С.Л. Василенко

ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ПРОПОРЦИИ. ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Введение. В работе [1] исследован вопрос о соотнесении общего и частного в систематике "золотого" сечения (ЗС) и приведена аргументация, что как уникальная константа, соответствующая особому частному случаю математической пропорции, ЗС не обобщается в принципе, разве что в особых фазовых пространствах.

Но это вовсе не означает, что самому понятию «обобщение» не остается места в сфере отношений, регулируемых или вытекающих из свойств ЗС.

Все зависит от контекста, логичности формулировок, отсутствия возможных терминологических противоречий (нестыковок), а также понимания или восприимчивости нововведений широкой научной общественностью.

Конкретизация предмета и задач исследований. Исходя из названия статьи, наш объект обобщения – уравнение, которое универсализирует известные свойства ЗС.

То есть, имея в наличии знакомое квадратное уравнение (не путать с разнообразными тождествами для числа Фидия Ф), мы хотим его определенным образом расширить с надеждой получения новых результатов.

Вполне естественно, такое уравнение должно отвечать ряду критериев, среди которых выделим следующие условия:

– прежде всего, следует обеспечить наличие корня Φ как и в классическом квадратном уравнении;

– желательно сохранить возможность получения аналитического решения;

– полезно также оставить «похожесть» на исходное квадратное уравнение, в частности, единичные коэффициенты, которые практически во всем сопутствуют или сопровождают число Φ, например, в цепной дроби;

– обеспечить сходимость числовых последовательностей, порождаемых алгебраическим уравнением. Так, уравнение $(x+\phi)(x-\Phi)(x-2)=0$, хотя и содержит два решения ЗС $(-\phi, \Phi)$, своим третьим корнем $x=2$ «уводит» соответствующие числовые ряды f_n в иную плоскость, где соотношение их соседних элементов $f_n / f_{n-1} \to 2$; $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\phi = \Phi^{-1}$.

С учетом изложенных особенностей, если им будет удовлетворять новое уравнение, то его вполне допустимо соотнести с понятием обобщения.

Ну, и конечно, вид самого уравнения должен допускать такое принятие некоторых переменных, при которых оно обращается в квадратное.

Это как необходимое условие, а вышеназванные положения составляют вместе как бы «совокупное достаточное условие», к которому можно также добавить требование полезности или получения новых знаний и возможного практического применения.

Получается достаточно жесткий набор условий, но ничего с этим не поделаешь, – такая уж высокая и многокритериальная планка у слова «обобщить».

Анализ предшествующих изысканий. Итак, рассматриваются алгебраические уравнения с целочисленными коэффициентами, действительным корнем которых является число Ф, поэтому к ним вполне приемлемо применение термина "золотые", как в работе [2].

В этой статье алгебраическое уравнение m-й степени имеет вид

$$x^m = F_m x + F_{m-1}, \tag{1}$$

где F_m – числа Фибоначчи, $(F_1, F_2) = (1, 1)$.

Анализ свойств уравнения (1) показывает:

1. При четном m оно имеет пару действительных корней $(-\phi, \Phi)$, при нечетных значениях m к ним добавляется еще один отрицательный корень: $-\Phi < x_3 \le -1$, которому трудно придать физический смысл или интерпретацию с точки зрения "золотого" сечения.

2. Остальные корни – комплексные, которые при степенях $m \ge 6$ не имеют аналитического представления, что не позволяет получить соответствующие формульные соотношения для тех или иных переменных, основанных на знании всех корней алгебраического уравнения.

3. Сходимость адекватных числовых последовательностей вида $f_{n+m} = F_n f_{n+1} + F_{n-1} f_n$ к асимптоте Φ в общем случае обеспечивается только для малых величин m и наоборот очень большого удаления n от начальной точки (рис. 1).

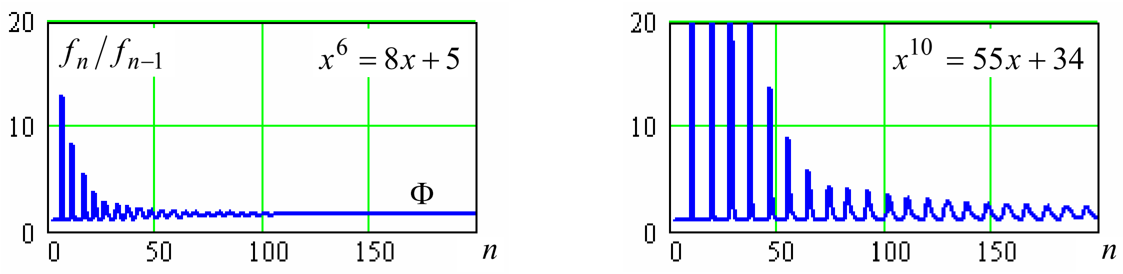

Рис. 1. Сходимость рекуррентных числовых последовательностей f_n к асимптоте Φ, генерируемых алгебраическим уравнением (1) А.П. Стахова

