А.П. Стахов

Нужны ли современной науке *p*-числа Фибоначчи и *p*-коды Фибоначчи?

1. Введение.

Как показывает история науки, новые научные идеи не сразу воспринимаются современниками. Происходит довольно длительный период (40-50 лет) от момента их обнародования до начала их признания. В 1970 г. мы с Игорем Витенько опубликовали статью «Теория оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования» [1]. В этой статье было получено ряд новых математических результатов. Главный из них – это открытие так называемых «фибоначчиевых» алгоритмов измерения (аналого-цифрового преобразования), основанных на специальных числовых последовательностях, задаваемых следующим рекуррентным соотношением:

$$F_p(n)=F_p(n-1)+F_p(n-p-1);\, F_p(1)=F_p(2)=...=F_p(p+1)=1\,(p=0,1,2,3,...) \quad (1)$$

На том основании, что при p=1 это рекуррентное соотношение задает *числа Фибоначччи* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., найденные числовые последовательности были названы *p-числами Фибоначчи.* Теория *p-чисел Фибоначчи* была развита в книге [2].

Несмотря на очевидную новизну и оригинальность этого математического результата, мне до сих пор приходится защищать это математическое открытие от различных нападок. Настоящая статья ставит своей целью показать значимость этого открытия для современной науки, как в теоретическом, так и в прикладном отношении.

2. Теория *p*-чисел Фибоначчи

2.1. ***Треугольник Паскаля и комбинаторные свойства p-чисел Фибоначчи.*** Как известно, *Треугольник Паскаля* является своеобразным символом комбинаторики. Поэтому установление математической связи *чисел Фибоначчи* и затем *p-чисел Фибоначчи* с Треугольником Паскаля и биномиальными коэффициентами стало дополнительным подтверждением фундаментального характера, как чисел Фибоначчи, так и их обобщения - *p-чисел Фибоначчи.* К этому результату независимо друг от друга пришло сразу несколько математиков. Наверное, первым это сделал выдающийся математик, почетный профессор Стенфордского университета (США) Джордж Пойа. Этот результат он изложил в книге *Mathematical Discovery,* опубликованной в 1962 г. (переведена на русский язык в 1970 г. [3]). Я узнал о так называемых «диагональных суммах» треугольника Паскаля из статьи американского математика Вернера Хоггатта [4], когда писал свою первую книгу [2]. В книге [2] я исследовал комбинаторные свойства *p-чисел Фибоначчи* и вывел следующую формулу, которая позволяет выразить p-числа Фибоначчи через биномиальные коэффициенты:

$$F_p(n+1)=C_n^0+C_{n-p}^1+C_{n-2p}^2+C_{n-3p}^3+C_{n-4p}^4+.... \quad (2)$$

Заметим, что для случая p=0 формула (2) сводится к широко известному свойству треугольника Паскаля:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n \qquad (3)$$

Таким образом, *р-числа Фибоначчи* выражают некоторые новые, неизвестные ранее свойства Треугольника Паскаля, что имеет важное значение для комбинаторики.

2.2. *Обобщенные «золотые» р-пропорции.* В книге [2] я установил следующее свойство p-чисел Фибоначчи:

$$\underbrace{\lim}_{n\to\infty} \frac{F_p(n)}{F_p(n-1)} = \Phi_p, \qquad (4)$$

где Φ_p - положительный корень следующего алгебраического уравнения

$$x^{p+1} - x^p - 1 = 0. \qquad (5)$$

Числа Φ_p были названы в [2] *«золотыми» р-пропорциями* на том основании, что при p=1 число Φ_p совпадает с числом $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$, выражающим «золотую пропорцию». **Таким образом, *р-числа Фибоначчи* привели к обнаружению новых математических констант, частным случаем которых является классическая «золотая пропорция».**

2.3. *Матрицы Фибоначчи.* Одним из важных математических результатов, полученных Вернером Хогаттом в его книге [5], была разработка теории так называемой Q-матрицы:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Хоггатт доказал, что при возведении матрицы (6) в n-ю степень мы получаем следующую матрицу

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

где F_{n-1}, F_n, F_{n+1} – числа Фибоначчи.

