А.П. Стахов

«Математика Гармонии», основания математики и преодоление кризиса в современной математике

1. Введение

Как известно, математика исторически началась с двух практических задач – *счета* и *измерения*. Проблема счета, в конечном итоге, привела к формированию понятия *натурального числа* – первого основополагающего понятия математики, без которого немыслимо ее существование. Для изучения свойств натуральных чисел в древнегреческой науке возникла *теория чисел* – первая фундаментальная теория математики. «Ключевым» античным открытием в этой области является *позиционный принцип представления чисел,* предложенный вавилонскими математиками. Это принцип лежит в основе *десятичной системы* и *двоичной системы* – основы современных компьютерных технологий.

Проблема измерения лежит у истоков возникновением геометрии («науки об измерении Земли»). Однако «ключевое» математическое открытие в этой области было сделано в научной школе Пифагора. Речь идет о доказательстве существования *несоизмеримых отрезков* – открытия, которое по значимости для математики и науки в целом сравнивают с открытием *геометрии Лобачевского* в первой половине 19-го века и *теории относительности Эйнштейна* в начале 20-го века. Это открытие привело к введению в математику *иррациональных чисел* – второго (после натуральных чисел) основополагающего понятия математики. «Проблема несоизмеримости» вызвала первый в истории математики кризис в ее основаниях. Для ее разрешения выдающийся геометр Евдокс предложил *метод исчерпывания,* с помощью которого он построил *теорию несоизмеримости* - одно из величайших достижений древнегреческой математики. Эта теория, изложенная в «Началах» Евклида, в основном совпадает с современной теорией иррациональных чисел, предложенной Дедекиндом и Кантором в 1872 году.

Современная математика находится в состоянии глубочайшего кризиса, который начался в начале 20-го века и из которого не видно выхода. Анализ этого кризиса проведен в книге известного американского математика **Мориса Клайна** [1], почетного профессора Нью-Йоркского университета. В своей замечательной книге [1] Клайн пишет:

«*История математики знает не только величайшие взлеты, но и глубокие падения ... Осознание того, что сверкающая великолепием витрина человеческого разума далеко не совершенна по своей структуре, страдает множеством недостатков и подвержена чудовищным противоречиям, могущим вскрыться в любой момент, нанесло еще один дар по статусу математики. Но бедствия, обрушившиеся на математику, были вызваны и другими причинами. Тяжелые предчувствия и разногласия между математиками были обусловлены самим ходом развития математики за последние сто лет. Большинство математиков как бы* *отгородились от внешнего мира, сосредоточив усилия на проблемах, возникающих внутри самой математики, - по существу, они порвали с естествознанием».*

И далее:

«Естествознание было кровью и плотью математики и питало ее живительными соками. Математики охотно сотрудничали с физиками, астрономами, химиками и инженерами в решении различных научно-технических проблем, а часто и сами являлись выдающимися физиками и астрономами. В 17-18 вв., а также на протяжении большей части 19 в. различие между математикой и теоретическим естествознанием отмечалось крайне редко. Многие ведущие математики, работая в области астрономии, механики, гидродинамики, электромагнетизма и теории упругости, получили здесь несравненно более важные результаты, чем в собственно математике. ***Математика была царицей и одновременно служанкой естественных наук (****выделено А.С.****)****».*

Таким образом, вслед за Бэконом, Фурье, Клейном, Курантом и другими выдающимися математиками, Морис Клайн усматривает причину современного кризиса в математике в ее отходе от естествознания, которое в течение многих столетий было главным источником развития математики. **Отход математики от теоретического естествознания является крупнейшей «стратегической ошибкой» математики 20-го века и главной причиной ее современного кризиса.**

Еще одной причиной является *фрагментарность* современной математики, которая в настоящее время представляет собой набор различных слабосвязанных математических теорий, не имеющих общей цели и направленности. Попытки объединить различные математические теории предпринималась многими математиками. В 19-м веке выдающийся математик **Феликс Клейн** попытался объединить все ветви математики на основе икосаэдра, Платонового тела, дуального додекаэдру [2]. По существу исследования Клейна можно рассматривать как дальнейшее развитие так называемой «икосаэдро-додекаэдрической идеи», которая, начиная с Пифагора, Платона, Евклида и Кеплера, «красной нитью» проходит через всю историю науки. **Клейн трактует икосаэдр, основанный на золотом сечении, как геометрический объект, из которого, по его мнению, вытекают ветви пяти математических теорий: *геометрии, теории Галуа, теории групп, теории инвариантов* и *дифференциальные уравнения.*** Главная идея Клейна предельно проста: *"Каждый уникальный геометрический объект так или иначе связан со свойствами икосаэдра».* **К сожалению, эта замечательная идея не получила развития в современной математике, что является еще одной «стратегической ошибкой» в ее развитии [3, 4].**

В работе [3] я попытался проанализировать «стратегические ошибки» в развитии математики, а в работе [4] – показать роль «Золотого Сечения» и «Математики Гармонии» в преодолении этих «стратегических ошибок».