Таким образом, сама по себе хорошая идея [2] расширения класса алгебраических уравнений со свойствами "золотого" сечения при ее реализации в общем виде (с использованием в качестве коэффициентов чисел Фибоначчи) натыкается на трудно преодолимые препятствия, и в результате становится малопродуктивной.

Дополнительный анализ показывает, что описанные признаки являются следствием большого разрыва между степенями членов уравнения, приводя к весьма слабой сходимости, как в подобных численных задачах нахождения экстремумов функции.

Вероятно, именно мера удаленности степеней уравнения лежит в основе интересных свойств и практических приложений p-сечений Стахова, построенных согласно уравнению $x^{p+1} = x^p + 1$ с парой соседних целочисленных степеней x^{p+1}, x^p.

Можно, конечно, в качестве затравочных элементов в (1) положить m чисел Фибоначчи, но тогда уравнение (1) генерирует сам ряд Фибоначчи, что лишено дополнительной смысловой нагрузки и не дает ключ к получению новых знаний.

В работе [2] есть ссылка, что уравнение $x^4 = 3x + 2$ описывает энергетическое состояние молекулы бутадиена – химического вещества, используемого при производстве каучука. Если там принципиально важны мнимые корни или вариабельность 4-х начальных условий, то это, безусловно, в пользу данного уравнения, если же нет, то вся нужная информация сосредоточена в обычном квадратном уравнении $x^2 - x - 1 = 0$.

Синтез обобщенного уравнения и его решение. Взяв за отправной посыл возможность тожественных преобразований ЗС, что естественным образом вытекает из уникальных свойств числа Φ, трансформируем логическую схему рассуждений.

В качестве исходного рассмотрим известное тождество "золотого" сечения $\Phi^2 = \Phi + 1$.

Умножив его поочередно m раз на Φ^2, после элементарных преобразований получаем:

$$\Phi^{2m} = \sum_{j=1}^{m} \Phi^{2j-1} + 1 . \tag{2}$$

Соотношение (2) – есть не что иное, как запись уравнения через уже известное частное решение $x = \Phi$.

Исходное алгебраическое уравнение, которое назовем *обобщенным уравнением гармонической пропорции* (*"золотого" сечения*), приобретает вид, $m = 1, 2, 3, ...$

$$f(x,m) = x^{2m} - \sum_{j=1}^{m} x^{2j-1} - 1 = 0\,. \qquad (3)$$

Например, «развернув» для наглядности знак-обозначение суммы, получаем

$$x^4 = x^3 + x^1 + 1, \quad x^6 = x^5 + x^3 + x^1 + 1, \quad x^8 = x^7 + x^5 + x^3 + x^1 + 1 \quad \text{и т. д.}$$

С учетом свойств мнимой единицы и числа e – основания натурального логарифма (в его связи с тригонометрическими функциями через уравнение Эйлера) легко убедиться, что обобщенное уравнение ЗС (3) имеет следующее аналитическое решение:

– действительные корни (для любого целого значения m):

$$(x_1, x_2) = (-\phi, \Phi),$$

– мнимые корни, которые идут четверками $(m \ge 3)$:

$$\pm\cos\left(\frac{k}{m}\pi\right) \pm i\sin\left(\frac{k}{m}\pi\right) = \pm e^{\pm i\frac{k}{m}\pi}, \qquad k = \overline{1, \lceil (m-1)/2 \rceil}, \qquad (4)$$

– если m кратно 2, то к ним добавляются еще два мнимых корня

$$(x_{2m-2}, x_{2m-1}) = \pm i = e^{\pm i\frac{\pi}{2}}, \qquad \text{if} \qquad m = 0 \bmod 2 \quad \rightarrow \quad k = \frac{m}{2},$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, $\lceil \xi \rceil$ – целая часть от ξ.