Если теперь вычислить детерминант матрицы (7), то мы получим следующее выражение

$$\det Q^n = F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, \qquad (8)$$

которое представляет собой ни что иное, как знаменитую *«формулу Кассини»*, связывающую три соседних числа Фибоначчи F_{n-1}, F_n, F_{n+1} ($n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$).

Меня заинтересовали матрицы (6) и (7) и я решил разработать теорию подобных матриц для p-чисел Фибоначчи. Этот результат описан в моей статье [6], написанной на английском языке и опубликованной по рекомендации академика Митропольского в «Докладах Академии наук Украины». В этой статье я ввел понятие Q_p-матрицы:

$$Q_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

и доказал, что при ее возведении в n-ю степень мы получаем следующую матрицу:

$$Q_p^n = \begin{pmatrix} F_p(n+1) & F_p(n) & \cdots & F_p(n-p+2) & F_p(n-p+1) \\ F_p(n-p+1) & F_p(n-p) & \cdots & F_p(n-2p+2) & F_p(n-2p+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_p(n-1) & F_p(n-2) & \cdots & F_p(n-p) & F_p(n-p-1) \\ F_p(n) & F_p(n-1) & \cdots & F_p(n-p+1) & F_p(n-p) \end{pmatrix}, \tag{10}$$

элементами которой являются p-числа Фибоначчи.

Доказано [6], что для заданных $p = 0,1,2,3,...$ и $n = 0,\pm1,\pm2,\pm3,...$ детерминант матрицы (10) задается выражением:

$$\det Q_p^n = (-1)^{pn}. \tag{11}$$

Если теперь вычислить детерминант матрицы (10) согласно правилам вычисления детерминантов, то, используя (11), мы получим обобщенный вариант «формулы Кассини» (8).

Например, для случая p=2 формулы (10) и (11) выглядят следующим образом:

$$Q_2^n = \begin{pmatrix} F_2(n+1) & F_2(n) & F_2(n-1) \\ F_2(n-1) & F_2(n-2) & F_2(n-3) \\ F_2(n) & F_2(n-1) & F_2(n-2) \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\det Q_2^n = 1. \tag{13}$$

Тогда обобщенная «формула Кассини» для этого случая принимает вид:

$$\begin{aligned} Det\, Q_2^n &= F_2(n+1)\left[F_2(n-2)F_2(n-2) - F_2(n-1)F_2(n-3)\right] + \\ &+ F_2(n)\left[F_2(n)F_2(n-3) - F_2(n-1)F_2(n-2)\right] + \\ &+ F_2(n-1)\left[F_2(n-1)F_2(n-1) - F_2(n)F_2(n-2)\right] = 1. \end{aligned} \tag{14}$$

2.3. ***Обобщение формулы Бине для p-чисел Фибоначчи.*** Свое дальнейшее развитие теория p-чисел получила в статьях [7, 8], написанных мною совместно с моим учеником Борисом Розиным и опубликованных в известном физическом журнале “Chaos, Solitons and Fractals”, основанном Нобелевским Лауреатом Ильей Пригожиным.

Рассмотрим алгебраическое уравнение (5). Оно имеет p+1 корней x_1, x_2, …, x_p, x_{p+1}. Далее, без потери общности, будем считать, что корень x_1 всегда совпадает с «золотой» p-пропорцией (4). Далее, каждый их корней $x_k\ (k = 1,2,3,...,p+1)$ удовлетворяет следующему тождеству:

$$x_k^n = x_k^{n-1} + x_k^{n-p-1} = x_k \times x_k^{n-1}, \tag{15}$$

которое непосредственно вытекает из алгебраического уравнения (5).

