

ВОЕННАЯ АКАДЕМИЯ СВЯЗИ

С. А. Ясинский

ОСНОВЫ УНИФИКАЦИИ
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ-ИССЛЕДОВАТЕЛЕЙ
И МЕСТО В НЕЙ «ЗОЛОТОГО» СЕЧЕНИЯ

Санкт-Петербург
2006

Ясинский С. А.

Основы унификации элементарной математики для инженеров-исследователей и место в ней «золотого» сечения. – СПб.: ВАС, 2006. – 124 с.

В монографии приводятся результаты анализа основ построения современной тригонометрии, с последующей демонстрацией ее взаимосвязи с квадратными уравнениями, средними значениями двух положительных чисел, возвратными (рекуррентными) последовательностями и «золотым» сечением. Все это позволяет создать условия для унификации элементарной математики, сделать ее более интересной и проще при изучении людьми с гуманитарным складом ума. Предлагаемые основы унификации элементарной математики наиболее целесообразно рассматривать после усвоения или на заключительном этапе изучения школьных курсов тригонометрии и алгебры.

Для инженеров-исследователей, научных работников, преподавателей, студентов и старшеклассников средней школы, желающих систематизировать свои знания в области математики и (или) повысить интенсивность ее усвоения, а также для читателей, интересующихся фактами проявления «золотого» сечения не только в природе, обществе и мышлении человека, но и в базовых свойствах элементарной математики и теории чисел.

Ил. 24. Табл. 19. Библиогр.: 81 назв.

СОДЕРЖАНИЕ

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ.....	5
ВВЕДЕНИЕ.....	6
1. Основы унификации элементарной математики для инженеров-исследователей	8
1.1. Анализ основ построения современной тригонометрии	8
1.2. Тригонометрическое представление средних двух положительных чисел	13
1.3. Систематизация представления средних двух положительных чисел в алгебраическом и геометрическом видах	15
1.4. Взаимосвязь теоремы Пифагора и квадратных уравнений со средними двух положительных чисел и возвратными последовательностями	19
1.5. Доказательство наличия взаимных переходов между квадратными уравнениями и тригонометрическими функциями	24
1.6. Учет изменений тригонометрических функций с изменением угла от 0° до 360°	26
1.7. Упрощение тригонометрических функций с единичным радиусом-вектором	27
1.8. Основы унификации математических моделей для кривых второго порядка	28
1.9. О возможности и целесообразности увеличения числа средних величин в инженерно-исследовательской деятельности ...	31
Выводы	32
2. Место «золотого» сечения в элементарной математике	34
2.1. «Золотое» сечение и последовательность Фибоначчи в алгебре	34
2.1.1. «Золотые» геометрические прогрессии	36
2.1.1.1. Анализ одного из подходов к образованию «золотой» геометрической прогрессии.....	37
2.1.1.2. Уточнение уравнений для «золотой» геометрической прогрессии	39
2.1.1.3. Специфичность основного свойства «золотой» геометрической прогрессии	42
2.1.2. Взаимосвязь «золотой» геометрической прогрессии с последовательностями Фибоначчи и Люка. Последовательности типа Фибоначчи-Люка	44

2.1.3.	Матричные аналогии в представлении последовательностей типа Фибоначчи-Люка и «золотой» геометрической прогрессии в их взаимосвязи	56
2.1.3.1.	Матричная форма представления последовательности Фибоначчи	58
2.1.3.2.	Матричная форма представления последовательности Люка	61
2.1.4.	Пропорции и последовательности Фибоначчи-Барра.....	63
2.1.5.	Пропорции и последовательности Фибоначчи-Пойа	65
2.1.5.1.	Раскрытие математического смысла пропорций и последовательностей Фибоначчи-Пойа	65
2.1.5.2.	Прикладные аспекты квадратов суммы и разности членов бинома с учетом их гармоничности сочетаний и взаимосвязи с пропорциями Фибоначчи-Пойа и «металлическими» пропорциями.....	67
2.1.5.3.	Обобщение пропорций Фибоначчи-Пойа с учетом числа слагаемых и интервалов между ними	76
2.1.5.4.	Раскрытие физического смысла пропорций Фибоначчи-Пойа на примере моделирования равнонадежных состояний для физических систем исходя из теоремы Мура и Шеннона.....	77
2.1.6.	Пропорции и последовательности Фибоначчи-Падована.....	85
2.1.7.	Место «золотого» сечения в «металлических» пропорциях	87
2.1.7.1.	Образование базовых "металлических" пропорций.....	87
2.1.7.2.	Расширение системы "металлических" пропорций и их взаимосвязь с корнями квадратных уравнений	93
2.1.8.	Обобщение вурфовых зависимостей и место в них «золотых» вурфов	103
2.2.	Проявление «золотой» пропорции в алгебраических аналогиях с тригонометрическими функциями	106
2.3.	Анализ «золотых» гиперболических функций и подходов к их получению	108
	Выводы	114
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	117
	ЛИТЕРАТУРА.....	118

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

ГП	–геометрическая прогрессия;
ИИД	–инженерно-исследовательская деятельность;
ЛЭЦ	–линейные электрические цепи;
ММ	–математическая модель;
МП	–«металлические» пропорции;
НЛМА	–новый логико-математический аппарат;
СЧМС	–система «человек-машина-среда»;
ТКС	–телекоммуникационная сеть;
ФЛГФ	–фибоначчи-люковые гиперболические функции;
ФВЧ	–фильтр верхних частот;
ФНЧ	–фильтр нижних частот;

Математика есть способ называть разные вещи одним именем.

А. Пуанкаре

ВВЕДЕНИЕ

На суд читателя выносятся своеобразная и в достаточной степени простая обобщающая математическая теория алгебраических аналогий с тригонометрическими функциями, где неожиданно находит свое место и вездесущая «золотая» пропорция («золотое» сечение), тысячелетиями увязываемая с эстетическим критерием красоты, надежностью, простотой и гармоничностью соотношения частей в едином (целом). Но ведь и математики довольно часто используют эстетический критерий оценки математических результатов, о чем замечательный польский математик Гуго Штейнгауз пишет: «Это красивая теория» - говорят они». Однако красиво то, что понятно. Изящный результат должен быть достаточно общим, чтобы его можно было применить к известным, а не специально придуманным примерам, и в то же время не столь общим, чтобы стать тривиальным. Именно таким качеством – соразмерностью общности и не тривиальности – обладают естественные, то есть продиктованные самой природой теории» [1].

Обладая возможностью качественного описания основных процессов и функциональных зависимостей для объектов исследования из областей культуры, экономики, логистики и построения телекоммуникационных систем, оказывается, что не всегда известные их концептуальные модели возможно инженерами–исследователями адекватно увязать с математическими моделями. Причина в том, что эти модели приобретают довольно сложную форму, трудно сопрягаются между собой из-за различий в описании разнородных физических процессов или не могут быть получены вообще из-за слабой структурированности. Следовательно, возникает необходимость поиска возможностей не только для унификации элементарной математики, но и одновременного отыскания наличия скрытых математических форм в их единстве и с учетом взаимосвязей индивидуальных оттенков, при моделировании конкретных физических процессов и систем в инженерно-исследовательской деятельности (ИИД).

В первом разделе книги, в результате анализа основ построения современной тригонометрии, дополнительного учета в теореме Виета одного из важных математических свойств и тригонометрического представления для средних двух положительных чисел, закладываются основы унификации элементарной математики для инженеров-исследователей. После доказательства наличия взаимных переходов между квадратными уравнениями и тригонометрическими

функциями закладываются основы унификации математических моделей (ММ) для кривых второго порядка, а так же рассматривается возможность и целесообразность увеличения числа средних величин для ИИД.

Во втором разделе продолжена унификация элементарной математики, но только с акцентом внимания на исследование места и роли в современной математике наиболее часто встречаемых ММ при анализе и синтезе различного рода процессов и систем в природе, которые принято называть «золотым» сечением («золотой» пропорцией) и последовательностью Фибоначчи.

Оказывается, что в результате уточнения и унификации ММ в теориях линейных электрических цепей (ЛЭЦ), нелинейной фильтрации и электросвязи, прикладная «золотая» математика позволяет анализировать и синтезировать элементы телекоммуникационных сетей (ТКС) с учетом, соответственно, однородности сред и различий между видами модуляции, что подтверждается в полученных автором следующих частных научных результатах:

- унификация ММ для различных видов модуляции [2,3,4,5];

- моделирование линий с распределенными параметрами [6,7];

- моделирование переходных и импульсных характеристик бинарных последовательных электрических цепей [6];

- моделирование изменения тока и собственных частот двухконтурных электрических цепей [2];

- построение переходной характеристики двухзвенной цепочки Вина;

- моделирование многозвенных LC - фильтров [2,6];

- построение двухзвенных фильтров верхних и нижних частот (ФВЧ и ФНЧ), исследование взаимосвязей в сложных фильтрах m -типа и при параллельной работе ФВЧ и ФНЧ с икс-образными окончаниями [2];

- моделирование условий для обеспечения наибольшего постоянства наклона фазовой характеристики в искусственной линии [8];

- моделирование активных фильтров и транзисторных усилителей [2];

- построение эталонных резонансных характеристик для электрических колебательных систем [9];

- уточнение «абсолютных» уровней в электросвязи [4,5,6,10,11,12];

- разработка обобщенного метода реализации МОП-конденсаторов на основе последовательностей Фибоначчи [13];

- моделирование условий наилучшего согласования кабельной вставки в воздушной линии связи [13];

- определение предельной границы уменьшения коэффициента бегущей волны антенны [14];

- построение резонансных согласующих цепей с повышенной структурной надежностью [15,16,17] и в других случаях.

Приведенные выше научные результаты подтверждают научно-практическую значимость прикладной «золотой» математики и унификации элементарной математики для повышения эффективности ИИД [2,4,18,...,21].

Один из самых приятных моментов в истории математики – это момент, когда выясняется, что два раздела математики, которые ранее рассматривались отдельно и считались несвязанными, в действительности являются двумя скрытыми формами одного и того же.

У.У. Сойер

1. Основы унификации элементарной математики для инженеров-исследователей

1.1. Анализ основ построения современной тригонометрии

С понятием тригонометрии и тригонометрических функций (ТФ) читатель чаще всего знакомится в средней школе, а затем, в той или иной мере, ему приходится углублять эти знания в процессе повышения своего общеобразовательного уровня при решении ряда теоретических или практических задач.

Представляя раздел математики, изучающей соотношения между сторонами и углами треугольника, а также свойства ТФ и связь между ними, тригонометрия оказалась востребованной во всех областях науки и техники из-за возможности описания с ее помощью разнородных физических процессов и структурных свойств элементов систем.

В переводе с греческого «тригонометрия» – это «измерение треугольников». Иногда задачи по измерению треугольников называют задачами решения треугольников.

Не смотря на кажущуюся простоту изложения тригонометрии в средней школе (через отношения катетов и гипотенузы), эффективность усвоения учениками этого курса оказывается низкой, что подтверждается в ходе решения практических задач из области электросвязи студентами и слушателями высших учебных заведений. Но ведь при поступлении в технические высшие учебные заведения сдаются экзамены по математике, тогда представьте себе о средне-статистических знаниях по тригонометрии студентами института с гуманитарным направлением подготовки специалистов.

В чем же причина такой низкой усвояемости курса тригонометрии?

Нет сомнения в вине, как принято говорить, «семьи и школы», однако давайте прислушаемся к мнению польского математика Г. Штейнгауза, который еще

в середине прошлого века заметил закономерность природной «избирательности» восприятия человеческого разума, о чем с неким сарказмом говорит: «Среди наших современников есть люди, чьи познания в математики относятся к эпохе более древней, чем египетские пирамиды, и они составляют значительное большинство. Математические познания незначительной части людей дошли до эпохи средних веков, а уровня математики XVIII века не достигает и один человек на тысячу ... Но расстояние между теми, кто идет в авангарде, и необразимой массой путников все возрастает, процессия растягивается и идущие впереди отдаляются все более и более ...» [1].

По всей видимости, нельзя окончательно смириться с приговором Г. Штейнгауза, а необходимо искать выходы из создавшегося кризисного положения, тем более, как будет продемонстрировано в этой работе, действующая тригонометрия имеет непосредственную связь с квадратными уравнениями, средними значениями двух положительных чисел, возвратными (рекуррентными) последовательностями и «золотым» сечением («золотой» пропорцией), что позволяет унифицировать несколько разделов элементарной математики, сделать ее более интересной и проще для усвоения не только инженерами-исследователями, но и людьми с гуманитарным складом ума.

Изначально, в основу построения плоской тригонометрии были положены ТФ острого положительного угла $\alpha = \angle BOC$ ($0 < \alpha < 90^\circ$), находящегося в четверти круга BOK радиуса $R = OB = OC = OK$, то есть в первом квадранте декартовой системы координат (рис. 1.1).

Функциональную зависимость $y = f(x)$, где аргумент x (независимая переменная) есть прилежащий к α катет $k_1 = x$ и функция y (зависимая переменная) есть противолежащий к α катет $k_2 = y$ вписанного в четверть круга BOK треугольника DOC , принято выражать через множество ТФ, определения, которых, чаще всего даются двумя основными способами. Первый способ выражения ТФ строится на основе отношения сторон треугольника DOC , где z – его гипотенуза, а второй способ – на основе подвижного радиус-вектора $r = \overrightarrow{OC}$. Например, в соответствии с первым способом, синус острого угла α – есть отношение катета k_2 , противолежащего углу α , к гипотенузе z , то есть

$$\sin \alpha = \frac{k_2}{z} . \tag{1.1}$$

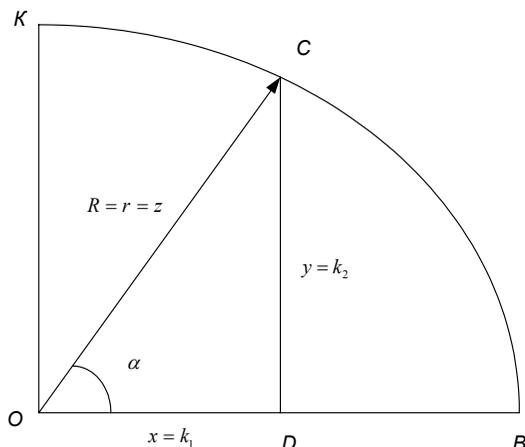


Рис. 1.1

Второй способ определения синуса острого угла α выражается через отношение ординаты y конца подвижного радиуса-вектора r , который образует угол α с осью абсцисс, к длине этого радиуса-вектора, то есть

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} . \quad (1.2)$$

Не менее интересный способ определения ТФ, но реже используемый на практике из-за неудобства геометрического представления в реальном масштабе при $\alpha \rightarrow 0^\circ$, базируется на так называемых «тригонометрических линиях острого угла» (рис.1.2). Например, перпендикуляр CD , опущенный из точки C на OB , называется линией синуса, а отношение CD к радиусу R полуокружности BOK называется синусом данного угла α , то есть

$$\sin \alpha = \frac{CD}{R} . \quad (1.3)$$

По аналогии с приведенными выше определениями синуса угла α формулируются определения для всех других ТФ, после чего не трудно записать эти определения в следующем обобщенном виде:

а) для синуса острого угла α

$$\sin \alpha = \frac{k_2}{z} = \frac{y}{r} = \frac{CD}{R} ; \quad (1.4)$$

б) для косинуса острого угла α

$$\cos \alpha = \frac{k_1}{z} = \frac{x}{r} = \frac{OD}{R}; \quad (1.5)$$

в) для тангенса острого угла α

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2}{k_1} = \frac{y}{x} = \frac{BL}{R} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad (1.6)$$

г) для котангенса острого угла α

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{k_1}{k_2} = \frac{x}{y} = \frac{KM}{R} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad (1.7)$$

д) для секанса острого угла α

$$\sec \alpha = \frac{z}{k_2} = \frac{r}{x} = \frac{R}{OD} = \frac{OL}{R} = \frac{1}{\cos \alpha}; \quad (1.8)$$

е) для косеканса острого угла α

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{z}{k_2} = \frac{r}{y} = \frac{R}{CD} = \frac{OM}{R} = \frac{1}{\sin \alpha}. \quad (1.9)$$

Из формул (1.4), ..., (1.9) видно, что к числу базовых ТФ можно отнести только две ($\sin \alpha$ и $\cos \alpha$), то есть выражения (1.4) и (1.5), а все остальные функции (1.6), ..., (1.9) выводятся из базовых. Следовательно, острие исследовательской работы целесообразно направить на ТФ (1.4) и (1.5), которые не зависят от значения (длины) $R = r = z$ и могут быть приведены к математическим аналогам записи физического закона рычага Архимеда, так как

$$x \sin \alpha = y \cos \alpha. \quad (1.10)$$

Возможность описания взаимосвязи базовых ТФ по аналогии с законом рычага Архимеда приводит к мысли о возможности создания более уточненной тригонометрии на основе использования среднего пропорционального двух положительных чисел (отрезков прямой линии) a_1 и a_2 , равному квадратному корню из произведения этих чисел [22], то есть среднему геометрическому (рис. 1.3):

$$S_0 = CD = k_2 = y = \sqrt{a_1 a_2}. \quad (1.11)$$

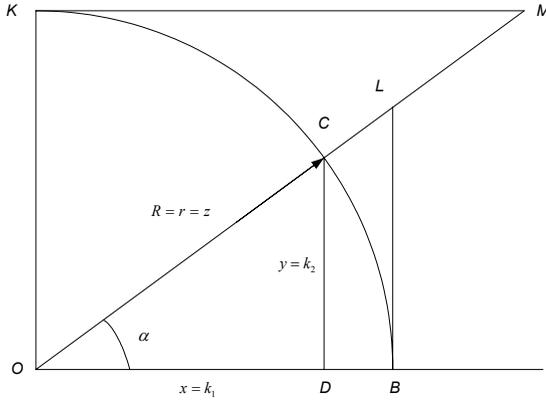


Рис. 1.2

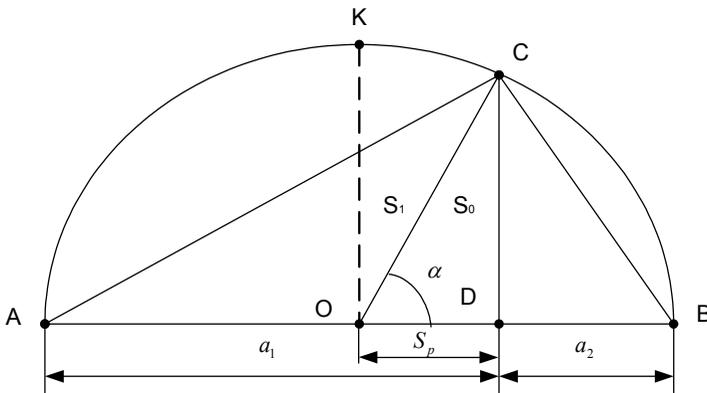


Рис. 1.3

На рис. 1.3 видно, что сумма отрезков a_1 и a_2 равна диаметру круга, то есть

$$d = 2R = 2r = a_1 + a_2, \quad (1.12)$$

откуда следует

$$R = r = z = OC = \frac{a_1 + a_2}{2} = S_1, \quad (1.13)$$

где S_1 – среднее арифметическое двух положительных чисел.

Выразив $k_2=y$ и $z=r=R$, соответственно, через средние геометрическое и арифметическое, осталось определиться с $k_1=x$ в треугольнике DOC , которое соответствует среднему разностному двух чисел [2,23] (полуразности двух чисел [24]):

$$S_p = k_1 = x = OD = \frac{a_1 - a_2}{2}. \quad (1.14)$$

Применение формул (1.13) и (1.14) в ходе моделирования ряда физических процессов позволит наиболее адекватно отражать законы их протекания. Например, изменение по разрывному закону силы натяжения струны, несущей посередине точечную массу, моделируется как $S_1 \pm S_p$, где S_1 – сила постоянного натяжения струны и S_p – сила отклонения натяжения струны относительно постоянного значения. Как будет показано дальше, подобного типа модели имеют аналоги в виде квадратных уравнений.

1.2. Тригонометрическое представление средних двух положительных чисел

Введение понятия «среднее разностное», которое достаточно чувствительно к отражению соразмерности двух положительных чисел, представляемых в виде двух отрезков, позволяет еще на этапе уточнения исходных данных (соразмерности отрезков a_1 и a_2) примерно оценить размерность угла α и выражать ТФ острого угла α через среднее арифметическое S_1 , среднее геометрическое S_0 и среднее разностное S_p .

Взяв вместо гипотенузы S_1 , а вместо катетов S_0 и S_p , по аналогии с известным подходом к определению ТФ острого угла введем альтернативные, для этих углов (рис. 1.3), определения.

Синусом острого угла α называется отношение среднего геометрического S_0 к среднему арифметическому S_1 :

$$\sin \alpha = S_0/S_1 = \frac{2\sqrt{a_1 a_2}}{a_1 + a_2}. \quad (1.15)$$

Косинусом острого угла α называется отношение среднего разностного S_p к среднему арифметическому S_1 :

$$\cos \alpha = S_p / S_1 = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}. \quad (1.16)$$

Тангенсом острого угла α называется отношение среднего геометрического S_0 к среднему разностному S_p :

$$\operatorname{tg} \alpha = S_0 / S_p = \frac{2\sqrt{a_1 a_2}}{a_1 - a_2}. \quad (1.17)$$

Котангенсом острого угла α называется отношение среднего разностного S_p к среднему геометрическому S_0 :

$$\operatorname{ctg} \alpha = S_p / S_0 = \frac{a_1 - a_2}{2\sqrt{a_1 a_2}}. \quad (1.18)$$

Секансом острого угла α называется отношение среднего арифметического S_1 к среднему разностному S_p :

$$\sec \alpha = \frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}. \quad (1.19)$$

Косекансом острого угла α называется отношение среднего арифметического S_1 к среднему геометрическому S_0 :

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{S_1}{S_0} = \frac{a_1 + a_2}{2\sqrt{a_1 a_2}}. \quad (1.20)$$

Подобным образом не составляет труда в выражении через средние значения двух чисел всех тригонометрических формул для одного и того же аргумента, двойных углов, а также понижения степени и сложения аргументов, что позволяет упрощать ряд преобразований за счет использования формул сокращенного умножения. Так, например, формулы двойных углов $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ через средние двух чисел выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{S_0}{S_1} \cdot \frac{S_p}{S_1} = \\ &= 2S_0 S_p / S_1^2 = \frac{2(a_1 - a_2)\sqrt{a_1 \cdot a_2}}{2} \Big/ \frac{(a_1 + a_2)^2}{4} = \\ &= 4\sqrt{a_1 \cdot a_2} (a_1 - a_2) / (a_1 + a_2)^2; \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{S_p^2}{S_1^2} - \frac{S_0^2}{S_1^2} = \frac{S_p^2 - S_0^2}{S_1^2} = \\ &= \frac{(a_1 - a_2)^2}{(a_1 + a_2)^2} - \frac{4a_1a_2}{(a_1 + a_2)^2} = \frac{(a_1 - a_2)^2 - 4a_1a_2}{(a_1 + a_2)^2}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Для доказательства справедливости формул понижения степени используем выражение (1.22). Тогда

$$\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{4a_1a_2}{(a_1 + a_2)^2} = \left(\frac{2\sqrt{a_1a_2}}{a_1 + a_2} \right)^2 = \sin^2 \alpha; \quad (1.23)$$

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{(a_1 - a_2)^2}{(a_1 + a_2)^2} = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^2 = \cos^2 \alpha, \quad (1.24)$$

что и требовалось доказать.

Для доказательства научно-практической значимости для инженеров-исследователей полученных тригонометрических представлений средних двух положительных чисел воспользуемся одним из приведенных выше выражений.

Например, если формулу (1.17) записать, как $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2(a_2/a_1)^{1/2}}{(1 - a_2/a_1)}$, а

затем эту же формулу записать, как $\operatorname{tg}(\alpha/2) = (a_2/a_1)^{1/2}$, то становится очевидной функциональная зависимость в двухпроводной линии между системами с сосредоточенными элементами (так как $x = (a_2/a_1)^{1/2}$) и распределенными постоянными (так как $x = \operatorname{tg}(\alpha/2)$, где α – волновая длина линии). В подтверждение этого умозаключения на основе формулы $x = \operatorname{tg}(\alpha/2)$ в работе [25] Б.А. Лапшин приводит новую теорию и методы синтеза фильтров и трансформаторов на соразмерных отрезках передающих линий с использованием LC - моделей (фазоконтурных моделей), что подтверждает теоретическую и практическую значимость подобных представлений средних двух положительных чисел в тригонометрическом виде.

1.3. Систематизация представления средних двух положительных чисел в алгебраическом и геометрическом видах

Наиболее часто в повседневной деятельности при решении различного рода задач мы встречаемся со средним арифметическим S_1 и средним геометрическим S_0 , затем следует среднее гармоническое S_{-1} , и среднее квадратичное

S_2 . Все приведенные средние числа, за исключением S_0 , являются частными случаями средних степенных S_j , при $j = -1, 1$ и 2 , так как если поочередно подставляя эти j в выражение [22]

$$S_j = \left[\left(\frac{\sum_{i=1}^2 a_i^j}{2} \right) \right]^{1/j}, \quad (1.25)$$

то получим соответствующие законы средних чисел:

$$S_{-1} = \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2}, \quad S_1 = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad \text{и} \quad S_2 = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}}.$$

Исключение составляет $j = 0$, т.к. в этом случае формула (1.25) дает неопределенность, которая раскрывается по правилу Лопиталя и приводит к среднему геометрическому $S_0 = \sqrt{a_1 \cdot a_2}$.

Основное свойство S_j заключается в том, что оно относительно j является монотонной функцией и образует неравенство [23]:

$$\left(S_{-1} = \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2} \right) \leq \left(S_0 = \sqrt{a_1 \cdot a_2} \right) \leq \left(S_1 = \frac{a_1 + a_2}{2} \right) \leq \left(S_2 = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}} \right). \quad (1.26)$$

Если с помощью S_1 получают сводные статистические характеристики для анализа массовых закономерностей в конкретном процессе, то S_0 широко применяется при вычислении средних темпов изменения процесса. В свою очередь, S_{-1} позволяет получить обобщающую статистическую характеристику совокупности значений, которые находятся в обратно пропорциональной зависимости от суммируемых составляющих процесса [24].

К S_1 и S_0 мы приучены со школьной скамьи, а что касается S_{-1} и S_2 , то о них узнаем немного позже в рамках более конкретных узких специализаций. Так, например, цепная дробь $1/n$, при $n = 1, 2, 3, \dots$ – это гармоническая прогрессия, а эквивалентное сопротивление последовательно–параллельной цепи $R_{\text{эКВ}}$ на рис. 2.4 равно среднему гармоническому:

$$R_{\text{эКВ}} = \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2}. \quad (1.27)$$

Сравнительный анализ различных средних двух положительных чисел с доказательством неравенства (1.26) произведен З.А. Скопцом [26] на трапеции, а также на окружности с радиусом $(a_1 - a_2)/2$, где $a_1 > a_2$. Если трапеция слабо отражает динамическую взаимосвязь между этими средними числами, то окружность с проведенными к ней касательными затрудняет выражение этих

взаимосвязей через тригонометрические функции, так как все средние числа выходят за пределы окружности.

В одной из статей А. Гольдман и Л. Звавич приводят геометрическое доказательство неравенства $S_1 \geq S_0$ (рис. 1.3), которое основано на том, что высота прямоугольного треугольника есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу. Как выразить другие средние числа, они не знают, что следует из слов: «Однако с помощью конфигурации рисунка 1 (у нас рис. 1.3 – С.Я.) неясно, как сравнить среднее геометрическое со средним гармоническим, а среднее арифметическое со средним квадратическим. В то же время существует фигура, в которой все средние двух чисел a и b можно увидеть "живьем" – это трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = a$, $AD = b \dots$ » [27].

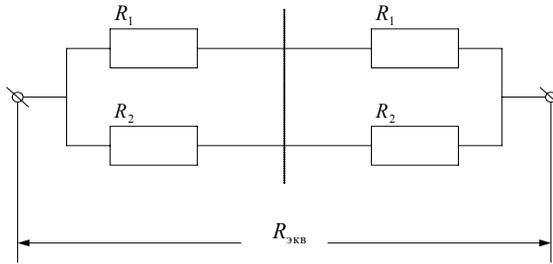


Рис. 1.4

Из приведенного выше высказывания видно, что нас опять возвращают к трапеции, которая слабо отражает динамику взаимосвязей между средними числами. Однако более внимательное исследование рис. 1.3 в динамике перемещения точки C по окружности в направлении ВКА позволяет сделать предположение о возможном нахождении всех средних чисел в I квадранте и справедливости переноса полученных результатов на зеркально-симметричный II квадрант, со II на III квадрант и т.д. Окончательные результаты исследований по определению средних чисел приведены на рис. 1.5.

Для определения длин отрезков на рис. 1.5, где $\beta = 90^\circ$, необходимо использовать следующие формулы:

а) $OC = OB = OK = OA = \frac{a_1 + a_2}{2} = S_1$ – есть среднее арифметическое;

б) $DC = \sqrt{a_1 a_2} = S_0$ – есть среднее геометрическое;

в) $EC = \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2} = S_{-1}$ – есть среднее гармоническое;

г) $DK = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}} = S_2$ – есть среднее квадратическое;

д) $OE = \frac{(a_1 - a_2)^2}{2(a_1 + a_2)} = \frac{a_1 + a_2}{2} - \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2} = S_1 - S_{-1}$ – есть разность между средним арифметическим и средним гармоническим;

е) $BC = \sqrt{2a_2}$ – есть корень квадратный из удвоенной длины отрезка a_2 ;

ж) $DE = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \cdot \sqrt{a_1a_2} = \frac{S_0(a_1 - a_2)}{a_1 + a_2} = S_0S_p / S_1 = \sqrt{S_0^2 - S_{-1}^2}$;

з) $OD = \frac{a_1 - a_2}{2} = S_p$ – есть среднее разностное (введенное впервые – С.Я. [2,23]) или полуразность двух чисел [24].

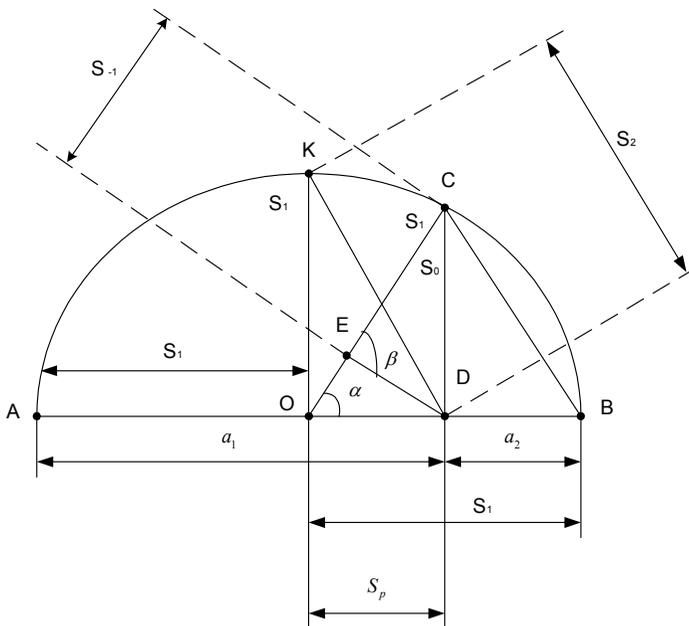


Рис. 1.5

Математики М. Крейн и А. Нудельман в статье [28] приводят результаты исследований по арифметико-гармонической, арифметико-геометрической и геометрическо-гармонической средним. Из этих результатов следует, что если арифметико-геометрические и геометрическо-гармонические средние строятся с использованием достаточно сложных эллиптических интегралов Гаусса, то арифметико-гармоническое среднее элементарно совпадает со средним геометрическим S_0 , т.е.

$$\sqrt{S_1 \cdot S_{-1}} = \sqrt{\frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2} \cdot \frac{a_1 + a_2}{2}} = \sqrt{a_1 a_2} = S_0. \quad (1.28)$$

Из выражения (1.28) следует, что S_0 является наиболее устойчивым средним в сравнении с S_1 и S_{-1} , т.к. в численном выражении находится между ними при полной взаимосвязи, которую можно выразить следующим образом:

$$S_{-1} = S_0^2 / S_1 = \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2}; \quad (1.29)$$

$$S_1 = S_0^2 / S_{-1} = \frac{a_1 + a_2}{2}. \quad (1.30)$$

1.4. Взаимосвязь теоремы Пифагора и квадратных уравнений со средними двух положительных чисел и возвратными последовательностями

Из математики известно, что соотношение

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (1.31)$$

отражает не только сложение двух колебательных движений в противофазе, но и зависимость между площадями квадратов, построенных на сторонах $OD=S_p$ и $DC=S_0$ (т. е. катетах) переменного прямоугольного треугольника OCD (рис. 1.5) с гипотенузой $OC=S_1=1$.

Докажем справедливость формулы (1.31) на основе средних двух чисел:

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= S_p^2 + S_0^2 = \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{a_1 a_2}\right)^2 = \\ &= \frac{(a_1 - a_2)^2}{4} + a_1 a_2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 = S_1^2 = 1. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Если использовать формулы (1.15) и (1.16), то получим другой способ доказательства (1.31), так как

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= \left(\frac{2\sqrt{a_1 a_2}}{a_1 + a_2} \right)^2 + \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^2 = \\ &= \frac{4a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} + \frac{(a_1 - a_2)^2}{(a_1 + a_2)^2} = \frac{a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2}{(a_1 + a_2)^2} = \\ &= \frac{(a_1 + a_2)^2}{(a_1 + a_2)^2} = 1. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Среднее квадратичное $S_2 = DK$ (см. рис. 1.5) не является обособленным значением, а будучи гипотенузой треугольника ODK имеет непосредственную взаимосвязь со средним арифметическим $S_1 = OK$ (катет) и средним разностным $S_p = OK = 1$ (катет), т. е. в соответствии с теоремой Пифагора

$$S_2 = \sqrt{S_1^2 + S_p^2} = \sqrt{\left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}}. \quad (1.34)$$

Такое многообразие изящных взаимосвязей и их простота, подкрепляются с помощью приведенного квадратного уравнения $a^2 - pa + q = 0$ с корнями

$$a_{1,2} = p/2 \pm \sqrt{p^2 - 4q}/2, \quad \text{где} \quad p/2 = \frac{a_1 + a_2}{2} = S_1 \quad \text{и}$$

$$\sqrt{p^2 - 4q}/2 = \frac{a_1 - a_2}{2} = S_p. \quad \text{Тогда:}$$

$$a_{1,2} = S_1 \pm S_p. \quad (1.35)$$

В свою очередь среднее разностное S_p может быть выражено через среднее геометрическое S_0 и среднее арифметическое S_1 , т. е.

$$S_p = \frac{\sqrt{(2S_1)^2 - 4S_0^2}}{2} = \sqrt{S_1^2 - S_0^2}, \quad (1.36)$$

а взаимосвязь со средним гармоническим S_{-1} подтверждается путем подстановки в (1.36) для (1.35) вместо S_0 выражения (1.28):

$$a_{1,2} = S_1 \pm S_p = S_1 \pm \sqrt{S_1^2 - S_0^2} = S_1 \pm \sqrt{S_1^2 - (S_1 \cdot S_{-1})^{1/2}}. \quad (1.37)$$

Следовательно, решив уравнение (1.34) относительно S_p с последующей подстановкой его в (1.35), обнаруживается взаимосвязь корней квадратного уравнения со средним квадратическим S_2 :

$$a_{1,2} = S_1 \pm S_p = S_1 \pm \sqrt{S_2^2 - S_1^2}. \quad (1.38)$$

Из теоремы Виета известно, что, если приведенное квадратное уравнение $a^2 + pa + q = 0$ имеет действительные корни, то их сумма равна $-p$, а произведение равно q .

