Мартыненко Г.Я.

Золотой треугольник Фибоначчи

На основании классического уравнения золотого сечения и двух самых известных его обобщений (Стахов, 2002, Gazalé, 1999) может быть построена система уравнений высоких степеней, каждое из которых имеет корень, равный золотому числу 1,618. Частично такие уравнения рассмотрены в работах (Стахов, Слученкова, Щербаков, 2006; Stakhov, Rozin, 2005; Gazalé, 1999). В данной работе предлагается система уравнений высокого порядка, включающая кроме этих обобщений и другие логически возможные варианты. Предлагаемая классификационная таблица имеет вид треугольника, в котором система уравнений М. Газале является вертикальным «катетом», а «гипотенузой» являются уравнения, восходящие к обобщению А. Стахова. Вертикальный катет и гипотенуза неограниченно возрастают, при этом возрастает и «длина» нижнего катета. Такой способ визуализации данных использован в работе (Мартыненко, 2009).

С					
$x^2-x-1=0$	**Т**				
$x^3-2x-1=0$	$x^3-2x^2+1=0$	**А**			
$x^4-3x-2=0$	$x^4-3x^2+1=0$	$2x^4-3x^3-1=0$	**Х**		
$x^5-5x-3=0$	$x^5-5x^2+2=0$	$2x^5-5x^3-1=0$	$3x^5-5x^4+1=0$	**О**	
$x^6-8x-5=0$	$x^6-8x^2+3=0$	$2x^6-8x^3-2=0$	$3x^6-8x^4+1=0$	$5x^6-8x^5-1=0$	**В**
$x^7-13x-8=0$	$x^7-13x^2+5=0$	$2x^7-13x^3-3=0$	$3x^7-13x^4+2=0$	$5x^7-8x^6-1=0$	$8x^7-13x^6+1=0$
$x^8-21x-13=0$	$x^8-21x^2+8=0$	$2x^8-21x^3-5=0$	$3x^8-21x^4+3=0$	$5x^8-21x^5-2=0$	$8x^8-21x^6+1=0$
$x^9-34x-21=0$	$x^9-34x^2+13=0$	$2x^9-34x^3-8=0$	$3x^9-34x^4+5=0$	$5x^9-34x^5-3=0$	$8x^9-34x^6+2=0$
ГАЗАЛЕ	$x^{10}-55x^2+21=0$	$2x^{10}-55x^3-13=0$	$3x^{10}-55x^4+8=0$	$5x^{10}-55x^5-5=0$	$8x^{10}-55x^6+3=0$

Уравнения, заполняющие данный треугольник, обладают рядом замечательных свойств. Назовем некоторые из них.

Коэффициенты при первом члене первого, второго, третьего и т. д. столбцов образуют последовательность Фибоначчи.

Коэффициенты при втором члене в каждом столбце образуют последовательности Фибоначчи.

Коэффициенты при первом и втором членах в каждой диагонали образуют последовательности Фибоначчи.

Свободные члены каждой диагонали по модулю равны числам Фибоначчи, причем в каждой диагонали знак перед числом Фибоначчи является переменным.

В каждой строке коэффициенты при первом члене и свободный член образуют последовательности Фибоначчи, но последний является знакопеременным и по модулю возрастает в обратном направлении.

Особенностью уравнений Стахова является то, что в них свободный член не только является знакопеременным, но по модулю всегда равен единице.

Данный треугольник, будучи полностью фибоначчиевым, предсказывает все потенциально возможные трехчленные уравнения, решением которых является золотое число 1,618.

Что касается четырехчленных уравнений, то они могут быть получены, например, путем попарного сложения (или вычитания) трехчленных уравнений по вертикалям или диагоналям, но это можно рассмотреть в следующей работе, чтобы не загромождать внимание читателя обилием фактических данных.

В заключение отметим, что особое положение в данной классификационной таблице занимают уравнения, помеченные красным цветом. В отличие от всех уравнений, рассмотренных выше, в этих уравнениях коэффициенты при втором члене кратны числам Люка, т. е. эти коэффициенты, будучи числами Фибоначчи, одновременно являются произведениями чисел Фибоначчи и соответствующих чисел Люка ($1\times 3;2\times 4;3\times 7;5\times 11$ и т. д.). Эти уравнения мы назовем уравнениями Фибоначчи-Люка. В таблице они образуют лестничную структуру, проходящую через центр треугольника.

Лестничная структура Люка в треугольнике связана с одним из многочисленных замечательных свойств, связывающих классические последовательности, а именно:

$$L_n = \frac{F_{2n+1}}{F_n}.$$

Это свойство можно продемонстрировать и в табличной форме:

F_n	1	1	2	3	5	8	13
F_{2n+1}	1	3	8	21	55	144	377
L_n	1	3	4	7	11	18	29

Литература

Мартыненко Г.Я. Классификационный треугольник уравнений, связанных с золотым сечением. Академия Тринитаризма (в печати)

Стахов А. П.. Сакральная геометрия и математика гармонии // Проблеми гармонії, симетрії і золотого перетину в природі, науці та містецтві. Вінниця: Вінницький державний аграрний університет, 2003. С. 8–26.

Стахов А., Слученкова А., Щербаков И. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. СПб.: Питер, 2006.

Gazalé M. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton University Press. Princeton, New Jersy, 1999.

Stakhov A., Rozin B. The «golden» algebraic equations. In: Chaos, Solitons and Fractals, 2005.