В соответствии с основными положениями работы [1], обратим внимание на важный аспект: речь идет об обобщении уравнения (!) или его записи в общем виде, которое при $m = 1$ действительно приводит к квадратному уравнению "золотого" сечения

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

а для произвольного целого $m \ge 1$ имеет в качестве положительного решения число Φ.

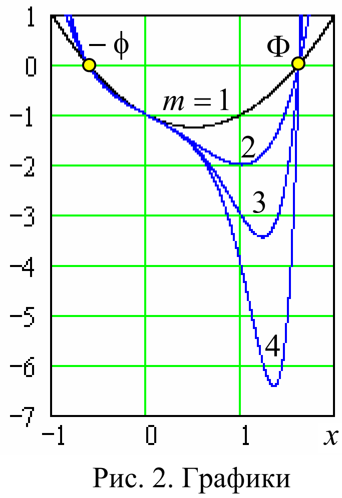

Рис. 2. Графики функции $f(x, m)$

Само "золотое" сечение, как уникальная математическая константа, никоим образом не обобщается, в том числе и уравнением (3).

Основные особенности обобщенного уравнения ЗС:

1. Главным математическим свойством всех уравнений типа (3) является то, что для любого целого $m \ge 1$ они имеют пару действительных корней $(-\phi, \Phi)$ "золотой" пропорции, как и исходное для нее квадратное уравнение (рис. 2).

2. Все коэффициенты равны 1 (в записи уравнения их знак не имеет особого значения, поскольку при переносе влево–вправо он меняется на противоположный). В этом аспекте прослеживается аналогия с разложением числа Φ в виде бесконечной цепной (непрерывной) дроби, состоящей из одних единиц, что его отличает от всех иных чисел.

3. Имеем аналитическое решение в общем виде, что позволяет получать полезные соотношения, основанные на знании всех корней.

4. При $m=1$ оно превращается в квадратное уравнение ЗС.

5. Обобщенное уравнение ЗС порождает бесчисленное множество аддитивно-рекуррентных последовательностей в виде *уравнения суммирующей V-рекурсии*, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$V_{n+2m} = \sum_{j=1}^{m} V_{n+2j-1} + V_n \,. \tag{5}$$

6. Последовательности (5):

– могут иметь сколь угодно много любых начальных условий (НУ) $\left(V_0, V_1, \ldots, V_{2m-1}\right)$, что обеспечивает дополнительные возможности для использования и расширения знаний в различных областях науки;

– при любых НУ (затравочных числах) сходятся к числу Ф: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{V_{n+k}}{V_n} = \Phi^k$;

– допускают их реализацию в виде целочисленных рядов при задании целых НУ.

Обозначение в (5) выбрано не случайно:

1) Буква *G* (от англ. Gold) уже "занята" для обозначения обобщенных чисел Фибоначчи.
2) Буква *V* символизирует объемность (от англ. Volume) и переход ЗС от линейного представления на совершенно иной уровень многомерной интерпретации.
3) Наконец, она совпадает с фамилией известного математика *Steven Vajda*, много привнесшего в теорию "золотого" сечения и чисел Фибоначчи, а также с фамилией автора в ее английской транскрипции.

Характерной свойством математической конструкции (3)–(5) является наличие на ее границах двух пар из рядом стоящих или смежных элементов (рис. 3).

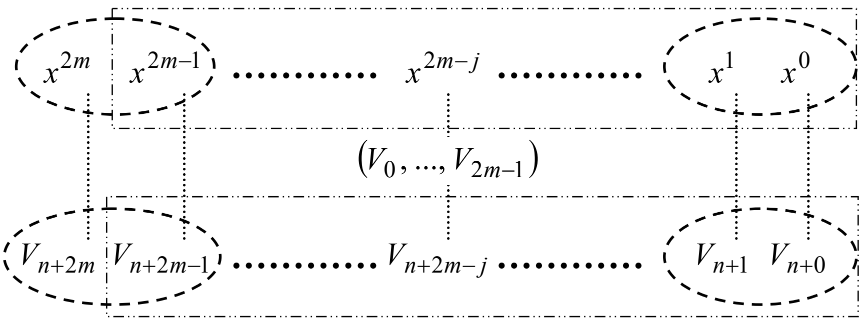

Рис. 3. Структура обобщенного уравнения гармонической пропорции
и адекватных рекуррентно-аддитивных числовых рядов

Промежуточные элементы следуют друг за другом через одно, в частности, для уравнения (3) – по нечетным степеням аргумента x.

Для обычного квадратного уравнения $(m=1)$ эти пары объедены и замыкаются друг на друге через элементы $\left(x^1, V_{n+1}\right)$.

