Г.Я.Мартыненко

Математика гармонии и статистика

Математика гармонии не может рассматриваться в отрыве от статистической науки, поскольку «магические» числа, «божественные» пропорции, «сакральные» прогрессии на языке статистики являются статистическими величинами и их соотношения (индексами). Не случайно в статистике золотое сечение часто выступает как одна из мер центральной тенденции (Венецкий, Венецкая, 1979), а золотое соотношение высоты и ширины прямоугольника (3:8) используется в качестве правила при построении статистических графиков (Митропольский, 1971). В качестве определенной нормы в статистике фигурирует и величина коэффициента вариации, тяготеющая в сознании статистиков к нормативной величине 0,4, приблизительно равной относительной длине малого отрезка при делении отрезка прямой в золотом соотношении. Можно назвать и другие соотношения статистических чисел, в неявном виде тяготеющих к золотой пропорции (например, числа интервалов при построении распределений). В целом компоненты математико-гармонической составляющей статистики образуют ту ее часть, которая связана с гармонией или эстетикой статистических чисел, но эта гармония проникнута духом и буквой статистического видения мира, в частности идеей массовости объекта исследования в условиях действия закона больших чисел. Статистика позволяет более осторожно относиться к различного рода числовым константам, видя в них лишь некоторые предельные величины, некоторый количественный идеал, к которому тяготеют числа, измеренные на конкретных объектах.

Взаимоотношения между статистикой и математикой гармонии показаны на схеме, приведенной ниже.

Взаимоотношение между статистикой и математикой гармонии еще ждут внимательного и всестороннего исследования. Свою задачу мы видим в том, чтобы привлечь внимание к этой проблеме. Сделаем мы это с помощью нескольких примеров, имеющих непосредственное отношение к статистической стороне теории гармонии. Особенностью такой теории является то, что она ориентирована не в сторону выполнения законов гармонии на каком-то конкретном, индивидуальном объекте, а на совокупности объектов в определенных рамках времени и пространства.

Пример 1. **Общие исторические корни теории вероятностей и теории гармонии.** В статье (Мартыненко, 2009) было показано, что предпосылки теории гармонии и теории вероятностей коренятся в комбинаторике, в рамках которой родились первые задачи этих двух дисциплин, сформулированные Леонардо Пизанским, Лукой Пачоли, Джироламо Кардано, Николо Фонтано (Тарталья), Блэзом Паскалем и др. Комбинаторика при этом шла рука об руку с занимательным, игровым началом этих задач. В новейшее время теория гармонии также не порывает уз с теоретико-вероятностными представлениями. Например, классик последовательностей Фибоначчи В.В. Воробьев является также и видным специалистом в области теории игр (Воробьев, 1966; Воробьев, 1969).

Пример 2. **Теория пропорций и теория средних**

Пропорции занимают центральное место в теории гармонии и одновременно являются методологической основой современной теории трехчленных последовательностей и средних величин, восходящих к учению Пифагора и пифагорейцев о гармонии (VI до н. э.), в котором большую роль играли две пропорции : «гармоническая» и «золотая», связывающие три вида средних: арифметическую, геометрическую и гармоническую (Ван дер Варден, 1959; Яглом,1980).

Среди современных исследований в этой области следует прежде всего отметить теорию средних величин К. Джини (Джини, 1970), в которой все потенциально возможные средние величины толкуются с точки зрения теории пропорций. Кроме того, в рамках этой теории рассматриваются и прогрессии – частный вид возвратных последовательностей, к числу которых относится и классическая последовательность Фибоначчи.

По свидетельству греческих авторов первых веков нашей эры Пифагору и его ближайшим ученикам были известны три пропорции:

Арифметическая $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{a}$,

Геометрическая $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b}$,

Гармоническая $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$.

В этих пропорциях *a* и *c* – крайние члены, а *в* – средний член.

