А.П. Стахов

Какой тип «золотых» гиперболических функций использует Природа в ботаническом явлении филлотаксиса?

До сих пор не утихают споры по поводу «золотых» гиперболических функций, открытых украинским исследователем Олегом Боднаром [1-4], и гиперболических функций Фибоначчи и Люка, открытых украинскими математиками Алексеем Стаховым, Иваном Ткаченко и Борисом Розиным [5-8]. Мне, как одному из авторов этого математического открытия, хотелось бы высказаться на эту тему. К этому открытию независимо друг от друга пришли **Олег Боднар** [1-4], **Алексей Стахов, Иваном Ткаченко и Борис Розин** [5-8]. Все остальные работы в этой области, как говорится, «от лукавого». Других оригинальных работ в этой области, кроме названных выше [1-8], не существует.

В чем различие между «золотыми» гиперболическими функциями (О. Боднар) и гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка (Стахов, Ткаченко, Розин)?

К этому открытию Олега Боднара привела его гениальная интуиция. Исследую проблему филлотаксиса, в частности, проблему динамической симметрии, он пришел к однозначному заключению, что геометрия филлотаксиса основана на законах гиперболической геометрии. Гениальность Боднара состояла в том, что он понял, что, используя классические гиперболические функции

$$sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ ch(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \qquad (1)$$

невозможно объяснить, почему на поверхности филлотаксисных объектов возникают фибоначчиевые спирали. С целью построения геометрической модели филлотаксиса, основанной на числах Фибоначчи, он вводит новый класс гиперболических функций, названных им *золотыми гиперболическими функциями*:

<u>Золотой гиперболический косинус</u>

$$Gch(x)=\frac{\Phi^x+\Phi^{-x}}{2} \qquad (2)$$

<u>Золотой гиперболический синус</u>

$$Gsh(x)=\frac{\Phi^x-\Phi^{-x}}{2} \qquad (3)$$

где $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ - золотая пропорция.

Стахов, Ткаченко и Розин, вводя *гиперболические функции Фибоначчи и Люка,* двигались другим путем. В основе их математического открытия лежат формулы Бине (19 столетие), выражающие числа Фибоначчи и Люка через золотую пропорцию Φ:

$$L_n = \begin{cases} \Phi^n + \Phi^{-n} & для \quad n = 2k; \\ \Phi^n - \Phi^{-n} & для \quad n = 2k+1 \end{cases} \tag{4}$$

$$F_n = \begin{cases} \dfrac{\Phi^n + \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & для \quad n = 2k+1; \\ \dfrac{\Phi^n - \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & для \quad n = 2k \end{cases} \tag{5}$$

Следует отметить, что представление формул Бине в виде (4), (5) в математике практически не используется. Возможно, впервые в таком виде формулы (4), (5) были представлены в моей книге «Коды золотой пропорции» (1984) [6]. Но именно в таком виде четко обнаруживается «гиперболический характер» чисел Фибоначчи и Люка, потому что формулы Бине (4), (5) подобны формулам (1), задающим гиперболическим функциям. Вот эта аналогия и лежит в основе нового класса гиперболических функций, названных *гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка.* Впервые это математическое открытие, основанное на формулах Бине, было обнародовано в 1993 г. в статье Стахова и Ткаченко, опубликованной в *Докладах НАНУ* согласно рекомендации академика Митропольского [7]. В дальнейшем Стаховым и Розиным эти функции были усовершенствованы путем введения так называемых *симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка*:

<u>Симметричный гиперболический синус Фибоначчи</u>

$$sFs(x) = \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{6}$$

<u>Симметричный гиперболический косинус Фибоначчи</u>

$$cFs(x) = \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{7}$$

<u>Симметричный гиперболический синус Люка</u>

$$sLs(x) = \Phi^x - \Phi^{-x} \tag{8}$$

<u>Симметричный гиперболический косинус Люка</u>

$$cLs(x) = \Phi^x + \Phi^{-x} \tag{9}$$

При этом числа Фибоначчи и Люка, задаваемые в виде формул Бине (4), (5), однозначно определяются через симметричные гиперболические синусы и косинусы Фибоначчи и Люка (6)-(9) следующим образом:

$$F_n = \begin{cases} sFs(n) & при \quad n = 2k \\ cFs(n) & при \quad n = 2k+1 \end{cases}; \qquad L_n = \begin{cases} cLs(n) & при \quad n = 2k \\ sLs(n) & при \quad n = 2k+1 \end{cases} \tag{10}$$