Упомянутая "единичная" непрерывная дробь

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}\,, \tag{6}$$

которая является неотрицательным числом и приводит к числу Φ, позволяет ее записать в виде $1+\dfrac{1}{x}$, где выражение x само является непрерывной дробью (6), то есть $x = 1+\dfrac{1}{x}$ [3, с. 86].

Из этого уравнения относительно x видно, что его возведение в любую целую положительную степень m после освобождения от знаменателей приводит к алгебраическому уравнению $2m$-й степени, что дополнительно проясняет возникновение четности x^{2m} в (3)–(5), когда при перемножении одинаковых степеней они складываются, приводя к четным числам.

Анализ последовательностей (5) показывает их быструю сходимость (рис. 4), которая практически такая же, как и у чисел Фибоначчи $(m=1)$, а при увеличении параметра m становится еще выше.

$$V_{n+1}/V_n, \quad n = 0 \Leftarrow 2m, \quad V_0 = V_1 = \ldots = V_{2m-1} = 1$$

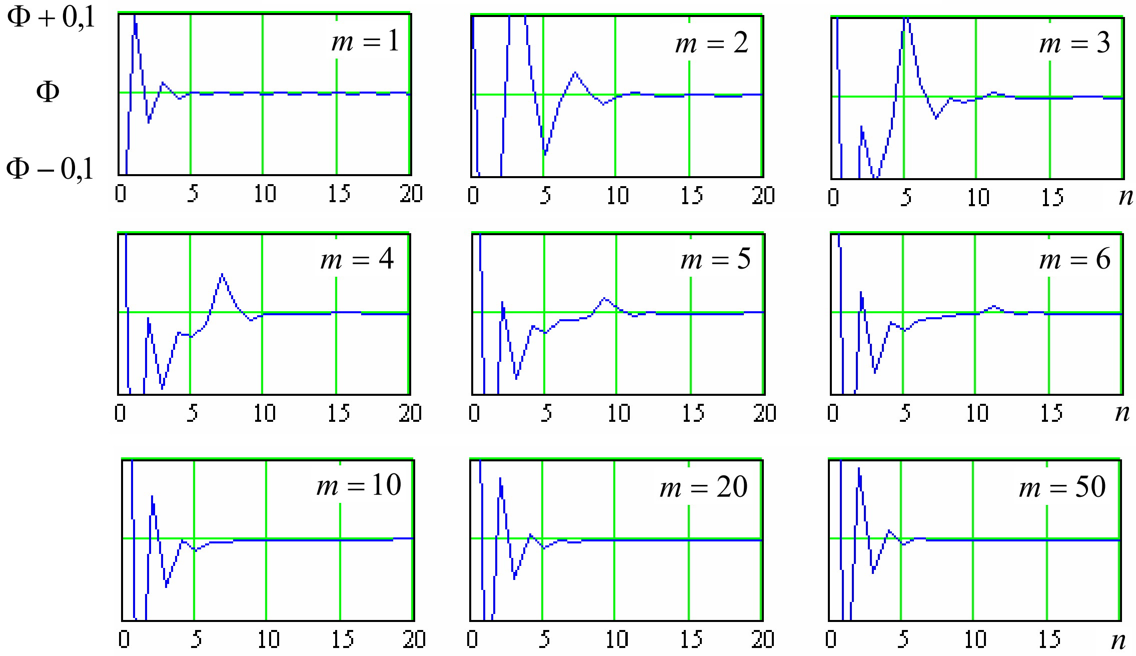

Рис. 4. Сходимость суммирующей V-рекурсии к числу Φ,
порождаемой обобщенным уравнением "золотого" сечения:
значение $m=1$ воспроизводит числа Фибоначчи

"Пространство суммирующей V-рекурсии" неизмеримо шире, чем в "золотоносных" обобщенных числах Фибоначчи G_n [4].

Бесконечное счетное множество всех порождаемых V-последовательностей имеет порядок (мощность)

$$\mathbf{M}_Z : p^{2m}, \;\; p \to \infty, \;\; m \to \infty .$$

Поэтому здесь прослеживается принципиально иная база и органическое объединение двух важнейших свойств на новой основе:

– в отличие от различных обобщенных последовательностей Фибоначчи (Трибоначчи, Хогатта, Стахова, Газали, Кузьмина и др.), V-рекурсия сходится к ЗС, как и обобщенные числа Фибоначчи (условно "золотые или золотоносные ряды"), образуемые рекурсией из двух слагаемых [4] $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$ с произвольными начальными условиями (G_0, G_1);

– в отличие от последовательностей G_n, мы имеем не два, а сколь угодно большое количество начальных (исходных) объектов, поддающихся структурированию, эволюции и т.д.