Эта теорема, а точнее теорема, обратная ей, позволяет в ряде случаев находить корни приведенного квадратного уравнения:

$$a_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D'}}{2}, \quad (1.39)$$

где $D' \geq 0$ - дискриминант.

Проведенные системные исследования по построению квадратных уравнений позволили обнаружить определенную взаимосвязь их корней с соответствующим множеством рекуррентных числовых последовательностей, а также сформулировать одно из важных математических свойств, которое не отображено в теореме Виета. Это свойство заключается в непосредственной взаимосвязи дискриминанта с разностью корней. В данном случае модифицированная теорема Виета приобретает следующее содержание [6].

Теорема 1.1. Если приведенное квадратное уравнение $a^2 + pa + q = 0$ имеет действительные корни, то их сумма равна $-p$, произведение равно q , а разность равна $\sqrt{D'}$, т.е.

$$a_1 + a_2 = -p; \quad (1.40)$$

$$a_1 \times a_2 = q; \quad (1.41)$$

$$a_1 - a_2 = \sqrt{D'} = \sqrt{p^2 - 4q}. \quad (1.42)$$

Таким образом, из формул (1.38), (1.40), (1.41) и (1.42) видны строгие математические взаимосвязи между средними двух положительных чисел, теоремой Пифагора, корнями квадратных уравнений и тригонометрическими функциями (1.15), ... (1.20).

Кроме этих взаимосвязей имеет место возможность системного представления корней (1.39) приведенного квадратного уравнения, их суммы (1.40) и разности (1.42) через четверку чисел из усеченной последовательности, формируемой рекуррентной (возвратной) формулой

$$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (1.43)$$

где каждый последующий ее член, начиная с третьего, выражается суммой пре-

дыдущих двух чисел. То есть, в нашем случае на основе вычислений с помощью (1.43)

$$\sqrt{D'} + a_2 = a_1; \quad (1.44)$$

$$a_2 + a_1 = -p, \quad (1.45)$$

образуется усеченная четырехчленная последовательность:

$$\sqrt{D'}, a_2, a_1, -p, \quad (1.46)$$

где особое внимание должно обращаться на знаки «+» или « - » для каждого члена этой последовательности.

В данном случае мы проводим исследование на уровне квадратного уравнения, но ведь с помощью квадратных уравнений в различных областях науки и техники, да и вообще в природе, удается производить моделирование физических процессов с высокой точностью, а доказательство взаимосвязи рекуррентной формулы (1.43) с приведенным квадратным уравнением позволяет моделировать динамику процессов и развитие систем с учетом предыстории.

В простейшей рекуррентной (возвратной) последовательности, где каждый последующий член равен сумме двух предыдущих (1.43), сумма любых следующих друг за другом n чисел может быть определена с помощью выражения:

$$\sum_{i=1}^n U_i = U_{n+2} - U_2. \quad (1.47)$$

Известный математик А.И. Маркушевич в книге «Возвратные последовательности» [29] приводит доказательство порядка отыскания суммы n членов для рекуррентной последовательности, где в случае выполнения условия (1.47) справедливо следующее свойство в рамках четырех их членов:

$$U_{n+3} = 2U_{n+2} - U_n. \quad (1.48)$$

Но так как из (1.43) видно, что

$$U_{n+1} = U_{n+2} - U_n, \quad (1.49)$$

а уравнение (1.48) можно записать в виде среднеарифметического двух чисел

$$U_{n+2} = \frac{U_{n+3} + U_n}{2}, \quad (1.50)$$

то после подстановки (1.50) в (1.49) получим среднеразностное этих чисел:

$$U_{n+1} = \frac{U_{n+3} - U_n}{2}. \quad (1.51)$$

Следовательно, исходя из аналогии между корнями a_2 и a_1 приведенного квадратного уравнения и числами, соответственно, U_{n+1} и U_{n+2} , полученные формулы (1.50) и (1.51) совместно с выражением (1.35) позволяют сделать вывод о наличии в уравнении (1.39) двойной взаимосвязи между корнями и сред-

неарифметическим и среднегеометрическим для двух разных пар чисел из усеченной четырехчленной последовательности (1.46), то есть

$$a_1 = U_{n+2} = \frac{U_{n+3} + U_n}{2} = \frac{U_{n+2} + U_{n+1}}{2} + \frac{U_{n+2} - U_{n-1}}{2} = S_1 + S_p; \quad (1.52)$$

$$a_2 = U_{n+1} = \frac{U_{n+3} - U_n}{2} = \frac{U_{n+2} + U_{n-1}}{2} - \frac{U_{n+2} - U_{n-1}}{2} = S_1 - S_p. \quad (1.53)$$

Выражение (1.38) нашло широкое применение в электросвязи. Например, в аналоговом первичном групповом тракте с рабочей полосой

$$\Delta f = f_H - f_B = 60 - 108 \text{ кГц}, \quad \text{групповая контрольная частота}$$

$f_{ГКЧ} = 84,14 \text{ кГц} \approx 84 \text{ кГц}$, так как она может быть выражена через среднеарифметическое следующим образом:

$$f_{ГКЧ} = 84,14 \text{ кГц} \approx 84 \text{ кГц} = \frac{f_B + f_H}{2} = \frac{108 + 60}{2} = \frac{168}{2} = S_1. \quad (1.54)$$

А теперь вычислим среднеразностное:

$$S_p = \frac{f_B - f_H}{2} = \frac{108 - 60}{2} = \frac{48}{2} = 24 \text{ кГц}. \quad (1.55)$$

Для получения $f_B = a_1 = 108 \text{ кГц}$ и $f_H = a_2 = 60 \text{ кГц}$ используем формулу (1.38), где

$$a_{1,2} = S_1 \pm S_p = 84 \text{ кГц} \pm 24 \text{ кГц}, \quad (1.56)$$

что и требовалось доказать.

В общем случае, следует отметить, что если ТФ всегда можно перевести в алгебраический вид, то не каждое из квадратных уравнений представимо в тригонометрическом виде из-за разности знаков при корнях и выхода их за пределы окружности определенного радиуса. В данном случае предлагается использовать метод аналогии с корнями так называемых в геометрии «точек внешнего деления» [30]. Тогда, путем «эквивалентного» обратного преобразования производится перенос превышающей размеры диаметра окружности переменной $x = \sqrt{D'}$, например, во втором квадранте, в окружность этот квадранта, что равносильно получению значения в рамках нормированных пределов действующих ТФ.

1.5. Доказательство наличия взаимных переходов между квадратными уравнениями и тригонометрическими функциями

Для более глубокой систематизации полученных результатов исследования уточним модифицированную теорему Виета (теорема 1) [6], приведя ее в удобный для тригонометрических преобразований вид, где для придания однозначности и удобства в дальнейших исследованиях радиус окружности будем обозначать через радиус-вектор r , а k_1 – через переменную x .

Теорема 1.2. Если приведенное квадратное уравнение $a^2 - pa + q = 0$ имеет действительные корни, то их сумма равна $-p = 2r$, произведение равно $q = r^2 - x^2$, а разность равна $\sqrt{D'}$ $= 2x$, то есть

$$a_1 + a_2 = -p = 2r; \tag{1.57}$$

$$a_1 a_2 = q = r^2 - x^2; \tag{1.58}$$

$$a_1 - a_2 = \sqrt{D'} = \sqrt{p^2 - 4q} = 2x, \quad \forall a_1 \geq a_2, \tag{1.59}$$

где $r = S_1$ – радиус-вектор четверти круга (среднее арифметическое), $x = S_p$ – независимая тригонометрическая переменная (среднее разностное) (см. рис. 1.3, рис. 1.5) и $D' \geq 0$ – дискриминант.

Подставим в тригонометрические функции (1.15), ..., (1.20) соответствующие им значения в виде формул (1.57), ..., (1.59) из теоремы 2, тогда:

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{a_1 a_2}}{a_1 + a_2} = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} = \frac{2\sqrt{q}}{p}; \tag{1.60}$$

$$\cos \alpha = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{D'}}{p}; \tag{1.61}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{a_1 a_2}}{a_1 - a_2} = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{x} = \frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{D'}}; \tag{1.62}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{a_1 - a_2}{2\sqrt{a_1 a_2}} = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{D'}}{2\sqrt{q}}; \tag{1.63}$$

$$\sec \alpha = \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} = \frac{r}{x} = \frac{p}{\sqrt{D'}}; \tag{1.64}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{a_1 + a_2}{2\sqrt{a_1 a_2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{p}{2\sqrt{q}}. \quad (1.65)$$

Рассмотрим примеры преобразования квадратных уравнений типа $a^2 - pa + q = 0$ (1.66)

в тригонометрический вид и обратно.

Пример 1. Преобразовать уравнение $a^2 - 2a + 1/2 = 0$ в тригонометрический вид.

В соответствии с теоремой 2:

$-p = 2 = 2r = a_1 + a_2$ (то есть $r = 1$), $q = 1/2 = a_1 a_2 = r^2 - x^2 = 1 - x^2$ и $\sqrt{D'} = a_1 - a_2 = 2x$ (то есть $x = \sqrt{D'}/2$). Корнями решения уравнения будут: $a_1 = 1 + \sqrt{2}/2$ и $a_2 = 1 - \sqrt{2}/2$, где $\sqrt{2} = \sqrt{D'}$.

Подставим полученные значения в формулы (1.60), ..., (1.65) и произведем расчеты:

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{q}}{p} = \frac{2\sqrt{1/2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707\dots;$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{D'}}{p} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707\dots;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{D'}} = \frac{2\sqrt{1/2}}{\sqrt{2}} = 1,0;$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{D'}}{2\sqrt{q}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1/2}} = 1,0;$$

$$\sec \alpha = \frac{p}{\sqrt{D'}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1,414\dots;$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{p}{2\sqrt{q}} = \frac{2}{2\sqrt{1/2}} = \sqrt{2} = 1,414\dots$$

Вычисленные значения ТФ соответствуют углу $\alpha = 45^\circ$, что подтверждает справедливость теоремы 2.

Пример 2. Тригонометрическая функция $\cos 60^\circ = 1/2$, $r = 1$. Необходимо перевести эту запись в соответствующее квадратное уравнение.

В соответствии с теоремой 2: $-p = 2r = 2$ и $q = r^2 - x^2 = 1 - x^2$. Но так как $\cos \alpha = x/r = x$, то для $\alpha = 60^\circ$ свободный член уравнения $a^2 - pa + q = 0$ будет равен: $q = 1 - x^2 = 1 - (1/2)^2 = 3/4$. Следовательно, аналогом тригонометрической функ-

ции $\cos 60^\circ = 1/2$, при $r = 1$, будет квадратное уравнение $a^2 - 2a + 3/4 = 0$ с корнями $a_{1,2} = 1 \pm 1/2$ и $\sqrt{D'} = 1$.

Вычисленное значение $\sqrt{D'} = 1$ в случае необходимости позволяет легко определять с помощью выражений (1.62), ..., (1.64) другие значения ТФ.

Для любого заданного угла α и радиуса $r = -p/2$ можно всегда определить аналог в виде квадратного уравнения с помощью обобщенного выражения

$$a^2 - 2ra + r^2 \sin^2 \alpha = 0, \quad (1.67)$$

с корнями

$$a_{1,2} = r(1 \pm \cos \alpha), \quad (1.68)$$

где $\sqrt{D'} = a_1 - a_2 = 2r \cos \alpha$ и $-p = a_1 + a_2 = 2r$.

1.6. Учет изменений тригонометрических функций с изменением угла от 0° до 360°

Все полученные закономерности ТФ острого угла α (в рамках 1-го квадранта) распространяются и на следующие три квадранта. Однако, как известно, при переходе от одного квадранта к другому необходимо учитывать пределы и направления изменений функций и аргументов для каждого из них (табл. 1.1).

Все закономерности и особенности изменений ТФ с изменением угла от 0° до 360° , а также закономерности преобразования тригонометрических выражений и решения тригонометрических уравнений, которые используются в действующей тригонометрии, справедливы и для уточняемой тригонометрии.

Таблица 1. 1

Номер квадранта	I	II	III	IV
α	$0 \leq \alpha \leq 90$	$90 \leq \alpha \leq 180$	$180 \leq \alpha \leq 270$	$270 \leq \alpha \leq 360$
ТФ				
$\sin \alpha$	0, ..., 1	1, ..., 0	0, ..., -1	-1, ..., 0
$\cos \alpha$	1, ..., 0	0, ..., -1	-1, ..., 0	0, ..., 1
$\operatorname{tg} \alpha$	0, ..., ∞	$-\infty$, ..., 0	0, ..., ∞	$-\infty$, ..., 0
$\operatorname{ctg} \alpha$	∞ , ..., 0	0, ..., $-\infty$	∞ , ..., 0	0, ..., $-\infty$
$\sec \alpha$	1, ..., ∞	$-\infty$, ..., -1	-1, ..., $-\infty$	∞ , ..., 1
$\operatorname{cosec} \alpha$	∞ , ..., 1	1, ..., ∞	$-\infty$, ..., -1	-1, ..., $-\infty$

1.7. Упрощение тригонометрических функций с единичным радиусом-вектором

В случаях, когда нет необходимости учитывать длину радиус-вектора, формулы для основных ТФ упрощаются путем фиксации (нормирования) радиус-вектора, взяв его за единицу ($|r| = r = 1$). При подстановке $r=1$ в выражения (1.60), ..., (1.65), получим:

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} = \sqrt{1 - x^2}; \quad (1.69)$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = x; \quad (1.70)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{x} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}; \quad (1.71)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad (1.72)$$

$$\sec \alpha = \frac{r}{x} = \frac{1}{x}; \quad (1.73)$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (1.74)$$

Формулы (1.69), (1.71), (1.72) и (1.74) отличаются от наиболее часто встречаемых в тригонометрии формул тем, что в них вместо $y=k_2$ (рис. 1.2) используется выражение

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{1 - x^2}, \quad (1.75)$$

то есть вторая неизвестная переменная y выражается через первую неизвестную переменную x . Такой подход к записи всех функций через аргумент x позволяет найти взаимосвязи и переходы к аргументу a квадратных уравнений типа (1.66) с помощью соотношений средних двух положительных чисел S_0 , S_1 и S_p .

Для любого заданного угла α и радиуса $r=1$ формулы (1.67) и (1.68) преобразуются в следующую более простой вид:

$$a^2 - 2a + \sin^2 \alpha = 0; \quad (1.76)$$

$$a_{1,2} = 1 \pm \cos \alpha, \quad (1.77)$$

где $\sqrt{D'} = a_1 - a_2 = 2 \cos \alpha$ и $-p = a_1 + a_2 = 2$.

1.8. Основы унификации математических моделей для кривых второго порядка

Если учесть, что моделирование различного рода процессов и систем часто уязвывается с кривыми второго порядка, то очень важно обладать системными знаниями о возможностях их унификации (табл. 1.2) на основе средних двух положительных чисел (a_1 и a_2) и приведенных квадратных уравнений с корнями:

$$a_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2} = S_1 \pm S_p = S_1 \pm \sqrt{S_1^2 - S_0^2}, D \geq 0. \quad (1.78)$$

В табл. 1.2 правильность параметров квадратного уравнения по отношению к параметрам окружности подтверждается исследованиями, проведенными в настоящей работе. Что касается гиперболы и параболы, то их параметры предлагается читателю проверить самостоятельно, взяв за основу приведенный ниже подход к моделированию эллипсов с позиций системности и унификации элементарной математики. На рис. 1.6 приведен эллипс, где: точка O – центр; $AO=OB=R_1$ – большая полуось; $CO=OD=R_2$ – малая полуось; $AB=2R_1$ – большая ось; $CD=2R_2$ – малая ось; F_1 – первый фокус; F_2 – второй фокус; $OF_1=OF_2=c$, – удаление фокусов от центра (фокусное расстояние).

Так как треугольники OF_1C , OF_2C , OF_1D и OF_2D одинаковые, то и их углы α' также равны, следовательно, по аналогии с окружностью будем проводить исследование в первом квадранте на треугольнике OF_2C . Тем более, оказывается, что соответствие радиуса окружности R гипотенузе OC для вписанного в нее треугольника DOC (рис. 1.3) и среднему арифметическому двух положительных чисел a_1 и a_2 (1.13) сохраняется также для эллипса (рис. 1.6), так как

$$R_1 = \frac{a_1 + a_2}{2} = S_1 = CF_2, \quad (1.79)$$

где CF_2 – гипотенуза вписанного в эллипс треугольника OF_2C . Но так как условия среднеразности (1.14) распространяется и на эллипс:

$$c_3 = \frac{a_1 - a_2}{2} = S_p, \quad (1.80)$$

то R_2 будет равно среднему геометрическому двух чисел, то есть

$$R_2 = \sqrt{a_1 \cdot a_2} = S_0. \quad (1.81)$$

Таблица 1.2

Параметры уравнения (1.66) с корнями	Окружность: R – радиус; x – независимая переменная; y – зависимая переменная	Эллипс: R_1 – большая полуось; R_2 – малая полуось; c_3 – фокусное расстояние	Гипербола: l_d – длина действительной полуоси; l_m – длина мнимой полуоси; c_r – фокусное расстояние	Парабола, при $r=2c_{\Pi}$: r – фокальный радиус; c_{Π} – фокус; $\Phi=1,618\dots$ – «золотая» пропорция
a_1	$R+x$	R_1+c_3	c_r+l_d	$\sqrt{r^2 + c_{\Pi}^2} + c_{\Pi} = 2\Phi c_{\Pi}$
a_2	$R-x$	R_1-c_3	c_r-l_d	$\sqrt{r^2 + c_{\Pi}^2} - c_{\Pi} = 2\Phi^{-1}c_{\Pi}$
$p=a_1+a_2$	$2R$	$2R_1$	$2c_r$	$2\sqrt{r^2 + c_{\Pi}^2} = 2\sqrt{5}c_{\Pi}$
$q=a_1a_2$	$y^2=R^2-x^2$	R_2^2	$l_m^2 = c_r^2 - l_d^2$	$r^2 = 4c_{\Pi}^2$
$\sqrt{D} = a_1 - a_2$	$2x$	$2c_3$	$2l_d$	$2c_{\Pi}$
$p/2=S_1$	R	R_1	c_r	$\sqrt{5}c_{\Pi}$
$\sqrt{D} / 2 = S_p$	x	c_3	l_d	c_{Π}
$\sqrt{q} = S_0$	y	R_2	l_m	$r=2c_{\Pi}$

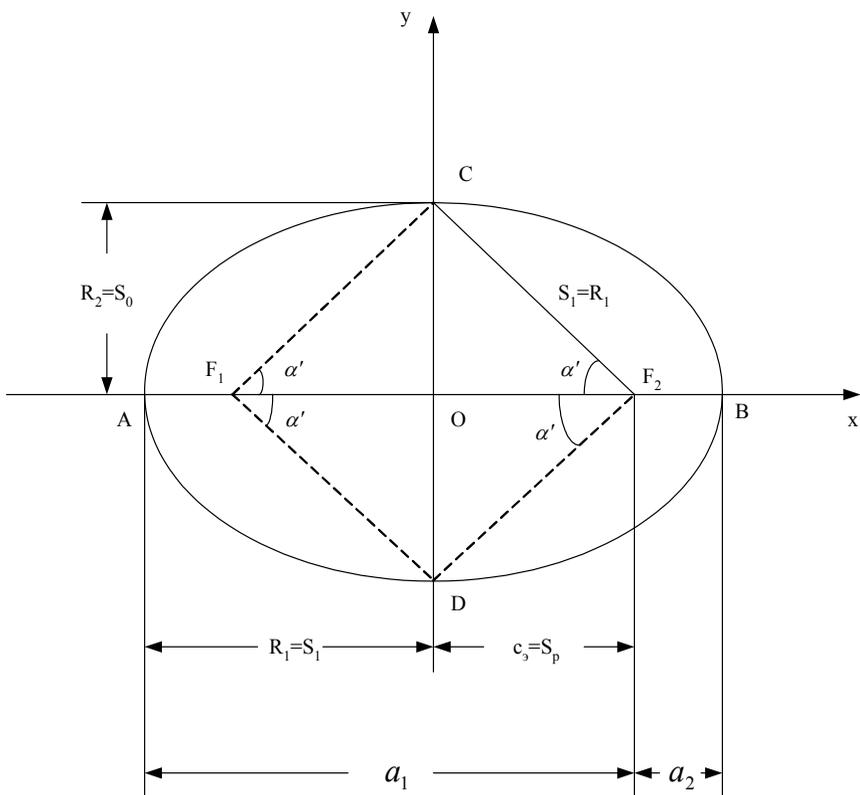


Рис. 1.6

Если подставить полученные выражения (1.79), (1.80) и (1.81), соответственно, в формулы (1.15), ... , (1.20), то получим все тригонометрические функции для угла α' .

В соответствии с модифицированной теоремой Виета для эллипса можно записать:

$$a_1 + a_2 = -p = -2S_1 = -2R_1; \quad (1.82)$$

$$a_1 \times a_2 = q = S_0^2 = R_2^2; \quad (1.83)$$

$$a_1 - a_2 = \sqrt{D'} = \sqrt{p^2 - 4q} = 2S_p = 2c_3. \quad (1.84)$$

Используя формулы (1.82), (1.83) и (1.84) преобразуем приведенное квадратное уравнение $a^2 + pa + q = 0$ в эллиптический вид:

$$a^2 - 2R_1a + R_2^2 = 0, \quad (1.85)$$

с корнями:

$$a_1 = \frac{2R_1 + \sqrt{4R_1^2 - 4R_2^2}}{2} = R_1 + \sqrt{R_1^2 - R_2^2}; \quad (1.86)$$

$$a_2 = \frac{2R_1 - \sqrt{4R_1^2 - 4R_2^2}}{2} = R_1 - \sqrt{R_1^2 - R_2^2}. \quad (1.87)$$

В математических выражениях (1.86) и (1.87) удаление фокусов F_1 и F_2 от центра эллипса, при $R_1 \geq R_2$, определяется как

$$\sqrt{R_1^2 - R_2^2} = c, \quad (1.88)$$

с эксцентриситетом

$$e = c / R_1 = \sqrt{R_1^2 - R_2^2} / R_1 \quad (1.89)$$

и сохранением основного свойства эллипса:

$$r_1 + r_2 = 2R_1, \quad (1.90)$$

где r_1 и r_2 - фокальные радиусы для любой точки на кривой.

Проанализировав формулы (1.79), ..., (1.88), становится очевидным, что приведенные в табл. 1.2 параметры квадратного уравнения находятся в полном соответствии с параметрами эллипса.

1.9. О возможности и целесообразности увеличения числа средних величин в инженерно-исследовательской деятельности

В качестве математического аппарата в инженерно-исследовательской деятельности по экономическому анализу и учету природы социально-экономических процессов при построении телекоммуникационных систем широко используются различные суммальные средние величины, которые из-за своей мажорантности следует всегда обосновывать в процессе выбора для решения конкретных практических задач. К подобным средним величинам чаще всего относят среднюю арифметическую, среднюю геометрическую, среднюю гармоническую, среднюю антигармоническую и другие средние величины, часть из которых были рассмотрены ранее. Выдающийся математик-статист Коррадо Джини существенно расширил перечень средних величин путем обра-

зования 9-ти различных отношений между каждым двумя числами из заданных трех (a, b, c) [31]:

$$\frac{a}{a}, \frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{b}, \frac{b}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{c}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b}, \quad (1.91)$$

и 6-ти разностей между их каждой из пар:

$$a - b, a - c, c - a, b - a, b - c, c - b. \quad (1.92)$$

При этом К. Джини получил 324 различных форм средних величин. Однако исследования показали, что этот перечень форм может быть расширен за счет использования ряда сочетаний отношений (1.91) и разностей (1.92) с 3-мя суммами вида:

$$a + b, a + c, c + b. \quad (1.93)$$

Так, например, на основе отдельных членов из (1.91), (1.92) и (1.93) запишем пропорцию:

$$\frac{c - b}{a + b} = \frac{a}{a}. \quad (1.94)$$

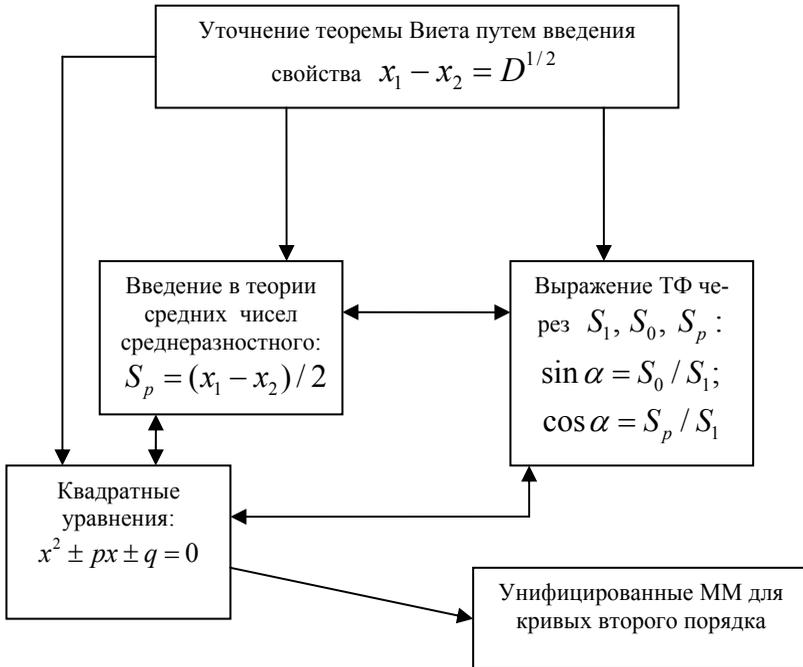
Из (1.94) выразим член b через остальные два члена:

$$b = \frac{c - a}{2}. \quad (1.95)$$

Полученное выражение (1.95) является ранее математически не выводимым средним разностным (введенным впервые – С.Я. [2,23]) или полуразностным двух чисел [24]. Оно нашло свое место в уточненной теореме Виета [6], а также при тригонометрическом представлении средних двух положительных чисел [2, 4, 13,23].

Выводы

В результате анализа основ построения современной тригонометрии, сделано заключение о необходимости дополнительного учета в теореме Виета одного из важных математических свойств $x_1 - x_2 = D^{1/2}$ и тригонометрического представления средних двух положительных чисел. Фактически, произведено закладывание основ унификации элементарной математики для инженеров-исследователей. После доказательства наличия взаимных переходов между квадратными уравнениями и тригонометрическими функциями производится унификация ММ для кривых второго порядка, а так же рассматривается возможность и целесообразность увеличения числа средних величин для ИИД. Все эти результаты научных изысканий в схематическом виде приведены на следующем рисунке:



2. Место «золотого» сечения в элементарной математике

2.1. «Золотое» сечение и последовательность Фибоначчи в алгебре

Прямую «золотую» пропорцию («золотое» сечение) $\Phi = 1,618\dots = \bar{p}_1$ можно представить в виде предела, к которому стремится отношение двух смежных чисел возрастающей последовательности, в которой каждый член (U_n) равен сумме двух предыдущих чисел ($U_{n-1} + U_{n-2}$). Эти условия, но с отношением двух чисел в направлении убывания последовательности, позволяют получить обратное значение «золотой» пропорции («золотого» сечения) $1/\Phi = \Phi - 1 = \bar{\Phi} = 0,618\dots = \bar{p}_1$. Общая рекуррентная формула для построения последовательностей, на основе которых образуются «золотые» пропорции, имеет следующий вид:

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}. \quad (2.1)$$

Если принять, что $U_1 = U_2 = 1$, то с помощью выражения (2.1) получим известную последовательность Фибоначчи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots, \quad (2.2)$$

как множество чисел $\{F_n\}$, для которого, справедливы следующие свойства:

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}; \quad (2.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = 1,618033\dots = \Phi. \quad (2.4)$$

Имеют место и другие варианты образования «золотых» пропорций, например:

$$\Phi = 1 + \bar{\Phi} = 1 + \lim \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}; \quad (2.5)$$

$$\Phi = \lim \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}. \quad (2.6)$$

Деление отрезка в среднем пропорциональном отношении, когда целое $(a + b)$ так относится к своей большей части (b) , как большая часть (b) относится к меньшей части (a) , так же соответствует «золотой» пропорции, т.е.

$$\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a} = \Phi. \quad (2.7)$$

Для идентификации «золотых» пропорций иногда бывает достаточным знать определяющие их значения, например, такие как:

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}; \quad (2.8)$$

$$\Phi = \frac{2}{\sqrt{5}-1}; \quad (2.9)$$

$$\bar{\Phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}; \quad (2.10)$$

$$\bar{\Phi} = \frac{2}{\sqrt{5}+1}; \quad (2.11)$$

$$\Phi = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{2}} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}; \quad (2.12)$$

$$\Phi = 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right). \quad (2.13)$$

Из приведенного выше множества возможных вариантов математических моделей «золотых» пропорций каждый может иметь преимущество перед другими в зависимости от специфики конкретно решаемой прикладной задачи и обоснованности выбранного методологического подхода к ее решению. В то же время, для выявления системных свойств, возникает необходимость в знании эквивалентности между инвариантами: «числовые последовательности» - «пропорции - корни уравнений» - «аналитические выражения». После определения системных свойств, особенно граничных, экстремальных, симметрии, гармонии и т.д., достаточным будет знание и умение использовать при решении практических задач одной из составных инвариант, т.е. – «числовые последовательности – пропорции» или «аналитические выражения – их корни».

Следует отметить, что предсказания астронома К.П. Бутусова о возможном создании так называемой «золотой математики» [32] в настоящее время сбываются, так как разработана прикладная «золотая» математика с приложениями в области электросвязи, которая с успехом находит новые приложения во всех остальных областях науки и техники [4]. Этот новый научный логико-математический аппарат (НЛМА) базируется на общие законы развития природы и отражает единство человека с окружающей средой. В качестве НЛМА

предлагается использовать: «металлические» пропорции [2,3,4,6]; пропорции и последовательности Фибоначчи-Люка (то есть так называемые «обобщенные последовательности Фибоначчи» [2]) [4,6], Фибоначчи-Барра [2,4] и Фибоначчи-Падована [5]; «золотые» геометрические прогрессии (ГП) [2,4,6]; «золотые» p -пропорции и p -числа Фибоначчи (предлагается в дальнейшем их называть: «пропорции и последовательности Фибоначчи-Пойа» [2,4,6,34,35,36]; «золотые» вурфы [17, 37,38,39]. Не смотря на кажущееся отступление в прикладной «золотой» математике от соблюдения исключительности принципов «золотого» сечения, на самом деле, рассмотрение особого места и доминирующей роли этого сечения и последовательности Фибоначчи в разнообразных математических системах делает «золотую» математику более универсальной, эффективной и гибкой в исследованиях разнородных процессов и систем в природе, социально-экономической жизни и мышлении человека [17,18,40,41].

2.1.1. «Золотые» геометрические прогрессии

С целью соблюдения системности в изложении материала, роль и место «золотого» сечения и последовательности Фибоначчи в алгебре представлена в порядке строения НЛМА. Что касается роли «золотого» сечения в обеспечении художественного и гармоничного единства частей и целого, то в данном случае справедливо высказывание архитектора М.С. Булатова [42]: «... Чем же следует руководствоваться зодчему, чтобы гармонично сочетать части с целым? На этот вопрос Платон отвечает: «Невозможно, чтобы две вещи объединились красивым видом без третьего. Так как между ними должна возникнуть связь, которая их объединит». Это может объединить пропорция

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c},$$

в которой b - средняя пропорциональная величина, без которой невозможно создание гармоничной композиции. Деление отрезка в среднем и крайнем отношении, так называемое «золотое сечение», являющееся частным случаем этой пропорции, дало основание теоретикам архитектуры искать в соразмерностях храмов именно эти отношения».

Следовательно, в процессе проектирования эстетического облика промышленных изделий для построения ТКС, как СЧМС, инженеры-исследователи должны учитывать возможность использования в качестве ММ приведенную М.С. Булатовым пропорцию и «золотое» сечение, а также образуемые на их основе ГП. Однако если для последовательности членов

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots \quad (2.14)$$

ГП со знаменателем q справедлива пропорция:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = \dots = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{q}. \quad (2.15)$$

При $a_1 = 1$ в формуле (2.15), получим: $a_2 = q$, $a_3 = q^2$, $a_4 = q^3$ и так далее. То есть мы получили известную формулу для выражения любого члена a_n геометрической прогрессии через ее первый член $a_1 = 1$, знаменатель q и его номер n , то есть:

$$a_n = a_1 q^{n-1} = q^{n-1}. \quad (2.16)$$

Если подставить в формулу (2.16) $q = 1,618\dots = \Phi$, то вычислим все члены возрастающей «золотой» ГП

$$\Phi^0, \Phi^1, \Phi^2, \dots, \Phi^{n-1}, \quad (2.17)$$

а если подставить $q = 0,618\dots = \bar{\Phi}$, то вычислим все члены убывающей «золотой» ГП

$$\bar{\Phi}^0, \bar{\Phi}^1, \bar{\Phi}^2, \dots, \bar{\Phi}^{n-1}. \quad (2.18)$$

Так как $1/\Phi = \Phi^{-1} = \bar{\Phi}$, то ГП (2.17) и (2.18) в обобщенном виде могут быть представлены следующими двумя способами:

$$\Phi^n, n = N, \dots, 2, 1, 0, -1, -2, \dots, -N; \quad (2.19)$$

$$\Phi^{-n}, n = -N, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, N. \quad (2.20)$$

В случае необходимости шаг ГП может быть уменьшен до требуемого значения исходя из условий точности решения практической задачи для систем «человек-машина-среда» (СЧМС). При необходимости каждый из членов ГП может быть определен с достаточно высокой точностью путем многократного умножения в соответствии с численным значением степени исходного (определяющего шаг) числа на себя. Однако это не единственный способ формирования ГП. Например, возрастающая «золотая» ГП, формируемая на основе общей рекуррентной формулы (2.1), выглядит следующим образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{U_{n-1}} = \Phi^1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{U_{n-2}} = \Phi^2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{U_{n-3}} = \Phi^3, \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{U_{n-m}} = \Phi^m, \quad (2.21)$$

где n – порядковый номер члена последовательности, а m – максимальное значение степени для Φ . Соответственно, для убывающей «золотой» ГП образуются следующие выражения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n-1}}{U_n} = \overline{\Phi}^1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n-2}}{U_n} = \overline{\Phi}^2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n-3}}{U_n} = \overline{\Phi}^3, \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n-m}}{U_n} = \overline{\Phi}^m. \quad (2.22)$$

2.1.1.1. Анализ одного из подходов к образованию «золотой» геометрической прогрессии

Рассмотрим классическое квадратное уравнение (уравнение 2-й степени)

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (2.23)$$

с одним положительным корнем из двух корней в «золотых» пропорциях, т. е.

$$x_1 = (1 + \sqrt{5})/2 = 1,6180339\dots = \Phi.$$

Уравнение (2.23) может быть представлено в следующих 2-х основных видах:

$$x_1^2 = x_1^1 + 1; \quad (2.24)$$

$$x_1^1 = x_1^2 - 1. \quad (2.25)$$

В результате поочередного умножения уравнения (2.24) на x_1^m , при $m = 1, 2, \dots$, и подстановки в правую часть каждого из образуемых уравнений с более высокой степенью

$$x_1^{2+m} = x_1^{1+m} + x_1^{0+m} \quad (2.26)$$

полученных ранее значений для x_1^{1+m} и x_1^{0+m} , а также подстановки в соответствующих случаях выражений (2.24) и (2.25), А.П. Стахов отвечает положительно на поставленный им же вопрос [43]: «... существуют ли алгебраические уравнения более высоких степеней, корнем которых является золотая пропорция?» При этом более высокая степень рассматривается относительно уравнения 2-й степени (2.24), то есть (2.26), при $m = 0$. Итогом итерационных преобразований выражения (2.26) для А.П. Стахова стало доказательство справедливости следующего так называемого «алгебраического уравнения золотой пропорции n -й степени» [43]:

$$x_1^n = F_n x_1^2 - F_{n-2} = F_n x_1 + F_{n-1}, \quad (2.27)$$

где $n = 2, 3, \dots$, а F_n, F_{n-1}, F_{n-2} - числа Фибоначчи из последовательности (2.2).