В настоящей статье я хотел бы еще раз привлечь внимание к этой проблеме, сконцентрировав внимание на связи «Математики Гармонии» с основаниями математики, в частности, с двумя фундаментальными теориями математики - *теории чисел* и *теории измерения.*

2. «Золотая» теория чисел

Как известно, классическая теория чисел начинается со следующего определения натурального числа, которое приведено в «Началах» Евклида:

$$N = \underbrace{1+1+1+...1}_{N} \tag{1}$$

Несмотря на предельную простоту этого определения, оно сыграло определяющую роль в развитии теории чисел, поскольку оно лежит в основе понятий *умножения и деления,* определения понятия *простого числа, теории сравнений и теории делимости.*

В статье [5] я показал, что системы счисления с иррациональными основаниями (система Бергмана [6] и коды золотой *p*-пропорции [7]) можно рассматривать как новые геометрические определения действительных чисел, что является основой для создания «золотой» теории чисел. В этой же статье установлено новое свойство натуральных чисел – **Z-свойство**. Напомним его суть. Представим в системе Бергмана [6] произвольное натуральное число *N*:

$$N = \sum_i a_i \Phi^i \tag{2}$$

где A – действительное число, a_i – двоичная цифра {0,1} i-го разряда, i=0,±1,±2,±3,…, Φ^i - вес i-го разряда, $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ (золотая пропорция) - основание системы счисления (2). Если теперь в позиционном представлении (2) заменить все веса Φ^i соответствующими числами Фибоначчи $F_i \left(i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\right)$, то возникающая при этом сумма

$$\sum_i a_i F_i = 0 \tag{3}$$

тождественно равна 0 независимо от исходного натурального числа N.

Результат (3) имеет общий характер и справедлив для всех без исключения натуральных чисел, то есть, спустя 2.5 тысячелетия после начала изучения натуральных чисел установлено их новое свойство. И обнаружено это свойство только благодаря введению системы Бергмана [6], основанной на «золотой пропорции»!

3. Противоречия в аксиомах непрерывности

В своей первой книге [8] я провел тщательный анализ *аксиом непрерывности,* которые лежат в основе классической теории измерения. Как известно, теория измерения геометрических величин, восходящая к *несоизмеримым отрезкам,* основывается на группе аксиом, называемых *аксиомами непрерывности,* которые включают в себя *аксиомы Евдокса-Архимеда и Кантора или аксиому Дедекинда*.

Аксиома Евлокса-Архимеда ("аксиома измерения"): Для любых двух отрезков A и B (Рис. 1) можно найти такое натуральное число n, чтобы

$$nB > A. \tag{4}$$

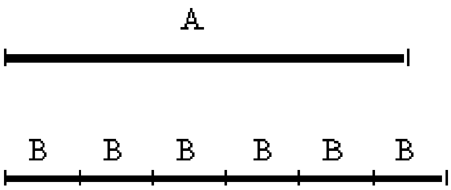

Рисунок 1. Аксиома Евдокса-Архимеда.

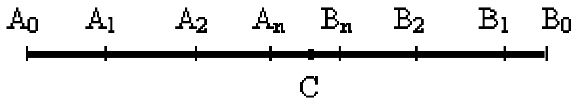

Рисунок 2. Аксиома Кантора.

Аксиома Кантора (о "стягивающихся отрезках"): Если задана бесконечная последовательность отрезков A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2, ... , A_nB_n, ... (Рис. 2), "вложенных" друг в друга, то есть каждый отрезок является частью предыдущего, тогда существует по крайней мере одна точка C, общая для всех отрезков.

Главным результатом теории измерения геометрических величин, вытекающей из этих аксиом, является доказательство существования и единственности решения q *основного уравнения измерения*:

$$Q = qV, \tag{5}$$

где V есть единица измерения; Q - измеряемая величина и q - результат измерения.

Уравнение (5) гласит, что между геометрическими величинами Q и действительными числами существует ваимно-однозначное соответствие. Казалось бы, все прекрасно. Наконец, наступила полная гармония между геометрией и арифметикой. Но не все так просто, если внимательно проанализировать аксиомы непрерывности.