Необходимо отметить, что согласно (10) числам Фибоначчи с четными номерами (n=2k) всегда соответствует симметричный фибоначчиевый синус

$sFs(x)$, а с нечетными номерами (n=2k+1) – симметричный фибоначчиевый косинус $cFs(x)$, в то время как числам Люка с четными номерами всегда соответствует симметричный люковый косинус $cLs(x)$, а с нечетными номерами – симметричный люковый синус $sLs(x)$. Введенные выше симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка связаны между собой следующими простыми соотношениями:

$$sFs(x) = \frac{sLs(x)}{\sqrt{5}}; \qquad cFs(x) = \frac{cLs(x)}{\sqrt{5}} \tag{11}$$

Графики функций (6)-(9), представленные на Рис.1 и Рис.2, имеют симметричный вид и подобны графикам классических гиперболических функций.

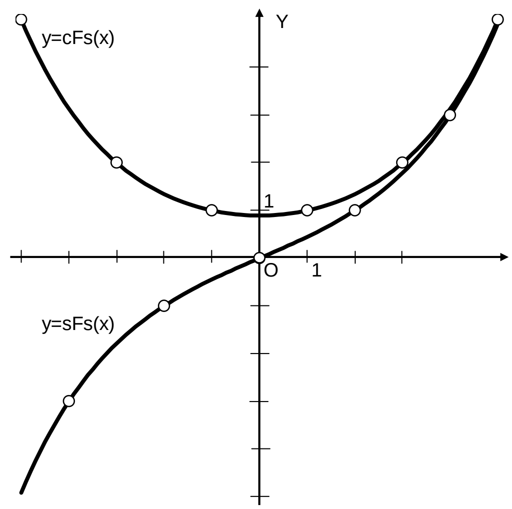

Рисунок 1. Симметричные гиперболические функции Фибоначчи

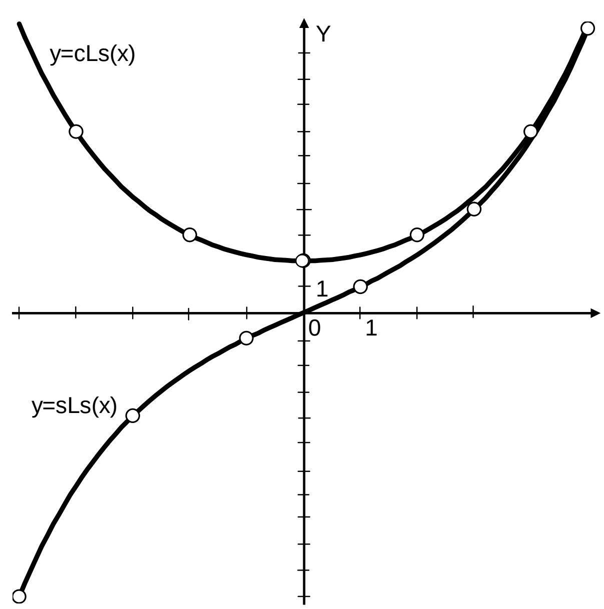

Рисунок 2. Симметричные гиперболические функции Люка

В упомянутой выше статье Стахова и Розина [8] проведено детальное исследование математических свойств нового класса гиперболических функций. При этом доказано, что симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка, с одной стороны, обладают *рекуррентными* свойствами, подобными свойствам чисел Фибоначчи и Люка, с другой стороны, *гиперболическими* свойствами, подобными свойствам классических гиперболических функций (1).

Рекуррентные свойства симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка вместе с соответствующими тождествами для чисел Фибоначчи и Люка приведены в Табл. 1.