Какие выводы можно сделать из доказанной А.П. Стаховым формулы (2.27) и взятой в качестве исходного уравнения n -й степени – уравнения 2-й степени (2.24)?

Первый вывод заключается в однозначности проявления переменной x в формуле (2.27), так как она исключительно равна «золотой» пропорции, т. е.

$$x_1 = 1,618033988... = \Phi, \quad (2.28)$$

а ее квадрат:

$$x_1^2 = 2,618033988... = \Phi + 1 = \Phi^2 = x_1^1 + 1. \quad (2.29)$$

Следовательно, переменную (2.28) можно записать как

$$x_1^1 = \Phi^2 - 1 = \Phi = x_1^2 - 1. \quad (2.30)$$

Из выражения (2.29) видно, что оно не только является аналогом уравнения (2.24), но и одновременно служит доказательством известного по своей уникальности математического свойства «золотой» пропорции, когда $\Phi^2 = \Phi + 1$, а выражение (2.30) в свою очередь является аналогом уравнения (2.25) с вытекающим из него не менее важным доказательством следствия математического свойства, когда $\Phi = \Phi^2 - 1$.

Второй вывод наводит на мысль о необходимости проведения исследования методом аналогий с целью расширения границ действия формулы (2.27) в сторону уменьшения n -степени до нуля, а затем в направлении ее увеличения с отрицательным знаком, то есть в общем виде при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, когда $x_1 = \Phi$ и $x_1^2 = \Phi^2$. А это значит, что если А.П. Стахов проводил исследование в общем случае для «алгебраических уравнений золотой пропорции n -й степени» [43], при $n = 2, 3, \dots$, то в нашем случае речь уже ведется о более широком обобщении методом аналогии, то есть о получении обобщающего выражения с целью обеспечения возможности вычислять любой член «золотой» ГП

$$x_1^n = \Phi^n, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (2.31)$$

когда последовательность Фибоначчи известна.

2.1.1.2. Уточнение уравнений для «золотой» геометрической прогрессии

Для образования «золотой» ГП (2.31) преобразуем выражение (2.27) в следующий вид:

$$\Phi^n = F_n \Phi^2 - F_{n-2}; \quad (2.32)$$

$$\Phi^n = F_n \Phi + F_{n-1}, \quad (2.33)$$

где $n = 0, \pm 1, \dots$ - индекс для определения порядковых номеров чисел в последовательности Фибоначчи, а также степень «золотой» пропорции. В табл. 2.1 приводятся результаты закрепления чисел Фибоначчи и членов «золотой» ГП за индексом $n = 0, \pm 1, \dots, \pm 18$.

Например, задано $n = 3$. Подставим в формулы (2.32) и (2.33) из табл. 2.1 числа Фибоначчи и получим

$$\Phi^3 = F_3 \Phi^2 - F_1 = 2\Phi^2 - 1 = 4,236...,$$

$$\Phi^3 = F_3\Phi + F_2 = 2\Phi + 1 = 4,236\dots,$$

что соответствует результату непосредственного вычисления Φ^3 .

По аналогии с (2.23) рассмотрим еще одно классическое уравнение 2-й степени

$$x^2 + x - 1 = 0 \tag{2.34}$$

с одним положительным корнем из двух корней в «золотых» пропорциях

$$x_2 = (\sqrt{5} - 1) / 2 = 0,6180339\dots = \Phi^{-1}.$$

Уравнение (2.34) может быть представлено в следующих 2-х основных видах:

$$x_2^2 = 1 - x_2^1; \tag{2.35}$$

$$x_2^1 = 1 - x_2^2. \tag{2.36}$$

Таблица 2.1

Индекс, n	Числа Фибоначчи F_0, \dots, F_{18}	$\Phi^n, n=0, \dots, 18$	Индекс, n	Числа Фибоначчи F_0, \dots, F_{-18}	$\Phi^n, n=0, \dots, -18$
1	2	3	4	5	6
0	$F_0=0$	$\Phi^0 = 1,0$	0	$F_0=0$	$\Phi^0 = 1,0$
1	$F_1=1$	$\Phi^1 = 1,618033\dots$	-1	$F_{-1}=1$	$\Phi^{-1} = 0,618033\dots$
2	$F_2=1$	$\Phi^2 = 2,618033\dots$	-2	$F_{-2}=-1$	$\Phi^{-2} = 0,381966\dots$
3	$F_3=2$	$\Phi^3 = 4,236067\dots$	-3	$F_{-3}=2$	$\Phi^{-3} = 0,236067\dots$
4	$F_4=3$	$\Phi^4 = 6,854101\dots$	-4	$F_{-4}=-3$	$\Phi^{-4} = 0,145898\dots$
5	$F_5=5$	$\Phi^5 = 11,090169\dots$	-5	$F_{-5}=5$	$\Phi^{-5} = 0,090169\dots$
6	$F_6=8$	$\Phi^6 = 17,944271\dots$	-6	$F_{-6}=-8$	$\Phi^{-6} = 0,055728\dots$
7	$F_7=13$	$\Phi^7 = 29,034441\dots$	-7	$F_{-7}=13$	$\Phi^{-7} = 0,034441\dots$
8	$F_8=21$	$\Phi^8 = 46,978713\dots$	-8	$F_{-8}=-21$	$\Phi^{-8} = 0,021286\dots$
9	$F_9=34$	$\Phi^9 = 76,013155\dots$	-9	$F_{-9}=34$	$\Phi^{-9} = 0,013155\dots$

1	2	3	4	5	6
10	$F_{10}=55$	$\Phi^{10} = 122,99186\dots$	-10	$F_{-10}=-55$	$\Phi^{-10} = 0,008130\dots$
11	$F_{11}=89$	$\Phi^{11} = 199,00502\dots$	-11	$F_{-11}=89$	$\Phi^{-11} = 0,005024\dots$
12	$F_{12}=144$	$\Phi^{12} = 321,99689\dots$	-12	$F_{-12}=-144$	$\Phi^{-12} = 0,003105\dots$
13	$F_{13}=233$	$\Phi^{13} = 521,00191\dots$	-13	$F_{-13}=233$	$\Phi^{-13} = 0,001919\dots$
14	$F_{14}=377$	$\Phi^{14} = 842,99880\dots$	-14	$F_{-14}=-377$	$\Phi^{-14} = 0,001186\dots$
15	$F_{15}=610$	$\Phi^{15} = 1364,0007\dots$	-15	$F_{-15}=610$	$\Phi^{-15} = 0,000733\dots$
16	$F_{16}=987$	$\Phi^{16} = 2206,9995\dots$	-16	$F_{-16}=-987$	$\Phi^{-16} = 0,000453\dots$
17	$F_{17}=1597$	$\Phi^{17} = 3571,0002\dots$	-17	$F_{-17}=1597$	$\Phi^{-17} = 0,000280\dots$
18	$F_{18}=2584$	$\Phi^{18} = 5777,9997\dots$	-18	$F_{-18}=-2584$	$\Phi^{-18} = 0,000173\dots$

После использования соответствующего алгоритма преобразований с формулами (2.35) и (2.36) легко доказать справедливость еще двух выражений для формирования «золотой» ГП, при $n = 0, \pm 1, \dots$, которые в окончательном виде выглядят следующим образом [44]:

$$x_2^n = F_{2-n} - F_{-n}x_2^2 = F_{2-n} - F_{-n}\Phi^{-2} = \Phi^{-n}; \quad (2.37)$$

$$x_2^n = F_{1-n} + F_{-n}x_2 = F_{1-n} + F_{-n}\Phi^{-1} = \Phi^{-n}. \quad (2.38)$$

Например, задано $n = 3$, тогда подставим в формулы (2.37) и (2.38) из табл. 2.1 требуемые числа Фибоначчи и получим

$$\Phi^{-3} = F_{-1} - F_{-3}\Phi^{-2} = 1 - 2\Phi^{-2} = 0,236\dots;$$

$$\Phi^{-3} = F_{-2} + F_{-3}\Phi^{-1} = -1 + 2\Phi^{-1} = 0,236\dots,$$

что соответствует результату непосредственного вычисления Φ^{-3} .

Учитывая наличие взаимосвязи между «золотой» пропорцией Φ (прямой) и ее обратным значением Φ^{-1} (обратной) в виде

$$x_2 = \Phi^{-1} = 1/\Phi = 1/x_1,$$

запишем еще четыре обобщающих выражения для формирования «золотых» ГП (2.31) [44]:

$$x_2^{-n} = F_{n+2} - F_n x_2^2 = F_{n+2} - F_n \Phi^{-2} = \Phi^n; \quad (2.39)$$

$$x_2^{-n} = F_{n+1} + F_n x_2 = F_{n+1} + F_n \Phi^{-1} = \Phi^n; \quad (2.40)$$

$$x_1^{-n} = F_{-n} x_1^2 - F_{-(n+2)} = F_{-n} \Phi^2 - F_{-(n+2)} = \Phi^{-n}; \quad (2.41)$$

$$x_1^{-n} = F_{-n} x_1 + F_{-(n+1)} = F_{-n} \Phi + F_{-(n+1)} = \Phi^{-n}. \quad (2.42)$$

Проверим на примерах для $n = 3$ справедливость выражений (2.39),..., (2.42):

$$\Phi^3 = F_5 - F_3 \Phi^{-2} = 5 - 2\Phi^{-2} = 4,236\dots;$$

$$\Phi^3 = F_4 + F_3 \Phi^{-1} = 3 + 2\Phi^{-1} = 4,236\dots;$$

$$\Phi^{-3} = F_{-3} \Phi^2 - F_{-5} = 2\Phi^2 - 5 = 0,236\dots;$$

$$\Phi^{-3} = F_{-3} \Phi + F_{-4} = 2\Phi - 3 = 0,236\dots,$$

что соответствует результату непосредственного вычисления Φ^3 и Φ^{-3} .

Таким образом, в результате математического доказательства получены следующие обобщенные четыре варианта взаимосвязей между членами «золотой» геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned} \Phi^n &= F_n \Phi^2 - F_{n-2} = F_n \Phi + F_{n-1} = \\ &= F_{n+2} - F_n \Phi^{-2} = F_{n+1} + F_n \Phi^{-1}; \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \Phi^{-n} &= \left| F_{-n} \Phi^{-2} - F_{-(n-2)} \right| = F_{-n} \Phi^{-1} + F_{-(n-1)} = \\ &= \left| F_{-(n+2)} - F_{-n} \Phi^2 \right| = F_{-(n+1)} + F_{-n} \Phi. \end{aligned} \quad (2.44)$$

На основе каждого из четырех вариантов обобщения (2.43) и (2.44) путем вычисления значений $\Phi^n \pm \Phi^{-n}$ получаются 4 варианта (способа) доказательства классической формулы Бине [44].

2.1.1.3. Специфичность основного свойства «золотой» геометрической прогрессии

Все, что касается имеющих место основных свойств ГП, то они полностью распространяются и на «золотые» ГП, то есть:

каждый член знакоположительной ГП представляет собой среднее геометрическое его соседних членов, что для «золотые» ГП соответствует записи

$$\Phi^n = \sqrt{\Phi^{n-1} \Phi^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm N; \quad (2.45)$$

у конечной ГП произведения членов, равноотстоящих от ее концов, равны и равны произведению крайних членов.

Если возвести обе части уравнения (2.45) в квадрат, то получим

$$\Phi^{2n} = (\sqrt{\Phi^{n-1}\Phi^{n+1}})^2, \text{ то есть} \quad (2.46)$$

$$\Phi^{2n} = \Phi^{n-1}\Phi^{n+1}, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm N. \quad (2.47)$$

Первой специфической особенностью для «золотой» ГП есть то, что в связи с обладанием мультипликативным свойством (2.47) она одновременно обладает и аддитивным свойством

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}, \quad (2.48)$$

которое одновременно является и составляющим выражения $\Phi^{m/2} = \Phi^{(m-2)/2} + \Phi^{(m-4)/2}$, где $m = 0, \pm 1, \dots, \pm M$.

Преобразуем (2.48) к виду

$$\Phi^{n-1} = \Phi^n - \Phi^{n-2}, \quad (2.49)$$

а затем подставим его в (2.47). После соответствующих преобразований в окончательном виде получим формулу

$$\Phi^{2n+1} = \Phi^{2n} + \Phi^{2n-1}, \quad (2.50)$$

которая, так же как и (2.48), обладает аддитивным свойством.

Вторая специфическая особенность «золотой» ГП вытекает непосредственно из определения и формализованной записи среднего геометрического $S_0(n)$ для n положительных чисел, выражаемого через арифметическое значение корня степени есть n из их произведения:

$$S_0(n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}. \quad (2.51)$$

Дело в том, что для возрастающей «золотой» ГП в общем случае среднее геометрическое в соответствии с (2.51) имеет следующий вид:

$$S_0(n) = \sqrt[n]{\Phi^1 \Phi^2 \dots \Phi^n}. \quad (2.52)$$

Однако оказывается, что очень просто можно вычислить среднее геометрическое для любой усеченной с двух сторон «золотой» ГП, так как

$$S_0(m) = \sqrt[m]{\Phi^i \Phi^{i+1} \dots \Phi^I} = \Phi^{\sum_{j=0}^{m-1} (i+j)/m}, \quad m = I - i + 1, \quad (2.53)$$

где i – наименьшая степень, I – наибольшая степень, m – число членов усеченной прогрессии, а

$$\sum_{j=0}^{m-1} (i+j) / m = S_1(m) \quad (2.54)$$

есть среднее арифметическое для степеней, в которые возводится «золотая» пропорция Φ под корнем степени m .

Следовательно, по аналогии с формулой (2.53) запишем выражение, позволяющее вычислять среднее геометрическое для любой усеченной с двух сторон

убывающей «золотой» ГП, формируемой на основе обратной «золотой» пропорции $\bar{\Phi}$:

$$\bar{S}_0(m) = \sqrt[m]{\bar{\Phi}^i \bar{\Phi}^{i+1} \dots \bar{\Phi}^l} = \bar{\Phi}^{\sum_{j=0}^{m-1} (i+j)/m} = \bar{\Phi}^{S_1(m)}, \quad m = l - i + 1. \quad (2.55)$$

2.1.2. Взаимосвязь «золотой» геометрической прогрессии с последовательностями Фибоначчи и Люка. Последовательности типа Фибоначчи-Люка

Особо важный вклад в изучение обобщенных последовательностей Фибоначчи внес в XIX веке французский математик Э. Люка. К этим последовательностям принято относить такие, которые начинаются с любых двух целых положительных чисел, а каждый их член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Простейшую из них (с «геном» «1, 1») Э. Люка назвал именем Фибоначчи (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...), а вторую по сложности (с «геном» «1, 3») было названо позже по имени самого Э. Люка (1, 3, 4, 7, 11, 18, ...), где под «геном» принято понимать первые два члена последовательности. Следовательно, справедливости ради, все обобщенные последовательности Фибоначчи предлагается называть «последовательностями Фибоначчи-Люка» [2, 4].

В табл. 2.2, в качестве примера, приведены усеченные до числа «37» последовательности Фибоначчи-Люка, в «генах» которых имеют место первые два числа от 1 до 5-ти [45].

Если исключить из рассмотрения все дублирующие (резервные) последовательности Фибоначчи-Люка, оставив все основные, в которых первые числа «генов» следуют в порядке возрастания нумерации, то после их усечения (например, до числа «139») получим приращения чисел Δ_n для каждой очередной последовательности. Эти приращения подчиняются закономерности чисел Фибоначчи (табл. 2.3), где $n = 2, \dots, 10$ – номер столбца в данном примере или порядковый номер члена в последовательности, а в столбце с $n = 1$ находится первое число последовательности $m = 1, \dots, 5$.

Таблица 2.2

«Гены» с первыми двумя числами от 1 до 5-ти	Остальные члены последовательностей Фибоначчи-Люка с первыми двумя числами от 1 до 5-ти	Названия последовательностей
1,2,	3,5,8,13,21,34,...	типа Фибоначчи
2,1,	3,4,7,11,18,29,...	типа Люка
1,3,	4,7,11,18,29,...	Люка
3,1,	4,5,9,14,23,27,...	Фибоначчи-Люка
1,4,	5,9,14,23,37,...	Фибоначчи-Люка
4,1,	5,6,11,17,28,...	Фибоначчи-Люка
1,5,	6,11,17,28,...	Фибоначчи-Люка
5,1,	6,7,13,20,33,...	Фибоначчи-Люка

Таблица 2.3

$m = 1, \dots, 5$	$n = 2, \dots, 10$								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
2	1	3	4	7	11	18	29	47	76
3	1	4	5	9	14	23	37	60	97
4	1	5	6	11	17	28	45	73	118
5	1	6	7	13	20	33	53	86	139
Δ_n	0	+1	+1	+2	+3	+5	+8	+13	+21

На основе обнаруженной в табл. 2.3 закономерности Δ_n можно сделать вывод о наличии одностороннего закручивания в вертикальной плоскости всех чисел из бесконечного множества последовательностей Фибоначчи-Люка.

Другими словами, к последовательностям Фибоначчи-Люка, которые имеют непосредственную взаимосвязь с «золотой» пропорцией ($\Phi=1,618\dots$), принято относить такие, которые формируются на основе суммы первых двух положительных (натуральных) чисел («генов») по следующему закону [2,4,46]:

$$U_{i+2,j} = U_{i+1,j} + U_{i,j}, \quad (2.56)$$

где: $i = \overline{1, I}$ – определяет порядковые номера чисел в j -ой последовательности Фибоначчи-Люка; $j = \overline{1, J}$ – порядковый номер последовательности Фибоначчи-Люка. Каждая из последовательностей Фибоначчи-Люка в порядке их роста образуется с помощью (2.56) на основе суммы следующих двух положительных чисел: $U_{1, j=1, \overline{1, J}} = \overline{1, J}$ и $U_{2, j=1} = 1$. Отдельные из этих последовательностей предложено использовать при построении (моделировании) дискретных реактивных цепей с повышенной структурной надежностью [16,17]. В процессе исследования матрицы чисел, образованных с помощью формулы (2.56), получено следующее основное математическое свойство:

$$U_{i, j} = U_{i,1} + (j-1)U_{i-2,1}. \quad (2.57)$$

Введем дополнительно к натуральным числам нуль. Тогда дополнительно к полученной ранее матрице чисел в качестве изначальной «нулевой» последовательности типа Фибоначчи, образуемой на основе суммы двух положительных чисел $U_{1,0} = 0$ и $U_{2,0} = 1$, добавится последовательность вида: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, Вновь образуемая матрица за счет расширения на одну строчку позволяет упростить свойство (2.57). Следовательно, это свойство в упрощенном виде можно выразить следующим образом:

$$U_{i, j} = U_{i,0} + jU_{i-1,0}. \quad (2.58)$$

В расширенной матрице проявляются еще некоторые известные основные свойства, например:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{U_{i,j}}{U_{i-1,j}} = 1,618... = \Phi; \quad (2.59)$$

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} \frac{U_{i,j}}{U_{i, j-1}} = 1,0; \quad (2.60)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{U_{i,1}}{U_{i,0}} = 1,618... = \Phi = 1 + 1/\Phi; \quad (2.61)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{U_{i,j}}{U_{i,0}} = 1 + j/\Phi, \quad (2.62)$$

где $j = \overline{1, J}$, а выражение (2.61) является частным случаем (2.62), при $j = 1$;

$$U_{i, j} - U_{i, j-1} = U_{i-1,0} = F_{i-2}; \quad i = \overline{2, I}; \quad j = \overline{1, J}, \quad (2.63)$$

где $F_i = F_{i-1} + F_{i-2} : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$ – последовательность типа Фибоначчи, формируемая на основе заданных двух чисел $F_0 = 0$ и $F_1 = 1$ [18].

Приведенная выше последовательность типа Фибоначчи

$$\{F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\} : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots, \quad (2.64)$$

где $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$, а так же последовательность типа Люка

$$\{L_{n+2} = L_{n+1} + L_n\} : 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \dots, \quad (2.65)$$

обладают с (2.4), (2.21), (2.59) и (2.61) одинаковым свойством, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{L_{n-1}} = 1,618033\dots = \Phi. \quad (2.66)$$

Следовательно, можно предположить о наличии степенной зависимости между этими пропорциями и числами в последовательностях Фибоначчи и Люка. И действительно, если воспользоваться формулами сокращенного умножения типа $a^n - b^n$ и $a^n + b^n$ (т.е. степенными биномами), приняв, что $a = \Phi$ и $b = \overline{\Phi}$, то обнаруживается факт переходов от «золотых» пропорций к последовательностям Фибоначчи и Люка (но без числа 2). Отсутствие в последовательности Люка корневого числа 2 позволяет предположить о существовании своего рода последовательностей - «близнецов», так как в природе наблюдаются явления дублирования или резервирования процессов и структурных элементов. Поэтому, в дальнейшем, последовательность чисел близкую к числовой последовательности Люка будем по прежнему называть числовой последовательностью типа Люка, а близкую к последовательности Фибоначчи – последовательностью типа Фибоначчи.

Для доказательства наличия переходов от «золотых» пропорций (прямой и обратной) к числовым последовательностям Фибоначчи и Люка рассмотрим пример решения биномиальных уравнений $a^n - b^n$ и $a^n + b^n$, при $n = 1, \dots, N$, где $N = 8$, $a = \Phi$ и $b = \overline{\Phi}$.

Произведем вычисление с помощью выражения $a^n - b^n$:

$$\text{а) } a^1 - b^1 = \Phi^1 - \overline{\Phi}^1 = 1; \quad \text{б) } a^2 - b^2 = \Phi^2 - \overline{\Phi}^2 = 2,236\dots = 1\sqrt{5};$$

$$\text{в) } a^3 - b^3 = \Phi^3 - \overline{\Phi}^3 = 4; \quad \text{г) } a^4 - b^4 = \Phi^4 - \overline{\Phi}^4 = 6,708\dots = 3\sqrt{5};$$

$$\text{д) } a^5 - b^5 = \Phi^5 - \overline{\Phi}^5 = 11; \quad \text{е) } a^6 - b^6 = \Phi^6 - \overline{\Phi}^6 = 17,888\dots = 8\sqrt{5};$$

$$\text{ж) } a^7 - b^7 = \Phi^7 - \overline{\Phi}^7 = 29; \quad \text{з) } a^8 - b^8 = \Phi^8 - \overline{\Phi}^8 = 49,95\dots = 21\sqrt{5}.$$

Затем произведем вычисления с помощью выражения $a^n + b^n$:

- а) $a^1 + b^1 = \Phi^1 + \bar{\Phi}^1 = 2,236\dots = 1\sqrt{5}$; б) $a^2 + b^2 = \Phi^2 + \bar{\Phi}^2 = 3$;
 в) $a^3 + b^3 = \Phi^3 + \bar{\Phi}^3 = 4,472\dots = 2\sqrt{5}$; г) $a^4 + b^4 = \Phi^4 + \bar{\Phi}^4 = 7$;
 д) $a^5 + b^5 = \Phi^5 + \bar{\Phi}^5 = 11,180\dots = 5\sqrt{5}$; е) $a^6 + b^6 = \Phi^6 + \bar{\Phi}^6 = 18$;
 ж) $a^7 + b^7 = \Phi^7 + \bar{\Phi}^7 = 29,06\dots = 13\sqrt{5}$; з) $a^8 + b^8 = \Phi^8 + \bar{\Phi}^8 = 47$.

Из результатов вычислений, полученных с помощью выражений $a^n - b^n$ и $a^n + b^n$ видно, что:

а) если выписать все целочисленные результаты в порядке их возрастания, то есть по мере увеличения степени, то получим последовательность Люка;

б) если разделить каждое из полученных нецелочисленных значений на $\Phi^1 + \bar{\Phi}^1 = 2,236\dots = \sqrt{5}$, то получим последовательность Фибоначчи. Отсюда просматривается ряд общих закономерностей перехода от «золотых» пропорций (прямой и обратной) к последовательностям Фибоначчи и Люка, что и требовалось показать. Пользуясь методом математической индукции, можно продемонстрировать, что n -й по порядку нечетный член ($n = 1, 3, 5, \dots$) последовательности Фибоначчи определяется как

$$U'_n(F) = \frac{\Phi^n + \bar{\Phi}^n}{\sqrt{5}}, \quad (2.67)$$

а четный член ($n = 2, 4, 6, \dots$) определяется с помощью формулы

$$U''_n(F) = \frac{\Phi^n - \bar{\Phi}^n}{\sqrt{5}}. \quad (2.68)$$

Но, так как

$$\Phi + \bar{\Phi} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \sqrt{5}, \quad (2.69)$$

то выражения (2.67) и (2.68) можно преобразовать к следующему обобщенному виду:

$$U_n(F) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^n - \left(\frac{-\sqrt{5} + 1}{2} \right)^n \right]. \quad (2.70)$$

Полученное обобщенное выражение (2.70) является формулой Бине, доказательство которой приведено Н.Н. Воробьевым в работе [30].

В настоящее время известны другие способы вычислений $U_n(F)$: с помощью формул Крамера и через преобразование (отображение) квадратных матриц [47].

Анализ выражений (2.67), (2.68), (2.69) показывает, что выражения (2.67) и (2.68) позволяют дифференцировать члены последовательности типа Фибоначчи на четные члены и нечетные. В окончательном виде $U_n'(F)$ и $U_n''(F)$ выглядят следующим образом:

а) для нечетных членов

$$U_n'(F) = \frac{\Phi^n + \overline{\Phi}^n}{\Phi + \overline{\Phi}}; \quad (2.71)$$

б) для четных членов

$$U_n''(F) = \frac{\Phi^n - \overline{\Phi}^n}{\Phi + \overline{\Phi}} \quad (2.72)$$

Пользуясь методом математической индукции, покажем, что n -й по порядку нечетный член ($n = 1, 3, 5, \dots$) последовательности Люка определяется как

$$U_n'(L) = \Phi^n - \overline{\Phi}^n, \quad (2.73)$$

а четный член ($n = 2, 4, 6, \dots$) - через

$$U_n''(L) = \Phi^n + \overline{\Phi}^n. \quad (2.74)$$

Тогда в обобщенном виде выражения (2.73) и (2.74) будут выглядеть следующим образом:

$$U_n(L) = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^n + \left(\frac{-\sqrt{5} + 1}{2} \right)^n. \quad (2.75)$$

В полученных выражениях (2.71), ..., (2.75), а также в формуле Бине (2.70), заложены основы упрощенного суммирования возведенных в степень «золотых» пропорций.

Наряду с уже известными свойствами чисел Фибоначчи [30], их перечень может быть продолжен каждым исследователем самостоятельно в случае более глубокого проникновения в существо природных феноменов. Простота получаемых математических моделей подкупает и увлекает к поиску новых результатов в процессе исследований.

Так, например, любая пара соседних членов последовательности Фибоначчи обладает следующими общеизвестными свойствами:

а) для четных порядковых номеров чисел из последовательности Фибоначчи ($n = 2, 4, 6, \dots$)

$$U_n^2 - U_{n-1}^2 = U_n U_{n-1} + 1; \quad (2.76)$$

б) для нечетных порядковых номеров чисел из последовательности Фибоначчи ($n = 1, 3, 5, \dots$)

$$U_n^2 - U_{n-1}^2 = U_n U_{n-1} - 1. \quad (2.77)$$

Из выражений (2.76) и (2.77) следует, что разность между квадратами большего и меньшего соседних чисел последовательности Фибоначчи равна произведению этих чисел плюс или минус единица, где плюс соответствует четным порядковым номерам этих чисел в последовательности, а минус - нечетным.

В данном случае свойства (2.76) и (2.77) распространяются только на любые два соседних члена из последовательности Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, Однако, путем их преобразований можно получить новые свойства, распространяющиеся на любые четыре соседних члена из последовательности:

а) для четных порядковых номеров ($n = 2, 4, 6, \dots$)

$$U_{n+1} U_{n-2} = U_n U_{n-1} + 1; \quad (2.78)$$

б) для нечетных порядковых номеров ($n = 1, 3, 5, \dots$)

$$U_{n+1} U_{n-2} = U_n U_{n-1} - 1. \quad (2.79)$$

Из выражений (2.78) и (2.79) следует, что для любой усеченной последовательности Фибоначчи, состоящей из четырех чисел, произведение крайних ее чисел равно произведению средних чисел плюс или минус единица, где плюс соответствует четным порядковым номерам чисел последовательности Фибоначчи, а минус - нечетным.

Для последовательностей Фибоначчи-Люка с членами в генах «1,3», «1,4», ..., «1, М», образованных с помощью выражения (2.1), свойства (2.76), ..., (2.79) будут справедливы после замены в них чисел «+1» и «-1», соответственно, на «+5» и «-5», на «+11» и «-11» и т.д., но при условии, что первый член в генах («1») имеет порядковый номер $n = 2$, а второй член в генах («3», «4», ..., «М») имеет порядковый номер $n = 3$. Заменяемые числа представляют собой последовательность $\pm 1, \pm 5, \pm 11, \pm 19, \pm 29, \pm 41$ и т.д., которая формируется путем сложения $1+4=5, 5+6=11, 11+8=19, 19+10=29, 29+12=41$ и т.д., т.к. приращения образуют последовательность 4, 6, 8, 10, 12 и т.д.

Если последовательность приращений представить в аналитической форме $2(m-1)$, где $m = 3, 4, \dots, M$, то выражения (2.76), ..., (2.79) применительно к последовательностям с генами «1,3», «1,4», ..., «1, М» можно преобразовать в следующий обобщенный вид:

$$U_n^2 - U_{n-1}^2 = U_n U_{n-1} \pm \left(1 + \sum_{m=3}^M 2(m-1)\right); \quad (2.80)$$

$$U_{n+1} U_{n-2} = U_n U_{n-1} \pm (1 + \sum_{m=3}^M 2(m-1)), \quad (2.81)$$

где перед скобками «+» соответствует четным порядковым номерам членов последовательностей ($n=2, 4, 6, \dots$), а «-» – нечетным ($n=1, 3, 5, 7, \dots$). Например, для последовательности с геном «1,4» выражения (2.80) и (2.81) преобразовываются в следующий вид:

$$\begin{aligned} U_n^2 - U_{n-1}^2 &= U_n U_{n-1} \pm (1 + \sum_{m=3}^4 2(m-1)) = \\ &= U_n U_{n-1} \pm (1+2(3-1)+2(4-1)) = U_n U_{n-1} \pm (1+4+6) = U_n U_{n-1} \pm 11; \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$U_{n+1} U_{n-2} = U_n U_{n-1} \pm (1 + \sum_{m=3}^4 2(m-1)) = U_n U_{n-1} \pm 11. \quad (2.83)$$

Для последовательности Люка 1, 3, 4, 7, 11, 18, ... с геном «1,3» выражения (2.80) и (2.81) выглядят следующим образом:

$$U_n^2 - U_{n-1}^2 = U_n U_{n-1} \pm 5; \quad (2.84)$$

$$U_{n+1} U_{n-2} = U_n U_{n-1} \pm 5. \quad (2.85)$$

В формулах (2.80) и (2.81) относительно знаков равенства правые части равны между собой. Если приравнять эти формулы, то получим очередное свойство для рекуррентных последовательностей, образованных с помощью выражения (2.1), которое в формальном виде выглядит следующим образом:

$$U_n^2 - U_{n-1}^2 = U_{n+1} U_{n-2}. \quad (2.86)$$

Из выражения (2.86) следует, что для любой усеченной последовательности из четырех чисел, образованной с помощью выражения (2.1), произведение крайних ее чисел равно разности между квадратами большего и меньшего средних чисел.

Для проверки истинности выражения (2.86) левую его часть относительно знака равенства преобразуем с помощью формулы сокращенного умножения в следующий вид:

$$U_n^2 - U_{n-1}^2 = (U_n + U_{n-1})(U_n - U_{n-1}) = U_{n+1} U_{n-2}, \quad (2.87)$$

что и требовалось доказать.

Не менее интересны свойства рекуррентных последовательностей, образуемых с помощью выражения (2.1), отражающие закономерную делимость без остатков чисел этих последовательностей на делители из этих же последовательностей.

В качестве примеров, запишем общие выражения для последовательностей Фибоначчи и Люка:

а) свойство делимости для последовательности Фибоначчи

$$\frac{U_{n-m}}{U_n}, \text{ при } n=3, 4, 5, \dots \text{ и } m=1, 2, 3, \dots; \quad (2.88)$$

б) свойство делимости для последовательности Люка

$$\frac{U_{3n}}{U_n}, \text{ при } n=2, 3, 4, 5, \dots, \quad (2.89)$$

где n – порядковый номер члена, соответственно, для последовательностей Фибоначчи и Люка, а m – текущий индекс, определяющий порядковый номер делимого n числа из последовательности Фибоначчи. Для проверки свойств делимости первые 30 чисел из последовательностей Фибоначчи и Люка приведены в табл. 2.4.

Аналогичным образом как для последовательностей Фибоначчи и Люка могут быть определены свойства делимости для других обобщенных последовательностей Фибоначчи-Люка. Кроме того, если делить любую из последовательностей Фибоначчи-Люка на числа $n = 2, 3, 4, 5, \dots$, то будут образовываться остатки от деления, образующие циклические рекурренты чисел с периодами и наборами чисел, зависящими от выбранного делителя ($n = 2, 3, 4, \dots$). Например, при делении на число «3» любой из последовательностей Фибоначчи-Люка имеет место циклическая рекуррента «0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1», которая применительно к конкретной последовательности может смещаться относительно первого числа в «гене» не более чем на 7 тактов (чисел). В случае деления этих последовательностей на число «2» всегда образуется циклическая рекуррента «0, 1, 1,» так как в каждой из последовательностей Фибоначчи-Люка имеет место чередование одного четного числа с двумя нечетными.

В процессе решения задач с использованием линейных рекурсивных алгоритмов требуется изначальное определение аналитических рекуррентных выражений, позволяющих производить замену нелинейных рекурсивных алгоритмов на последовательность линейных процедур и вычисления отношений между соседними числами вновь формируемых последовательностей для возведения в любую степень «золотой» пропорции.

Для доказательства правомочности подобного умозаключения остановимся на преобразованиях последовательностей Фибоначчи-Люка, приводящих к формированию других последовательностей с соотношениями соседних чисел в пределе их роста, равными членам «золотой» ГП. С этой целью, упустив промежуточные выкладки, приведем выражение для определения требуемого n -го члена $U_n(\Phi^m)$ для любой из обобщенных последовательностей Фибоначчи-Люка, как преобразованной, так и не преобразованной в соответствии с требуемым членом «золотой» ГП Φ^m , где $m = 1, 2, 3, \dots$ - степень, в которую воз-

водится «золотая» пропорция Φ . Это выражение выглядит следующим образом:

$$U_n(\Phi^m) = U_{m(L)} U_{n-1}(\Phi^m) \pm U_{n-2}(\Phi^m), \quad (2.90)$$

где "+" – при $m = 1, 3, 5, \dots$; "-" – при $m = 2, 4, 6, \dots$; $n = 3, 4, 5, \dots$ – порядковый номер определяемого члена последовательности; $U_{m(L)}$ – число из последовательности Люка 1, 3, 4, 7, 11, 29, ... с порядковым номером, соответствующим степени $m = 1, 2, 3, \dots$; (Φ^m) – аргумент функций U_n, U_{n-1}, U_{n-2} ; $U_{n-1}(\Phi^m)$ и $U_{n-2}(\Phi^m)$ – два известных соседних члена формируемой последовательности. Например, используя выражение (2.90) для определения четвертого числа ($n = 4$) в преобразованной последовательности Люка с аргументом $(\Phi^m) = (\Phi^3 = 4,236 \dots)$, получим $U_4(\Phi^3) = U_{3(L)} U_3(\Phi^3) + U_2(\Phi^3) = 4 \cdot 29 + 7 = 116 + 7 = 123$, т. е. последовательность 7, 29, 123 с соотношением $123/29 \approx 29/7 \approx \Phi^3$.