Используя это тождество, можно показать, что в общем случае p-числа Фибоначчи (1) могут быть выражены в аналитической форме через корни x_1, x_2, …, x_p, x_{p+1} алгебраического уравнения (5) следующим образом:

$$F_p(n) = k_1(x_1)^n + k_2(x_2)^n + ... + k_{p+1}(x_{p+1})^n, \tag{16}$$

k_1, k_2, …, k_{p+1} – постоянные коэффициенты, которые зависят от $(p+1)$ начальных элементов в ряде p-чисел Фибоначчи.

Формула (16) и есть обобщенная «формула Бине» для p-чисел Фибоначчи. При $p=1$ она принимает вид формулы Бине для классических чисел Фибоначчи:

$$F_1(n) = k_1 x_1^n + k_2 x_2^n, \tag{17}$$

где $x_1 = \Phi$ и $x_2 = -\frac{1}{\Phi}$ - корни «золотого» алгебраического уравнения $x^2 - x - 1=0$, а коэффициенты k_1, k_2 соответственно равны: $k_1 = 1/\sqrt{5}$ and $k_1 = -1/\sqrt{5}$. Если подставить значения корней x_1, x_2 и коэффициентов k_1, k_2 в выражение (17), то получим «формулу Бине» для чисел Фибоначчи:

$$F_1(n) = \frac{\Phi^n - (-1/\Phi)^n}{\sqrt{5}}. \tag{18}$$

Таким образом, для *p-чисел Фибоначчи* существует общая формула, которая позволяет их выразить в аналитической форме и является аналогом формулы Бине.

2.4. *Обобщенные p-числа Люка.* В работе [7] получен еще один важный теоретический результат в «теории p-чисел Фибоначчи» - открыты *p-числа Люка,* которые являются обобщением классических *чисел Люка,* задаваемых рекуррентным соотношением:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2};\ L_0 = 2,\ L_1 = 1. \tag{19}$$

Как известно, формула Бине для чисел Люка (19) задается следующим выражением:

$$L_n = x_1^n + x_2^n = \Phi^n + (-1/\Phi)^n \tag{20}$$

Тогда по аналогии с формулой (20) мы можем представить *p-числа Люка* в виде следующей аналитической формулы:

$$L_p(n) = (x_1)^n + (x_2)^n + ... + (x_{p+1})^n. \tag{21}$$

Воспользовавшись свойством (15), легко показать, что *p-числа Люка* задаются также в виде следующей рекуррентной формулы:

$$L_p(n) = L_p(n-1) + L_p(n-p-1);\ L_p(0) = p+1,\ L_p(1) = L_p(2) = ... = L_p(p) = 1 \tag{22}$$

Таким образом, наряду с *p-числами Фибоначчи* существуют *p-числа Люка,* которые являются обобщением классических чисел Люка и могут быть представлены в аналитической форме (аналог формулы Бине для чисел Люка).

Заключая этот раздел, посвященный изложению «теории p-чисел Фибоначчи», я должен отметить, что наиболее сложно в теоретической науке отвечать на вопрос: «А зачем все это нужно?». Я хотел бы ответить на вопрос о том, зачем нужна «теория p-чисел Фибоначчи», вопросом: «А зачем нужна вообще теория чисел Фибоначчи?» Зачем необходимо решать «Проблему Ферма», «Проблемы Гильберта» и вообще большинство проблем, относящихся к тому разделу математики, который называется «чистой математикой»?

