащее Эвклиду деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Однако, ознакомившись со статьями А.П.Стахова (Стахов, 2007, 2009), а также обсудив с ним некоторые моменты в ходе переписки по электронной почте, мы пришли к естественному заключению, что Эвклид решал свою знаменитую задачу, не только основываясь на идее делении отрезка, но прибегая также и к интерпретации золотого сечения через соотношение площадей прямоугольника и квадрата. При этом мы оба предположили, что здесь должна быть спрятана задача о гармоническом соотношении именно площадей, а не только отрезков прямой.

Задача Эвклида о делении отрезка в среднем и крайнем отношении выглядит так.

Пусть мы имеем дело с прямоугольником *FBCD*, разделенном на два квадрата *ABEF* и *FECD*, а также с квадратом *AGHF*.



Предположим, что площади квадрата *AGHF* и прямоугольника ABCD равны.

Тогда

$$b^2 = (a+b)a\,,$$

$$b^2 - ab - a^2 = 0\,.$$

Откуда следует, что

$$b = \frac{a \pm a\sqrt{5}}{2}$$, т.е положительный корень

$$b/a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Итак, теорему Эвклида в приведенном варианте можно толковать как теорему о гармоничной соразмерности площадей квадрата и прямоугольника, построенных на соответствующих отрезках. Таким образом, равенство площадей соблюдается при условии, когда стороны квадратов находятся в золотом соотношении.

Интересно, однако, могут ли находиться в золотом соотношении сами площади квадратов, построенные на отрезках, подчиняющихся золотому соотношению

Предположим, что такая пропорция соблюдается.

Тогда можно построить такую пропорцию:

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{(b+a)a}{b^2}$$

Теперь перейдем к уравнению четвертой степени:

$$b^4 - a^3 b - a^4 = 0$$

Разделим все уравнение на a^4. Получаем:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^4 - \frac{b}{a} - 1 = 0$$

Полагая $\frac{b}{a} = z$, переходим к уравнению Газале четвертой степени:

$$z^4 - z - 1 = 0,$$

Корень, которого равен 1,221. Таким образом, золотая пропорция непосредственно между площадями прямоугольника и квадратов, построенных на отрезках, находящихся в золотом соотношении, выполняется в условиях действия уравнения Газале четвертой степени.

А теперь обратимся к еще одному интересному феномену.

Обсудим золотые соотношения между площадями частей внутри «стоячего» AGHF и «лежачего» ABCD прямоугольников.

Начнем со стоячего прямоугольника. Он разделен «перегородкой» на две части: верхнюю BGHE и нижнюю. Допустим, что между площадями частей этого прямоугольника и площадью всего прямоугольника выполняется золотая пропорция, т.е.:

$$\frac{(b-a)b}{ab} = \frac{ab}{b^2}$$

После несложных преобразований получаем кубическое уравнение:

$$b^3 - a^2 b - a = 0$$

Полагая $a = 1$, получаем кубическое уравнение Падована-Газале, которое последний назвал *серебряным сечением:*

$$b^3 - b - 1 = 0$$

Корень этого уравнения равен 1,325.

А теперь обратимся к лежачему прямоугольнику ABCD, состоящего из двух частей: ABEF и EFCD.

Полагая, как и в первом случае, что здесь для площадей также выполняется золотое сечение, получаем пропорцию:

$$\frac{(b-a)b}{a^2} = \frac{(a+b)a}{b(b-a)}$$

В итоге получаем кубическое уравнение А.П.Стахова:

$$b^3 - ab^2 - a^3 = 0$$

Полагая $a = 1$, получаем кубическое уравнение А.П.Стахова *:*

$$b^3 - b^2 - 1 = 0$$

корень которого равен 1,466.

Итак, на фоне золотого сечения для отрезков мы получили два «дочерних» сечения для площадей. Причем эти сечения также являются классическими.

Следовательно, задача Эвклида имеет гармоническую оболочку в виде двух классических сечений для площадей, восходящих к кубическим уравнениям и одного сечения, связанного с уравнением четвертой степени.

Литература

А.П.Стахов. Гипотеза Прокла: новый взгляд на "Начала" Евклида и Математика Гармонии http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322026.htm

А.П.Стахов.«Три «ключевые» проблемы математики на этапе ее зарождения и «Математика Гармонии» как альтернативное направление в развитии математической науки». «Totallogy. Постнекласичні дослідження», №17/18, 2007, с. 273-323