Все эти виды средних прочно вошли в исследовательскую практику последующих тысячелетий, хотя в наше время мало кто из статистиков знает, когда и в каких обстоятельствах появились эти средние и их названия.

Известно, что в учении пифагорейцев большую роль играла учение о музыкальной гармонии. Ими, в частности, была открыта связь между благозвучием музыкальных интервалов и отношениями длин струн (Ван дер Варден, 1980). Большую роль в их теории музыки играла так называемая «гармоническая прогрессия»:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{H}=\frac{1}{H}-\frac{1}{y}, \text{ т. е.}$$

$$\frac{1}{H}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \text{ или } \frac{1}{H}=A\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right),$$

где $H=H(x,y)=\dfrac{2xy}{x+y}$ - среднее гармоническое чисел x и y,

а $A(x,y)=\dfrac{x+y}{2}$ - среднее арифметическое чисел x и y.

«Золотая прогрессия» у пифагорейцев выглядела так:

$\dfrac{x}{H}=\dfrac{A}{y}$, откуда $G(A,H)=G(x,y)=\sqrt{xy}$ – среднее геометрическое чисел x, y.

Приведенные соотношения говорят о том, что пифагорейцам были известны соотношения между тремя основными видами средних (правда, только для двух чисел). Но это в современной статистике забыто: ни в серьезных статистических книгах, ни в справочниках, ни в учебниках, короче говоря, нигде об этом не говорится. Упоминается лишь правило мажорантности средних (Венецкий, Венецкая, 1979). Это же свойство выступает в качестве классического примера в теории неравенств (Баккенбах, Беллман, 1965).

А теперь обратимся к полной классификации пропорций, которая приводится в книге выдающегося итальянского статистика К. Джини (Джини, 1970). Эта классификация была им заимствована у греческих математиков Никомаха и Паппа, живших в начале первого тысячелетия нашей эры. Здесь мы найдем и золотую пропорцию и даже некоторые новейшие обобщения. Об этом подробно говорится в статье (Григорьев, Мартыненко, 2009). Здесь мы ограничимся более скупыми сведениями.

На основании формул арифметической, геометрической и гармонической пропорций могут быть получены уравнения, корнями которого могут быть каждый из перечисленных членов *а*, *в* и *с*. При этом центральный член может рассматриваться как среднее значение, а крайний член с – как результат действия рекуррентного правила. В таблице, которая приведена ниже, приведены три классические пропорции и одна неклассическая, которая, однако, может претендовать на звание классической.

Номер пропорции по Джини	Пропорция	Уравнение Пропорции	Среднее	Правый Член
1	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{a}$,	$a-2b+c=0$	$b=\frac{a+c}{2}$,	$c=2b-a$
2	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b}$	$ac-b^2=0$	$b=\sqrt{ac}$,	$c=\frac{b^2}{a}$
3	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$	$2ac-bc-ab=0$	$b=\frac{2ac}{a+c}$.	$c=\frac{ab}{2b-a}$
13	$\frac{a-c}{b-c}=\frac{b}{a}$	$a+b-c=0$	$b=c-a$	$c=a+b$

Итак, для пропорции № 13 мы получаем интересный результат – порождающее правило имеет суммативный характер. В сущности мы имеем здесь дело с правилом Фибоначчи, согласно которому последующий член равен сумме двух предыдущих: $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. Следовательно, эта пропорция № 13 является золотой или фибоначчиевой, так как суммативное правило при его многократном употреблении переработает любую пару затравочных чисел *a* и *b* таким образом, что отношение последующего члена к предыдущему будет стремиться к числу 1,618. Мы находим, что этот факт выходит за пределы того, что ученые любят называть «любопытным».

Пример 3. Статистика «магических чисел»

Издавно замечено, что в пословицах, крылатых выражениях, мифах, названиях художественных произведений основные числа реализуются очень неравномерно. Доминируют так называемые «магические» числа, среди которых чаще всего доминируют тройка и семерка. Вспомним хотя бы о трех грациях (Аглае, Талии, Эфросине – дочерях Зевса и Эвримоны), о трех картах (тройке, семерке, тузе), трех мушкетерах (Атосе, Портосе, Арамисе). Что касается числа семь, то и здесь много примеров: семь чудес света, семь цветов радуги, семь нянек и т. п.