Если преобразовать выражение (2.90) в другой вид и взять пределы, то получим формулу, являющуюся аналогом выражений (2.73), (2.74) и (2.75), т.е.

$$U_{m(L)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n(\Pi^m)}{U_{n-1}(\Pi^m)} \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n-2}(\Pi^m)}{U_{n-1}(\Pi^m)} = \Pi^m \pm \bar{\Pi}^m, \quad (2.91)$$

где « \rightarrow » – при $m = 1, 3, 5, \dots$ и « $+$ » – при $m = 2, 4, 6, \dots$. Например, для $m = 1, \dots, 5$ с помощью выражения (2.91) образуется усеченная последовательность Люка 1, 3, 4, 7, 11, так как $U_{1(L)} = \Pi^1 - \bar{\Pi}^1 = 1$; $U_{2(L)} = \Pi^2 + \bar{\Pi}^2 = 3$; $U_{3(L)} = \Pi^3 - \bar{\Pi}^3 = 4$; $U_{4(L)} = \Pi^4 + \bar{\Pi}^4 = 7$; $U_{5(L)} = \Pi^5 - \bar{\Pi}^5 = 11$.

Таблица 2.4

Первые 30 чисел из последовательностей			
Фибоначчи		Люка	
n	U_n , то есть F_n	n	U_n , то есть L_n
1	1	1	1
2	1	2	3
3	2	3	4
4	3	4	7
5	5	5	11
6	8	6	18
7	13	7	29
8	21	8	47
9	34	9	76

10	55	10	123
11	89	11	199
12	144	12	322
13	233	13	521
14	377	14	843
15	610	15	1364
16	987	16	2207
17	1597	17	3571
18	2584	18	5778
19	4181	19	9349
20	6765	20	15127
21	10946	21	24476
22	17711	22	39603
23	28657	23	64079
24	46368	24	103682
25	75025	25	167761
26	121393	26	271443
27	196418	27	439204
28	317811	28	710647
29	514229	29	1149851
30	832040	30	1860498

Не менее важным прикладным аспектом в процессе решения ряда задач является процедура быстрого нахождения частных сумм в последовательностях, которая применительно к последовательностям Фибоначчи-Люка может быть выражена через простейшую аналитическую формулу:

$$S_n(N, M) = U_{n+2}(N, M) - M, \quad (2.92)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ – порядковый номер частной суммы и индекс чисел из последовательности, (N, M) – аргументы функций в виде первого ($N = 1, 2, 3, \dots$) и второго ($M = 1, 2, 3, \dots$) членов из генов последовательности Фибоначчи-Люка. Так, например, для последовательности Люка с геном « $N = 1, M = 3$ » и $n = 10$ выражение (2.92) преобразуется в следующий вид:

$$S_{10}(1, 3) = U_{12}(1, 3) - 3 = 322 - 3 = 319. \quad (2.93)$$

Если просуммировать первые десять членов последовательности Люка $1 + 3 + 4 + 7 + 11 + 18 + 29 + 47 + 76 + 123$, то получим результат, соответствующий (2.93).

В качестве другого примера, образуем на основе гена « $N = 5, M = 3$ » последовательность Фибоначчи-Люка $5, 3, 8, 11, 19, 30, 49, 79, 128, 207, 335, 542$ с числом членов $n = 12$, а затем с помощью выражения (2.92) определим частную сумму для первых десяти ее членов ($n = 10$):

$$S_{10}(5, 3) = U_{12}(5, 3) - 3 = 542 - 3 = 539. \quad (2.94)$$

Для проверки на соответствие полученного результата в (2.94) действительному значению, осуществим суммирование первых десяти членов рассматриваемой последовательности с геном «5, 3»: $5 + 3 + 8 + 11 + 19 + 30 + 49 + 79 + 128 + 207 = 539$. Полученная контрольная сумма совпала с расчетным значением в (2.94), что еще раз подтверждает справедливость выражения (2.92). Процедура быстрого нахождения частных сумм квадратов чисел для последовательностей Фибоначчи-Люка может быть выражена следующим образом:

$$S_n^{(2)}(N, M) = U_n(N, M) U_{n+1}(N, M) - N(M - N), \quad (2.95)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ – порядковый номер частной суммы и индекс чисел из последовательности, (N, M) – аргументы функций в виде первого ($N = 1, 2, 3, \dots$) и второго ($M = 1, 2, 3, \dots$) членов из генов последовательности Фибоначчи-Люка. Так, для последовательности Люка (табл. 2.4) с геном « $N = 1, M = 3$ » и $n = 10$ выражение (2.95) преобразовывается в следующий вид:

$$S_{10}^{(2)}(1, 3) = U_{10}(1, 3) \cdot U_{11}(1, 3) - 1(3-1) = 123 \cdot 199 - 2 = 24475. \quad (2.96)$$

Если, например, просуммировать первые десять квадратов чисел последовательности Люка ($1^2 + 3^2 + 4^2 + 7^2 + 11^2 + 18^2 + 29^2 + 47^2 + 76^2 + 123^2 = 1 + 9 + 16 + 49 + 121 + 324 + 841 + 2209 + 5776 + 15129 = 24475$), то получим результат соответствующий (2.96), что подтверждает справедливость выражения (2.95).

В процессе анализа и синтеза отдельных элементов телекоммуникационных сетей в качестве математических моделей в последнее время стали находить применение последовательности типа Фибоначчи-Люка [2], которые имеют непосредственную взаимосвязь с «золотой» пропорцией [4]. Следовательно, возникла целесообразность проведения исследований простейших свойств этих последовательностей. Решение подобного рода задачи существенно упростится, в случае, если взять за основу известные простейшие свойства последовательности Фибоначчи [30] с целью возможного их обобщения применительно к последовательностям типа Фибоначчи-Люка, образуемых не только на основе натуральных чисел, а и на основе действительных чисел, что делает полученный математический аппарат более универсальным в использовании. Собственно, переход от натуральных чисел к действительным числам является той разницей между последовательностями Фибоначчи-Люка и последовательностями типа Фибоначчи-Люка [48].

Свойство 2.1. Для суммы первых n чисел последовательности типа Фибоначчи-Люка:

$$\sum_{i=1}^n U_i = U_{n+2} - U_2. \quad (2.97)$$

Свойство 2.2. Для суммы чисел последовательности типа Фибоначчи-Люка с нечетными номерами:

$$U_1 + U_3 + \dots + U_{2n-1} = U_{2n} + U_1 - U_2. \quad (2.98)$$

Свойство 2.3. Для суммы чисел последовательности типа Фибоначчи-Люка с четными номерами:

$$U_2 + U_4 + \dots + U_{2n} = U_{2n+1} - U_1. \quad (2.99)$$

Свойство 2.4. Для суммы квадратов чисел последовательности типа Фибоначчи-Люка:

$$\sum_{i=2}^n U_i^2 = U_n U_{n+1} - U_1 U_2. \quad (2.100)$$

Но из-за чего сохраняется для последовательностей типа Фибоначчи-Люка закономерность (2.59), аналогичная закономерности (2.4) для последовательности Фибоначчи (2.2)? Чтобы ответить на этот вопрос понаблюдаем за динамикой изменения суммы двух предыдущих чисел в соответствии с рекуррентным правилом (2.1), при $n = 3, 4, 5, \dots$, где U_1 и U_2 - первые два действительных числа («ген») из формируемой последовательности типа Фибоначчи-Люка:

$$U_3 = U_2 + U_1 = 1U_2 + 1U_1;$$

$$U_4 = U_3 + U_2 = 2U_2 + 1U_1;$$

$$U_5 = U_4 + U_3 = 3U_2 + 2U_1;$$

$$U_6 = U_5 + U_4 = 5U_2 + 3U_1;$$

$$U_7 = U_6 + U_5 = 8U_2 + 5U_1;$$

$U_8 = U_7 + U_6 = 13U_2 + 8U_1$ и так далее, что равносильно следующей записи:

$$U_n = F_{n-1}U_2 + F_{n-2}U_1, \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (2.101)$$

С учетом (2.101) по аналогии с (2.59), при $i = n$, запишем:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{U_{i,j}}{U_{i-1,j}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F_{i-1}U_2 + F_{i-2}U_1}{F_{i-2}U_2 + F_{i-3}U_1} = 1,618\dots = \Phi. \quad (2.102)$$

Следовательно, оказывается, что в независимости от выбора изначальной пары действительных чисел U_1 и U_2 («гена») всегда в пределе роста числа итераций (при $i \rightarrow \infty$) получается «золотая» пропорция Φ , а степень быстроты

этого приближения зависит от степени взаимного отличия между U_1 и U_2 .
 Так как при $U_1 = U_2 = U$ формула (2.101) упрощается к виду:

$$U_n = F_{n-1}U + F_{n-2}U = U(F_{n-1} + F_{n-2}) = F_n U, n = i = 3, 4, 5, \dots, (2.103)$$

то с учетом этого, по аналогии с (2.59) и (2.102), при $i = n$, запишем:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{U_{i,j}}{U_{i-1,j}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F_i U}{F_{i-1} U} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F_i}{F_{i-1}} = 1,618\dots = \Phi. (2.104)$$

В выражении (2.104) получено классическое отношение двух соседних чисел (2.4) из последовательности Фибоначчи (2.2), которое, как известно из математики, имеет наилучшую скорость приближения к «золотой» пропорции Φ в пределе роста числа итераций (при $i \rightarrow \infty$) [4].

2.1.3. Матричные аналогии в представлении последовательностей типа Фибоначчи-Люка и «золотой» геометрической прогрессии в их взаимосвязи

Последовательности типа Фибоначчи-Люка, как было показано ранее, имеют взаимосвязь с «золотой» пропорцией и «золотой» ГП и по своей степени упрощенности в формализованной записи занимают особое место. Из алгебры известно следующее уравнение для нахождения троек попарно перпендикулярных собственных векторов [49]:

$$a^2 - (a_{11} + a_{22})a + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0, (2.105)$$

где a_{11}, a_{22} и $a_{12} = a_{21}$ – элементы симметричной матрицы

$$A = \left\| a_{ij} \right\|, i, j = \overline{1, 2}, (2.106)$$

с корнями

$$\begin{aligned} a_{1,2}(A) &= \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}}{2} = \\ &= \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4 \det A}}{2}. \end{aligned} (2.107)$$

Из выражения (2.106) видна взаимосвязь между симметричной матрицей с

$a_{12} = a_{21}$ и формулой $U_{n+1}^2 = U_n + U_{n+2}$, так как определитель (детерминант) этой матрицы

$$\det A = a_{12}a_{22} - a_{12}^2, \quad (2.108)$$

что равноценно расположению элементов квадратной матрицы в следующем порядке:

$$A_n = \left\| \begin{array}{cc} a_{11} = U_n & a_{12} = U_{n+1} \\ a_{12} = U_{n+1} & a_{22} = U_{n+2} \end{array} \right\|. \quad (2.109)$$

Так как характеристическое уравнение симметричной матрицы (2.109) имеет только вещественные корни, то в результате исследования возможностей представления трех чисел из множества последовательностей Фибоначчи-Люка в матричной форме, получены доказательства их взаимосвязи с «золотыми» ГП [18]. В тоже время, оказалось, что наиболее ярко выраженную взаимосвязь с «золотой» ГП вида (2.31) имеют последовательности Фибоначчи и Люка [4], поэтому более подробно остановимся на матричной форме представления этих двух последовательностей [18].

2.1.3.1. Матричная форма представления последовательности Фибоначчи

Исходя из общего матричного представления последовательностей Фибоначчи-Люка (2.109) выделим частный случай этого представления применительно к последовательности Фибоначчи:

$$A_{F_n} = \left\| \begin{array}{cc} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{array} \right\|, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (2.110)$$

Для определения детерминанты матрицы (2.110) необходимо использовать выражение:

$$\det A_{F_n} = F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (2.111)$$

Этот детерминант в характеристических уравнениях вида $a^2 \pm pa \pm q = 0$ выполняет роль свободного члена q , так как

$$\begin{aligned}
& a^2 - (F_n + F_{n+2})a + \det A_{F_n} = \\
& = a^2 - (F_n + F_{n+2})a + (F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2) = \\
& = a^2 - (F_n + F_{n+2})a + (-1)^{n+1} = 0,
\end{aligned} \tag{2.112}$$

с корнями

$$\begin{aligned}
a_{1,2}(A_{F_n}) &= \frac{(F_n + F_{n+2}) \pm \sqrt{(F_n + F_{n+2})^2 - 4 \det A_{F_n}}}{2} = \\
&= \frac{(F_n + F_{n+2}) \pm \sqrt{(F_n + F_{n+2})^2 - 4(F_n F_{n+2} + F_{n+1}^2)}}{2} = \\
&= \frac{(F_n + F_{n+2}) \pm \sqrt{(F_n + F_{n+2})^2 - 4(-1)^{n+1}}}{2}.
\end{aligned} \tag{2.113}$$

Если поочередно подставлять тройки чисел из последовательности типа Фибоначчи в выражение (2.113) в направлении возрастания или убывания степени $n = 0, \pm 1, \dots$, то получится взятая по модулю «золотая» ГП

$$\left| \Phi^{\pm(n+1)} \right| \equiv x_{1,2}(A_{F_n}), \tag{2.114}$$

где в обозначении « \pm » в дальнейшем необходимо понимать: когда «+», то все числа Фибоначчи и Люка положительные, а когда «-», то эти числа в последовательностях знаменующиеся.

Например, при $n = 1$, $F_1 = F_2 = 1$ и $F_3 = 2$ (табл. 2.4), используя (2.112) получим матрицу

$$A_{F_1} = \begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \tag{2.115}$$

с детерминантом $\det A_{F_1} = (-1)^2$, который совместно с числами Фибоначчи подставим в формулу (2.113) и получим

$$a_{1,2}(A_{F_1}) = \frac{(1+2) \pm \sqrt{(1+2)^2 - 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \Phi^{\pm 2}, \tag{2.116}$$

где $p = 1 + 2 = 3$ и $q = 1$, что равносильно вычислению $p = a_1 + a_2 = \Phi^2 + \Phi^{-2} = 3$ и $q = a_1 a_2 = \Phi^2 \Phi^{-2} = 1$ с помощью квадратного уравнения

$$a^2 - 3a + 1 = 0. \quad (2.117)$$

Между числами Фибоначчи и Люка существуют взаимные переходы, одним из которых есть

$$F_n + F_{n+2} = L_{n+1}, \quad (2.118)$$

то есть, например, если $F_1 = 1$ и $F_3 = 2$, то $1+2=3=L_2$ (табл. 2.4). Следовательно, с учетом (2.118) формулы (2.112) и (2.113) в более упрощенном виде можно представить следующим образом:

$$a^2 - L_{n+1}a + (-1)^{n+1} = 0; \quad (2.119)$$

$$|\Phi^{\pm(n+1)}| \approx a_{12}(A_{F_n}) = \frac{L_{n+1} \pm \sqrt{L_{n+1}^2 - 4(-1)^{n+1}}}{2}. \quad (2.120)$$

В свою очередь, формула (2.120) может быть упрощена далее, так как

$$\sqrt{L_{n+1}^2 - 4(-1)^{n+1}} = \sqrt{5}F_{n+1}. \quad (2.121)$$

С учетом (2.121) выражение (2.120) преобразуется в следующий вид:

$$|\Phi^{\pm(n+1)}| \approx a_{12}(A_{F_n}) = \frac{L_{n+1} \pm F_{n+1}\sqrt{5}}{2}. \quad (2.122)$$

Если учесть, что

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} (F_{n+1}\sqrt{5}) = L_{n+1}, \quad (2.123)$$

то в случае увеличения порядкового номера числа F_{n+1} из последовательности Фибоначчи и с учетом обеспечения требуемого значения погрешности вычислений, выражение (2.122) в приближенном виде будет следующим:

$$|\Phi^{\pm(n+1)}| \approx a_{12}(A_{F_n}) = \frac{L_{n+1} \pm L_{n+1}}{2}, \quad (2.124)$$

где возможны два граничных состояния. Одно из состояний демонстрирует стремление к нулю, а другое, которое в основном и представляет научно-практический интерес, соответствует числу L_{n+1} из последовательности Люка.

Следует также отметить, что подобного рода исследования ведутся давно и имеют свою историю, одна из версий которой приведена в работе крупнейшего американского специалиста по системному программированию Д.Е. Кнута [50], где прослеживаются следующие мысли и факты:

соотношение

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad (2.125)$$

по смыслу аналогично выражению (2.111), упоминалось астрономом И. Кеплером в одном из писем еще в 1608 году, а впервые опубликовано Ж.Д. Кассини в 1680 году;

первое сообщение о взаимной связи между числами Фибоначчи и алгоритмами относится к 1837 г., когда Э. Лежер применил последовательность Фибоначчи при исследовании эффективности алгоритма Евклида, а в 1844 г. Г. Лямэ подтвердил этот факт [51], из-за чего отдельные ученые вместо названия «последовательность Фибоначчи» используют название «числовой ряд Лямэ» [52];

в 70-х годах 19 века математик Э. Люка провел глубокие исследования свойств последовательности Фибоначчи, дав ей название «числа Фибоначчи»;

формула Бине, аналогом которой у нас является выражение (2.75), на самом деле была впервые получена А. Муавром в 1718 г., а для ее доказательства изначально был использован метод производящих функций, принадлежащий Н. Бернулли (1728 г.);

наряду с методом индукции для доказательства справедливости выражения (2.125) используется матричное тождество

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (2.126)$$

на основе которого, после вычисления детерминантов обеих частей этого равенства, получается (2.125).

2.1.3.2. Матричная форма представления последовательности Люка

Исходя из общего матричного представления последовательностей Фибоначчи-Люка (2.109) по аналогии с последовательностью Фибоначчи выделим частный случай этого представления применительно к последовательности Люка:

$$A_{L_n} = \begin{vmatrix} L_n & L_{n+1} \\ L_{n+1} & L_{n+2} \end{vmatrix}, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (2.127)$$

Для определения детерминанты матрицы (2.127) необходимо использовать

выражение:

$$\det A_{L_n} = L_n L_{n+2} - L_{n+1}^2 = (-5)(-1)^{n+1}, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (2.128)$$

Этот детерминант является свободным членом характеристического уравнения

$$a^2 - (L_n + L_{n+2})a + (-5)(-1)^{n+1} = 0 \quad (2.129)$$

с корнями

$$a_{1,2}(A_{L_n}) = \frac{(L_n + L_{n+2}) \pm \sqrt{(L_n + L_{n+2})^2 - (-20)(-1)^{n+1}}}{2}. \quad (2.130)$$

Подставляя поочередно в формулу (2.130) тройки чисел из последовательности типа Люка в направлении возрастания или убывания степени, $n = 0, \pm 1, \dots$, получим

$$a_{12}(A_{L_n}) \approx \left| \Phi^{\pm(n+1)} \sqrt{5} \right|. \quad (2.131)$$

Например, при $n = 1$, $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ и $L_3 = 4$ (табл. 2.4), используя (2.127) получим матрицу

$$A_{L_1} = \begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_2 & L_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad (2.132)$$

с детерминантом

$$\det A_{L_1} = (-5)(-1)^2 = -5, \quad (2.133)$$

который совместно с числами Люка подставим в формулу (2.130) и получим

$$a_{1,2}(A_{L_1}) = \frac{(1+4) \pm \sqrt{(1+4)^2 - (-20)}}{2} = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}, \quad (2.134)$$

где $p = 1 + 4 = 5$ и $q = 5$, что равносильно вычислению $p = a_1 + a_2 = 5$ и $q = a_1 a_2 = 5$ с помощью квадратного уравнения

$$a^2 - 5a - 5 = 0. \quad (2.135)$$

С учетом наличия еще одного взаимного перехода между числами Фибоначчи и Люка, то есть когда

$$L_n + L_{n+2} = 5F_{n+1}, \quad (2.136)$$

представим формулы (2.129) и (2.130) в упрощенном виде:

$$a^2 - 5F_{n+1}a + (-5)(-1)^{n+1} = 0; \quad (2.137)$$

$$\left| \sqrt{5}\Phi^{\pm(n+1)} \right| \approx a_{1,2}(A_{L_n}) = \frac{5F_{n+1} \pm \sqrt{25F_{n+1}^2 - (-20)(-1)^{n+1}}}{2}. \quad (2.138)$$

В свою очередь, формула (2.138) может быть упрощена далее, так как

$$\sqrt{25F_{n+1}^2 - (-20)(-1)^{n+1}} = \sqrt{5}L_{n+1}. \quad (2.139)$$

С учетом (2.139) выражение (2.138) преобразуется в следующий вид:

$$\left| \Phi^{\pm(n+1)} \sqrt{5} \right| \approx a_{1,2}(A_{L_n}) = \frac{5F_{n+1} \pm L_{n+1} \sqrt{5}}{2}. \quad (2.140)$$

Если учесть, что

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} (L_{n+1} \sqrt{5}) = 5F_{n+1}, \quad (2.141)$$

то в случае увеличения порядкового номера числа L_{n+1} из последовательности Люка и с учетом обеспечения требуемого значения погрешности вычислений, формула (2.140) в приближенном виде будет следующей:

$$\left| \Phi^{\pm(n+1)} \sqrt{5} \right| \approx a_{1,2}(A_{L_n}) \approx \frac{5F_{n+1} \pm 5F_{n+1}}{2} = \frac{5(F_{n+1} \pm F_{n+1})}{2}, \quad (2.142)$$

где возможны два граничных состояния. Одно из состояний демонстрирует стремление к нулю, а другое, которое в основном и представляет научно-практический интерес, соответствует числу $5F_{n+1}$.

При необходимости определения членов «золотой» ГП вида (2.31) формула (2.140) преобразуется к виду

$$\left| \Phi^{\pm(n+1)} \right| \approx \frac{5F_{n+1} \pm L_{n+1} \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}F_{n+1} \pm L_{n+1}}{2}, \quad (2.143)$$

а формула (2.142) к другому виду:

$$\left| \Phi^{\pm(n+1)} \right| \approx \frac{5(F_{n+1} \pm F_{n+1})}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(F_{n+1} \pm F_{n+1})}{2}. \quad (2.144)$$

Из формул (2.143) и (2.144) видно, что при $n \rightarrow \infty$ их расчетные значения приближаются к равенству, следовательно, приравняем правые части этих фор-

мул и после упрощения получим выражение

$$L_{n+1} \approx \sqrt{5}F_{n+1}, \quad (2.145)$$

отражающее приближение к соответствию с (2.141).

2.1.4. Пропорции и последовательности Фибоначчи-Барра

Формирование последовательностей Фибоначчи–Люка предусматривает сложение двух смежных чисел (членов), при $l = 2$. Если увеличивать число этих членов ($l > 2$), то, задавая на старте формируемой последовательности число единиц, равное числу $l \geq 2$ и находя каждое последующее число суммированием по числу предыдущих членов $l \geq 2$, получим бесконечное множество последовательностей в соответствии с рекуррентным выражением [53]:

$$U_n(l) = 2U_{n-1} - U_{n-l-1}; U_1 = \dots = U_l = 1, \quad (2.146)$$

где $U_n(l)$ – есть значение функции U_n , соответствующее значению аргумента $l < n - 1$ (то есть $n > l + 1$), а $l = 2, 3, \dots, L$ – число единиц в начале последовательности и одновременно их сумма.

Приведенные выше ограничения к выражению (2.146) не нашли отражения в научном издании Г.Б. Шишкова [53], тем более это выражение не работает в случае, когда $l = n - 1$ (то есть $n = l + 1$). Для того чтобы формула (2.146) работала в полном объеме необходимо ввести еще одно формализованное условие с целью определения чисел

$$U_{n-l-1} = U_0 = U_{n=l+1}, \quad (2.147)$$

которые могут быть вычислены с помощью следующего выражения:

$$U_{n=l+1} = \sum_{i=1}^n U_i = l; U_i = 1. \quad (2.148)$$

Отношения двух смежных чисел в сформированных последовательностях Фибоначчи-Барра с помощью (2.146) и (2.147), при $n \rightarrow \infty$ в них, могут быть обобщены на основе следующих двух формул ($m = l - 1 = 1, 2, 3, \dots$):

а) для прямых пропорций Фибоначчи-Барра

$$q_m^{m+1} - \sum_{i=1}^m q_m^i - 1 = 0; \quad (2.149)$$

б) для обратных пропорций Фибоначчи-Барра

$$\sum_{i=1}^{m+1} q_m^{-i} - 1 = 0; \quad (2.150)$$

Что касается определения числа слагаемых l , которые необходимо брать для получения следующего члена в последовательностях Фибоначчи-Барра, образующих пропорции Фибоначчи-Барра (2.149), то обобщенная формула для их определения (формула М. Барра) выглядит следующим образом:

$$l = \frac{\log(2-x)^{-1}}{\log x}, \quad (2.151)$$

где x – предел отношения последующего члена возрастающей последовательности к предыдущему. При $l = 2$ получаем первую «золотую» пропорцию $q_1 = 1,618 \dots = \Phi$, при $l = 3$ получаем $1,839 \dots = q_2$ и т.д. Число членов l в выражении (2.151) принимает целочисленные значения $l = 1, 2, 3, \dots, L$ только в тех случаях, когда логарифмируемое выражение в числителе $(2-x)^{-1} = x^l$, то есть когда формула (2.151) преобразовывается в следующий вид:

$$\frac{\log(2-x)^{-1}}{\log x} = \frac{\log x^l}{\log x} = l. \quad (2.152)$$

К сожалению, М. Гарднер в одной из своих работ приводит формулу М. Барра (выражение 2.151) без доказательства [54]. Не зная, каким образом М. Барр получил эту формулу, обоснуем ее самостоятельно, для чего, подвергнем (2.151) следующим преобразованиям:

$$\begin{aligned} \text{а) } \log x^l &= \log(2-x)^{-1}; \\ \text{б) } x^l &= 1/(2-x); \\ \text{в) } x^l(2-x) &= 1; \\ \text{г) } x^{l+1} - 2x^l + 1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.153)$$

Например, при $l = 1$ корни уравнения (2.153) $x_{1,2} = 1$, при $l = 2$ корни $x_1 = 1,618 \dots = \Phi = q_1$ и $x_2 = -0,618 \dots = -\bar{\Phi} = -\bar{q}_1$. Если $l = 3$, то корень $x_1 = 1,839 \dots = q_2$, а для $l = 4$ корень $x_1 = 1,927 \dots = q_3$ и так далее.

Следует отметить, что отдельные результаты исследований, которые Г.Б. Шишков в научной работе [53] выдает за математическую новацию с присвоением ей своего имени («числа Фибоначчи-Шишкова») наряду с именем великого математика Фибоначчи, были опубликованы М. Барром около 80 лет до опубликования работы Г.Б. Шишковым [54].

Исходя из этого, вместо коэффициентов пропорциональности (чисел) и последовательностей Фибоначчи-Шишкова было предложено ввести термины «пропорции Фибоначчи-Барра» и «последовательности Фибоначчи-Барра». Такое предложение, по моему мнению, становится более справедливым и не в обиду Г.Б. Шишкову, так как он не знал, по всей видимости, о существовании подобных результатов исследований и повторил научный путь М. Бара [2, 4, 17].

2.1.5. Пропорции и последовательности Фибоначчи-Пойа

2.1.5.1 Раскрытие математического смысла пропорций и последовательностей Фибоначчи-Пойа

Перед тем как подойти к непосредственному раскрытию математического смысла пропорций Фибоначчи-Пойа (p – «золотых» обобщенных сечений) и последовательностей Фибоначчи-Пойа (последовательностей p – чисел Фибоначчи), в ряде работ обращено внимание на возможность поиска для них инвариантных математических моделей по принципу: «последовательность p – чисел Фибоначчи» – «пропорция – корень уравнения» – «аналитическое выражение» [2, 4, 6]. Эти системные свойства в виде инвариантов математических моделей получены с помощью известного рекуррентного соотношения [35, 36]:

$$U_n(l) = U_{n-1} + U_{n-1-l}; \quad U_1 = \dots = U_l = 1, \quad (2.154)$$

где $U_n(l)$ – есть значение функции U_n , соответствующее значению аргумента $l \leq n - 2$ (то есть $n \geq l + 2$), а $l = 0, 1, 2, 3, \dots, L$. Например, при $l = 0$ формируется классическая ГП вида $2^l: 1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$.

Отношения двух смежных чисел в сформированных последовательностях Фибоначчи-Пойа с помощью выражения (2.154), при $n \rightarrow \infty$ в нем, могут быть обобщены в виде коэффициентов пропорциональности на основе следующих двух формул ($m = l = 0, 1, 2, 3, \dots, L$):

а) для «прямых» p -«золотых» пропорций (сечений)

$$P_m^{m+1} - P_m^m - 1 = 0; \quad (2.155)$$

б) для обратных p -«золотых» пропорций (сечений)

$$P_m^{-(m+1)} + P_m^{-1} - 1 = 0. \quad (2.156)$$

В плане применения данных коэффициентов пропорциональности для решения ряда практических задач точность их может определяться условиями задачи и используемыми вычислительными средствами, что не скажешь о возможностях известных целочисленных методов.

Так, например, для P_7 последовательность p – чисел Фибоначчи приобретает следующий вид: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 14, 18, 23, 29, 36 и т.д. Коэффициент пропорциональности для этой последовательности в прямом отношении определяется как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{U_{n-1}} = 1,232\dots = p_7$, а в обратном отношении – как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n-1}}{U_n} = 0,811\dots = \bar{p}_7$, тогда с помощью (2.155) получим

$$P_7^8 - P_7^7 - 1 = 5,309\dots - 4,309\dots - 1 = 0, \quad \text{а с помощью (2.156) получим}$$

$$\bar{P}_7^8 + \bar{P}_7 - 1 = 0,188\dots + 0,811\dots - 1 = 0.$$

В случае, когда в формулах (2.155) и (2.156) $m = l = 1$, то получим решения в виде классических «золотых» сечений.

2.1.5.2. Прикладные аспекты квадратов суммы и разности членов бинома с учетом их гармоничности сочетаний и взаимосвязи с пропорциями Фибоначчи-Пойа и «металлическими» пропорциями

В процессе решения большинства практических биномиальных (двучленных) задач взвешивания или сравнительной оценки для вещества, энергии и информации, в простейших случаях приходится использовать математические модели в виде формул сокращенного умножения для квадрата суммы и квадрата разности:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2; \quad (2.157)$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2. \quad (2.158)$$

Переход между суммой (2.157) и разностью (2.158) осуществляется после подстановки в (2.157) члена « $-b$ » вместо « b » и последующих преобразований.

Учитывая, что при перестановке слагаемых их сумма не меняется, а на практике этот закон не всегда применим, то довольно часто приходится заниматься сортировкой и ранжированием слагаемых, т. к. каждое из них имеет определенное физическое или качественное различие и определенный вес в рамках исследуемой целостной системы. Следовательно, для количественной оценки вклада каждого элемента (слагаемого) в поддержание (сохранение) целостности системы или в разрушение этой целостности, а также для учета закона развития, целесообразно осуществить ранжирование элементов с введением количественных мер или весовых коэффициентов. Применительно к биномам, которые используются в качестве моделей для взаимодействующих бинарных цепей, с целью сохранения физического смысла решаемых практических задач следует обозначить элемент с большим положительным весовым коэффициентом через

« a », а с меньшим – через « b », где состоянием равнозначности между ними будет следующее условие:

$$a=b; \quad 0 < a < \infty. \quad (2.159)$$

Дальнейшее упрощение биномов (2.157) и (2.158) производится следующим образом:

$$(a+b)^2 = (a(1+b/a))^2 = a^2(1+b/a)^2 = a^2(1+x)^2; \quad (2.160)$$

$$(a-b)^2 = (a(1-b/a))^2 = a^2(1-b/a)^2 = a^2(1-x)^2. \quad (2.161)$$

где a^2 – коэффициент масштабирования, а $b/a=x$ – относительный весовой коэффициент.

Относительный весовой коэффициент имеет верхнюю границу $x_в=1$ в условии равнозначности (2.159) и нижнюю границу $x_н=0$, при $a \gg b$.

Работая с вероятностными моделями или с процентными соотношениями, чаще всего, приходится ограничиваться шкалой $0 \div 1,0$ и (или) $0 \div 100\%$. Причем, для бинарных систем достаточно определить вероятность одного из двух состояний, например q , а затем определить вероятность другого состояния p , как разность

$$1 - q = p. \quad (2.162)$$

Условием равнозначности для выражения (2.162) есть

$$p = q = 1/2 = 0,5, \quad (2.163)$$

а это значит, что при решении ряда практических задач достаточно строить математическую модель состояний с выполнением условий

$$0 \leq p \leq 1/2, \quad (2.164)$$

$$0 \leq q \leq 1/2, \quad (2.165)$$

а затем, используя формулу (2.162), соответственно, вычислять

$$1/2 \leq q \leq 1 \text{ или } 1/2 \leq p \leq 1. \quad (2.166)$$

Анализ формулы (2.161) позволяет отыскать ее структурную взаимосвязь с формулой (2.162). Если в (2.161) под a подразумевать целостность бинарной системы (\mathcal{C}), а под b – ее меньшую часть (m – минор), то большая часть (M – мажор) определяется как

$$M = \mathcal{C} - m. \quad (2.167)$$

Преобразуем выражение (2.161) к следующему виду:

$$(\mathcal{C} - m)^2 = \mathcal{C}^2(1 - m/\mathcal{C})^2 = \mathcal{C}^2(1 - q)^2 = \mathcal{C}^2 p^2, \quad (2.168)$$

где \mathcal{C}^2 – коэффициент масштабирования и $m/\mathcal{C} = q$ – относительный весовой коэффициент, находящийся в пределах (2.166).

Из физики известно, что наибольшей чувствительностью («гармоничностью») колебательная (резонансная) система обладает в случае выполнения следующего среднегеометрического условия:

$$f_0 = (f_n \cdot f_b)^{1/2} \text{ кГц}, \quad (2.169)$$

где f_0 , f_n и f_b , соответственно, резонансная, нижняя и верхняя частоты.

Из современной математики известно [55], что под «золотым» делением (сечением) отрезка необходимо понимать такое его деление на две части, чтобы большая из них (M – мажор) была среднегеометрической между меньшей частью (m – минор) и длиной целого (всего) отрезка ($M + m = \Pi$):

$$M = (m \cdot \Pi)^{1/2}, \quad (2.170)$$

где с позиции теории резонанса $M = f_b - f_0 = \Delta f_b$, $m = f_0 - f_n = \Delta f_n$ и $\Pi = f_b - f_n = \Delta f$, соответственно, верхняя, нижняя и общая полосы пропускания резонансной системы.