Поскольку в частном случае $(m=1)$ рекурсия (5) образует числа Фибоначчи, представляет интерес провести сравнение с этими числами других многозвенных V-рекурсий, что легче всего показать при единичных начальных условиях $V_j = 1,\ \ j=\overline{0,\,2m-1}$ (табл. 1).

Таблица 1

Примеры числовых последовательностей, порождаемых обобщенным уравнением гармонической пропорции

m	***n* = 2*m*, 2*m*+1, 2*m*+2, …**															
1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584
2	3	5	7	11	19	31	49	79	129	209	337	545	883	1429	2311	3739
7	8	15	22	36	57	92	148	239	386	624	1009	1632	2640	4271	6917	11190
11	12	23	34	56	89	144	232	375	606	980	1585	2564	4148	6711	10860	17570
23	24	47	70	116	185	300	484	783	1266	2048	3313	5360	8672	14030	22700	36730
10	11	21	31	51	81	131	211	341	551	891	1441	2331	3771	6101	9871	15970
100	101	201	301	501	801	1301	2101	3401	5501	8901	14400	23300	37700	61000	98700	159700

Особая похожесть на числа Фибоначчи в этом случае проявляется при значениях $m=10^k,\ k=1,\,2,\,\ldots$.

Например, для $m=100$ и единичных затравочных чисел элементы V-рекурсии на начальном этапе равны числам Фибоначчи, умноженным на 100 с прибавлением единицы, которая уже после 10 шагов исчезает.

Этот факт дополнительно подтверждает хорошую сходимость V-рекурсий, скорость которой практически такая же, как и в обычных числах Фибоначчи.

Данное свойство связано с тождеством (2), которое в свою очередь легко доказывается методом индукции.

Полное знание всех корней уравнения (3) позволяет получать определенные аналитические зависимости.

В частности, при начальных условиях $V_j = 0,\ \ j=\overline{0,\,2m-2},\ \ V_{2m-1}=1$ числовые значения суммирующей V-рекурсии могут определяться по формуле, механизм вывода которой представлен в работе [5] [1],

$$V_n = \sum_{j=1}^{2m} \frac{x_j^n}{\prod\limits_{i=1,\ i\neq j}^{s} \left(x_j - x_i\right)}\ ,$$

где x_j – все корни обобщенного уравнения (3).

Возможные направления дальнейшего развития и практического применения. "Золотое" сечение или гармоническая пропорция, которые описываются обобщенным уравнением ЗС (3) не столько что-то рассекают или гармонизируют, сколько в виде аттрактора объединяют и группируют своим "кодом" различные элементы в одно целое, что ближе к понятию синтеза.

А уже потом при анализе готовых структур мы можем наблюдать ее срезы как частное "зашумленное" проявление, почему и не имеет особого смысла гнаться за точностью демонстрирования свойств "золотого" сечения, особенно там, где его просто нет или оно подавлено шумами.

[1] Автор обращает внимание на то, что в работе [1] понятие «обобщенных золотых сечений (ЗС)» предложено квалифицировать некорректным, поскольку в математике под ЗС принято считать вполне конкретное число Ф.

Уравнение (3) выводит на важное, многостороннее и действительно полезное обобщение (не только в общей концепции ЗС) об интегрирующем начале ЗС в развитии природных процессов и явлений. Робкие предположения, часто основанные на интуиции, а порой просто бездоказательные голословные утверждения о ключевой роли ЗС в мироздании теперь приобретают реальные очертания и выводят теорию ЗС из сферы догадок и гипотез в область построения более четкой и обоснованной теории.

Например, можно задать миллиарды–триллионы совершенно произвольных соразмерных начальных условий (целых, действительных, мнимых, иррациональных и др. чисел), и через считанное количество итерационных шагов рекурсия (5) выводит нас на "золотое" сечение с той или иной точностью.

Этот факт, по глубокой интуиции автора, имеет непреходящее значение, степень значимости которого сейчас еще трудно обозначить даже в первом приближении, а равенство-рекурсия (5) влечет за собой в неизведанную даль.

У понятия гармонической пропорции появляется "второе дыхание" и насыщенность настоящими гармониками (хотя и через комплексные переменные) в виде набора тригонометрических функций с различными, но строго организованными частотами.