Интуитивные представления были подтверждены американскими статистиками, которые сосчитали количество реализаций чисел первого десятка в наименованиях, фигурирующих в современной культуре. Эти наименования были заимствованы из американской «Энциклопедии мелочей» (Worth F.L, 1974). Был построен соответствующий график, и оказалось, что он имеет две вершины: одна соответствовала тройке, а вторая семерке.

Что касается пятерки, которая в математике гармонии играет очень важную роль, то ее роль в культуре не сделала данное распределение трехмодальным, хотя можно привести много примеров ее реализации в «мелочах жизни»: *пятак, пятерня, дай пять, пятилетка, пятиэтажка, пятистенок, пентагон, пятая колонна, пятый пункт, пятое колесо, пять углов, пять баллов, пятизвездочный отель* и т. п. Возможно, на другой выборке пятерке повезло бы больше.

Пример 4. Антропометрия и теория среднего человека

Начиная с эпохи Возрождения (Леонардо да Винчи, Альбрехт Дюрер) в теории гармонии большое место занимает интерес к пропорциям человеческого тела.

В рамках этого интереса можно выделить три подхода:

1. Натуралистическое направление, согласно которому задачей художника является изображение данного частного человека и его тела. Причем этот человек должен быть рассмотрен максимально объективно, беспристрастно, без всякой предвзятости и спущенных откуда-либо установлений или норм. Здесь на первом плане интерес к индивидуальному во всех его мельчайших и тончайших проявлениях.

2. Типологическое направление. В человеке как предмете изображения художник видит не отдельного человека, а некоторый тип, некоторый отвлеченный от действительности идеал, который синтезируется в его сознании или спускается свыше как план божественного творения. Такой подход идет от Леонардо да Винчи и Альбрехта Дюрера. Позднее он активно проповедывался также и Адольфом Цейзингом (Zeizing, 1854).

3. Статистический подход является результатом наблюдения больших человеческих масс и обобщения результатов наблюдения с помощью средних признаков. На основании многомерных средних конструируется тип среднего человека. Такой подход был провозглашен выдающимся бельгийским математиком, физиком, статистиком, социологом антропологом и искусствоведом Адольфом Кеттле (*Quetelet*, I – p. 583, II – p.16, 1835-1836). Согласно Кеттле значения антропометрических переменные и их отношения в большинстве случаев очень тесно группируются около средней величины и обычно распределяются по нормальному закону. Идею среднего человека Кеттле распространял не только на биологические переменные, но и на духовную сферу, включая искусство. Такой подход нашел в научных кругах множество оппонентов и породил жесточайшую дискуссию (Кауфман, 1910).

Пример 5. Перцептивная эстетика и искусствометрия

Еще одним пример сотрудничества математики гармонии со статистикой являются связан с психологической теорией Г. Фехнера (Fechner, 1876), в основу которой был положен экспериментально-статистический метод. Сущность экспериментальной методики Фехнера заключалась в том, что информантам предъявлялись прямоугольные предметы с разным соотношением сторон. Испытуемые должны были высказать степень своего предпочтения конкретной фигуре в определенной шкале. После этого результаты подвергались статистической обработке. Фехнером было установлено, что наибольшей «симпатией» у испытуемых пользовался прямоугольник с соотношением сторон 21:34, равным золотому сечению, т. е. 0,618. Любопытно, что делимое и делитель являются «соседями» в классической последовательности Фибоначчи. Исследования Фехнера имели множество продолжений и остаются популярными вплоть до настоящего времени в перцептивной эстетике, математике гармонии и искусствометрии. Но и у такого подхода очень много оппонентов и нескончаемой критики. Но сама идея редко подвергается сомнению.