3. Приложения *p*-чисел Фибоначчи

3.1. ***Алгоритмическая теория измерения и «фибоначчиевые» алгоритмы аналого-цифрового преобразования.*** Как известно [1], «алгоритмическая теория измерения» зарождалась как сугубо прикладное направление, направленное на решение актуальных проблем техники аналого-цифрового преобразования. **Наиболее важным прикладным результатом этой теории явились *«фибоначчиевые» алгоритмы аналого-цифрового преобразования* [2, 10, 11], которые затем стали основой для проектирования уникальных по своим техническим параметрам аналого-цифровых преобразователей, превышающих мировой уровень по точности и метрологической стабильности [12].**

3.2. ***Коды Фибоначчи, арифметика Фибоначчи, компьютеры Фибоначчи.*** Важным прикладным результатом, вытекающим из алгоритмической теории измерения, явились ***p-коды Фибоначчи и арифметика Фибоначчи,*** **которые стали основой для нового направления в развитии компьютерной техники – *компьютеров Фибоначчи* и *«золотых» компьютеров* [2, 13-18].** Об этом я неоднократно писал в моих публикациях на сайте «Академия Тринитаризма».

3.3. ***Новая теория кодирования, основанная на матрицах Фибоначчи.*** В статье [19] я изложил основы новой теории кодирования, основанной на матрицах Фибоначчи (7, 10). **По своей корректирующей способности новые коды превышают классические алгебраические коды в 1 000 000 и больше раз, что имеет важное прикладное значение для создания информационных систем повышенной надежности.**

3.4. ***Философия («закон структурной гармонии систем»).*** Белорусский философ Эдуард Сороко стал первым ученым, который обратил внимание на *p-числа Фибоначчи* и *«золотые» p-пропорции.* В свой замечательной книге [20] он сформулировал *закон структурной гармонии систем,* который гласит:

> ***"Обобщенные золотые сечения суть инварианты, на основе и посредством которых в процессе самоорганизации естественные системы обретают гармоничное строение, стационарный режим существования, структурно-функциональную ... устойчивость".***

Сороко приводит в своей книге [20] ряд интересных примеров из различных областей науки, демонстрирующих действие своего закона. Например, рассмотрим такой объект как сухой воздух, который является основой жизни на земле. Является ли структура воздуха оптимальной? “Закон Сороко» дает положительный ответ на это вопрос. Действительно, химический состав сухого воздуха таков: азот 78,084%; кислород - 20,948%; аргон - 0,934%; углекислый газ - 0,031%; неон - 0,002%; гелий - 0,001%. Если теперь вычислить приведенную энтропию воздуха, то полученное значение приведенной энтропии будет равно 0,683, что с высокой точностью соответствует инварианту b_2 = 0,0682 (случай p=2). Это означает, что в процессе самоорганизации сухой воздух приобрел оптимальную, то есть "гармоничную" структуру. Этот пример является весьма показательным в том отношении, что "теория Сороко" может быть уже сейчас использована для контроля за состоянием биосферы, в частности, воздушного и водного бассейна.

Ясно, что практическое использование "закона структурной гармонии систем" может принести существенный выигрыш при решении многих технологических, экономических, экологических и других задач, в частности, совершенствовать технологию изготовления структурно-сложных продуктов, контролировать биосферу и т.д.

А теперь рассмотрим некоторые приложения «закона Сороко» в биологии и физике:

3.5. ***Биология (деление клеток).*** Здесь ключевой публикацией является статья американских ученых Collin Paul Spears and Marjorie Bicknell-Johnson [21]. В этой статье используются числовые последовательности типа

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-c} \qquad (22)$$

для описания процессов деления биологических клеток. Нетрудно увидеть, что рекуррентная формула (22) задает p-числа Фибоначчи, если принять $c = p + 1$. В [21] рассматриваются последовательности, генерируемые (22) для следующих значений c=2, 3, 4 (p=1, 2, 3). Приводятся примеры различных биологических объектов, которые размножаются в соответствии с (22).