Если в левую часть выражения (2.167) подставить формулу (2.170) и обе части этого равенства возвести в квадрат, то получим

$$(\Pi - m)^2 = \Pi \cdot m. \quad (2.171)$$

Так как левые части в (2.168) и (2.171) равны, то составим на их основе равенство и после преобразований получим уравнение

$$m^2 - 3\Pi m + \Pi^2 = 0 \quad (2.172)$$

с корнями:

$$m_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \cdot \Pi = 2,618... \Pi = \Phi^2 \cdot \Pi; \quad (2.173)$$

$$m_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot \Pi = 0,381... \Pi = \overline{\Phi}^2 \cdot \Pi. \quad (2.174)$$

Иногда уравнение (2.171) встречается в следующей записи:

$$\frac{m}{\Pi - m} = \frac{\Pi - m}{\Pi} = 0,618... = \overline{\Phi}. \quad (2.175)$$

Если разделить отрезок ($M+m$) на его большую часть (M), а затем эту большую часть разделить на меньшую часть (m), но с соблюдением равенства между отношениями, то получим «золотую» пропорцию:

$$\frac{M + m}{M} = \frac{M}{m} = 1,618... = \Phi, \quad (2.176)$$

так как уравнение

$$M^2 - mM - m^2 = 0 \quad (2.177)$$

имеет «золотые» корни:

$$M_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} m = 1,618... m = \Phi \cdot m; \quad (2.178)$$

$$M_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}m = -0,618...m = -\bar{\Phi} \cdot m; \quad (2.179)$$

$$m_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}M = -1,618...M = -\Phi \cdot M; \quad (2.180)$$

$$m_4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}M = 0,618...M = \bar{\Phi} \cdot M. \quad (2.181)$$

В случае, когда в формулах (2.172), (2.174) и (2.175) целая часть $\zeta=1$, то будем иметь классическое деление в точке K отрезка AB в крайнем и среднем отношении (рис. 2.1), где большая часть этого отрезка

$$M_2 = \zeta - m_2 = 1 - \bar{\Phi}^2 = 0,618... = \bar{\Phi}. \quad (2.182)$$

Кривые линии DB и DK на рис. 2.1 – это дуги, проведенные, соответственно, из центров C и A . Следовательно, «золотое» или «гармоничное» деление (сечение) может быть выражено через пропорцию:

$$\frac{1}{M_2} = \frac{M_2}{m_2} = 1,618... = \Phi. \quad (2.183)$$

По аналогии с моделью гармоничного соотношения частей бинома в бинарной системе (2.171), при $\zeta=1$, гармоничность частей для биномов с произвольной натуральной степенью может быть определена в строгом соответствии со значением этой степени. Следовательно, если в бинарной системе условием гармоничного соотношения отрезков на рис. 2.1 является

$$m_2 = M_2^2 = (1 - m_2)^2, \quad (2.184)$$

то для биномов с произвольной натуральной степенью $n=1, \dots, N$ должно выполняться следующее обобщающее правило:

$$m_n = M_n^n = (1 - m_n)^n. \quad (2.185)$$

Например, для бинома с $n = 3$ (в кубе) выражение (2.185) примет следующий вид:

$$m_3 = M_3^3 = (1 - m_3)^3. \quad (2.186)$$

Условие (2.185) выполняется в единственном случае, когда M_n соответствуют значениям обратных p -«золотых» сечений (2.156), т.е. когда

$$M_n = \bar{P}_p = \bar{P}_n, \quad (2.187)$$

где $n = p+1, p = 0, 1, 2, \dots, \infty$ (табл. 2.5).

Кроме исследуемой гармонической закономерности (2.185) имеет место еще одно из математических свойств, которое выглядит следующим образом:

$$M_n = \bar{P}_n = \left(\frac{m_n}{M_n} \right)^{1/p} = \left(\frac{m_n}{M_n} \right)^{1/(n-1)}. \quad (2.188)$$

Произведем биномиальное разложение правой части в формуле (2.185), например, для $n = 1, 2, 3, 4$, и $m_1 = 0,5$, $m_2 = 0,381\dots = \bar{\Phi}^2$, $m_3 = 0,317\dots$ и $m_4 = 0,275\dots$ (табл. 2.5):

$$(1 - m_1)^1 = 1 - m_1 = 1 - 1/2 = 1/2 = m_1;$$

$$(1 - m_2)^2 = 1 - 2m_2 + m_2^2 = 1 - 2\bar{\Phi}^2 + \bar{\Phi}^4 = 0,381\dots = \bar{\Phi}^2 = m_2;$$

$$(1 - m_3)^3 = 1 - 3m_3 + 3m_3^2 - m_3^3 = 0,317\dots = m_3;$$

$$(1 - m_4)^4 = 1 - 4m_4 + 6m_4^2 - 4m_4^3 + m_4^4 = 0,275\dots = m_4 \text{ и т.д.}$$

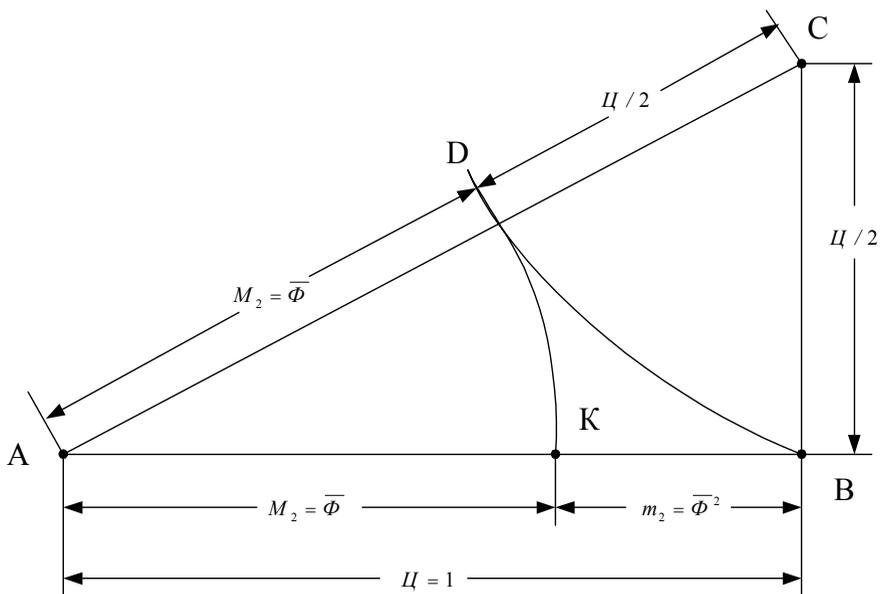


Рис. 2.1

Из разложения видно, что по мере увеличения степени для гармоничных биномов возрастает сложность вычисления значений m_n . Учитывая, что

$$m_n = 1 - M_n, \quad (2.189)$$

где M_n – обратные p -«золотые» пропорции (сечения), определяемые с помощью простейших аналитических выражений (2.156). Следовательно, снижение

значения меньшей части m_n гармоничного бинома (2.185) по мере увеличения степени $n = 1, \dots, N$ происходит по закону обратных p -«золотых» пропорций в n -степени ($\bar{P}_n^n = M_n^n$), а увеличение большей части M_n – также по этому закону, но в $1/n$ -степени, т. к. $M_n = 1 - m_n = m_n^{1/n}$.

В большинстве решаемых задач по упрощению математических моделей стараются представить объекты исследования в целостном (единичном) виде (т. е. $\Pi=1$), но иногда встречаются задачи, когда $\Pi_i=2, \dots, N$ и формула (2.185) становится частным случаем следующего обобщающего выражения для описания гармоничного соотношения частей бинома в бинарной системе:

$$\left(1 - \frac{m_n}{\Pi_i}\right)^n - \frac{m_n}{\Pi_i^n} = 0. \quad (2.190)$$

Таблица 2.5

p	n	$M_n = \bar{P}_k$	$m_n = M_n^n$	$M_n + m_n$	Аналитические выражения для расчета M_n	$m_n = 1/M_n^n$
0	1	0,5	0,5	1,0	$M_1^1 + M_1 - 1 = 0$	2,0
1	2	0,618... $=\bar{\Phi}$	0,381... $=\bar{\Phi}^2$	1,0	$M_2^2 + M_2 - 1 = 0$	1,618 $\approx\bar{\Phi}$
2	3	0,682...	0,317	1,0	$M_3^3 + M_3 - 1 = 0$	$\approx 1,465$
3	4	0,724...	0,275	1,0	$M_4^4 + M_4 - 1 = 0$	$\approx 1,380$
...
∞	∞	1,0	0	1,0	$M_\infty^\infty + M_\infty - 1 = 0$	1,0

Так как обратные p -«золотые» пропорции в природных процессах и системах в явном виде не проявляются (при $n = p+1 > 2$), а в основных законах физики чаще всего встречается степень $n = 2$ и реже $n = 3$, то главное внимание уделим случаям, когда в уравнении (2.190) $n = 1$ и 2 , при $\Pi_i=1, \dots, N$. Тогда при $n = 1$ уравнение (2.190) принимает следующий вид:

$$m_1 = \Pi_i / 2. \quad (2.191)$$

С помощью формулы (2.191) формируется некая равномерная шкала (сетка) отсчета [4, 6]:

$$0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; \dots; N/2. \quad (2.192)$$

Эта шкала сопоставима с прямолинейной разверткой (1-мерное пространство).

Для 2-мерного пространства справедливо уравнение

$$\left(1 - \frac{m_2}{\Pi_i}\right)^2 - \frac{m_2}{\Pi_2^2} = 0, \quad (2.193)$$

преобразуемое в

$$m_2^2 - (2\Pi_i + 1)m_2 + \Pi_i^2 = 0 \quad (2.194)$$

с корнями

$$m_{2(1,2)} = \frac{2\Pi_i + 1 \pm (1 + 4\Pi_i)^{1/2}}{2}. \quad (2.195)$$

В табл. 2.6 приведены результаты расчетов с помощью формулы (2.195), при $\Pi_i=1, \dots, 5$, где проявляется взаимосвязь этих корней $m_{2(1,2)}$ уравнения (2.194) с "металлическими" пропорциями [2, 4, 6].

В приведенных квадратных уравнениях (табл. 2.6) вторые коэффициенты представлены в виде последовательности нечетных целых чисел ($p_i = 3, 5, 7, 9, 11, \dots$), начинающейся с числа 3, а свободные члены ($q_i = 1, 4, 9, 16, 25, \dots$) формируются с помощью следующего рекуррентного выражения:

$$q_{i+1} = q_i + p_i, \quad (2.196)$$

где $i = 1, 2, 3, \dots$ – порядковый номер, откуда $p_i = q_{i+1} - q_i$.

Базовым, из приведенных квадратных уравнений в табл. 2.6, есть уравнение, полученное на основе (2.194) при $\Pi_1=1$. Корни этого уравнения соответствуют квадрату «золотой» пропорции ($m_{2(1)} = \Phi^2$) и его обратному значению ($m_{2(2)} = \overline{\Phi}^2$).

Если обозначить первые корни в (2.195) через $m_{2(1)} = x^2$, где $x = (m_{2(1)})^{1/2}$, то для вычисления «металлических» пропорций будет справедливо уравнение

$$x^2 - x - \Pi_i = 0 \quad (2.197)$$

с корнями

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm (1 + 4\Pi_i)^{1/2}}{2}. \quad (2.198)$$

Произведенное ранее биномиальное разложение правой части в формуле (2.185) позволило получить однозначный набор биномиальных коэффициентов в каноническом представлении $(x+y)^n$ через формулу бинома Ньютона.

Образуемый на основе биномиальных коэффициентов арифметический треугольник чисел (треугольник Паскаля) в каждой строке имеет количество

коэффициентов, а значит, и членов биномиального разложения, всего на один больше от натуральной степени бинома.

Будучи симметричным, при переходе к очередной строке, классический треугольник Паскаля (Δ_0 -Паскаля) имеет сумму чисел S_0^n в n -строке равной 2^n , т. е.

$$S_0^n = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.199)$$

что равнозначно формированию последовательности p -чисел Фибоначчи (1, 2, 4, 8, ...) при $p = 0$, и образованию p -«золотой» пропорции вида $P_0=2,0$, которая одновременно является «серебряной» пропорцией $S = 2,0$ [2, 4, 6].

Классический Δ_0 -Паскаля (табл. 2.7), где Δ_0 – нулевой (изначальный) треугольник, обладает большим числом интереснейших математических свойств, которые нашли практическую реализацию в комбинаторике, решении задач вероятностного характера, построении вычислительной техники и в теории кодирования на основе классической двоичной системы счисления.

Таблица 2.6

C_i	Вид уравнения (2.194)	Значения корней (2.195)	Взаимосвязь корней (2.195) с «металлическими» пропорциями
$C_1=1$	$m_2^2 - 3m_2 + 1 = 0$	$m_{2(1)} = 2,6180\dots;$ $m_{2(2)} = 0,3819\dots$	С «золотой» ($\Phi=1,618\dots$): $m_{2(1)} = \Phi^2 = \Phi + 1; m_{2(2)} = (\Phi - 1)^2$
$C_2=2$	$m_2^2 - 5m_2 + 4 = 0$	$m_{2(1)} = 4,0;$ $m_{2(2)} = 1,0$	С «серебряной» ($S=2,0$): $m_{2(1)} = S^2 = S + 2; m_{2(2)} = (S - 1)^2$
$C_3=3$	$m_2^2 - 7m_2 + 9 = 0$	$m_{2(1)} = 5,3027\dots;$ $m_{2(2)} = 1,6972\dots$	С «бронзовой» ($B=2,302\dots$): $m_{2(1)} = B^2 = B + 3; m_{2(2)} = (B - 1)^2$
$C_4=4$	$m_2^2 - 9m_2 + 16 = 0$	$m_{2(1)} = 6,5615\dots;$ $m_{2(2)} = 2,4384\dots$	С «никелевой» ($N=2,561\dots$): $m_{2(1)} = N^2 = N + 4; m_{2(2)} = (N - 1)^2$
$C_5=5$	$m_2^2 - 11m_2 + 25 = 0$	$m_{2(1)} = 7,7912\dots;$ $m_{2(2)} = 3,2087\dots$	С «медной» ($M=2,791\dots$): $m_{2(1)} = M^2 = M + 5; m_{2(2)} = (M - 1)^2$

В математике коэффициенты биномиального разложения чаще всего обозначают символом C_n^k , т. е. как число сочетаний из n элементов по k , где k – номер колонки и n – номер строки (n – степень бинома) в Δ_0 -Паскаля.

Оказывается, в каждой колонке арифметического треугольника имеют место закономерные последовательности: из единиц – при $k = 0$; натуральный ряд – при $k = 1$; треугольных чисел – при $k = 2$; тетраэдрических чисел – при $k = 3$, и т. д. [56].

Еще в XIX веке была обнаружена взаимосвязь арифметического треугольника с классической последовательностью Фибоначчи [57]. Для демонстрации этой взаимосвязи необходимо сместить относительно предыдущих строк все строки Δ_0 -Паскаля (табл. 2.7) на один столбец вправо, в результате чего получим другой вариант распределения биномиальных коэффициентов (Δ_1 -Паскаля), т.е. первый вариант перераспределения чисел в классическом арифметическом треугольнике (табл. 2.8). Другими словами, нами получена последовательность p -чисел Фибоначчи (1, 1, 2, 3, 5, ...), при $p = 1$, с возможностью образования p -«золотой» пропорции вида $P_0 = 1,618... = \Phi$. В общем случае, смещение всех строк Δ_0 -Паскаля (табл. 2.7) относительно предыдущих строк на p столбцов вправо приводит к образованию Δ_p -Паскаля, в котором сумма биномиальных коэффициентов для каждой n -строки равна n -му числу из последовательности p -чисел Фибоначчи [36].

Более подробно о взаимосвязях p -чисел Фибоначчи с p -треугольниками (Δ_p) Паскаля, а также о практической реализации их свойств, при построении кодов «золотой» пропорции и создании алгоритмической теории измерения можно узнать из научных публикаций А.П. Стахова [35,36,43].

Таблица 2.7

№ строки	Номера колонок, $k = 0, \dots, 10$											Сумма (S_0^n)	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
0	1												$1=2^0$
1	1	1											$2=2^1$
2	1	2	1										$4=2^2$
3	1	3	3	1									$8=2^3$
4	1	4	6	4	1								$16=2^4$
5	1	5	10	10	5	1							$32=2^5$
6	1	6	15	20	15	6	1						$64=2^6$
7	1	7	21	35	35	21	7	1					$128=2^7$
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1				$256=2^8$
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			$512=2^9$
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		$1024=2^{10}$

Таблица 2.8

№ строки	Номера колонок, $k = 0, \dots, 6$							Сумма (S_1^n)
	0	1	2	3	4	5	6	
0	1							1
1	1							1
2	1	1						2
3	1	2						3
4	1	3	1					5
5	1	4	3					8
6	1	5	6	1				13
7	1	6	10	4				21
8	1	7	15	10	1			34
9	1	8	21	20	5			55
10	1	9	28	35	15	1		89
11	1	10	36	56	35	6		144
12	1	11	45	84	70	21	1	233

«Золотая» пропорция в n -степени имеет также взаимосвязь с Δ_0 -Паскаля и легко унифицируема. Например, любое вещественное число может быть выражено через «золотую» пропорцию бесконечным числом способов из-за наличия взаимосвязи с классическим треугольником Паскаля, а само выражение справедливо для любой степени, включая отрицательную и дробную [58]:

$$\Phi^n = 1\Phi^n;$$

$$\Phi^n = 1\Phi^{n-1} + 1\Phi^{n-2};$$

$$\Phi^n = 1\Phi^{n-2} + 2\Phi^{n-3} + 1\Phi^{n-4};$$

$$\Phi^n = 1\Phi^{n-3} + 3\Phi^{n-4} + 3\Phi^{n-5} + 1\Phi^{n-6} \text{ и т.д.} \quad (2.200)$$

Закон Гаусса (нормальный закон), приближенно описываемый Δ_0 -Паскаля, доказан математически в предположении наличия бесконечного числа бесконечно малых независимых воздействий и, как видно из (2.200), гармонирует с «золотой» пропорцией в n -степени. Следовательно, по аналогии с нормальным законом распределения, описываемым Δ_0 -Паскаля, можно создать множество эталонных законов распределения, описываемых Δ_p -Паскаля, при $p = 1, \dots, N$.

2.1.5.3. Обобщение пропорций Фибоначчи-Пойа с учетом числа слагаемых и интервалов между ними

Для формализованного учета интервалов между двумя слагаемыми числами в последовательностях, образующих «прямые» p -«золотые» пропорции, воспользуемся выражением (2.155), которое подвергнем следующим преобразованиям:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } & x^{m+1} - x^m - 1 = 0, \text{ при } P_m = x; \\
 \text{б) } & x^m (x - 1) = 1; \\
 \text{в) } & x^m = 1/(x - 1); \\
 \text{г) } & \log x^m = \log(x - 1)^{-1}; \\
 \text{д) } & m \log x^m = \log(x - 1)^{-1}; \\
 \text{е) } & m = \frac{\log(x - 1)^{-1}}{\log x}, \tag{2.201}
 \end{aligned}$$

где m – число членов усеченной последовательности, сумма крайних из которой определяет значение последующего члена, т.е. интервал t между двумя слагаемыми будет на одно число меньше, чем m членов ($t = m - 1$), а x – предел отношения последующего члена возрастающей последовательности к предыдущему.

При $m = 1$ получаем первую «золотую» пропорцию $p_1 = 1,618\dots = \Phi$ и нулевой интервал ($t_1 = m - 1 = 1 - 1 = 0$), т. к. суммируются два соседних числа. В случае, когда $m = 2$, получаем вторую «золотую» пропорцию $1,465\dots = p_2$ с интервалом между двумя суммируемыми числами $t_2 = m - 1 = 2 - 1 = 1$ и т.д.

Число m членов в выражении (2.201) принимает целочисленные значения $m = 1, 2, 3, \dots, M$ только в тех случаях, когда логарифмируемое выражение в числителе $(x - 1)^{-1} = x^m$, т.е. когда формула (2.201) преобразовывается в следующий вид:

$$\frac{\log(x - 1)^{-1}}{\log x} = \frac{\log x^m}{\log x} = m, \tag{2.202}$$

где $m = 1, 2, 3, \dots, M$.

Что касается формулы (2.156), образующей обратные p -«золотые» пропорции, то она может быть преобразована по аналогии с алгоритмом для выражения (2.201) в следующий вид:

$$m = \frac{\log(1 - x)}{\log x} - 1, \tag{2.203}$$

где m – число членов усеченной последовательности, сумма крайних из которой определяет значение последующего члена, т.е. интервал t между двумя слагаемыми будет меньшим на одно число, чем m членов ($t = m - 1$), а x – предел отношения предыдущего члена последовательности к последующему.

При $m = 1$ получаем первую обратную «золотую» пропорцию $\bar{p}_1 = 0,618\dots = 1/\Phi = \bar{\Pi}$ и нулевой интервал ($t_1 = m - 1 = 1 - 1 = 0$), т. к. суммируется два соседних числа. В случае, когда $m = 2$, получаем вторую обратную «золотую» пропорцию $0,682\dots = \bar{p}_2$ с интервалом между двумя суммируемыми числами $t_2 = m - 1 = 2 - 1 = 2 - 1 = 1$ и т.д.

2.1.5.4. Раскрытие физического смысла пропорций Фибоначчи-Пойа на примере моделирования равнонадежных состояний для физических систем исходя из теоремы Мура и Шеннона

При моделировании надежных технических систем из менее надежных элементов (по Дж. Нейману) очень важным условием для уменьшения вычислительной сложности решаемой задачи является нахождение равнонадежных состояний между отдельными однотипными элементами и всей системой в целом. Оказалось, что методом аналогий Муру и Шеннону удалось модифицировать разработки в области теории надежности Дж. Неймана, перенеся их на анализ и синтез релейных систем. Однако ни один из исследователей проблем в теории надежности не провел в достаточной мере исследование граничных равнонадежных состояний для построения надежных систем из менее надежных элементов.

Так как теорема Мура и Шеннона определяет характер зависимости функции надежности (замкнутости) сети $h_n(p)$, где $n = 2, \dots$, от вероятности замкнутости одного из элементов p , при условии $h_n(p) \neq p$ и $h_n(p) = p'_n$ для некоторого $0 < p'_n < 1$, когда $h_n(p) < p$ для $0 \leq p < p'_n$ и $h_n(p) > p$ для $p'_n < p \leq 1$, то следует обратить внимание на возможность конкретизации состояний $h_n(p) = p'_n$. Эти состояния отражают равнонадежность между отдельными однотипными элементами и самой сетью, а получаемая для каждой n -й схемы (звена) S -образная кривая $h_n(p)$ на интервале $0 \leq p \leq 1$ пересекает снизу вверх прямую линию $h_n(p) = p$ единственный раз. Точка пересечения S -образной кривой и прямой линии (Ah) соответствует равнонадежному состоянию $h_n(p) = p'_n$, начиная с $h_2(p) = p'_2$, то есть с простейшего последовательно-параллельного соединения однотипных элементов (рис. 2.2).

Используя общеизвестное свойство функции $h_n(p)$ [59] определим для схемы на рис. 2.2 функцию надежности (рис. 2.3):

$$h_2(p) = p'_2 = (1 - (1 - p'_2)^2)^2 = 0,3819... = \Phi^{-2}. \quad (2.204)$$

Решение ряда практических задач сводится к минимизации длин параллельных структур с однородными равнонадежными элементами путем нахождения наибольших начальных значений P для однотипных n -звеньев в структуре системы, где базовым в методике является следующее условие [59,60]:

$$P \leq 1 - q^n = 1 - (1 - p)^n. \quad (2.205)$$

Из выражения (2.205) видно, что необходимым, но недостаточным условием равнонадежности между отдельными элементами может быть его рассмотрение в виде равенства

$$P_n = 1 - q_n^n = 1 - (1 - p'_n)^n, \quad (2.206)$$

решением которого будет p'_n , в интервале

$$0 < p'_n < 1. \quad (2.207)$$

В обобщенном случае представления функции $h_n(p)$ с учетом выполнения условий теоремы Мура и Шеннона [59] для последовательно-параллельных структур, состоящих из однородных n -звеньев, получим следующую формулу:

$$h_n(p) = p'_n = (1 - (1 - p'_n)^n)^n. \quad (2.208)$$

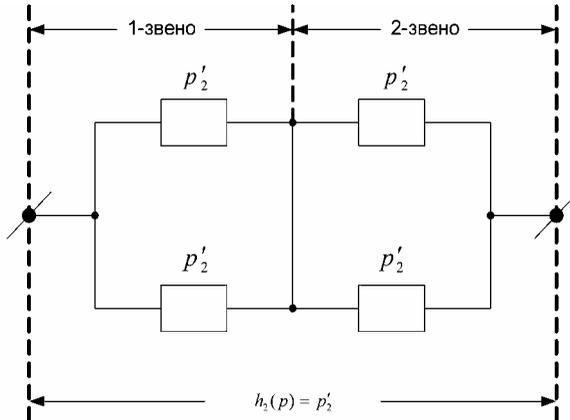


Рис. 2.2

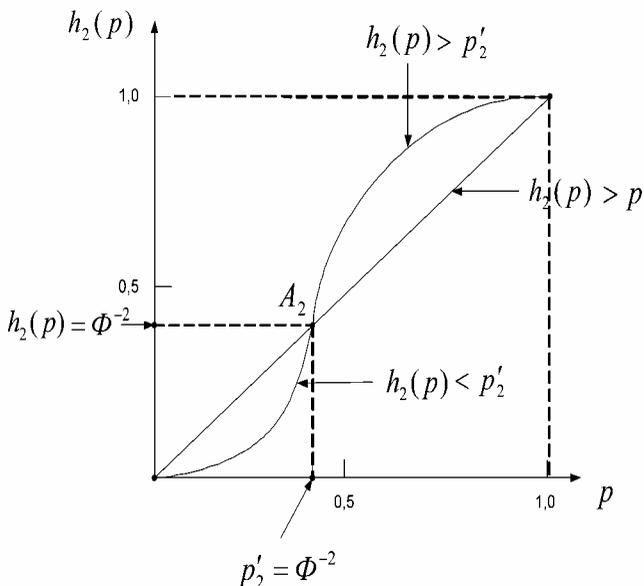


Рис. 2.3

Например, если в (2.208) подставить $n = 2$, то получим выражение (2.204) для 2-звенной последовательно-параллельной структуры на рис.2.2 с иллюстрацией функции $h_2(p) = p'_2$ на рис.2.3. При $n = 3$ получим формулу

$$h_3(p) = p'_3 = (1 - (1 - p'_3)^3)^3, \quad (2.209)$$

характеризующую равнонадежное состояние между однородными элементами последовательно-параллельной структуры из 3-х звеньев и всей системой в целом и т. д. Так, решением уравнения (2.209) будет

$$h_3(p) = p'_3 = 0,317... = 1 - 0,682... = 1 - \bar{p}_2 = \bar{p}_2^3, \quad (2.210)$$

т.е. обратная 2-«золотая» пропорция [2,4,6] в третьей степени, а решениями обобщенного выражения (2.95) будут обратные p -«золотые» пропорции [2,4,6], что равносильно следующей записи:

$$h_n(p) = p'_n = (1 - (1 - p'_n)^n)^n = 1 - \bar{p}_{n-1} = \bar{p}_{n-1}^n, \quad n = 2, \dots \quad (2.211)$$

При резервировании элементов с двумя видами отказов («обрыв» и «замыкание») наихудшим случаем считается их равновероятность с коэффициентом $\nu = 1$, для которого функция распределения отказов будет принимать критическое значение $Q(t) = Q_{крит}$, при превышении которого элементарную резервированную ячейку (элемент) применять нерационально, т. к. ее (его) вероятность

отказа $Q_{эл}$ будет больше чем вероятность отказа всей системы [61]. В данном случае

$$Q(t) = Q_{крит} = Q_{эл} = 0,3819... = \Phi^{-2}. \quad (2.212)$$

В других двух граничных случаях, при возможности «обрыва» или «замыкания» (т.е. когда $v = 0$), взаимосвязь $Q(t)$ с «золотой» пропорцией сохраняется, так как

$$Q(t) = Q'_{крит} = Q'_{эл} = 0,618... = \Phi^{-1}. \quad (2.213)$$

Приведенные выше результаты исследований для систем из физических элементов распространяются и на логические элементы. Так, Дж. Нейман доказал, что «... путем использования ненадежных логических элементов типа штрих Шеффера можно построить новый элемент, принцип функционирования которого не изменяется, а надежность в тоже время может достигать любой наперед заданной величины» [59]. Методом аналогии Э. Мур и К. Шеннон перенесли идею Дж. Неймана для анализа релейных схем, доказав наличие S-образной зависимости между надежностями отдельного реле и всей однородной релейной системы, что позволило выразить эти граничные значения по равнонадежности через обратные p -«золотые» пропорции в 1-ой степени с помощью формулы (2.211).

Функционирование логических электронных схем (систем) характеризуется не только отказами вида «обрыв» или «короткое замыкание», которые приводят к исчезновению сигналов на их выходах, но и неисправностями в виде ложных выходных сигналов, численно выражаемых через вероятность неправильного срабатывания параллельной цепи конкретной системы. Эта вероятность цепи должна быть равна вероятности неправильного срабатывания эквивалентной для нее одинарной системы с учетом отсутствия повышения надежности при соблюдении принципа дублирования логических элементов (звеньев), например, для штриха Шеффера (рис.2.4) [62].

Пример решения данной проблемы, базирующийся на метод сложных сочетаний Неймана, приведен в работе [63], где для исключения ложных срабатываний системы вводится основная схема восстанавливающего логического устройства, приведенная на рис. 2.5 и работающая по следующему алгоритму:

каждая n -линия (исходная линия) выходной параллельной связки в исполнительном устройстве, которое физически выполняет операцию по схеме Шеффера во всей системе, расчленяется на $2n$ -линии;

$2n$ -линии перемешиваются в схеме перемешивания по закону случайных чисел, которые генерируются с помощью генератора случайных или псевдослучайных чисел (ГПСЧ);

объединяем попарно случайно полученные $2n$ -линии, в n -линии с помощью штрихов Шеффера.

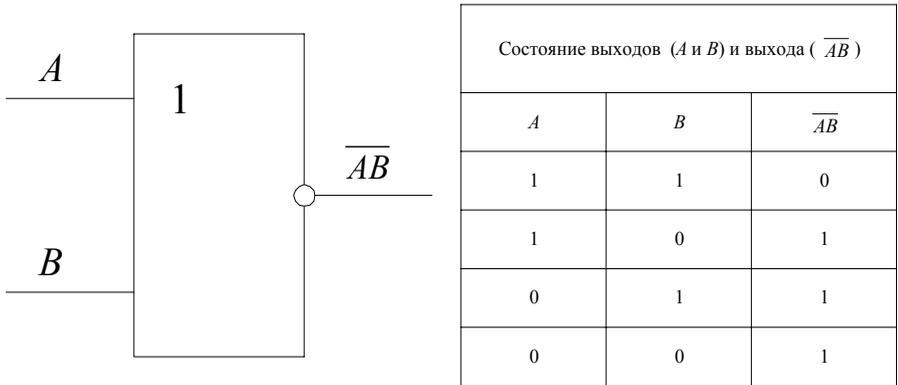


Рис. 2.4

Если с помощью α_0 обозначить вероятность возбуждения исходных линий в n -связке, то число не возбужденных выходных линий равно α_0^2 . Следовательно, как показано в [63], вероятность возбуждения перемешанных линий можно определить с помощью формулы:

$$\alpha_1 = 1 - \alpha_0^2. \quad (2.214)$$

Но так как восстанавливающее устройство состоит из двух последовательно соединенных основных схем (рис.2.5), то вероятность α_2 возбуждения линий на его выходе выражается равенством [63]:

$$\alpha_2 = 1 - \alpha_1^2 = 1 - (1 - \alpha_0^2)^2 = 2\alpha_0^2 - \alpha_0^4, \quad (2.215)$$

откуда, при $\alpha_2 = \alpha_0$, получим

$$\alpha_0^4 - 2\alpha_0^2 + \alpha_0 = 0, \quad (2.216)$$

с корнем $0 < \alpha_0 < 1,0$, равным

$$\alpha_0 = 0,618\dots = \Phi^{-1}. \quad (2.217)$$

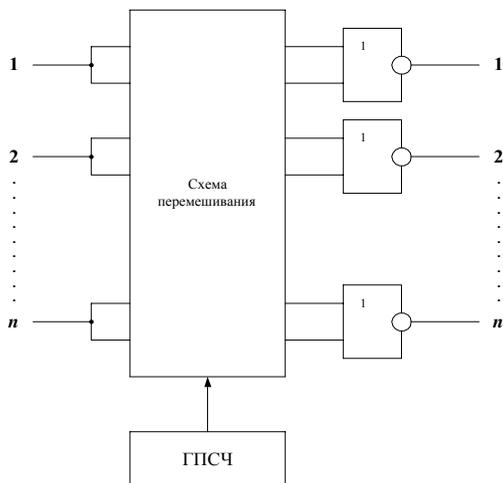


Рис. 2.5

Корень (2.217) соответствует условию равномерности возбуждения линий на входе и выходе системы. То есть: если $0 \leq \alpha_0 < \Phi^{-1}$, то $0 \leq \alpha_2 < \Phi^{-1}$; если $\Phi^{-1} < \alpha_0 \leq 1$, то $\Phi^{-1} < \alpha_2 \leq 1$ (рис. 2.6).

Оказывается, что когда $\alpha_2 = \alpha_0 = \Phi^{-1}$, то α_1 также равно $0,618\dots = \Phi^{-1}$, т.е. наблюдается соблюдение условия строгой равномерности:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0,618\dots = \Phi^{-1}, \quad (2.218)$$

По аналогии с получением обобщенного выражения для равнонадежных состояний (2.208) запишем обобщенную форму для построения систем предупреждения ошибок с однородными логическими элементами типа штрихов Шеффера, где в алгоритме функционирования вместо частного случая с $2n$ -линиями используется возможность обрабатывания κn -линий, при $\kappa = 2, \dots$, т.е. расчленение и объединение производится в рамках n -линий с κ -линиями в каждой из групп. Это обобщающее выражение выглядит следующим образом:

$$\alpha_\kappa = 1 - \alpha_1^\kappa = 1 - (1 - \alpha_{0_\kappa}^\kappa)^\kappa, \quad (2.219)$$

откуда, при $\alpha_\kappa = \alpha_{0_\kappa} = \alpha_1$, получим

$$\alpha_\kappa^\kappa + \alpha_\kappa - 1 = 0, \quad (2.220)$$

с корнями $0 < \alpha_\kappa < 1$, равными значениям обратных p -«золотых» пропорций [2,4,6], так как при $\kappa = 2$ образуется обратная 1-«золотая» пропорция $0,618\dots = \Phi^{-1} = \bar{p}_1$, при $\kappa = 3$ образуется обратная 2-«золотая» пропорция $0,682 \approx \bar{p}_2$ и т.д., что и требовалось доказать. Следовательно, для каждого $\kappa = 2, \dots$, будет на графиках вида $\alpha_\kappa(\alpha_{0_\kappa})$ всегда однозначно определяемая в обратных p -«золотых» пропорциях точка A_κ , где $\kappa = 1 + p$. Например, для $\kappa = 1 + 2 = 3$ по формуле (2.219) получим координату точки $A_3(\bar{P}_2 \approx 0,682; \bar{P}_2 \approx 0,682)$, которая совместно с зависимостью $\alpha_3(\alpha_{0_3})$ приведена на рис. 2.7.

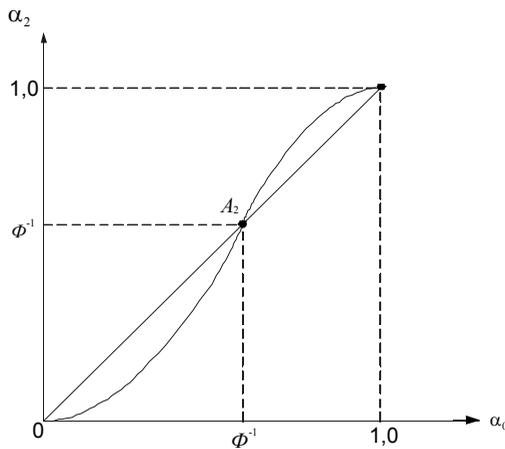


Рис. 2.6

Для каждого звена Шеффера «ИЛИ – НЕ», работающего с идеальной точностью и при любом числе группируемых κ -входов в группе из их общего большого числа n -входов, можно развернуть соответствующую систему в κ -сложную систему, содержащую $(\kappa + 1)n$ элементов Шеффера с числом κ -входов в каждом. Такой подход к развертыванию систем равносителен повышению надежности срабатывания логических систем за счет увеличения избыточности элементов в результате их дублирования методом сложных сочетаний Неймана. Этот метод в физическом смысле соответствует методу синтеза надежной в срабатывании системы из менее надежных элементов. Полученные вероятностные значения в точках A_κ предлагается использовать в качестве

нижней или верхней границ в процессе решения задачи выбора наиболее конкурентоспособного варианта решения оптимизационной задачи синтеза технической системы с целью сокращения числа вычислительных процедур, т.е. с целью ухода от рутинной процедуры полного перебора вариантов решения.