Таблица 1. Рекуррентные свойства симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка

Тождества для чисел Фибоначчи и Люка	Тождества для симметричных фибоначчиевых и люковых функций	
$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$	$sFs(x+2) = cFs(x+1) + sFs(x)$	$cFs(x+2) = sFs(x+1) + cFs(x)$
$F_n = (-1)^n F_{-n}$	$sFs(x) = - sFs(-x)$	$cFs(x) = cFs(-x)$
$F_{n+3} + F_n = 2F_{n+2}$	$sFs(x+3)+cFs(x) = 2cFs(x+2)$	$cFs(x+3)+sFs(x)=2sFs(x+2)$
$F_{n+3} - F_n = 2F_{n+1}$	$sFs(x+3) - cFs(x) = 2sFs(x+1)$	$cFs(x+3) - sFs(x) = 2cFs(x+1)$
$F_{n+6} - F_n = 4F_{n+3}$	$sFs(x+6) + sFs(x) = 4cFs(x+3)$	$cFs(x+6)+cFs(x) = 4sFs(x+3)$
$F_{n+3} - 2F_n = L_n$	$sFs(x+3) - 2cFs(x) = sFs(x)$	$cFs(x+3) - 2sFs(x) = cFs(x)$
$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$	$sLs(x+2) = cLs(x+1) + sLs(x)$	$cLs(x+2) = sLs(x+1) + cLs(x)$
$L_n = (-1)^n L_{-n}$	$sLs(x) = - sLs(x)$	$cLs(x) = cLs(-x)$
$F_n^2 - F_{n+1} F_{n-1} = (-1)^{n+1}$	$sFs(x)^2 - cFs(x+1)\, cFs(x-1)=-1$	$cFs(x)^2 - sFs(x+1)\, sFs(x-1)=1$
$L_n^2 - 2(-1)^n = L_{2n}$	$(sLs(x))^2 + 2 = cLs(2x)$	$(cLs(x))^2 - 2 = cLs(2x)$
$L_n + L_{n+3} = 2L_{n+2}$	$sLs(x) + cLs(x+3) = 2sLs(x+2)$	$cLs(x) + sLs(x+3) = 2cLs(x+2)$
$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$	$sLs(x-1) + sLs(x+1) = 5sFs(x)$	$cLs(x-1) + cLs(x+1) = 5cFs(x)$
$L_n + 5F_n = 2L_{n+1}$	$sLs(x) +5cFs(x) = cLs(x+1)$	$cLs(x) +5sFs(x) = sLs(x+1)$
$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$	$cFs(2x+1)=(cFs(n+1))^2 + (cFs(x))^2$	$cFs(2x+1)=(sFs(n+1))^2 + (sFs(x))^2$
$L_{n+1} L_{n-1} - L_n^2 = -5(-1)^n$	$sLs(x+1)\, sFs(x-1) - (cFs(x))^2 = - 5$	$cLs(x+1)\, cLs(x-1) - (sFs(x))^2 = 5$
$L_{n+1}^2 + L_n^2 = 5F_{2n+1}$	$(sLs(x+1))^2 + (sLs(x))^2 = 5cFs(x)$	$(cLs(x+1))^2 + (cLs(x))^2 = 5cFs(x)$
$F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$	$sFs(3x) = (cFs(x+1))^3+(sFs(x))^3-$ $-(cFs(x-1))^3$	$cFs(3x) = sFs(x+1))^3+(cFs(x))^3-$ $-(sFs(x-1))^3$

Например, знаменитая *формула Кассини*

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1} \tag{12}$$

в терминах симметричных гиперболических функций Фибоначчи представляется в виде двух «непрерывных» тождеств:

$$[sFs(x)]^2 - cFs(x+1)\, cFs(x-1) = -1 \tag{13}$$

$$[cFs(x)]^2 - sFs(x+1)\, sFs(x-1) = 1, \tag{14}$$

которые можно рассматривать как обобщение «формулы Кассини» (12) на непрерывную область.

Симметричное представление гиперболических функций Фибоначчи и Люка обладает свойствами, подобными классическим гиперболическим функциям. Ниже в Табл. 2 для сравнения приведены некоторые известные свойства классических гиперболических функций и соответствующие свойства симметричных фибоначчиевых и люковых функций.