3.6. ***Физика.*** В прошлом году я получил из международного журнала Journal of Theoretical Physics статью **“CUMULATIVE DIMINUATIONS WITH FIBONACCI APPROACH, GOLDEN SECTION AND PHYSICS” by F. Byuykillic and D.Demirham («Кумулятивные сокращения, основанные на фибоначчиевом подходе, золотое сечение и физика»)** с просьбой дать на нее рецензию. В статье были ссылки на статьи по p-числам Фибоначчи, опубликованные в журнале «Chaos, Solitons and Fractals” [7, 8]. Статья, присланная для рецензирования, посвящена обоснованию возможности использования p-чисел Фибоначчи для моделирования такого физического явления как «кумулятивные сокращения».

Таким образом, с *p-числами Фибоначчи* и *золотыми p-сечениямии* мы разобрались. Оказывается, они используются в современной науке (философия, биология, физика). Осталось ответить на вопрос о прикладном значении *p-кодов Фибоначчи,* соответствующим большим значениям *p*. Оказывается, что такие приложения тоже существуют. Рассмотрим некоторые из них:

3.7. ***Цифровая обработка сигналов.*** Здесь я хотел бы привлечь внимание к публикациям [22, 23]. Эти публикации посвящены созданию "**быстрых алгоритмов цифровой обработки сигналов" (преобразования Фибоначчи-Мерсенна и Фибоначчи-Ферма и другие, подобные дискретным преобразованиям Фурье), причем принципиальным требованиям в новых преобразованиях является представление информации и их обработка в *p*-кодах Фибоначчи** (чем больше *p*, тем алгоритм эффективней). Как подчеркивается в [22, 23], для реализации таких преобразований требуются процессоры в *p*-кодах Фибоначчи с большим *p*.

3.8. ***Фибоначчиевые системы кодирования сложных математических объектов.*** Здесь я хотел бы привлечь внимание к книге В.А. Лужецкого [24]. Владимир Лужецкий - это мой ученик, защитивший докторскую диссертацию на эту тему. В этой книге есть один очень интересный результат. **Его суть состоит в том, что не только числа, но и более сложные математические объекты (комплексные числа, векторы, квартенионы и октавы, матрицы и даже функции) могут представляться в *p*-коде Фибоначчи со значениями *p*=1, 2, 3, 7.** При этом в книге показано, как над такими *p*-кодами выполнять арифметические операции. Эта идея выводит на совершенно новые типы процессоров для обработки сложных математических объектов. И здесь *p*-арифметика Фибоначчи для больших значений *p* играет главенствующую роль. Здесь *p* не выбирают, оно задается рекуррентной формулой для данного математического объекта. Например, комплексные числа являются элементами 2-мерного пространства, поэтому для их кодирования используются классические числа Фибоначчи; при этом в качестве начальных условиях выбираются числа 1 и *i* (мнимая единица). Таким путем вычисляются веса «фибоначчиевых» разрядов для представления комплексных чисел. Рекуррентное соотношение для 2-чисел Фибоначчи (*p*=2) используются для представления 3-мерных векторов; при этом в качестве «затравочных» чисел используются числа: *i, j, k.* Для кодирования квартернионов используются 3-числа Фибоначчи, а для кодирования октав используются 7-числа Фибоначчи и т.д.

Заключение

У меня сложилось впечатление, что настоящая жизнь *p*-чисел Фибоначчи и «золотых» *p*-сечений только начинается. На эти обобщения чисел Фибоначчи и «золотой пропорции» уже обратили внимание представители различных научных дисциплин (биология, физика, цифровая обработка сигналов, компьютерная наука), то есть, началось их широкое признание спустя 30-40 лет после их обнародования [1]. **Как показано выше, «теория *p*-чисел Фибоначчи», обладает той же «математической красотой», что и классическая «теория чисел Фибоначчи», и это дает основание утверждать, что согласно «принципу математической красоты» Дирака «теория *p*-чисел Фибоначчи» найдет такое же широкое применение в теоретическом естествознании, как и «классическая теория чисел Фибоначчи», что в настоящее время и наблюдается. По крайней мере, я твердо верю в «прекрасное будущее» этой теории. И интуиция меня пока что не подводила.**