Трудно представить, что формулировка *аксиом непрерывности* и создание математической теории измерения было результатом более чем 2000-летнего периода в развитии математики. *Аксиомы непрерывности* и вытекающее из них *основное уравнение измерения* (5) включают в себя ряд фундаментальных математических идей, оказавших влияние на формирование и развитие различных частей математики.

Необходимо отметить, что *аксиома измерения* является отражением в современной *метода исчерпывания*, который был введен Евдоксом для преодоления кризиса в математике, связанного с открытием *несоизмеримых отрезков*. Эта аксиома обобщает тысячелетний опыт человечества по измерению расстояний, площадей и временных интервалов. Она является сжатым представлением простейшего *алгоритма измерения* отрезка A с помощью отрезка B меньшего, чем A. Этот алгоритм состоит в последовательном откладывании отрезка *B* на *A* и подсчете числа отрезков *B*, укладывающихся на отрезке *A*. И этот алгоритм называется *алгоритмом счета*.

"Алгоритм счета" является основой многих фундаментальных понятий арифметики и теории чисел, в частности понятий *натурального числа* ($n' = n + 1$), *простого* и *составного* числа, а также понятий *умножения, деления* и др. В этой связи огромный интерес представляют евклидовы определения простого (или "первого") и составного числа ("первое число измеряется только единицей", "составное число измеряется другим числом".

Аксиома Кантора, которая вместе с аксиомой Евдокса-Архимеда лежит в основе классической математической теории измерения, была введена Кантором в 1872 году. Эта аксиома содержит в себе еще одно необычное творение математической мысли, называемое абстракцией *"актуальной"* или *"завершенной"* бесконечности. Чтобы уяснить суть этого понятия, мы должны сравнить аксиому Евдокса-Архимеда с аксиомой Кантора. Как в первой, так и во второй аксиомах мы используем понятие "бесконечного". Однако между понятиями "бесконечного", используемыми в этих аксиомах, существует принципиальное различие. Что касается аксиомы Кантора, то бесконечное множество "вложенных" отрезков вместе с объединяющей их точкой *C* рассматривается как заданное всеми своими объектами одновременно. Существование "завершенных" или "актуальных" бесконечных множеств представляет собой наиболее характерную особенность "канторовского" или теоретико-множественного стиля математического мышления.

А теперь я хочу обратить внимание на следующий парадоксальный факт: две аксиомы непрерывности (Рис. 1 и 2) используют различные представления о «бесконечном», которые противоречат друг другу. И математики почему-то на это обстоятельство не обращают внимание. Но ведь это может привести к новым противоречиям в тех теориях, которые используют *основное уравнение измерения* (5). Так оно на самом деле и случилось, когда в начале 20-го века математики обнаружили парадоксы в канторовской теории бесконечных множеств, что и привело в начале 20-го века к глубочайшему кризису в основаниях математики, из которого математика так и не нашла выхода.

"Борьба" между этими двумя толкованиями «бесконечности» - *актуальной и потенциальной* - продолжается до сих пор. Это привело к возникновению двух направлений в математике – *теоретико-множественной математики,* отстаивающей абстракцию актуальной бесконечности, и *конструктивной математики,* основанной на абстракции *потенциальной бесконечности.* Математики-конструктивисты, в частности, русский математик Марков, один из создателей "конструктивной математики", заявляют, что *"мыслить себе бесконечный, то есть никогда не завершаемый процесс как завершенный, невозможно без грубого усилия над разумом, отвергающим такие противоречивые фантазии"*.

В своей книге [8], опубликованной 32 года назад, я написал следующее по поводу аксиом непрерывности: “*В этой связи уместно обратить внимание на внутреннюю противоречивость (в диалектическом смысле) теоретико-множественной теории измерения (и как следствие теории действительных чисел), допускающий в своих исходных положениях (аксиомы непрерывности) сосуществование диалектически противоречивых представлений о бесконечном (актуальной, «статической», завершенной бесконечности – в аксиомах Кантора и Дедекинда) и бесконечности потенциальной, «становящейся», незавершенной – в аксиоме Архимеда)»*.