Таблица 2. Гиперболические свойства симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка

Классические гиперболические функции	Симметричные фибоначчиевые функции	Симметричные люковые функции
$[ch(x)]^2 - [sh(x)]^2 = 1$	$[cFsf(x)]^2 - [sFs(x)]^2 = 4/5$	$[cLs(x)]^2 - [sLs(x)]^2 = 4$
$ch(x\pm y) = ch(x)ch(y) \pm$ $\pm sh(x)sh(y)$	$\frac{2}{\sqrt{5}} cFs(x\pm y) = cFs(x)cFs(y) \pm$ $\pm sFs(x)sFs(y)$	$2cFs(x\pm y) = cFs(x)cFs(y) \pm$ $sFs(x)sFs(y)$
$sh(x\pm y) = sh(\mathrm{x})ch(y) \pm$ $\pm ch(x)sh(y)$	$\frac{2}{\sqrt{5}} sFs(x\pm y) = sFs(x)cFs(y) \pm$ $\pm cFs(x)sFs(y)$	$2sFs(x\pm y) = sFs(x)cFs(y) \pm$ $\pm cFs(x)sFs(y)$
$ch(2x) = [ch(x)]^2 + [sh(x)]^2$	$\frac{2}{\sqrt{5}} cFs(2x) = [cFs(x)]^2 +$ $+ [sFs(x)]^2$	$2cFs(2x) = [cFs(x)]^2 + +[sFs(x)]^2$
$sh(2x) = 2\, sh(x)ch(x)$	$\frac{1}{\sqrt{5}} sFs(2x) = sFs(x)cFs(x)$	$sFs(2x) = sFs(x)cFs(x)$

Например, наиболее важное тождество для классических гиперболических функций

$$[ch(x)]^2 - [sh(x)]^2 = 1 \tag{15}$$

выглядит следующим образом для симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка, соответственно:

$$[cFs(x)]^2 - [sFs(x)]^2 = \frac{4}{5}, \tag{16}$$

$$[cLs(x)]^2 - [sLs(x)]^2 = 4. \tag{17}$$

Таким образом, введенные выше симметричные гиперболические функции полностью сохраняют свойства классических гиперболических функций (Табл. 2), но при этом обладают новыми («рекуррентными») свойствами, подобными свойствам чисел Фибоначчи и Люка (Табл. 1). При этом, в отличие от классических гиперболических функций, новые гиперболические функции имеют «дискретный аналог» в виде чисел Фибоначчи и Люка, с которыми согласно (10) указанные функции совпадают, когда непрерывная переменная *x* принимает «дискретные» значения: 0, ±1, ±2, ±3, … . Заметим, что тождества (13), (14), (16), (17), как и остальные тождества, приведенные в Табл. 1 и 2, подчеркивают фундаментальный характер введенных выше гиперболических функций Фибоначчи и Люка.

А теперь проведем сравнительный анализ «золотых» гиперболических функций (2), (3) с гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка (6)-(9). Мы видим, что их отличие состоит только в коэффициенте в знаменателе формул, задающих эти функции: в знаменателе формул для «золотых» гиперболических функций (2), (3) стоит число 2, в знаменателе формул для гиперболических функций Фибоначчи стоит иррациональное число $\sqrt{5}$, а формулы для гиперболических функций Люка (8), (9) практически совпадают с формулами Боднара (2), (3); при этом формулы (8), (9) связаны с формулами Боднара (2), (3) простыми соотношениями:

$$Gch(x)=\frac{cLs(x)}{2};\qquad Gsh(x)=\frac{sLs(x)}{2}. \tag{18}$$

Те исследователи, которые читали работы Боднара [1-5], не могли не заметить один прием, который использовал Олег Боднар в своей теории филлотаксиса. Когда он переходит к использованию своих функций (2), (3) для анализа фибоначчиевых решеток он вынужден умножать свои функции (2), (3) на поправочный коэффициент $\frac{2}{\sqrt{5}}$. В этом случае его функции (2), (3) принимают новый вид:

$$MGch(x)=\frac{2}{\sqrt{5}}Gch(x)=\frac{\Phi^{x}+\Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{19}$$

$$MGsh(x)=\frac{2}{\sqrt{5}}Gsh(x)=\frac{\Phi^{x}-\Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{20}$$

Будем называть функции (19), (20) *модифицированными функциями Боднара.*

Зачем Боднар вводит свои *модифицированные функции* (19), (20)? Ответ очень прост: иначе никак нельзя связать «золотые» гиперболические функции Боднара (2), (3) с числами Фибоначчи, которые появляются на поверхности филлотаксисных объектов.