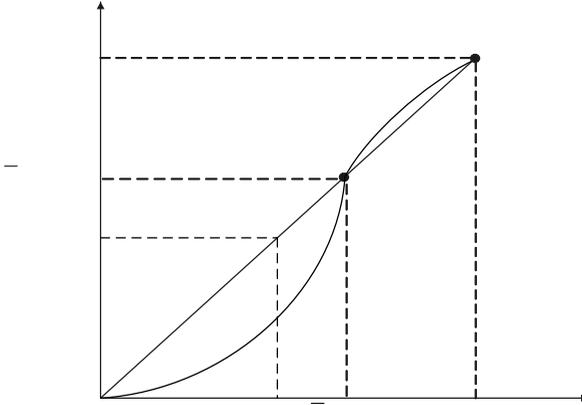


Рис.2.7

Полученные обобщенные выражения (2.208) и (2.219) в вероятностном смысле взаимно дополняемые, так как

$$h_n(p) + \alpha_\kappa = 1, \tag{2.221}$$

$$h_n(p) = 1 - \bar{b}_\kappa, \tag{2.222}$$

$$\alpha_\kappa = 1 - h_n(p), \tag{2.223}$$

где $\kappa = 1 + p$ и α_κ – обратные p -«золотые» пропорции [2,4,6].

Таким образом, становится очевидным, что изложенная выше теория может быть применена для объяснения физического смысла решаемой специальной задачи поиска при использовании тестов свободных от ошибок, где коэффициент группирования $\kappa \geq 2$. Для унификации восстанавливающих устройств, состоящих из схем представленных на рис. 2.5, предлагается в их состав включать ГПСЧ, функционирующих в соответствии с таблицей «железных» чисел (по Штейнгаузу), которая является результатом решения специальной задачи поиска при использовании тестов со случайными ошибками [2,4,17].

2.1.6. Пропорции и последовательности Фибоначчи-Падована

В работе [64] М. Газале приводит одну из обобщенных итерационных форм в виде повторных корней, которая при $p = q = 1$ принимает следующий вид:

$$p_3 \approx 0.682$$

$$x_m = \sqrt[m]{q + p\sqrt[m]{q + p\sqrt[m]{q + p\sqrt[m]{\dots}}}]} = \sqrt[m]{1 + \sqrt[m]{1 + \sqrt[m]{1 + \sqrt[m]{\dots}}}} \quad (2.224)$$

Полученные в процессе итерационных вычислений значения, являются корнями уравнения

$$x_m^m - px_m - q = x_m^m - x_m - 1 = 0. \quad (2.225)$$

При этом, ученый М. Газале демонстрирует наличие взаимосвязи выражений (2.224) и (2.225) с «золотой» пропорцией $1,618\dots = \Phi = \varphi = x_2$ при $m = 2$ и с так называемым им «серебряным» сечением $1,324\dots = x_3$ при $m = 3$, которое увязывается с последовательностью

$$0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, \dots, \quad (2.226)$$

впервые обнаруженную архитектором Р. Падованом. Эта последовательность формируется по рекуррентному правилу [64]:

$$U_{3,i+3} = U_{3,i+1} + U_{3,i}, \quad (2.227)$$

где $U_{3,0} = U_{3,1} = 0$, $U_{3,2} = 1$ и $i = \overline{0, I}$, а

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{U_{3,i+1}}{U_{3,i}} = 1,324717957\dots = x_3. \quad (2.228)$$

Исследования показали [33], что при заданном значении $m = \overline{2, M}$, и когда соответственно изменяются условия

$$U_{m,m-m} = \dots = U_{m,m-2} = 0 \text{ и } U_{m,m-1} = 1, \quad (2.229)$$

то с помощью рекуррентного правила

$$U_{m,i+m} = U_{m,i+1} + U_{m,i} \quad (2.230)$$

всегда можно сформировать последовательность, на основе которой в свою очередь вычисляются пропорции

$$x_m = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{U_{m,i+1}}{U_{m,i}}. \quad (2.231)$$

Если учесть, что при $m = 2$ рекуррентная формула (2.230) позволяет образовывать последовательность типа Фибоначчи (2.64), а при $m = 3$ – последовательность Падована (2.226), то все множество формируемых последовательностей по закону (2.229) и (2.230) предлагается в дальнейшем называть последовательностями Фибоначчи-Падована. В свою очередь, все вычисляемые с помощью формулы (2.231) пропорции предлагается называть пропорциями Фибоначчи-Падована в честь двух людей, которые имеют определенное отношение к развитию рассматриваемого нами направления в математике [33].

Однако эти пропорции нашли свое проявление не только в архитектуре. Так, в настоящее время экспериментально установлено существование ритмов мозга, каждый из которых соответствует определенному состоянию человека и характеризуется диапазоном электрических колебаний, а также инвариантами, которые изначально моделировались на основе «золотых» p -пропорции (табл. 2.9) [35, 65].

Таблица 2.9

Волны (ритмы) мозга	Дельта (Δ)	Тета (θ)	Альфа (α)	Бета (β)	Гамма (γ)
Диапазон, Гц	0,5 - 3,5	4 - 7	8 - 13	14 - 35	33 - 55
Состояние мозга (человека)	Сон	Восприятие неприятностей (тревога)	Покой	Умственная работа	Эмоциональное возбуждение
Ритм (инвариант в виде «золотой» p -пропорции)	1,221 (инварианта нет)	1,324 (4-я пропорция)	1,272 (инварианта нет)	$\Phi=1,618$ (1-я пропорция)	1,272 (инварианта нет)

Инвариант 1,272 обычно относят на интервал между 5-й и 6-й «золотыми» p -пропорциями, однако это число в данном интервале не указывает на резонансные свойства, т.к. не является по отношению к числам 1,285 (5-я пропорция) и 1,255 (6-я пропорция) среднегеометрическим значением. В работах [4,66,...,69] автором приводится альтернативная модель «золотым» p -пропорциям для инвариантов ритмов мозга, которая увязывается с темпераментами человека и базируется на «золотою» ГП следующего вида:

$$R_n = \Phi^{n/12}, \quad n=1, \dots, 12, \quad (2.232)$$

где $\Phi = 1,618\dots$ - классическая «золотая» 1-я пропорция, n - номер инварианта. При $n = 5, 6, 7$ и 12 формируются инварианты, соответственно, для Δ -, α - или γ -, θ и β -ритмов мозга. Причем, только единственный инвариант имеет погрешность и то незначительную, так как для Δ -ритма необходимо иметь значение 1,221, а на самом деле имеем $\Phi^{5/12} = 1,222019\dots \approx 1,222$.

Исходя из выражения (2.232), можно опровергнуть теоретическое предсказание существования еще двух ритмов мозга (ρ и σ) с инвариантами 1,465 («золотая» 2-я пропорция) и 1,38 («золотая» 3-я пропорция) [35], которые экспериментально не обнаружены [65].

В процессе исследования математических свойств пропорций Фибоначчи и Падована [64], найдена возможность альтернативного моделирования инвари-

антов ритмов мозга на основе первых трех пропорций из так называемых «пропорций Фибоначчи-Падована»: $x_2 = 1,61803398... = \Phi$; $x_3 = 1,32471795...;$ $x_4 = 1,22074408... .$ И действительно, x_2 - соответствует инварианту β -ритма мозга, x_3 - инварианту θ -ритма мозга и x_4 - инварианту Δ -ритма мозга. Инварианты α - и γ -ритмов мозга из (2.232) получаются при $n = 6$, а также могут быть вычислены как среднегеометрическое значение между θ и Δ -ритмами, то есть

$$\alpha = \gamma = (\Delta \cdot \theta)^{1/2} = (\Phi^{5/12} \cdot \Phi^{7/12})^{1/2} = \Phi^{1/2} = 1,27201964... \approx 1,272. \quad (2.233)$$

Оказывается, что с помощью пропорций Фибоначчи-Падована также как и с помощью формулы (2.233) можно получить достаточно точное приближение для инвариантов α - и γ -ритмов, так как

$$\alpha = \gamma = (\Delta \cdot \theta)^{1/2} = (x_3 \cdot x_4)^{1/2} = 1,27166882... \approx 1,272. \quad (2.234)$$

Кроме выражений (2.233) и (2.234) для моделирования θ и Δ -ритмов может быть использована следующая формула:

$$\alpha = \gamma = \beta^{1/2} = x_2^{1/2} = \Phi^{1/2} = 1,27201964... \approx 1,272. \quad (2.235)$$

2.1.7. Место «золотого» сечения в «металлических» пропорциях

2.1.7.1. Образование базовых «металлических» пропорций

В процессе изучения природных явлений очень часто встречаются фундаментальные пропорции, которым предлагается присваивать названия металлов, по аналогии с «золотой». Например, «золотая» пропорция (прямая – $\Phi = 1,618$... и обратная - $\bar{\Phi} = 0,618...$) и связанное с ней фундаментальное число $1,272 ... = \sqrt{\Phi}$ (или $0,786... = \sqrt{\bar{\Phi}}$), «серебряная» пропорция (прямая - $S = 2$ и обратная - $\bar{S} = 1/2$) и связанное с ней фундаментальное число $1,414 ... = \sqrt{2}$ (или $0,707... = \sqrt{1/2}$), затем следует «бронзовая» пропорция (B) и т. д.

Для определения перечня возможных «металлических» пропорций (Π_{l_i}) и исследования их природных свойств воспользуемся выражением [6]

$$\Pi_{l_i} = \lim_{l_i \rightarrow \infty} (...((N^{1/2} + l_1)^{1/2} + l_2)^{1/2} + ... + l_m)^{1/2}, \quad (2.236)$$

где $l_i = 1, 2, 3, \dots$; $i = 1, 2, \dots, m$; $N \geq 0$.

Если в выражение (2.236) подставить $l_i = 1$ и вычислить предел, то получим «золотую» пропорцию ($\Pi_1 = \Phi$), при $l_i = 2$ – «серебряную» пропорцию ($\Pi_2 = S$), при $l_i = 3$ – «бронзовую» пропорцию ($\Pi_3 = B$) и т. д. Вычисление пределов осуществляется тем быстрее, чем ближе N к $\Pi_{l_i}^2$, а при $N = \Pi_{l_i}^2$ поиск предела теряет

смысл. Если $N < \Pi_i^2$, то приближение к Π_i^2 происходит снизу, а при $N > \Pi_i^2$ - сверху. В случае, когда $N = 0$ или $N = 1$, при $l_i = 1$ выражение (2.236) сводится к условию, когда $N = 2$, а это значит, что первым иррациональным числом, с которого начинается отсчет приближения снизу к $\Pi_1^2 = \Phi^2$, будет число $\sqrt{2}$. То есть здесь четко обнаруживается еще одно из проявлений природной взаимосвязи между «золотой» и «серебряной» пропорциями.

Характерной закономерностью, присущей не только «золотой», а всем «металлическим» пропорциям (МП), при $N = 0$, является то, что

$$\Pi_{l_i} + l_i = \Pi_{l_i}^2. \quad (2.237)$$

Например, $1,618033\dots + 1 = 2,618033\dots$ (т.е. $\Phi + 1 = \Phi^2$); $2 + 2 = 4$ (т.е. $S + 2 = S^2$); $2,302776\dots + 3 = 5,302776\dots$ (т.е. $B + 3 = B^2$) и т.д.

В случае, когда $N > 0$ и $l_i = 0$, то $\Pi_0 = 1$. По мере увеличения l_i , но без учета целых чисел в Π_{l_i} , уменьшается приращение $\Delta \Pi_{l_i}^2 = \Pi_{l_i} - \Pi_{l_i-1}$ (табл. 2.10). Это уменьшение подчиняется убывающей ГП со знаменателем в виде обратной «золотой» пропорции ($\overline{\Phi}^n$, $n = 1, 2, 4, \dots$). Следовательно, каждый из единичных интервалов между целыми числами можно рассматривать как шкалу эталонных «металлических» сечений или как множество последовательностей вложенных отрезков, которые предполагается использовать в качестве системы «гирь» для взвешивания при решении распределительных задач, а также в качестве эталонных точек в полосах пропускания и мешания резонансно-фильтрующих систем в СЧМС. Причем, общее число иррациональных пропорций для каждого следующего интервала между целыми числами увеличивается на две.

Если выражение (2.237) преобразовать в следующий вид:

$$\Pi_{l_i} = \sqrt{l_i + \Pi_{l_i}}, \quad (2.238)$$

а затем задать еще одно условие - $\Pi_{l_i} = l_i^{1/2}$, то можно на основе этих условий сформировать $l_i^{1/2}$, $(l_i + l_i^{1/2})^{1/2}$, $(l_i + (l_i + l_i^{1/2})^{1/2})^{1/2}$, ..., где $l_i = 1, 2, 3, \dots$, с пределами, соответствующими «металлическим» пропорциям Π_{l_i} (табл. 1.4). Следовательно, представив формулу (1.79) в виде квадратного уравнения

$$\Pi_{l_i}^2 - \Pi_{l_i} - l_i = 0 \quad (2.239)$$

и решив его, получим корни: P_{l_i} - «металлические» пропорции; $\overline{P}_{l_i} = l_i / P_{l_i}$ - обратные «металлические» пропорции относительно l_i с отри-

цательными знаками. Не меньший практический интерес могут вызывать обратные МП относительно единицы, т. е. когда $\bar{\Pi}_{l_i} = 1 / \Pi_{l_i}$ (табл. 2.10).

Таблица 2.10

l_i	Π_{l_i}	$ \bar{\Pi}'_{l_i} $	$\Pi_{l_i}^2 = l_i + \Pi_{l_i}$	$\bar{\Pi}_{l_i}$	$\Delta \Pi_{l_i}$	$1/ \bar{\Pi}'_{l_i} $
0	1,0	0	1,0	1,0	-	-
1	$\approx 1,618034 = \Phi$	$\approx 0,618034 = \bar{\Phi}$	$\approx 2,618034 = \bar{\Phi}^2$	$\approx 0,618034 = \bar{\Phi}$	$\approx 0,618034 = \bar{\Phi}$	$\approx 1,618 = \Phi$
2	2,0	1,0	4,0	$0,5 = \bar{S}$	$\approx 0,381966 = \bar{\Phi}^2$	1,0
3	$\approx 2,302776 = B$	$\approx 1,302776$	$\approx 5,302776$	$\approx 0,434258 = \bar{B}$	$\approx 0,302776$	$\approx 0,767$
4	$\approx 2,561553 = N$	$\approx 1,561553$	$\approx 6,561553$	$\approx 0,390388 = \bar{N}$	$\approx 0,258777$	$\approx 0,640$
5	$\approx 2,791288 = M$	$\approx 1,791288$	$\approx 7,791288$	$\approx 0,358257 = \bar{M}$	$\approx 0,229735$	$\approx 0,558$
6	3,0=A	2,0	9,0	$\approx 0,333333 = \bar{A}$	$\approx 0,208712$	0,5
7	$\approx 3,192582$	$\approx 2,192582$	$\approx 10,192582$	$\approx 0,313226$	$\approx 0,192582$	$\approx 0,456$
8	$\approx 3,372281$	$\approx 2,372281$	$\approx 11,372281$	$\approx 0,296535$	$\approx 0,179699$	$\approx 0,421$
9	$\approx 3,541381$	$\approx 2,541381$	$\approx 12,541381$	$\approx 0,282375$	$\approx 0,169100$	$\approx 0,393$
10	$\approx 3,701562$	$\approx 2,701562$	$\approx 13,701562$	$\approx 0,270156$	$\approx 0,160181$	$\approx 0,370$
11	$\approx 3,854102$	$\approx 2,854102$	$\approx 14,854102$	$\approx 0,259463$	$\approx 0,152540$	$\approx 0,350$
12	4,0	3,0	16,0	0,25	$\approx 0,145898 = \bar{\Phi}^4$	$\approx 0,333$
13	$\approx 4,140055$	$\approx 3,140055$	$\approx 17,140055$	$\approx 0,241542$	$\approx 0,140055$	$\approx 0,318$
14	$\approx 4,274917$	$\approx 3,274917$	$\approx 18,274917$	$\approx 0,233923$	$\approx 0,134862$	$\approx 0,305$
15	$\approx 4,405125$	$\approx 3,405125$	$\approx 19,405125$	$\approx 0,227008$	$\approx 0,130208$	$\approx 0,293$
16	$\approx 4,531129$	$\approx 3,531129$	$\approx 20,531129$	$\approx 0,220695$	$\approx 0,126004$	$\approx 0,283$
17	$\approx 4,653312$	$\approx 3,653312$	$\approx 21,653312$	$\approx 0,214900$	$\approx 0,122183$	$\approx 0,273$
18	$\approx 4,772002$	$\approx 3,772002$	$\approx 22,772002$	$\approx 0,209555$	$\approx 0,118690$	$\approx 0,265$
19	$\approx 4,887482$	$\approx 3,887482$	$\approx 23,887482$	$\approx 0,204604$	$\approx 0,115480$	$\approx 0,257$
20	5,0	4,0	25,0	0,2	$\approx 0,112518$	0,25

На рис. 2.8 в качестве наглядного примера изображены графики функций $y = f(\Pi_{l_i}) = \sqrt{l_i + \Pi_{l_i}}$ и прямая линия $y = \Pi_{l_i}$, при $l_i = 1, 2$ и 3 . Из этого рисунка видно, что графики пересекаются с прямой в точках с числами $\Pi_1=1,618\dots=\Phi$, $\Pi_2=2=S$ и $\Pi_3=2,302\dots=B$, т.е. с «золотой», «серебряной» и «бронзовой» пропорциями.

При математическом моделировании некоторых природных явлений, характеристик линейных электрических цепей и т.д., часто используют цепные дроби. Поэтому, очень важно иметь возможность представления МП в виде цепных дробей.

Если разделить выражение (2.237) на Π_{l_i} , то оно преобразуется в следующий вид:

$$\Pi_{l_i} = 1 + l_i / \Pi_{l_i} \quad (2.240)$$

Используя применительно к формуле (2.240) фрактальный принцип самоподобия [70], подставим в правую ее часть относительно равенства, вместо Π_{l_i} , это же выражение (2.240) и в результате получим:

$$\Pi_{l_i} = 1 + \frac{l_i}{1 + l_i / \Pi_{l_i}}. \quad (2.241)$$

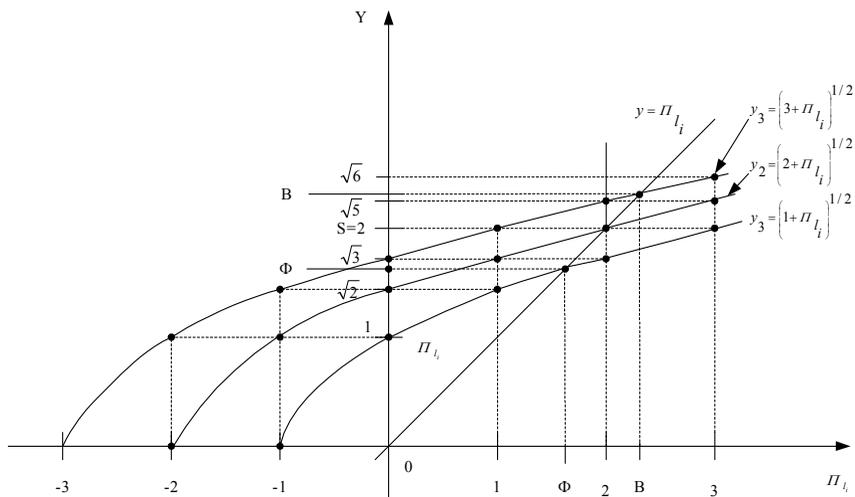


Рис. 2.8

Многочратное повторение данного алгоритма подстановок выражения (2.240) самого в себя, образует кратную этому повторению цепную дробь для приближений к «металлическим» пропорциям:

$$\Pi_{l_i} = 1 + \frac{l_i}{1 + \frac{l_i}{1 + \frac{l_i}{1 + \frac{l_i}{1 + K}}}}, \quad (2.242)$$

т. е. при $l_i = 1$ будет иметь место приближение к «золотой» пропорции ($\Pi_1 = \Phi$), при $l_i = 2$ - к «серебряной» пропорции ($\Pi_2 = S$), при $l_i = 3$ - к «бронзовой» пропорции ($\Pi_3 = B$) и т.д.

Цепные дроби (2.242), образующие «металлические» пропорции, могут быть получены путем разложения отношения чисел (дробей) в рекуррентных после-

довательностях. Например, для отношения соседних чисел из последовательности Фибоначчи $\frac{U_7}{U_6} = \frac{13}{8}$ разложение в цепную дробь имеет следующий вид:

$$\frac{U_7}{U_6} = \frac{13}{8} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}. \quad (2.243)$$

На рис. 2.9 в качестве наглядного примера изображены графики функций $y = f(\Pi_{l_i}) = 1 + l_i / \Pi_{l_i}$ и прямая линия $y = \Pi_{l_i}$, при $l_i = 1$ и 2 , точками пересечения которых есть «золотая» ($\Pi_1 = \Phi$) и «серебряная» ($\Pi_2 = S$) пропорции.

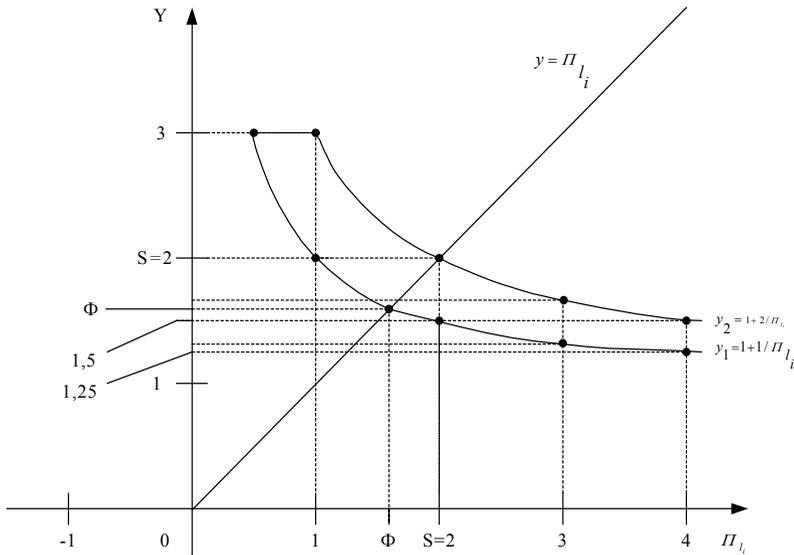


Рис. 2.9

Начиная с $\Pi_{l_0} = 0$ для случая на рис. 2.8 и с $\Pi_{l_0} = 1$ для случая на рис. 2.9, методом итераций (или методом последовательных приближений), находятся корни уравнения (2.239). На рис. 2.10 и рис. 2.11 приведены примеры подобного поиска корней для «золотой» пропорции.

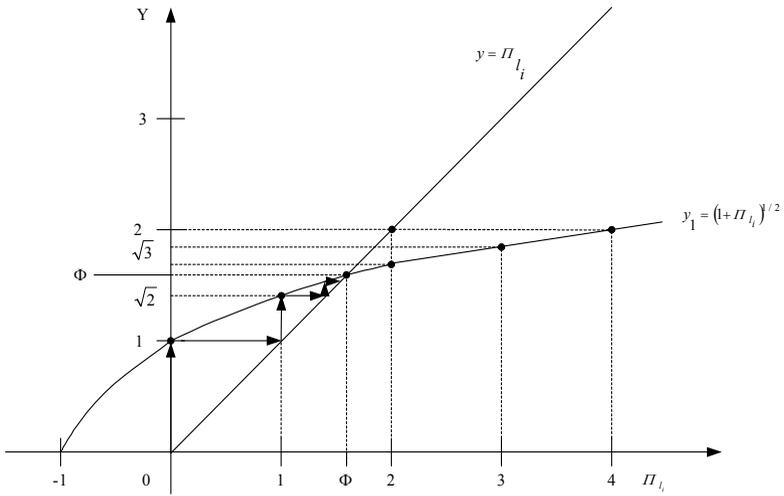


Рис. 2.10

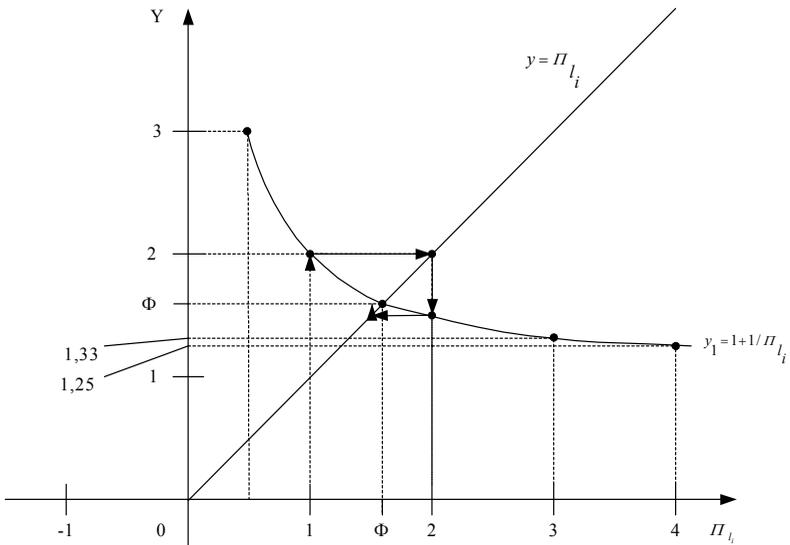


Рис. 2.11

2.1.7.2. Расширение системы «металлических» пропорций и их взаимосвязь с корнями квадратных уравнений

Исследования, проведенные с целью выявления системных свойств «металлических» пропорций [6,45,71], позволили обнаружить их взаимосвязи с корнями квадратных уравнений, образуемых на основе простых цепных дробей. Рассмотрим эти взаимосвязи для двух основных «металлических» пропорций:

а) для «золотой» (прямая $\Phi=1,618\dots$ и обратная $\bar{\Phi} = 0,618\dots$) в табл. 2.11;

б) для «серебряной» (прямая $S=2$ и обратная $\bar{S}=1/2$) в табл. 2.12.

Из табл. 2.11 и табл. 2.12 видно, что четыре простейших квадратных уравнения в системном виде позволяют получить корни с полным перечнем положительных и отрицательных значений геометрических прогрессий, описывающих два затухающих «противофазных» (взаимопротивоположных) колебательных процесса (рис. 2.12 и рис. 2.13).

В первом случае (табл. 2.11) имеет место «золотая» ГП, образующаяся при решении «системы» квадратных уравнений с чередованием значений « p » по закону последовательности Люка: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ... , генерируемой рекуррентным выражением $P_{i+1}=P_i+P_{i-1}$, где $P_1=1$ и $P_2=3$. Во втором случае (табл. 2.12) имеет место «квазисеребряная» ГП, образующаяся при решении "системы" квадратных уравнений с чередованием значений « p » по закону последовательности: 2, 6, 14, 34, 82, ... , генерируемой рекуррентным выражением $P_{i+1}=2P_i+P_{i-1}$, где $P_1=2$ и $P_2=6$.

Таблица 2.11

Вид квадратного уравнения	Значения корней для « p »											
	$p=1$		$p=3$		$p=4$		$p=7$		$p=11$		$p=18$	
	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
$x^2-px-1=0$	Φ^1	$-\Phi^1$			Φ^3	$-\bar{\Phi}^3$			Φ^5	$-\bar{\Phi}^5$		
$x^2-px+1=0$			Φ^2	$\bar{\Phi}^2$			Φ^4	$\bar{\Phi}^4$			Φ^6	$\bar{\Phi}^6$
$x^2+px-1=0$	$-\Phi^1$	$\bar{\Phi}^1$			$-\Phi^3$	$\bar{\Phi}^3$			$-\Phi^5$	$\bar{\Phi}^5$		
$x^2+px+1=0$			$-\Phi^2$	$-\bar{\Phi}^2$			$-\Phi^4$	$-\bar{\Phi}^4$			$-\Phi^6$	$-\bar{\Phi}^6$

Таблица 2.12

Вид квадратного уравнения	Значения корней для « p »									
	$p=2$		$p=6$		$p=14$		$p=34$		$p=82$	
	x_1	x_2	x_1	x^2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
$x^2 - px - 1 = 0$	$(s^{1/2} + 1)$	$-(s^{1/2} - 1)$			$-(s^{1/2} + 1)^3$	$-(s^{1/2} - 1)^3$			$(s^{1/2} + 1)^5$	$-(s^{1/2} - 1)^5$
$x^2 - px + 1 = 0$			$(s^{1/2} + 1)^2$	$(s^{1/2} - 1)^2$			$(s^{1/2} + 1)^4$	$(s^{1/2} - 1)^4$		
$x^2 + px - 1 = 0$	$-(s^{1/2} + 1)$	$(s^{1/2} - 1)$			$(s^{1/2} + 1)^3$	$(s^{1/2} - 1)^3$			$-(s^{1/2} + 1)^5$	$(s^{1/2} - 1)^5$
$x^2 + px + 1 = 0$			$-(s^{1/2} + 1)^2$	$-(s^{1/2} - 1)^2$			$-(s^{1/2} + 1)^4$	$-(s^{1/2} - 1)^4$		

На рис. 2.13 видны еще две точки с координатами $(1,1)$ и $(-1,-1)$, которые образуются на основе корней квадратных уравнений $x^2 - 2x + 1 = 0$ и $x^2 + 2x + 1 = 0$, соответственно, что равносильно введению в рекуррентные последовательности изначального числа $p_0 = 2$.

Используя разработанный подход, можно систематизировать все множество взаимосвязей между «металлическими» пропорциями и корнями квадратных уравнений, формирующих соответствующие ГП с помощью рекуррентных выражений. В качестве примера в табл. 2.13 приведены основные данные о взаимосвязях корней квадратных уравнений с первыми пятью «металлическими» пропорциями, где по количеству значений « p » в первой сотне чисел можно судить о доминанте «золотой» пропорции над всеми, большей роли «серебряной» и возможном проявлении в природе «бронзовой» пропорции. Все остальные пропорции создают некий фон колебательных процессов.

Если учесть, что $q = l_i$ и $x = \Pi_{l_i}$, то приведенное квадратное уравнение (2.239) можно записать в следующем виде (уравнения 4-го рода 1-го порядка):

$$x^2 - px - l_i = 0, \quad (2.244)$$

Корнями уравнения (2.244) будут:

$$x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4l_i}}{2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + l_i}. \quad (2.245)$$

Для исследования зависимостей $x_{1,2}$ от p и l_i построена матрица решений уравнения (2.244), при $p = 0, 1, \dots, 4$ и $l_i = 0, 1, \dots, 5$ (табл. 2.14 и рис. 2.14).

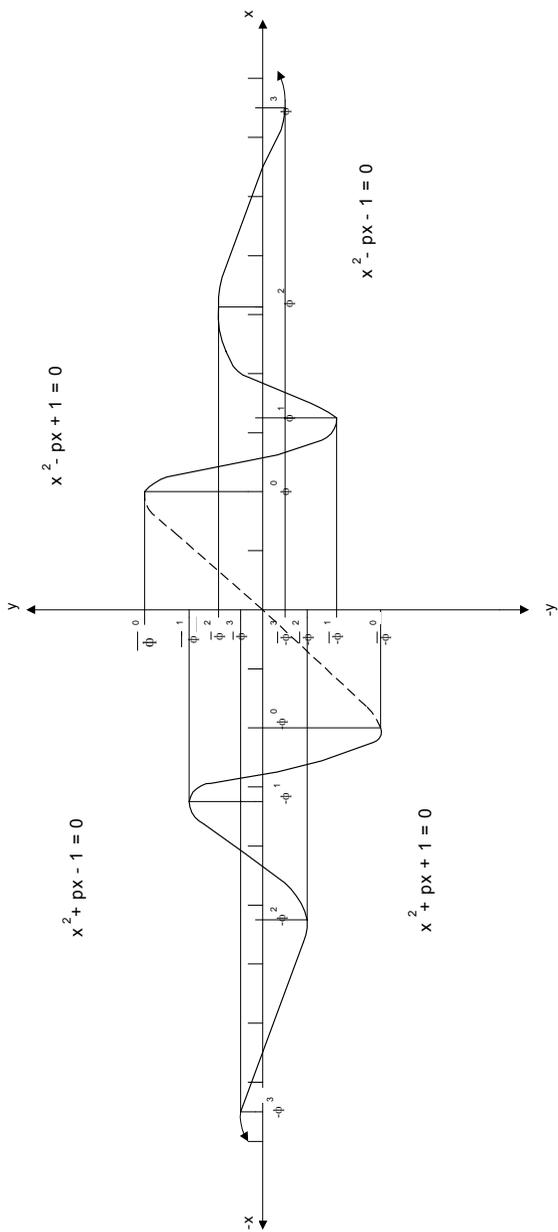


Рис. 2.12

Таблица 2.13

l_i	«Металл-клей» пропорции: $P_i=1, \dots, 5$	Рекуррентные выражения для формирования «Р» квадратных уравнений	Численные значения «Р» в квадратных уравнениях	Корни квадратных уравнений в ГП				Количество значений «Р» в первой сотне чисел
				с нечетными степенями		с четными степенями		
				X_1	X_2	X_1	X_2	
1	$P_i=1,618=\Phi$ («золотая»)	$P_{i+1}=P_i+$ $+P_{i-1}$, при $P_1=1$ и $P_2=3$	1	$\pm \bar{P}_1 = \pm \bar{\Phi}$	$\pm P_1 = \pm \Phi$			9
			3			$\pm \bar{P}_1^2 = \pm \bar{\Phi}^2$	$\pm P_1^2 = \pm \Phi^2$	
			4	$\pm \bar{P}_1^3 = \pm \bar{\Phi}^3$	$\pm P_1^3 = \pm \Phi^3$			
			7			$\pm \bar{P}_1^4 = \pm \bar{\Phi}^4$	$\pm P_1^4 = \pm \Phi^4$	
2	$P_i=2,0=S$ («серебряная»)	$P_{i+1}=2P_i+$ $+P_{i-1}$, при $P_1=2$ и $P_2=6$	2	$\pm(\sqrt{P_2}-1)$	$\pm(\sqrt{P_2}+1)$			5
			6			$\pm(\sqrt{P_2}-1)^2$	$\pm(\sqrt{P_2}+1)^2$	
			14	$\pm(\sqrt{P_2}-1)^3$	$\pm(\sqrt{P_2}+1)^3$			
			34			$\pm(\sqrt{P_2}-1)^4$	$\pm(\sqrt{P_2}+1)^4$	
3	$P_i=3,3027=B$ («бронзовая»)	$P_{i+1}=3P_i+$ $+P_{i-1}$, при $P_1=3$ и $P_2=11$	3	$\pm(P_3-2)$	$\pm(P_3+1)$			3
			11			$\pm(P_3-2)^2$	$\pm(P_3+1)^2$	
			36	$\pm(P_3-2)^3$	$\pm(P_3+1)^3$			
			119			$\pm(P_3-2)^4$	$\pm(P_3+1)^4$	
4	$P_i=2,5615=N$ («никелевая»)	$P_{i+1}=8P_i+$ $+P_{i-1}$, при $P_1=8$ и $P_2=66$	8	$\pm(2P_4-5)$	$\pm(2P_4+3)$			2
			66			$\pm(2P_4-5)^2$	$\pm(2P_4+3)^2$	
			536	$\pm(2P_4-5)^3$	$\pm(2P_4+3)^3$			
			4354			$\pm(2P_4-5)^4$	$\pm(2P_4+3)^4$	
5	$P_i=2,7912=M$ («медная»)	$P_{i+1}=5P_i-$ $-P_{i-1}$, при $P_1=5$ и $P_2=23$	5	$\pm(P_5+2)^{-1}$	$\pm(P_5+2)$			2
			23			$\pm(P_5+2)^{-2}$	$\pm(P_5+2)^2$	
			110	$\pm(P_5+2)^{-3}$	$\pm(P_5+2)^3$			
			527			$\pm(P_5+2)^{-4}$	$\pm(P_5+2)^4$	

Из табл. 2.14 видна основная роль числовых значений, связанных с Φ , S и B пропорциями при доминанте «золотой». В строках и столбцах табл. 2.14 обнаруживаются строгие закономерности взаимосвязей между пропорциями по мере увеличения p и l_i , на которых останавливаться не будем, так как они очевидны из-за символического представления чисел и корневой зависимости $\sqrt{l_i}$.