Таким образом, в книге [8] я пришел к следующим необычным выводам:

1. **Современный кризис в математике в значительной мере определяется кризисом в толковании понятия "бесконечного" в математике.**
2. **Наиболее ярко различие в подходе к понятию бесконечного проявляется в математической теории измерения, основанной на аксиоме Евдокса-Архимеда и аксиоме Кантора. Поскольку в каждой из этих аксиом используются противоречивые и несовместимые друг с другом представления о бесконечном (понятие "актуальной" бесконечности - в аксиоме Кантора и понятие "потенциальной" бесконечности - в аксиоме Евдокса-Архимеда), то отсюда вытекает вывод о противоречивости классической теории измерения и всех вытекающих из нее математических теорий.**
3. **Исключение из математической теории измерения абстракции "актуальной" бесконечности, приводит к автоматическому исключению из нее аксиомы Кантора и постановке вопроса о разработке конструктивной теории измерения, основанной на абстракции "потенциальной" бесконечности.**
4. **Рассмотрение измерения как процесса, завершающегося за "конечное", но потенциально "неограниченное" число шагов, приводит к появлению погрешности дискретизации, принципиально неустранимой в рамках конструктивного подхода к измерению, что приводит к выдвижению проблемы поиска "оптимальных" алгоритмов измерения в качестве главной проблемы "конструктивной" или "алгоритмической" теории измерения.**

Мне показалось, что этот философский результат, касающийся оснований математики, является настолько значительным, что он может заинтересовать современных математиков. И я написал письмо академику Колмогорову. Он мне ответил, но его ответ меня не удовлетворил. Я написал ему еще одно письмо, но ответа не последовало.

После того, как Колмогоров фактически негативно отреагировал на мои предложения, я как-то охладел к этой идее, но вспомнил о ней после контактов с доктором физико-математических наук проф. Александром Зенкиным (Москва). Идеи Зенкина меня просто потрясли. Анализ

канторовской теории бесконечных множеств привел проф. Зенкина к заключению, что доказательства многих теорем Кантора о бесконечных множествах являются логически некорректными, а вся «теория Кантора» в некотором смысле является «мистификацией». Математики 19-го века были очарованы Кантором и приняли его удивительную теорию без должного критического анализа и даже возвели эту теорию в ранг величайших математических открытий 19-го века, лежащих в основаниях математики. Обнаружение парадоксов в канторовской теории бесконечных множеств значительно остудило восторг математиков этой теорией, но окончательную точку в критическом анализе теории Кантора поставил Александр Зенкин. Он показал, что главной ошибкой Кантора было принятие абстракции актуальной бесконечности, что недопустимо в математике. Но без абстракции актуальной бесконечности теория бесконечных множеств Кантора является несостоятельной! Из работ Зенкина я узнал, что впервые на эту проблему обратил внимание Аристотель, который первым предупредил о невозможности использования понятия «актуальной бесконечности» в математике.

4. Конструктивная (алгоритмическая) теория измерения

Что же случится с математической теорией измерения, если абстракция актуальной бесконечности будет исключена из рассмотрения? Это будет означать, что мы должны будем исключить аксиому Кантора из состава аксиом теории измерения. Прежде всего, это будет означать, что теория измерения должна быть построена на конструктивной идее *конечности всякого измерения*. В соответствии с этой идеей всякое измерение осуществляется за *конечное число шагов*. Но в соответствии с конструктивным понятием *потенциальной осуществимости* число шагов измерения может быть установлено как угодно большим и всегда после очередного шага разрешается осуществить следующий шаг. Изложенный методологический базис приводит к осознанию того факта, что любое измерение имеет принципиально неустранимую ошибку измерения, называемую *ошибкой дискретизации*. Отсюда вытекает новая постановка задачи построения математической теории измерения. Одной из проблем при измерении является выбор *алгоритма измерения*. При этом возникает различие между различными n-шаговыми алгоритмами измерения, которые обеспечивают различную *"точность измерения"* для заданного числа шагов алгоритма n. Таким образом, конструктивный подход в теории измерения выдвигает *проблему эффективности или "оптимальности" измерительных алгоритмов в качестве главной проблемы "конструктивной" или "алгоритмической" теории измерения*.

А далее я приведу только общий итог разработки алгоритмической теории измерения, изложенной в книге [8]. Главным результатом является синтез новых, неизвестных ранее «оптимальных алгоритмов» измерения. Наиболее неожиданным из них являются *фибоначчиевые алгоритмы измерения,* основанные на *p-числах Фибоначчи.* Эти фибоначчиевые алгоритмы измерения «порождают» *p-коды*

Фибоначчи, которые лежат в основе «Компьютеров Фибоначчи» как нового направления в компьютерах. Об этом я написал в статье [9].