А теперь сравним *модифицированные функции Боднара* (19), (20) с гиперболическими функциями Фибоначчи (6), (7). Это сравнение приводит нас к неожиданному заключению: **модифицированные функции Боднара (19), (20) совпадают с симметричными гиперболическими функциями Фибоначчи (6), (7),** то есть,

$$MGch(x)=cFs(x) \tag{21}$$

$$MGsh(x)=sFs(x) \tag{22}$$

Из этого анализа мы приходим к важному заключению: **на самом деле в основе геометрии филлотаксиса, созданной Олегом Боднаром, лежат не исходные «золотые» гиперболические функции Боднара (2), (3), а**

модифицированные функции Боднара (21), (22), которые представляют собой ни что иное, как симметричные гиперболические функции Фибоначчи (6), (7)!

Несколько слов о роли гиперболических функций Фибоначчи и Люка в развитии «теории чисел Фибоначчи». Не надо быть доктором наук, чтобы понять, что гиперболические функции Фибоначчи и Люка поднимают «теорию чисел Фибоначчи» на новую ступень развития. Дело в том, что согласно (10) числа Фибоначчи и Люка являются частными случаями более сложных математических объектов – *гиперболических функций Фибоначчи и Люка,* которые являются расширением чисел Фибоначчи и Люка на непрерывную область. Любому «непрерывному» тождеству для гиперболических функций Фибоначчи и Люка соответствует некоторое «дискретное» тождество для чисел Фибоначчи и Люка, что наглядно демонстрируется с помощью Табл. 1. Таким образом, **«теория чисел Фибоначчи» в ее классическом варианте как бы «вырождается» и заменяется на «теорию гиперболических функций Фибоначчи и Люка», которая является «непрерывным» аналогом «теории чисел Фибоначчи».**

Заключение

1. В конце 20-го века и начале 21-го века в «теории чисел Фибоначчи» было сделано важное математическое открытие – **введены «золотые» гиперболические функции (Боднар) и гиперболические функции Фибоначчи и Люка (Стахов, Ткаченко, Розин).** С использованием этих функций Олег Боднар создал оригинальную геометрическую теорию филлотаксиса, которая позволила объяснить явление «динамической симметрии».
2. Анализ «геометрии Боднара» показывает, что построение геометрической «теории филлотаксиса» невозможно без введения «модифицированных функций Боднара», которые получаются из его исходных «золотых» гиперболических функций путем умножения на поправочный коэффициент $\frac{2}{\sqrt{5}}$, что позволяет связать «золотые» гиперболические функции Боднара с числами Фибоначчи, возникающими на поверхности филлотаксисных объектов.
3. Анализ «модифицированных функций Боднара» приводит к выводу, что они совпадают с симметричными гиперболическими функциями Фибоначчи (Стахов, Розин), откуда вытекает важное заключение, что **Природа использует в явлении филлотаксиса гиперболические функции Фибоначчи (Стахов, Ткаченко, Розин). И этот научный факт блестяще доказан в «геометрии Боднара».**
4. **Теория гиперболических функций Фибоначчи и Люка поднимает «теорию чисел Фибоначчи» на новую, «непрерывную» ступень развития, так как гиперболические функции Фибоначчи и Люка являются расширением чисел Фибоначчи и Люка на «непрерывную» область.**
5. Авторами нового математического открытия – «золотых» гиперболических функций и гиперболических функций Фибоначчи и Люка, которые отличаются друг от друга только постоянными коэффициентами, являются

украинские ученые **Олег Боднар, Алексей Стахов, Иван Ткаченко и Борис Розин.**

Литература

1. Боднар О.Я. Геометрическая модель однообразного роста. – Деп. 19.06.1989, №54-ТЭ 89. – М., 1989.
2. Боднар О.Я. Динамичесая симметрия. – Препр. АН УССР. Институт прикл. проблем механики и математики, №25-90. – Львов-1990.
3. Боднар О.Я. Геометрия филлотаксиса. – Доклады НАУ Украины. – 1992, №9.
4. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. – Львов, 1994.
5. Боднар О.. Динамічна симетрія у природі та архітектурі. Шлях до гармонії: мистецтво + математика. Львів, Львівстка націоальна академія мистецтв, 2008.
6. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. М., Радио и связь, 1984.
7. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. - Доклады НАУ Украины. – №7, 1993.
8. Stakhov A., Rozin B. On a new class of hyperbolic functions. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, V.25, No. 2.