Табл. 2.14 отражает только половины периодов колебательных процессов в двухмерной проекции на плоскость (IV квадрант). Вторая половина этих периодов находится в I квадранте декартовой системы координат и описывается квадратными уравнениями 1-го рода 1-го вида:

$$x^2 - px + l_i = 0 \tag{2.246}$$

с корнями

$$x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4l_i}}{2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - l_i}, \tag{2.247}$$

а их решения, при $l_i = 0, 1, 2, 3$ и $p = 0, 1, \dots, 6$, приведены в табл. 2.15 (рис. 2.15).

Таблица 2.14

$l_i =$ 0, 1,2 ... 5	P=0		P=1		P=2	
	$x_{1,2} = \pm\sqrt{l}$		$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + l}$		$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + l}$	
	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
0	0	0	1	0	2	0
1	$\Pi_{l=0} = 1 = \sqrt{1}$	$-\Pi_{l=0} = -1 = -\sqrt{1}$	$\Pi_{l=1} = \Phi \approx 1,618$	$-(\Pi_{l=1}-1) = -\bar{\Phi} \approx -0,618$	$1 + \sqrt{2} \approx 2,414 \approx 1 + \sqrt{S}$	$1 - \sqrt{2} \approx -0,414 \approx 1 - \sqrt{S}$
2	$\sqrt{2} - \sqrt{S} \approx 1,414$	$-\sqrt{2} = -\sqrt{S} \approx -1,414$	$\Pi_{l=2} = S = 2$	$-(\Pi_{l=2}-1) = -1$	$1 + \sqrt{3} \approx 2,732$	$1 - \sqrt{3} \approx -0,732$
3	$\sqrt{3} \approx 1,732$	$-\sqrt{3} \approx -1,732$	$\Pi_{l=3} = B \approx 2,3027$	$-(\Pi_{l=3}-1) \approx -1,3027$	$1 + \sqrt{4} = 3$	$1 - \sqrt{4} = -1$
4	$\sqrt{4} = 2 = S$	$-\sqrt{4} = -2 = -S$	$\Pi_{l=4} = N \approx 2,561$	$-(\Pi_{l=4}-1) \approx -1,561$	$1 + \sqrt{5} \approx 3,236 \approx 2\Phi$	$1 - \sqrt{5} \approx -1,236 \approx -2\bar{\Phi}$
5	$\sqrt{5} \approx 2,236 \approx \Phi + \bar{\Phi}$	$-\sqrt{5} \approx -2,236 \approx -(\Phi + \bar{\Phi})$	$\Pi_{l=5} = M \approx 2,791$	$-(\Pi_{l=5}-1) \approx -1,791$	$1 + \sqrt{6} \approx 3,449$	$1 - \sqrt{6} \approx -1,449$

Продолжение таблицы 2.14

$l_i =$ =0, 1, 2,... .5	P=3		P=4	
	$x_{1,2} = 3/2 \pm \sqrt{9/4 + l}$		$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + l}$	
	x_1	x_2	x_1	x_2
0	3	0	4	0
1	$\Pi_{i=3} + 1 =$ $= B + 1 \approx$ $\approx 3,3027$	$-(\Pi_{i=3} - 2) =$ $= -(B - 2) \approx$ $\approx -0,3027$	$\Pi_{i=1}^3 = \Phi^3 \approx$ $\approx 4,236 \approx$ $\approx 2 + \sqrt{5}$	$-\Pi_{i=1}^3 = \bar{\Phi}^3 \approx$ $\approx -0,236 \approx$ $\approx 2 - \sqrt{5}$
2	$\Pi_{i=4} + 1 =$ $= N + 1 \approx$ $\approx 3,561$	$-(\Pi_{i=4} - 2) =$ $= -(N - 2) \approx$ $\approx -0,561$	$2 + \sqrt{6} \approx$ $\approx 4,449$	$2 - \sqrt{6} \approx$ $\approx -0,449 \approx$ $\approx 2 - \sqrt{5}$
3	$\Pi_{i=5} + 1 =$ $= M + 1 \approx$ $\approx 3,791$	$-(\Pi_{i=5} - 2) =$ $= -(M - 2) \approx$ $\approx -0,791$	$2 + \sqrt{7} \approx$ $\approx 4,645$	$2 - \sqrt{7} \approx$ $\approx -0,645$
4	$\Pi_{i=6} + 1 =$ $= 4$	$-(\Pi_{i=6} - 2) =$ $= -1$	$2 + \sqrt{8} \approx$ $\approx 4,828$	$2 - \sqrt{8} \approx$ $\approx -0,828$
5	$\Pi_{i=7} + 1 \approx$ $\approx 4,192$	$-(\Pi_{i=7} - 2) \approx$ $\approx -1,192$	$2 + \sqrt{9} =$ $= 5$	$2 - \sqrt{9} =$ $= -1$

Таблица 2.15

P= 0,1 ,2, ..., 6	$l_i = 0, 1, 2, 3; i = 1, \dots, 4$							
	$l_1=0$		$l_2=1$		$l_3=2$		$l_4=3$	
	$x_{1,2} = p/2 \pm \sqrt{p^2/4}$		$x_{1,2} = p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - 1}$		$x_{1,2} = p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - 2}$		$x_{1,2} = p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - 3}$	
	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
0	0	0	D<0	D<0	D<0	D<0	D<0	D<0
1	1	0	D<0	D<0	D<0	D<0	D<0	D<0
2	2	0	1	1/1=1	D<0	D<0	D<0	D<0
3	3	0	$\Pi_{i=1}^3 = \Phi^3 \approx$ $\approx 2,618$	$\frac{1}{\Phi^3} = \bar{\Phi}^3 \approx$ $\approx 0,381$	2=S	2/2=1	D<0	D<0
4	4	0	$2 + \sqrt{3} \approx$ $\approx 3,732$	$\frac{1}{2 + \sqrt{3}} \approx$ $\approx 0,267$	$2 + \sqrt{2} =$ $= S + \sqrt{S} \approx$ $\approx 3,414$	$\frac{2}{2 + \sqrt{2}} \approx$ $\approx 0,585$	3=A	3/3=1
5	5	0	$\approx 4,791$	$\approx 0,208$	$\approx 4,561$	$\approx 0,438$	$\Pi_{i=3} + 2 \approx$ $\approx 4,302$	$\approx 0,69$ 7
6	6	0	$(\sqrt{2} + 1)^2 \approx$ $\approx 5,828$	$(\sqrt{2} - 1)^2 \approx$ $\approx 0,171$	$\approx 5,654$	$\approx 0,354$	$\approx 5,449$	$\approx 0,55$ 0

Числа диагонали в табл. 2.15 формируют равномерную сетку со сдвигом на единичный интервал, которая параллельна оси «OX» и находится на расстоянии

от нее равно «1». Все корни выше диагонали мнимые ($D' < 0$), а при $l = 0$, на оси «OX» образуется еще одна сетка с единичным интервалом.

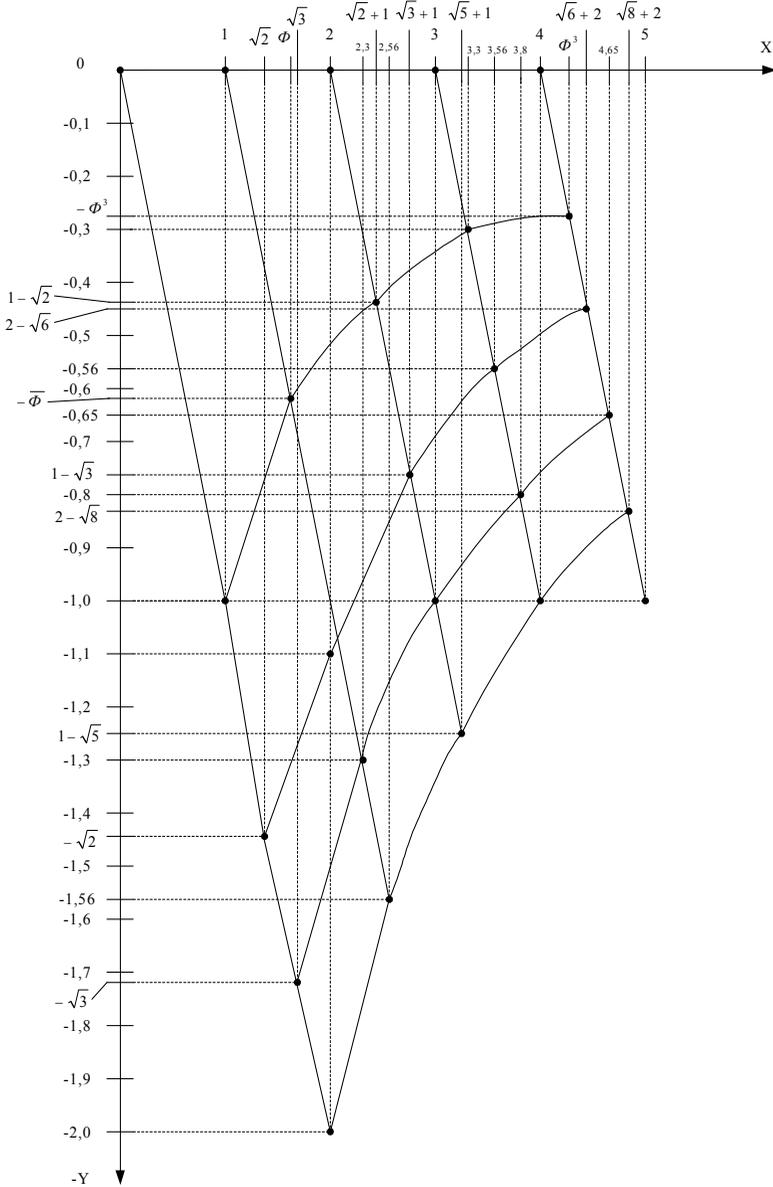


Рис. 2.14

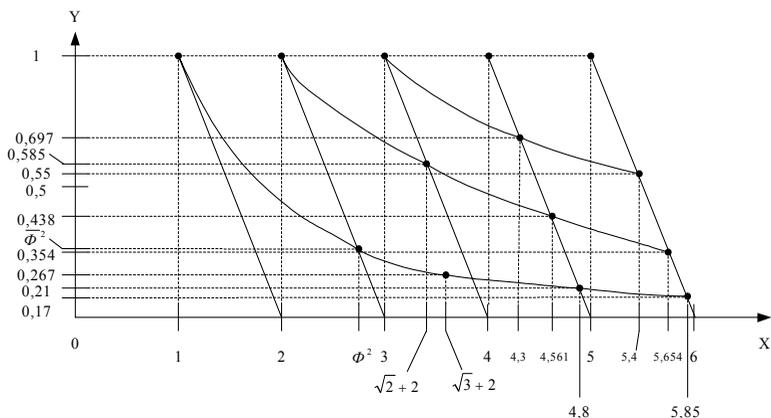


Рис. 2.15

Аналогичным образом как для уравнения (2.244) с корнями (2.245) в квадранте IV, уравнения 2-го рода 1-го вида $x^2 + px - l_i = 0$ в квадранте II образуют координатные сетки, которые зеркально-симметричны приведенным в табл. 2.14. В квадранте III с помощью уравнений 3-го рода 1-го вида $x^2 + px + l_i = 0$ строятся зеркально-симметричные сетки, полученные с помощью выражения (2.246) с корнями (2.247) в квадранте I.

Наряду с исследуемыми выше «металлическими» пропорциями 1-го вида в математических моделях особая роль отводится пропорциям 2-го вида [6]

$$ax^2 \pm x \pm 1 = x^2 \pm x/a \pm 1/a = 0. \quad (2.248)$$

Например, «металлические» пропорции 2-го рода 2-го вида, образуемые уравнением

$$x^2 + x/a - 1/a, \quad (2.249)$$

с корнями

$$x_{1,2} = \frac{-1/a \pm \sqrt{1/a^2 + 4/a}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2a}, \quad (2.250)$$

позволяют с высокой точностью моделировать процессы в теории нелинейной фильтрации. В свою очередь, эти корни представляют собой обратные МП относительно единицы, т. е. $\overline{P}_i = 1/P_i$ и обратные значения для \overline{P}'_i , т. е. значения $1/\overline{P}'_i$ (табл. 2.10).

Таким образом, из приведенных выше результатов исследований очевидна особая роль базовых «металлических» пропорций, которые образуются в процессе многократного суммирования квадратных корней l_i -числа в сумме с предыдущими остатками подобного суммирования с помощью выражения (2.236).

Если однократное взятие корня из l_i (т. е. $\sqrt{l_i}$, при $l_i=1, 2, \dots, M$, принимает

следующие значения: $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{M}$) характеризует статическое состояние системы, то выражение (2.236), при $i = 2, \dots, m$ и $N \geq 0$, отражает степень динамичности системы в зависимости от числа “ m ” и соответствие конкретной «металлической» пропорции. Чем выше динамичность модели, тем больше число « m ». Чем ближе N к «металлической» пропорции, тем меньше требуется число « m » для повышения точности модели.

Подобного рода динамические модели учитывают предысторию системы или процесса, закон изменения которой убывает относительно конкретно взятого состояния по «металлической» геометрической прогрессии, что принципиально отличает эти модели от марковских, учитывающих только текущие состояния. Кроме того, в случае выбора такой «металлической» геометрической прогрессии, которая будучи моделью системы (процесса) адекватно отображает ее (его) свойства, можно не только интерполировать известные состояния, но и экстраполировать их будущее развитие (изменение).

Если обратить внимание в табл. 2.14 на образуемые «кручения» чисел, то становится очевидным изначальное их разрастание от корней (2.245) с $p = 0$ и $p = 1$ по следующим правилам:

- а) слева направо и снизу вверх;
- б) к корням x_1 и x_2 во всех случаях прибавляется число «1»;
- в) «кручения» для $p = 0$ распространяется только на четные значения p ;
- г) «кручения» для $p = 1$ распространяются только на нечетные p ;
- д) границей «кручений» являются корни x_1 и x_2 , при $l_i = 1$, которые неподвержены «кручению».

Например, при $p = 0$ и $l_i = 5$ с помощью выражения (2.245) образуются два корня $(x_1 = \sqrt{5}, x_2 = -\sqrt{5})$, которые в результате «кручения» (прибавления к ним числа «1») при $p = 2$ и $l_i = 4$ преобразуются в $x'_1 = \sqrt{5} + 1$ и $x'_2 = -\sqrt{5} + 1$, затем после второго «кручения» при $p = 4$ и $l_i = 1$ корни x'_1 и x'_2 преобразовываются в $x''_1 = \sqrt{5} + 1 + 1 = \sqrt{5} + 2 \approx 4,236$ и $x''_2 = -\sqrt{5} + 1 + 1 = -\sqrt{5} + 2 \approx -0,236$, что равноценно прекращению «кручения».

Не смотря на то, что при $p = 1$ «кручения» являются изначальными также как и при $p = 0$, первичными в этом процессе остаются корни (2.245) при $p = 0$, отражающие статическое состояние модели и образующие с помощью выражения (2.236) динамические коэффициенты, т.е. «металлические» пропорции при $p = 1$ в формуле (2.245).

На этом системные свойства «металлических» пропорций не исчерпываются. По мере увеличения в уравнениях размерности степеней, изменения целочисленных коэффициентов и свободных членов, наиболее частые проявления «золотых», «серебряных» и «бронзовых» пропорций сохраняются, но во взаим-

ном сочетании. Например, в уравнении $x^4 - x^3 - x - 1 = 0$ одним из нулей будет «золотая» пропорция Φ , в уравнении $x^4 - x^2 - 1 = 0$ один из нулей будет $\sqrt{\bar{\Pi}}$. В качестве примеров сочетания «металлических» нулей для двух основных пропорций ($1,618\dots = \Phi$ и $2 = S$), рассмотрим следующие уравнения:

$$\text{а) } x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0,$$

$$\text{где } x_1 = 2 + \sqrt{3}, \quad x_2 = 2 - \sqrt{3} = 1/x_1, \quad x_3 = \Pi^2, \quad x_4 = \bar{\Pi}^2;$$

$$\text{б) } x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 19x - 6 = 0,$$

$$\text{где } x_1 = 2, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = -\bar{\Pi}^2, \quad x_4 = -\Pi^2;$$

$$\text{в) } 2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0,$$

$$\text{где } x_1 = 2, \quad x_2 = 1/2, \quad x_3 = -\bar{\Pi}^2, \quad x_4 = -\Pi^2.$$

Выбор в качестве моделей квадратных уравнений неслучаен. Оказывается, чем меньшая степень многочлена и чем меньше значения коэффициентов и свободных членов в уравнениях с одной переменной, тем больше вероятность природной «реализации» данной математической модели. Следовательно, можно предположить, что чем проще уравнение, тем больше вероятность его природной самореализации в плане моделирования наиболее часто встречаемых самоорганизующихся процессов и систем, что подтверждается на примерах из различных областей науки и техники для СЧМС.

2.1.8. Обобщение вурфовых зависимостей и место в них «золотых» вурфов

Известный ученый А.П. Стахов, делая анализ научно-практической важности результатов исследования С.В. Петухова для трехчленного канона строения человеческого тела, не только не отрицает эту важность, но и повторяет математическое доказательство С.В. Петухова о существовании взаимосвязи между «золотым» вурфом ($W = 1,309\dots = \Phi^2 / 2$) и последовательностью Фибоначчи [43]. Существо теоретических доказательств «золотого» вурфа судя по работам С.В. Петухова [37, 38] и на основе анализа этих работ А.П. Стаховым [43] может быть сведено к интерпретированию трех соседних чисел (F_n, F_{n+1}, F_{n+2}) последовательности Фибоначчи как длин трех последовательных отрезков между точками A, B, C и D на прямой, где величина «золотого» вурфа определяется при $n \rightarrow \infty$ по формуле:

$$\begin{aligned}
 W(A, B, C, D) &= \frac{(AB + BC)(BC + CD)}{BC(AB + BC + CD)} = \\
 &= \frac{(F_n + F_{n+1})(F_{n+1} + F_{n+2})}{F_{n+1}(F_n + F_{n+1} + F_{n+2})} = \frac{\Phi^2}{2} = 1,309\dots \approx 1,31.
 \end{aligned}
 \tag{2.251}$$

Однако если провести тщательный анализ размеров звеньев конечностей для человека и животных, которые приводятся в трудах С.В. Петухова [37,38], то можно убедиться, что эти размеры не имеют ничего общего с тройками соседних чисел последовательности Фибоначчи. Следовательно, использование для доказательства реального проявления «золотого» вурфа в кинематических трехчленных блоках человека и животных только из-за факта проявления в ботанике чисел из последовательности Фибоначчи следует считать малоубедительным. Тем более, почему выбрана для этой цели последовательность Фибоначчи, а не последовательность типа Люка, которая также проявляется в ботанике и обладает аналогичным с последовательностью типа Фибоначчи отдельными свойствами вида (2.21) и (2.22), в которых U_n и U_{n-1} формируются на основе обобщенной рекуррентной формулы Фибоначчи-Люка $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$, где U_0 и U_1 – любая пара действительных чисел. А это значит, что если следовать по пути доказательства С.В. Петуховым «золотого» вурфа, то можно использовать любую тройку соседних чисел из бесконечного количества последовательностей Фибоначчи-Люка.

Анализ статистических данных, приведенных в работах С.В. Петухова [37,38], показал, что для размеров звеньев конечностей условие $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$ не выполняется. На самом деле для этих размеров в основном справедливо неравенство

$$U_{n+2} < U_{n+1} + U_n,
 \tag{2.252}$$

которое не может иметь взаимосвязи с «золотым» сечением и «золотым» вурфом. В то же время, возможность моделирования n -звенных вурфов при проектировании технических систем может оказаться перспективным научно-практическим направлением. Так, если мы претендуем на использование «золотых» модулей при построении СЧМС [2,4,6,72], то почему должны довольствоваться только трехзвенным вурфом и не пойти по пути обобщения вурфовых зависимостей с помощью выражения для m -членных последовательных отрезков прямой (m -членных блоков)

$$W_m = \frac{(L_m - l_1)(L_m - l_m)}{L_m(L_m - l_1 - l_m)},
 \tag{2.253}$$

при условии, что

$$L_m = l_1 + l_2 + \dots + l_m \quad (2.254)$$

есть длина прямой линии, то есть сумма ее составляющих отрезков (блоков), где

$$l_m > \dots > l_2 > l_1, \quad (2.255)$$

при $m = 3, 4, 5, 6, 7, \dots$.

Если, например, в формулы (2.253) и (2.254) подставить $m = 3$, то получим вурфовую закономерность для 3-членного блока

$$W_3 = \frac{(l_2 + l_3)(l_1 + l_2)}{l_2(l_1 + l_2 + l_3)}, \quad (2.256)$$

а для 4-членного блока ($m = 4$) аналогичным путем получим

$$W_4 = \frac{(l_2 + l_3 + l_4)(l_1 + l_2 + l_3)}{(l_2 + l_3)(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)}. \quad (2.257)$$

Чтобы перейти к эталонным «золотым» m -вурфам следует произвести замену W_m в формуле (2.253) на функциональную зависимость от «золотой» геометрической прогрессии, то есть W_m заменить на $W_m(\Phi^m)$, а затем l_1 – на Φ^1 и l_m – на Φ^m в (2.254) и (2.255). В результате эти формулы преобразуются в следующий вид:

$$W_m(\Phi^m) = \frac{(L_m - \Phi^1)(L_m - \Phi^m)}{L_m(L_m - \Phi^1 - \Phi^m)}; \quad (2.258)$$

$$L_m = \sum_{i=1}^m l_i = \sum_{i=1}^m \Phi_i; \quad (2.259)$$

$$\Phi^m > \dots > \Phi^2 > \Phi^1, \quad (2.260)$$

при $m = 3, 4, 5, 6, 7, \dots$. Так, например, для 3-членного «золотого» вурфа выражение (2.258) преобразовывается в следующий частный вид:

$$W_3(\Phi^3) = \frac{(\Phi^2 + \Phi^3)(\Phi^1 + \Phi^2)}{\Phi^2(\Phi^1 + \Phi^2 + \Phi^3)} = \frac{\Phi^7}{2\Phi^5} = \frac{\Phi^2}{2} = 1,309\dots \quad (2.261)$$

Для 4-членного «золотого» вурфа с помощью (2.258) получим

$$W_4(\Phi^4) = \frac{(\Phi^2 + \Phi^3 + \Phi^4)(\Phi^1 + \Phi^2 + \Phi^3)}{(\Phi^2 + \Phi^3)(\Phi^1 + \Phi^2 + \Phi^3 + \Phi^4)} \approx 1,106. \quad (2.262)$$

В свою очередь, для 5-членного «золотого» вурфа $W_5 (\Phi^5) \approx 1,05$, а в случае необходимости с помощью (2.258) может быть рассчитано любое значение из $W_m (\Phi^m)$.

2.2. Проявление «золотой» пропорции в алгебраических аналогиях с тригонометрическими функциями

Оказывается, что «золотую» пропорцию $\Phi=1,618\dots$ можно представить в виде предела, к которому стремится отношение двух смежных чисел возрастающей последовательности (2.1), в которой каждый член (I_n) равен сумме двух предыдущих чисел ($I_{n-1} + I_{n-2}$). Эти условия, но с отношением двух чисел в направлении убывания последовательности, позволяют получить обратное значение «золотой» пропорции $\bar{\Phi} = \Phi^{-1} = 0,618\dots$

При $U_0=U_1=1$ выражение (2.1) становится частным случаем, т.е. известной последовательностью Фибоначчи, а при $U_0=1$ и $U_1=3$ - не менее известной последовательностью Люка (табл. 2.4).

Если в качестве U_0 и U_1 задавать любые два числа («ген») и формировать по правилу (2.1) рекуррентные последовательности, то как было показано ранее, в пределе роста количества итераций отношения двух соседних чисел, как правило, стремятся к «золотой» пропорции, т.е. эта закономерность, распространяется на все действительные числа, а не только на числа Фибоначчи и Люка. Но ведь для четырехчленных последовательностей типа (1.46), характеризующих квадратные уравнения и образующихся по уточненной теореме Виета [2,4,6,13], также выполняется условие (2.1). Тогда, не трудно заметить, что если изначально задать (выбрать «ген» [45]) $U_0 = \sqrt{D'}$ и $U_1 = a_2$ для формируемой последовательности по правилу (2.1), то в пределе роста количества итераций отношения двух соседних чисел будет стремиться к «золотой» пропорции.

Из выше приведенного доказательства можно сделать вывод, который сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1 Если приведенное квадратное уравнение $a^2 + pa + q = 0$ имеет действительные корни, то в образуемой для него возвратной последовательности

$$\sqrt{D'}, a_2, a_1, -p, \tag{2.263}$$

отношения чисел $a_2 / \sqrt{D'}$, a_1 / a_2 и $-p / a_1$ всегда имеют направленность изменения к «золотой» пропорции $1,618\dots = \Phi$, где $q = a_1 a_2$.

В геометрической интерпретации теорема 2.1 представляется как теорема 2.2.

Теорема 2.2. Если приведенное квадратное уравнение $a^2 + pa + q = 0$ имеет действительные корни, то в образующей для него возвратной последовательности геометрического вида:

$$2x, a_2, a_1, 2r, \quad (2.264)$$

отношения чисел $a_2 / (2x), a_1 / a_2$ и $2r / a_1$ всегда имеют направленность изменения к «золотой» пропорции $1,618\dots = \Phi$, где r – радиус круга, x – независимая геометрическая переменная, $2x = \sqrt{D'}$, $2r = -p$, $q = a_1 a_2$.

Аналогичным образом, как и для теоремы 2.2, преобразуем теорему 2.1 в алгебраический вид, используя среднеразностное и среднеарифметическое двух чисел.

Теорема 2.3. Если приведенное квадратное уравнение $a^2 + pa + q = 0$ имеет действительные корни, то в образующей для него возвратной последовательности алгебраического вида:

$$2S_p, S_1 - S_p, S_1 + S_p, 2S_1, \quad (2.265)$$

отношения чисел $\frac{S_1 - S_p}{2S_1}, \frac{S_1 + S_p}{S_1 - S_p}$ и $\frac{2S_1}{S_1 + S_p}$ всегда имеют направленность изменения к «золотой» пропорции $1,618\dots = \Phi$, где S_p и S_1 , соответственно, среднее разностное и среднее арифметическое двух чисел, $2S_p = \sqrt{D'}$, $2S_1 = -p$, $q = S_1^2 - S_p^2$.

Для возвратных последовательностей тригонометрического, действующего гиперболического и нового фибоначчи-люковского гиперболического видов по аналогии с теоремой 2.1 сформулируем, соответственно, теоремы 2.4, 2.5 и 2.6.

Теорема 2.4. Если приведенное квадратное уравнение $a^2 + pa + q = 0$ имеет действительные корни, то в образующей для него возвратной последовательности тригонометрического вида:

$$2r \cos \alpha, r(1 - \cos \alpha), r(1 + \cos \alpha), 2r, \quad (2.266)$$

отношения чисел $\frac{1 - \cos \alpha}{2 \cos \alpha}, \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$ и $\frac{2}{1 + \cos \alpha}$ всегда имеют направленность изменения к «золотой» пропорции $1,618\dots = \Phi$, где r – радиус-вектор четверти круга, α – угол в градусной мере, $2r \cos \alpha = \sqrt{D'}$, $2r = -p$, $q = r^2 \sin^2 \alpha$.

Теорема 2.5. Если приведенное квадратное уравнение $a^2 + pa + q = 0$ имеет действительные корни, то в образующей для него возвратной последовательности гиперболического вида:

$$e^t - e^{-t}, e^{-t}, e^t, e^t + e^{-t}, \quad (2.267)$$

отношения чисел $\frac{e^{-t}}{e^t - e^{-t}}, \frac{e^t}{e^{-t}}$ и $\frac{e^t + e^{-t}}{e^t}$ всегда имеют направленность изменения к «золотой» пропорции $1,618\dots = \Phi$, где $e = 2,718\dots$ – неперово число, t – аргумент функции, $e^t - e^{-t} = \sqrt{D'}$, $e^t + e^{-t} = -p$ и $q = 1,0$.

Теорема 2.6. Если приведенное квадратное уравнение $a^2 + pa + q = 0$ имеет действительные корни, то в образующей для него возвратной последовательности фибоначчи-люковского гиперболического вида:

$$\Phi^{t'} - \Phi^{-t'}, \Phi^{-t'}, \Phi^{t'}, \Phi^{t'} + \Phi^{-t'}, \quad (2.268)$$

отношения чисел $\frac{\Phi^{-t'}}{\Phi^{t'} - \Phi^{-t'}}, \frac{\Phi^{t'}}{\Phi^{-t'}}$ и $\frac{\Phi^{t'} + \Phi^{-t'}}{\Phi^{t'}}$ всегда имеют направленность изменения к «золотой» пропорции $1,618\dots = \Phi$, где t' – аргумент функции, $\Phi^{t'} - \Phi^{-t'} = \sqrt{D'}$, $\Phi^{t'} + \Phi^{-t'} = -p$ и $q = 1,0$.

Из теорем 2.1, ..., 2.6 следует, что усеченные последовательности (2.263, ..., 2.268) могут быть представлены в виде неких «квантов» в поле соотношений чисел, образуемых на основе квадратных уравнений. Причем, эти «кванты» всегда имеют направленность на «золотую» пропорцию $1,618\dots = \Phi$. Полученный результат в физическом смысле напоминает ориентацию стрелок магнитных компасов в различных местах Земли. Учитывая всеобщность проявления «золотой» пропорции в природе можно предположить о возможности получения наиболее адекватных моделей для описания природных явлений, в основу которых также будет положена эта пропорция. Однако об этом можно судить только в случае наличия взаимосвязей, подчиняющихся закону «золотой» пропорции, например, в области натуральных чисел, т.е. для обобщенных последовательностей Фибоначчи.

2.3. Анализ «золотых» гиперболических функций и подходов к их получению

Профессор А.П. Стахов в докладе «Сакральная Геометрия и Математика Гармонии» обратил внимание на разработанные совместно с И.С. Ткаченко «гиперболические функции Фибоначчи и Люка» [73]. Опираясь на мнение ученого В.И. Коробко по случаю разработки этих функций как аналогий с функ-

циями О.Я. Боднара [58], имея сомнение в натуральности числа Непера, располагая доказательством известного математика Ф. Клейна о необходимости использовать в знаменателе для базовых гиперболических функций число $2,0$, а также обнаружив взаимосвязь всех кривых второго порядка со средними двух положительных чисел (среднеарифметическим, среднеразностным и среднегеометрическим), с последующим их выражением через квадратные уравнения, мне удалось получить так называемые «фибоначчи-люковые гиперболические функции» (ФЛГФ). Эти функции отличаются от «гиперболических функций Фибоначчи и Люка» знаменателем, так как в первом случае он равен числу 2 , а во втором случае – числу $5^{1/2}$.

Время покажет, какой из новых видов гиперболических функций окажется на практике более предпочтительным или они будут применяться на равных. Используемый А.П. Стаховым и И.С. Ткаченко искусственный прием по параметризации «фибоначчиевого гиперболического косинуса», путем увеличения его степени на число « $1,0$ » в сравнении со степенью в «фибоначчиевом гиперболическом синусе», не позволяет сохранить взаимосвязь со средними двух положительных чисел, которые выражаются через квадратные уравнения и треугольник Пифагора. А это значит, что может быть нарушена адекватность описания физических и химических процессов в природных системах с помощью «гиперболических функций Фибоначчи и Люка» из-за расхождения на «единичное» значение некоего «кванта времени» между фибоначчиевыми гиперболическими синусами и косинусами в динамике развития этих систем.

Полученные мною ФЛГФ являются аналогом «золотых гиперболических функций», открытых намного раньше украинским ученым О.Я. Боднаром. Ученый А.П. Стахов пишет [43]: «... к «золотым гиперболическим функциям» Боднара привела его научная интуиция, подсказавшая ему, что именно такие функции отражают сущность филлотаксиса...». Сформированные независимым научным путем ФЛГФ, от пути, по которому прошел ученый О.Я. Боднар при получении аналогичных «золотых гиперболических функций», вошли отдельным разделом в прикладную «золотую» математику [4]. Эта математика базируется не только на p -«золотые» пропорции (по А.П. Стахову), но и на «металлические» пропорции, последовательности Фибоначчи-Люка и Фибоначчи-Барра, «золотые» ГП и на результаты исследования гармоничности свойств суммы и разности членов биномов [4]. Что касается приоритетности в открытии ФЛГФ, т.е. «золотых» гиперболических функций, то она по праву принадлежит О.Я. Боднару, в связи с чем, в работе [18] предложено их также называть «гиперболическими функциями Боднара».

Впервые связал тригонометрические функции с показательной функцией Л. Эйлер, установив свои знаменитые формулы:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2},$$

где $e = 2,71828\dots$ – неперово число, а i – мнимая единица [74]. Тем самым, Л. Эйлер заложил основы построения гиперболических функций.

Если тригонометрические функции параметризованы окружностью $x^2 + y^2 = 1$, где $x = \cos t$, $y = \sin t$, то гиперболические функции параметризованы уравнением для равнобочной гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, где $x = \operatorname{ch} t$ и $y = \operatorname{sh} t$, т. е.

$$x = \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad (2.269)$$

$$y = \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}. \quad (2.270)$$

Из уравнений (2.269) и (2.270) видно, что первое из них является среднеарифметическим S_1 , а второе – среднеразностным S_p . Кроме этого число «2» в знаменателях формул позволяет сохранить основное свойство показательных функций при $t = 0$, так как в этом случае $x = 1$ и $y = 0$.

Используя некоторую внешнюю схожесть формул Бине с гиперболическими функциями, как отмечает В.И. Коробко, ученые А.П. Стахов и И.С. Ткаченко в одной из своих работ [75] предложили ввести так называемую «гиперболическую тригонометрию Фибоначчи», заменив дискретные значения степеней в формулах Бине на непрерывные [58]. В знаменателях формул фибоначчиевого синуса (sF x) и косинуса (cF x) авторы предлагают использовать $\sqrt{5}$, а это приводит к несоблюдению основного свойства показательных функций со степенью $t = 0$, т. к. в этом случае координата $x \neq 1$, т. е. $x = 2/\sqrt{5}$. В данном случае, как отмечалось ранее, не выполняется условие параметризации, о необходимости соблюдения которого на примере гиперболической функции со знаменателем $\sqrt{2}$ доказал знаменитый немецкий математик Ф. Клейн [76].