Литература

1. Витенько И.В., Стахов А.П. Теория оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. – В кн. Приборы и системы автоматики, вып. 11. Харьков, Изд-во Харьковского университета, 1970.
2. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва: Совесткое радио, 1977.
3. Пойа Д. Математическое открытие. Москва: Наука, 1970.
4. Hoggatt V.E. A new angle on Pascal's Triangle. The Fibonacci Quarterly, 1968, V.6, No 4.
5. Hoggat, V.E., Jr. *Fibonacci and Lucas Numbers*. Boston, MA: Houghton Mifflin (1969).
6. Stakhov AP. A generalization of the Fibonacci *Q*-matrix. Доклады Академии наук Украины, 1999, №9, с. 46-49.
7. Stakhov, A., Rozin, B. *Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p-numbers*. Chaos, Solitons & Fractals, 27(5) (2006), 1162-1177.
8. Stakhov, A., Rozin, B. The continuous functions for the Fibonacci and Lucas p-numbers. Chaos, Solitons & Fractals, 28(4) (2006), 1014-1025.
9. Stakhov, A. Fibonacci matrices, a generalization of the “Cassini formula,” and a new coding theory. Chaos, Solitons & Fractals, 30(1) (2006), 56-66.
10. Стахов А.П. Перспективы применения систем счисления с иррациональными основаниями в технике аналого-цифрового и цифроаналогового преобразования. Журнал «Измерения, Контроль, Автоматизация», №6, 1981 г.
11. Стахов А.П. Цифровая метрология в кодах Фибоначчи и кодах золотой пропорции. В сб. Современные проблемы метрологии. Москва, Изд-во Всесоюзного заочного машиностроительного института, 1978 г.
12. Помехоустойчивые коды: Компьютер Фибоначчи, Москва, Знание, серия «Радиоэлектроника и связь», вып.6, 1989 г.
13. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. Москва, Радио и связь, 1984 г.
14. Стахов А.П. Избыточные двоичные позиционные системы счисления. В кн. Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры, вып.2. Изд-во Таганрогского радиотехнического института, 1974 г.
15. Стахов А.П. «Фибоначчиева» двоичная арифметика и ее применение для контроля вычислительных систем. – В кн. Однородные вычислительные системы и среды. Материалы IV Всесоюзной конференции. Киев, «Наукова думка», 1975.
16. Стахов А.П. Использование естественной избыточности «фибоначчиевых» систем счисления для контроля вычислительных систем. Автоматика и вычислительная техника, №6, 1975 г.
17. Стахов А.П. «Фибоначчиевые» двоичные позиционные системы счисления. В сб. Кодирование и передача дискретных сообщений в системах связи. Москва, Наука, 1976 г.

18. Стахов О.П. За принципом золотої пропорції: перспективний шлях розвитку обчислювальної техніки. Вісник Академії наук Української РСР, №1-2, 1990 г.
19. Stakhov A. Fibonacci matrices, a generalization of the “Cassini formula”, and a new coding theory. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, Volume 30, Issue 1, 56-66.
20. Сороко Э.М. Структурная гармония систем. Минск: Наука и техника, 1984.
21. Collin Paul Spears and Marjorie Bicknell-Johnson. Asymmetric cell division: binomial identities for age analysis of mortal vs. immortal trees. Aplications of Fibonacci Numbers. Vol. 7, 1998.
22. Chernov, V.M., Pershina, M.V. Fivonacci-Mersenne and Fibonacci-Fermat discrete transforms. Boletin de Informatica. Mozambique: Publishing House of the Eduardo Mondlane University, Special issue “The Golden Section: Theory and Applications”, No 9/10 (1999).
23. Stankovic, R.S., Stankovic, M., Astola, J.T., Egizarian, K. Fibonacci Decision Diagram. Tampere International Center for Signal Processing (2000).
24. В.А. Лужецький. Висконадійні математичні процесори Фібоначчі. Винница, Универсум, 2000.