Заключение

Таким образом, «Математика Гармонии» привела к новому взгляду на две фундаментальные математические теории, лежащие в основании математики – *теорию чисел и теорию измерения,* а также к новому взгляду на «Начала» Евклида [10]. При этом были получены следующие результаты методологического характера, касающиеся основания и истории математики:

1. Установлено, что аксиомы непрерывности (Евдокса-Архимеда и Кантора), лежащие в основе математической теории измерения, используют различные представления о бесконечном (понятие "актуальной" бесконечности - в аксиоме Кантора и понятие "потенциальной" бесконечности - в аксиоме Евдокса-Архимеда), что недопустимо в математике. **Поэтому аксиома Кантора, основанная на абстракции «актуальной бесконечности» должна быть исключена из состава аксиом непрерывности.** Эта идея согласуется с *конструктивным направлением* в современной математике.
2. Такой подход к построению математической теории измерения привел к созданию **конструктивной (алгоритмической) теории измерения**, главной задачей которой является **синтез «оптимальных» алгоритмов измерения**. Это привело к получению бесконечного количества новых, неизвестных ранее «оптимальных» алгоритмов. Наиболее неожиданными «оптимальными» алгоритмами являются фибоначчиневые алгоритмы измерения, основанные на *p-числах Фибоначчи.*
3. Каждый алгоритм измерения «порождает» некоторую новую позиционную систему счисления, в частности, *p-коды Фибоначчи,* которые лежат в основе *компьютеров Фибоначчи* – нового направления в компьютерах, то есть, ***алгоритмическая теория измерения*** **является конструктивной теорией, которая предлагает новые идеи в информатике.**
4. Системы счисления с иррациональными основаниями (система Бергмана [6] и коды золотой *p*-пропорции [7]) лежат в основе **нового геометрического определения числа, что привело к созданию «золотой» теории чисел и открытию новых свойств натуральных чисел типа Z-свойства [5].**
5. **Возвращение к истокам математики, в частности, к «Началам» Евклида, может привести к пересмотру всей математики и восстановлению той цели, которая была сформулирована Евклидом для математики на начальном этапе ее развития.** Согласно «гипотезе Прокла» [10] главной целью, которую ставил Евклид при написании своих «Начал», было дать законченную геометрическую теорию «Платоновых Тел», которые выражали в античной науке «Гармонию Мироздания». Для построения теории «Платоновых Тел» Евклид ввел в Книге II задачу «о делении отрезка в крайнем и среднем отношении» (Теорема II,11), названым позже «золотым сечением». Таким образом, **«Начала» Евклида являются**

первой попыткой создать «Математическую теорию гармонии», основанную на «Платоновых Телах» и «Золотом Сечении», то есть, Евклид в своих «Начал» четко сформулировал перед математикой **главную цель математики - раскрытие математическом языком «Гармонии Мироздания».** В 17 веке Иоганн Кеплер развил идеи Евклида в своей книге «Гармония Мира». Свое восхищение «золотым сечением» он выразил в следующих широко известных словах: ***«В геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем».***

6. **На основании вышеизложенного можно высказать предположение, что именно «Математике Гармонии» [11] отведена роль восстановить в современной математике идеи Евклида о цели и предназначении математики как науки о создании математических моделей «Гармонии Мироздания». Поэтому развитие «Математики Гармонии» как нового междисциплинарного направления современной науки может стать переломным пунктом в развитии математики и привести к сближению математики с теоретическим естествознанием и преодолению современного кризиса в математике.**

Литература

1. Морис Клайн. Математика. Утрата определенности. Пер. с англ. Москва: Мир, 1984 г.
2. Клейн Феликс. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. М., 1989.
3. А.П. Стахов, «Стратегические ошибки» в развитии математики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14555, 27.08.2007
4. А.П. Стахов, Роль «Золотого Сечения» и «Математики Гармонии» в преодолении «стратегических ошибок» в развитии математики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14688, 12.01.2008
5. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. Украинский математический журнал, том. 56, 2004 г.
6. Bergman, G. A. A number system with an irrational base. Mathematics Magazine, No. 31 (1957), 98-119.
7. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. Москва, Радио и связь, 1984 г.
8. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва, Советское Радио, 1977 г.
9. А.П. Стахов, Нужны ли современной науке p-числа Фибоначчи и p-коды Фибоначчи? // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15355, 20.06.2009
10. А.П. Стахов, Гипотеза Прокла: новый взгляд на "Начала" Евклида и Математика Гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15195, 28.03.2009
11. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. World Scientific, 2009.