Пример 6. Ранговых распределения и частотные словари

Самым простым параметром, характеризующим разнообразие (богатство) частотного словаря, является доля в нем неповторившихся единиц, т. е. отношение однократных единиц к совокупности всех лексических единиц. Этот индекс можно связать с эстетической теорией Айзенка (Eysenck, 1942), основная посылка которой заключается в том, что эстетическое удовольствие обратно пропорционально количеству энергии, необходимой для восприятия эстетического объекта. Он постулирует два закона (Мак-Уинни, 1972):

1. Закон повторения. Для того чтобы воспринимающий индивид испытывал чувство полноты и удовлетворенности, эстетическая форма требует повторяемости.

2. Закон утомления. Для того чтобы воспринимающий индивид испытывал чувство полноты и удовлетворенности, эстетический объект нуждается в разнообразии.

Согласно теории Айзенка, чем лучше сбалансированы в эстетическом объекте разнообразие и повторяемость, тем большее удовольствие этот объект доставляет. Ниже в таблице приведены значения индекса разнообразия *T* (Мартыненко, 2009) для частотных словарей А.П.Чехова, Л.Н. Андреева и А.И.Куприна.

Индекс разнообразия рассказов (*T*) Чехова, Андреева, Куприна

	Чехов	**Андреев**	**Куприн**	**Сумма**
Число неповторившихся единиц	5257	5834	7809	18900
Число повторившихся единиц	8479	8298	12265	29042
Общее число единиц	13736	14132	20075	47942
T	0,383	0,413	0,389	0,394

Несмотря на то, что абсолютные объемы словарей и однократных единиц в рассказах трех авторов подвержены большим колебаниям, соотношение редких и частых единиц практически не зависит от авторской принадлежности текстов. Более того, это соотношение тяготеет к постоянному числу, близкому к «малому» золотому сечению (0,382). Но это соотношение прорисовывается лишь на выборках достаточно большого объема.

Литература

Баккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства. М.: Мир,1965
Ван дер Варден Б. Л. Пифагорейское учение о гармонии // Пробуждающаяся наука: Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции: Пер. с голл. М., 1959.
Венецкий И. Г., Венецкая В. И. Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе. М., 1979.
Воробьев В.В. Некоторые математические проблемы теории игр / Вопросы философии, № 1, 1966.
Воробьев В.В. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1969.
Григорьев Ю. Д., Мартыненко Г.Я. Теория пропорций и теория средних в математике гармонии (в печати)
Джини К. Средние величины. М.: Статистика, 1970.
Мак-Уинни Г. Обзор исследований по эстетическим измерениям // Семиотика и искусствометрия. М., 1972. С. 250–266.
Мартынеко Г.Я. Основы стилеметрии. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988.
Мартыненко Г.Я. Числовая гармония ценозов // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15453, 06.08.2009
Мартыненко Г.Я. Числовая гармония текста. СПб: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2009 (в печати)
Митропольский А. К. Техника статистических вычислений. М.: Наука 1971.
Яглом И. М. Математические структуры и математическое моделирование. М.: Советское радио, 1980.
Eysenck H. J. An Experimental Study of the Good Gestalt. In: Psychological Review. 1942. N 49. Pp. 344–364. *Fechner G. T.* Vorschule der Äesthetik. Leipzig, 1876.
Fechner G. T. Vorschule der Äesthetik. Leipzig, 1876.
Lexis W. Adhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik. Yena, 1903.
Martynenko G. Linguistic Numerology. In: Festschrift in Honor of Gabriel Altmann. De Gruyter Publishing House. Berlin / New York. 2006. P. 413-424.
Quetelet A.. Des proportions du corps humain. Bullatin de l Academie de Belgique. Tom 15, I, II
The World of Mathematics. New York, Simon & Schuster, 1956.
Worth F.L. The Trevial Encyclopedia. Los Angeles, 1974.
Zeizing A. Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Korpers. Leipzig, 1854.