Учитывая приведенные выше условия, предлагается ввести так называемые «гиперболические функции Фидия», которые могут быть использованы для описания ряда природных явлений наряду или взамен функций вида (2.269) и (2.270). Так, фидиева гиперболическая функция косинус ($\operatorname{ch}_\phi t$) и фидиева гиперболическая функция синус ($\operatorname{sh}_\phi t$) определяются равенствами:

$$x = \operatorname{ch}_\phi t = \frac{\Phi^{2t} + \Phi^{-2t}}{2} = \frac{e_0^t + e_0^{-t}}{2}; \quad (2.271)$$

$$y = \operatorname{sh}_\phi t = \frac{\Phi^{2t} - \Phi^{-2t}}{2} = \frac{e_0^t - e_0^{-t}}{2}, \quad (2.272)$$

где t – аргумент функции (степень), $\Phi = 1,618\dots$ – «золотая» пропорция (сечение) и $e_0 = 2,618\dots = \Phi + 1 = \Phi^2$.

Тогда формулы фидиевых гиперболических функций для тангенса ($\text{th}_\phi t$) и котангенса ($\text{cth}_\phi t$) будут следующими:

$$\text{th}_\phi t = \frac{\text{sh}_\phi t}{\text{ch}_\phi t} = \frac{e_0^t - e_0^{-t}}{e_0^t + e_0^{-t}}; \quad (2.273)$$

$$\text{cth}_\phi t = \frac{\text{ch}_\phi t}{\text{sh}_\phi t} = \frac{e_0^t + e_0^{-t}}{e_0^t - e_0^{-t}}. \quad (2.274)$$

Для сравнительного анализа общепринятых в математике гиперболических функций, строящихся на основе числа Непера (e), с предлагаемыми фидиевыми гиперболическими функциями, строящимися на основе числа Фидия ($\Phi^2 = e_0$), воспользуемся табл. 2.16, где $t = 0, 1, 2, 3, 4$ – задано в целочисленном виде.

Таблица 2.16

t	Гиперболические функции, образуемые на основе чисел					
	Непера (e)			Фидия ($\Phi^2 = e_0$)		
	(sh t)	(ch t)	(th t)	(sh _{ϕ} t)	(ch _{ϕ} t)	(th _{ϕ} t)
0	0	1,0	0	$0\sqrt{5}/2 = 0$	$2/2=1$	$0\sqrt{5}/2 = 0$
1	2,35040.../2	3,08615.../2	0,76159...	$1\sqrt{5}/2$	3/2	$1\sqrt{5}/3$
2	7,25371.../2	7,52438.../2	0,96402...	$3\sqrt{5}/2$	7/2	$3\sqrt{5}/7$
3	20,0357.../2	20,1352.../2	0,99505...	$8\sqrt{5}/2$	18/2	$8\sqrt{5}/18$
4	54,5796.../2	54,6163.../2	0,99932...	$21\sqrt{5}/2$	47/2	$21\sqrt{5}/47$

Из табл. 2.16 видно, что если исключить число 2 из знаменателей дробей для гиперболических синусов и косинусов, то числители в общепринятых функциях являются иррациональными числами и не поддаются систематизации. Числители в фидиевых гиперболических синусах и косинусах выражаются системно в целых числах с единственным и всеобщим иррациональным коэффициентом $\Phi + \Phi^{-1} = \sqrt{5}$ для $\text{sh}_\phi t$. В них целые числа представляют собой последовательность типа Фибоначчи (0, 1, 3, 8, 21, ...) с пропущенными через одно числами (1, 2, 5, 13, ...). В свою очередь, не менее интересная системность имеет место для $\text{ch}_\phi t$, где целые числа в числителях образуют последовательности типа Люка (2, 3, 7, 18, 47, ...) с пропущенными через одно числами (1, 4, 11, 29, ...). Числители функций $\text{th}_\phi t$ выражаются через последовательности типа Фи-

боначчи (0, 1, 3, 8, 21, ...) с умножением каждого ее члена на $\sqrt{5}$, а знаменатели – через последовательность типа Люка (2, 3, 7, 18, 47, ...). По мере увеличения степени t значения функций $\text{th } t$ и $\text{th}_{\phi} t$ существенно сближаются, стремясь к единице.

Формирование последовательностей типа Фибоначчи и типа Люка с пропущенными через одно числами свидетельствует о рассмотрении нами частного случая для гиперболических функций, т. е. вместо числа Фидия $e_0 = \Phi^2$ должно быть взято другое число, которое сохраняет полученную системность и восстанавливает пропущенные числа в последовательностях.

Оказывается, если за меньшее число взять точку параметризации окружности и равнобочной гиперболы, т. е. $\Phi^0 = 1$, а за большее – число Фидия $e_0 = \Phi^2$, то среднегеометрическим для них будет «золотая» пропорция, т. к.

$$(\Phi^0 \cdot \Phi^2)^{1/2} = 1,618... = \Phi^1. \quad (2.275)$$

Среднегеометрическим для $e^0 = 1$ и числа Непера $2,718... = e$ будет число $1,648... = e^{1/2}$, не обладающее системными свойствами и всего лишь примерно на 1,9 % отличающееся от «золотой» пропорции, что и позволило его принять за натуральное (природное) число.

Для сравнительного анализа гиперболических функций, образованных на основе числа $e^{1/2}$ и фибоначчи-люковых гиперболических функций

$$\text{sh}_{\text{ФЛ}} t' = \frac{\Phi^{t'} - \Phi^{-t'}}{2}, \quad (2.276)$$

$$\text{ch}_{\text{ФЛ}} t' = \frac{\Phi^{t'} + \Phi^{-t'}}{2}, \quad (2.277)$$

$$\text{th}_{\text{ФЛ}} t' = \frac{\text{sh}_{\text{ФЛ}} t'}{\text{ch}_{\text{ФЛ}} t'} = \frac{\Phi^{t'} - \Phi^{-t'}}{\Phi^{t'} + \Phi^{-t'}}, \quad (2.278)$$

$$\text{cth}_{\text{ФЛ}} t' = \frac{\text{ch}_{\text{ФЛ}} t'}{\text{sh}_{\text{ФЛ}} t'} = \frac{\Phi^{t'} + \Phi^{-t'}}{\Phi^{t'} - \Phi^{-t'}}, \quad (2.279)$$

воспользуемся табл. 2.17, где $t' = 0, 1, 2, \dots, 8$ задано в целочисленном виде.

Из табл. 2.17 по прежнему видно отсутствие системности и целочисленности в гиперболических функциях, образуемых на основе числа $e^{1/2}$, и наличие ряда системных свойств в так называемых «фибоначчи-люковых гиперболических функциях», полученных с помощью формул (2.276), (2.277) и (2.278), где $t' = 2t$. Недостающие числа в последовательностях типа Фибоначчи и типа Люка сформировались при нечетных знаменателях $t' = 1, 3, 5, 7, \dots$, т. е. полу-

чены в общем виде последовательности типа Фибоначчи (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...) и типа Люка (2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ...). Эти последовательности в виде двух «спиралеобразных цепочек» находятся «в противофазе» между $\text{sh}_{\text{ФЛ}} t'$ и $\text{ch}_{\text{ФЛ}} t'$, что более очевидно из функции $\text{th}_{\text{ФЛ}} t'$, где по мере увеличения аргумента t' , значения произведений чисел Фибоначчи на коэффициент $\sqrt{5}$ стремятся приблизиться к числам Люка. Например, в функции $\text{th}_{\text{ФЛ}} 7 = 29 / (13\sqrt{5})$ знаменатель $13\sqrt{5} = 29,068\dots$ с числом Фибоначчи 13 с погрешностью 0,23753...% отличается от числителя с числом Люка 29. Для $\text{th}_{\text{ФЛ}} 8 = 21\sqrt{5} / 47$ с числителем $21\sqrt{5} = 46,957\dots$, где 21 – число Фибоначчи, и знаменателем дроби в виде числа Люка 47, погрешность уменьшается до значения 0,090...%.

Если сравнить между собой числа в табл. 2.16 с числами из табл. 2.17, то становится очевидным, что табл. 2.17 поглощает табл. 2.16. Причем, все известные из математики соотношения между общепринятыми гиперболическими функциями справедливы и для соотношений между фибоначчи-люковыми или фидиевыми гиперболическими функциями. Например, основные подобного рода соотношения можно записать следующим образом:

$$\text{ch}_{\text{ФЛ}} t' + \text{sh}_{\text{ФЛ}} t' = \Phi^{t'}; \quad (2.280)$$

$$\text{ch}_{\text{ФЛ}} t' - \text{sh}_{\text{ФЛ}} t' = \Phi^{-t'}; \quad (2.281)$$

$$\text{ch}_{\text{ФЛ}}^2 t' - \text{sh}_{\text{ФЛ}}^2 t' = 1. \quad (2.282)$$

Полученная Л. Эйлером в 1740 г. замечательная формула

$$e^{iy} = \cos y + i \cdot \sin y \quad (2.283)$$

в случае замены y на угол $\varphi = n\pi$, раскрывает связь круговых функций с показательной функцией мнимого аргумента и позволяет выразить круговые функции через показательную функцию. Причем, угол $\varphi = n\pi$ не зависит от конкретного значения π в радианной мере, а обозначает количество (n) полупериодов (π) в гармоническом колебании. Следовательно, Л. Эйлер отражает условную взаимосвязь между числами e и π в формуле (2.280), а не в абсолютном понимании, как это представляют многие из ученых. По этому поводу Ф. Клейн пишет: «Если, таким образом, заранее вскрыть аналогию между тригонометрическими и гиперболическими функциями, то великое открытие Эйлера, выражаемое формулой $f(\varphi) = e^{i\varphi}$, теряет характер поразительной неожиданности» [76]. В следующем абзаце этой же работы Ф. Клейн доказывает возможность использования в гиперболических функциях вместо числа e других чисел, как неких параметров в пучке параллелей [76].

Таблица 2.17

t'	Гиперболические функции, образуемые на основе чисел					
	Непера ($e^{1/2}$)			Фидия ($\Phi = e_0^{1/2}$)		
	$\text{sh}_{e^{1/2} t'}$	$\text{ch}_{e^{1/2} t'}$	$\text{th}_{e^{1/2} t'}$	$\text{sh}_{\Phi t'}$	$\text{ch}_{\Phi t'}$	$\text{th}_{\Phi t'}$
0	0	1,0	0	$\frac{0\sqrt{5}/2}{=0}$	$2/2=1$	$\frac{0\sqrt{5}/2}{=0}$
1	1,0421.../2	2,25525.../2	0,4621...	1/2	$1\sqrt{5}/2$	$1/(1\sqrt{5})$
2	2,3504.../2	3,08615.../2	0,7615...	$1\sqrt{5}/2$	3/2	$1\sqrt{5}/3$
3	4,2585.../2	4,7048.../2	0,9051...	4/2	$2\sqrt{5}/2$	$4/(2\sqrt{5})$
4	7,2537.../2	7,5243.../2	0,9640...	$3\sqrt{5}/2$	7/2	$3\sqrt{5}/7$
5	12,1004.../2	12,2645.../2	0,9866...	11/2	$5\sqrt{5}/2$	$11/(5\sqrt{5})$
6	20,0357.../2	20,1352.../2	0,9950...	$8\sqrt{5}/2$	18/2	$8\sqrt{5}/18$
7	33,0852.../2	33,1456.../2	0,9981...	29/2	$13\sqrt{5}/2$	$29/(13\sqrt{5})$
8	54,5796.../2	54,6163.../2	0,9993...	$21\sqrt{5}/2$	47/2	$21\sqrt{5}/47$

Но если можно варьировать параметром (отклоняясь от числа $e = 2,718\dots$) в гиперболических функциях, то отклонения от числа $\pi = 3,14159\dots$ также не нарушит равенство в формуле Л. Эйлера (2.283). Следовательно, предлагаемые константы $\pi_0 = 3,144605\dots$ и $e_0 = 2,618033\dots = \Phi^2$, а также $e_0^{1/2} = 1,618033\dots = \Phi$, могут быть использованы в качестве альтернативных действующим π и e или для определения области допустимых решений в качестве верхних (или нижних) границ.

Выводы

По мере дальнейшего развития прикладной «золотой» математики, она из своего «зачаточного» состояния может быть переведена в более «зрелое» состояние, и стать намного доступнее и привлекательнее не только для специалистов с математическими наклонностями, но и с гуманитарным складом ума при создании междисциплинарной науки. Полученные нами научные результаты в схематическом виде приведены на рис. 2.16 и рис. 2.17.

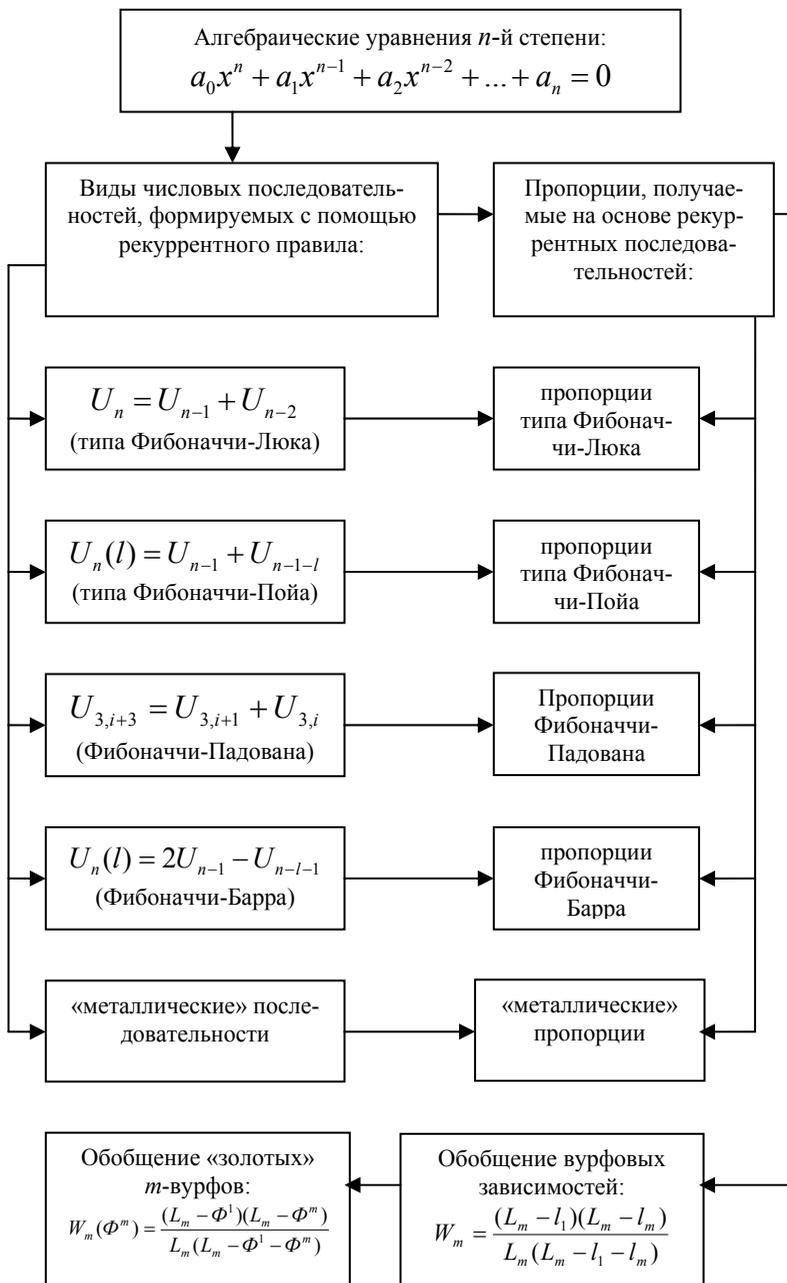


Рис. 2.16

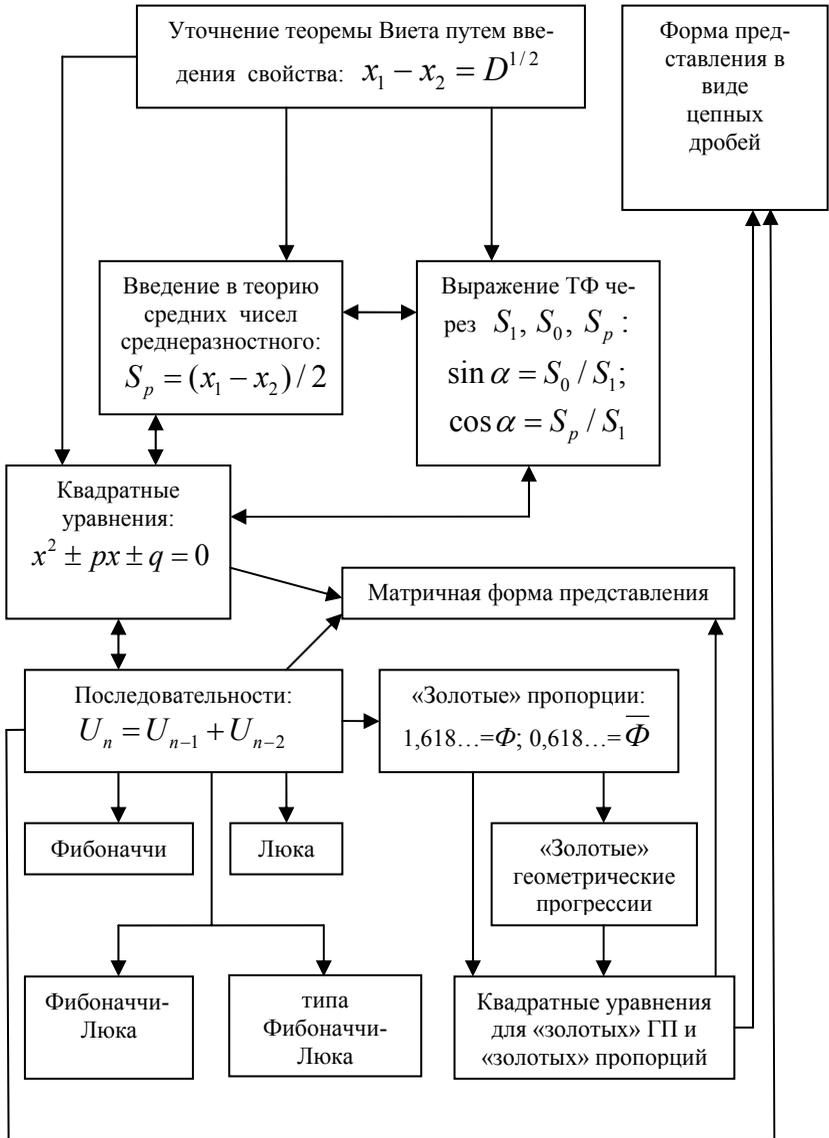


Рис. 2.17

Итак, пусть правило «золотого» сечения венчает наши усилия в поисках оптимальных процедур поиска.

А.А. Первозванский

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в этой работе приводятся основы унификации элементарной математики, которые требуют своего дальнейшего развития.

За последние два столетия, несмотря на тенденцию к возрастанию роли абстракции и обобщения в математике, сложилось мнение об исчерпании возможностей получения существенного нового в рамках элементарной алгебры и тригонометрии. Тем более, в течение четырех столетий никто из математиков не решился посягнуть на уточнение теоремы Виета, а ведь, по мнению Э.Т. Белла создание универсальных математических методов стоит в повестке дня. Следовательно, упущение из поля зрения такого математического свойства, как $a_1 - a_2 = \sqrt{D'}$, привело к потере ряда связывающих и конвергирующих звеньев между основными разделами математики, что не позволило обнаружить несколько скрытых форм одного и того же предмета.

Элементарная математика немислима без деления на следующие две составляющие:

- арифметика, переходящая в алгебру;
- геометрия, переходящая в тригонометрию.

В книге У.У. Сойера «Прелюдия к математике» приводятся отдельные примеры взаимосвязи между тригонометрическими и алгебраическими функциями. Например, он пишет, что числа треугольника Паскаля встречаются в алгебре при возведении $(1+x)$ в различные степени с последующим разложением в ряды, а также встречаются в тригонометрии в процессе произведения соответствующих преобразований с помощью формулы для тангенса суммы двух углов [77].

В монографии арифметика и геометрия непосредственно не рассматривались, а лишь использовались в качестве общеизвестных математических инструментов по мере необходимости для создания основ унификации элементарной математики. Что касается алгебры и тригонометрии, то они были взяты за тот материал, на основе которого и проводилась эта унификация. Причем, алгебра и геометрия использовались в необходимом объеме для достижения поставленной научно-практической цели. Разработанный НЛМА, базирующийся на «золотом» сечения и различного рода последовательности (прикладную «золотую» математику), собственно и позволил заложить эти основы унификации не только для элементарной, но и для всей математики. Дело в том, что жесткой границы между элементарной и высшей математикой не существует, поэтому разработанные основы унификации в определенной степени распространяются и на высшую математику.

Как было показано в этой работе, «золотая» пропорция и последовательности Фибоначчи-Люка в НЛМА занимает ключевые позиции. Этот математический аппарат, по мере его дальнейшего развития, позволит перевести прикладную математику из «зачаточного» состояния в более «зрелое» состояние и сделает ее намного доступнее и привлекательнее не только для специалистов с математическими наклонностями, но и с гуманитарным складом ума, стремясь устанавливать взаимосвязи между математическими понятиями и окружающим нас миром.

Суть выше сказанного можно выразить словами выдающегося польского математика Г. Штейнгауза: «Прикладная математика находится в зачаточном состоянии. Сегодня мы еще в состоянии направить ее развитие в любую сторону и располагаем в этом отношении неограниченной свободой. Необходимо лишь понять, что математика не свод готовых ответов на любой вопрос. Математика – это скорее школа мышления. Естественные и технические науки также нельзя рассматривать лишь как реестр наблюдений и экспериментов. Прикладная математика есть не что иное, как сотрудничество математики и этих наук. Прикладной математики в виде готовой теории не существует. Она возникает, когда математическая мысль прикасается к окружающему миру, но лишь при условии, если и математический дух, и природная материя не закоснели. Следует иметь в виду, что наука не только описывает существующую действительность, но и создает новую, поэтому математик должен занимать активную позицию: не ожидать задач, а самому их ставить. Вряд ли можно сомневаться, что успехи так понимаемой прикладной математики превзойдут самые смелые ожидания» [1].

Следует отметить, что, не смотря на получаемые хорошие результаты моделирования с помощью прикладной «золотой» математики аппаратных средств ТКС ДН, наблюдается тенденция к росту спроса этого ЛМА и на уровне создания эффективных программных средств. Так, если алгоритм Дейкстры для поиска кратчайшего пути между данной парой вершин графа реализуется с помощью фибоначчиевой кучи (стека) и по вычислительной сложности не улучшаем, то реализация алгоритма Прима с помощью фибоначчиевой кучи позволяет получить наименьшую вычислительную среди известных в настоящее время алгоритмов построения наименьшего покрывающего дерева. Кроме этого, группа американских ученых в области математики и программирования отдает предпочтение построению хеш-функций методом умножения, ссылаясь на доказательство Д.Э. Кнута (в 1972 г.) о выборе наиболее удачной для этой цели константы $0,618\dots = \overline{\Phi}$ [78,79,80], а симплекс метод поиска (метод Нелдена-Мида) из-за использования его для анализа унимодальных функций по всей видимости так же может быть упрощен с помощью использования параметров сжатия и растяжения симплекса в «золотых» пропорциях [17]. Однако следует предупредить, что этот метод не имеет отношения к симплекс-методу линейного программирования, а сходство названий носит случайный характер [81].

ЛИТЕРАТУРА

1. Штейнгауз Г. Задачи и размышления // Пер. с польского. – М.: Мир, 1972. – 400 с.
2. Ясинский С.А. Основы логико-математического моделирования систем «человек-машина-среда». – СПб.: ВУС, 2002. – 212 с.
3. Ясинский С.А. Синтез сетей связи на основе «металлических» пропорций. – СПб.: ВУС, 2002. – 108 с.
4. Ясинский С.А. Прикладная «золотая» математика и ее приложения в электросвязи. – М.: Горячая линия – Телеком, 2004. – 239 с.
5. Ясинский С.А. Алгоритм упрощения математических моделей в теории нелинейной фильтрации // Инновационная деятельность в ВС РФ. Труды всеармейской НПК. – СПб.: ВУС, 2001. – С. 75-77.
6. Ясинский С.А. «Золотая» пропорция в электросвязи. – СПб.: ВУС, 1999. – 164 с.
7. Семенюта Н.Ф., Ясинский С.А. Закономерности рекуррентных чисел Фибоначчи в лестничных электрических цепях // Электрическая связь и радио на железных дорогах России: Межвуз. сб. НТ. – СПб.: МПС РФ, ПГУПС, 2000. – С. 40-47.
8. Берснев И.И., Ясинский С.А. Обеспечение наибольшего постоянства наклона фазовой характеристики в искусственных линиях для тактовой сетевой синхронизации // Инновационная деятельность в ВС РФ. Труды всеармейской НПК. – СПб.: ВУС, 2001. – С. 77-78.
9. Ясинский С.А. Построение эталонных АЧХ для ARC-цепей на основе «золотых» пропорций // Математическое и программное обеспечение вычислительных систем: Межвуз. сб. НТ. – М.: Минобразование России, НИЦ ПриС, 1998. – С.78-83.
10. Ясинский С.А. Уточнение «абсолютных» уровней в электросвязи // Математическое и программное обеспечение вычислительных систем: Межвуз. сб. научн. тр. – М.: Минобразование России, РГРТА, 1999. – С. 148-153.
11. Семенюта Н.Ф., Ясинский С.А. Проблемы уровней сигналов в электросвязи // Проблемы безопасности на транспорте: Тез. докл. Международной НПК. – Гомель: Бел. ГТУ, 2002. – С. 192.
12. Семенюта Н.Ф., Ясинский С.А. Электрическая модель золотой пропорции // Проблемы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса: Тез. докл. Международной НПК. Ч.II. – Гомель: Бел. ГТУ, 2003. – С. 137-139.
13. Ясинский С.А. Унифицированные математические модели для анализа и синтеза элементов телекоммуникационных сетей. – СПб.: ВУС, 2003. – 184 с.

14. Ясинский С.А. Определение предельной границы уменьшения коэффициента бегущей волны антенны, как обратного значения «золотого» сечения в квадрате // Инновационная деятельность в ВС РФ. Труды всеармейской НПК. – СПб.: ВУС, 2004. – С. 333-335.
15. Ясинский С.А. Резонансная согласующая цепь с повышенной структурной надежностью // Инновационная деятельность в ВС РФ. Труды всеармейской НПК. – СПб.: ВУС, 2003. – С. 336-340.
16. Чернолес В.П., Ясинский С.А. и др. Дискретная реактивная цепь (варианты) // Заявка на группу (4-ре) изобретений №2004137201 от 20.12.04 г.
17. Ясинский С.А. «Золотое» сечение в культурном и социально-экономическом развитии общества с приложениями в связи и логистике. – СПб.: ВАС, 2005. – 176 с.
18. Ясинский С.А. Основы динамических аналогий в исследовательской деятельности. – СПб.: ВУС, 2004. – 164 с.
19. Ясинский С.А. О прикладной «золотой» математике и ее приложениях в электросвязи // Инновационная деятельность в ВС РФ. Труды всеармейской НПК. – СПб.: ВУС, 2002. – С. 67-69.
20. Ясинский С.А. Унификация геометрических кривых второго порядка // Личность и Культура. – СПб.: 2002. № 5/6.
21. Ясинский С.А. Унификация элементарной математики – это реально // Личность и Культура. – СПб.: 2003. № ½. – С. 35-36.
22. Мантуров О.В. и др. Математика в понятиях, определениях и терминах: В 2 ч. – М.: Просвещение, 1982. – Ч. 2. – 351 с.
23. Ясинский С.А. От эстетического закона Цейзинга к всеобщему и главному закону развития природы // Книга: «Этика. Эстетика. Экономика». – СПб.: СПб. ТПП, 2002. – С. 209-230.
24. Венецкий И.Г., Венецкая В.И. Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе. – М.: Статистика, 1979. – 447 с.
25. Лапшин Б.А. Новая теория и расчет фильтров и трансформаторов на отрезках передающих линий. – СПб.: Наука, 1998. – 188 с.
26. Скопец Э.А. Сравнение различных двух положительных чисел // Квант. – М.: 1971. – № 2. – С. 20-23.
27. Гольдман А., Звавич Л. Числовые средние и геометрия // Квант. – М.: 1990. - № 9. – С. 62-64.
28. Крейн М., Нудельман А. Замечательные пределы, порождаемые классическими средними // Квант. – М.: 1981. – № 9. – С. 13-15.
29. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности. – М.: Наука, 1975. – 48 с.
30. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1978. – 144 с.
31. Джини К. Средние величины. – М.: Статистика, 1970. – 448 с.

32. Бутусов К.П. «Золотое сечение» в солнечной системе // *Астрономия и небесная механика. Серия: Проблемы исследования Вселенной.* – М., - Л.: АН СССР, 1978. – Вып. 7.
33. Ясинский С.А. Пропорции и последовательности Фибоначчи-Падована // *Личность и Культура.* – СПб.: 2005. № 5. – С. 34.
34. Пойа Д. Математическое открытие. – М.: Наука, 1970. - 452 с.
35. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения. - М.: Знание, 1979. – 64 с.
36. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. - М.: Знание, 1979. – 64 с.
37. Петухов С.В. Исследования по неевклидовой биомеханике // *Биомеханика систем человек-машина.* – М.: Наука, 1981. – С. 37-61.
38. Петухов С.В. Геометрия живой природы и алгоритмы самоорганизации. – М.: Знание, 1988. – 48 с.
39. Ясинский С.А. «Золотое» сечение – красивая сказка и всеобщий закон развития природы, общества и мышления // *Личность и Культура.* – СПб.: 2004. № 3. – С. 22-26; № 4. – С. 24-28.
40. Родин В.А., Ясинский С. А. Детерминизм в самоорганизующихся системах: Учебное пособие. – СПб.: ВУС, 2001. - 108 с.
41. Ясинский С.А. От пирамиды Хеопса к системе «золотых» пирамид. - СПб.: «Петербургская Новая Школа», 2001. – 64 с.
42. Булатов М.С. Геометрическая гармонизация в архитектуре Средней Азии IX-XV вв. – М.: Наука, 1988. – 363 с.
43. Стахов А.П. Новая математика для живой природы. – Винница: ТОВ «ИТГ», 2003. – 264с.
44. Ясинский С.А. Уточнение уравнений «золотой» геометрической прогрессии для синтеза элементов телекоммуникационных сетей // *Инновационная деятельность в ВС РФ. Труды всеармейской НПК.* – СПб.: ВУС, 2003. – С. 156-157.
45. Бариев Р.Х., Ясинский С.А. Философско-методологические основы исследовательской деятельности. – СПб.: ВУС, 1999. – 92 с.
46. Ясинский С.А. Основные математические свойства последовательностей Фибоначчи-Люка, используемых при моделировании дискретных реактивных цепей // *Инновационная деятельность в ВС РФ. Труды всеармейской НПК.* – СПб.: ВАС, 2005. – С. 276-278.
47. Кострыкин А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры: Учебник для вузов. – М.: Физматлит, 1994. – 320 с.
48. Ясинский С. А. Простейшие свойства последовательностей типа Фибоначчи-Люка для анализа и синтеза элементов телекоммуникационных сетей // *Инновационная деятельность в ВС РФ. Труды всеармейской НПК.* – СПб.: ВАС, 2005. – С. 278-279.

49. Ефимов Н.В. Квадратичные формы и матрицы. – М.: Наука, 1964. – 160 с.
50. Кнут Д.Э. Искусство программирования. Основные алгоритмы: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», том 1, 2002. – 720 с.
51. Кнут Д.Э. Искусство программирования. Основные алгоритмы: Пер. с англ. – М.: Мир, том 1, 1976. – 736 с.
52. Мессель Э. Пропорции в античности и в средние века. – М.: Изд-во Всесоюзной академии архитектуры, 1936. – 257 с.
53. Шишков Г.Б. Числа Фибоначчи-Шишкова: Математические новации: Научное издание. – М.: Изд-во Российской эконом. академии, 1994. – 28 с.
54. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения // Пер. с англ. – М.: Мир, 1971. – 511 с.
55. Мантуров О.В. и др. Математика в понятиях, определениях и терминах: В 2 ч. – М.: Просвещение, 1982. – Ч. 1. – 320 с.
56. Успенский В.А. Треугольник Паскаля. – М.: Наука, 1966. – 36 с.
57. Гарднер М. Математические новеллы // Пер. с англ. – М.: Мир, 1974. – 456 с.
58. Коробко В. И. Золотая пропорция и проблемы гармонии систем. – М.: Ассоциация СВ стран СНГ, 1997. – 373 с.
59. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. – М.: Советское радио, 1969. – 488 с.
60. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов. – М.: Физматгиз, 1962. – 476 с.
61. Дружинин Г.В. Надежность систем автоматики. – М.: Энергия, 1967. – 528 с.
62. Касаткин В.Н. Необычные задачи математики.– Киев: Радянська школа, 1987. – 128 с.
63. Цянь–Сюэ–Сэнь. Техническая кибернетика, 1956. – 462 с.
64. Газале М. Гномон. От фараонов до фракталов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 272 с.
65. Соколов А. Тайны «золотого» сечения // Техника молодежи. – М.: 1978. № 5. – С. 40-43.
66. Ясинский С.А. «Золотое сечение» в экономике // Книга: «Этика. Эстетика. Экономика». – СПб.: СПб. ТПП, 2002. – С. 355-388.
67. Ясинский С.А. Уточнение теории пассионарности и ритмы мозга // Личность и Культура. – СПб.: 2000. № 4. – С. 47-51.
68. Ясинский С.А. Уточнение теории пассионарности, моделирования взаимосвязей между темпераментами и инвариантами ритмов мозга // Книга: «Этика. Эстетика. Экономика». – СПб.: СПб. ТПП, 2002. – С. 273-294.

69. Ясинский С.А. Обобщенная математическая модель для международной системы предпочтительных чисел и инвариантов ритмов мозга // Инновационная деятельность в ВС РФ. Труды всеармейской НПК. – СПб.: ВУС, 2001. – С. 128-130.
70. Кирпичев М.В. Теория подобия. – М.: Изд-во АН СССР, 1953. – 96 с.
71. Spinadel, Vera W. De, «New Smarandache Sequences: The Family of Metallic Means» // «Proceedings of the First International Conference on Smarandache Type Notions in Number Theory». – Romania and USA: American Research Press, USA. – S. 79-115.
72. Ясинский С.А. Уточнение системы предпочтительных чисел для опережающей стандартизации на основе «золотой» пропорции // Металлообработка. – СПб.: Политехника, 2003. № 3 (15). – С. 37-41.
73. Стахов А.П. Сакральная геометрия и математика гармонии. – Винница: ТОВ «ИТГ», 2003. – 32 с.
74. Колосов А.А. Книга для внеклассного чтения по математике. – М.: ГУПИ МП РСФСР, 1963. – 463 с.
75. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи // Доклады АН Украины, 1993. – Т. 208, № 7. – С. 9-14.
76. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х томах. Т. 1. – М.: Наука, 1987. – 432 с.
77. Сойер У.У. Прелюдия к математике. – М.: Просвещение, 1965. – 356 с.
78. Кнут Д.Э. Искусство программирования. Сортировка и поиск: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», том 3, 2001. – 832 с.
79. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. – М.: МЦНМО, 2000. – 960 с.
80. Ясинский С.А. Оптимальные «золотые» алгоритмы поиска, сортировки и хеширования для анализа и синтеза телекоммуникационных сетей // Инновационная деятельность в ВС РФ. Труды всеармейской НПК. – СПб.: ВУС, 2002. – С. 65-67.
81. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: В 2-х книгах. Книга 1. Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 350 с.