Безликие числовые последовательности становятся прообразами конструирования и структурирования сложных природных образований, начиная с молекул, и заканчивая скоплениями галактик.

По такому принципу могли, например, сформироваться из газовых образований планеты и звезды, что позволит вплотную приблизиться к построению единой космологической модели, в которой физические законы отражают формы взаимодействия, а обобщенное уравнение ЗС – их внутренне (генетическое) содержание.

Бесконечно большое число парных взаимодействий, отражаемых уравнением (3), может пролить свет на причину или природу гравитации, в основе которой лежат не безликие гравитоны, а вполне осязаемые и уникальные математические свойства ЗС.

Наличие периодических гармоник (4) становится теоретическим подтверждением проявления ЗС в сердечных ритмах человека [7]. Более того, эти гармоники позволяют смоделировать формирование таких небезопасных для человека резонансных процессов, как «разрыв сердца», «кровоизлияние в мозг» и др.

По мнению автора, одна из причин здесь кроется в преждевременно-ускоренном выходе организма на состояние, характеризуемое проявлением идеальных свойств числа Ф, что влечет за собой потерю системности цельных структур (кровеносных сосудов и др.), прежде всего, в их слабых местах. Так, согласно закону Богданова А.А. относительных сопротивлений стабильность системы определяется прочностью наиболее слабых ее элементов: «устойчивость целого зависит от наименьших относительных сопротивлений всех его частей во всякий момент» [8, с. 217].

Известный в теории ЗС "закон Сороко" [6] с заменой идиомы «обобщенные золотые сечения» (с учетом критических замечаний, изложенных в работе [1]) на «золотое сечение и его гармонические инварианты» приобретает стройность и избавляется от свойственных ему противоречий в системе отношений «дискретное – непрерывное», тем самым, расставляя все на свои места.

Реализация концепции случайного формирования белков в «океанском бульоне» при дополнительном теоретическом обосновании может стать простой игрушкой. Поскольку не нужно бесконечно-случайного блуждания по комбинаторным сочетаниям типа «выйдет – не выйдет», а достаточно «знать код Ф», и тогда аддитивно-рекуррентный процесс (5) с безмерно большим количеством произвольных начальных условий (не равных одновременно нулю) автоматически выводит на нужный результат.

Кажущаяся, на первый взгляд, наивность евангельского сотворения мира приобретает реальные очертания: кто-то же должен был задать код "золотого" сечения, который с помощью суммирующей V-рекурсии способен за считанные шаги «объединить необъятное» в одно целое.

Теология получает обновленное и даже научно обоснованное понимание, а наука – дополнительный импульс развития (новую парадигму) и широкое поле исследований.

Для молодых ученых открывается необозримый простор для экспериментирования, поиска взаимосвязей и придания физического смысла новым закономерностям.

Обобщенное уравнение ЗС и адекватная ему Z-рекурсия многое проясняют.

Так, число Φ немыслимо без своего "двойника" ϕ (на генетическом уровне), что проявляется не только в квадратичном характере исходного уравнения, но и его обобщении для любой четной степени $2m$. То есть, налицо дуализм решения и триединое начало: целое и его двойственные, а в общем случае парные соотношения, что, в частности, повсеместно наблюдается в природе.

Это и есть один из основных законов "золотой" или гармонической пропорции.

Скорее всего, природа именно так и действует в своем развитии.

А красота, эстетичность форм и тому подобное, что обычно ассоциируют с "золотым" сечением, становятся всего лишь возможными экзогенными, не всегда устойчивыми проявлениями. Поэтому замечательные шишки, красивые подсолнухи или живописные раковины – это только первый слой (внешний налет) гармонической пропорции, который, что называется на виду, радуя глаз.

В решении уравнения (3) мы видим также присутствие других иррациональных и целых чисел (см. приложение), из чего следует, что в своем структурном конструировании число Φ не одиноко и как магнит-аттрактор притягивает через "золотое" сечение к себе другие числа, включая π, е, корни натуральных чисел и др.

Поэтому вовсе не обязательно искать какие-либо аналитические или точные зависимости-взаимосвязи для тех же констант Φ, π и е, которых, скорее всего, просто нет.

Но зато эти числа одновременно присутствуют в решении обобщенного уравнения ЗС, что, на наш взгляд, отражает их тесную взаимосвязь на уровне формирования и развития многих процессов Вселенной с ключевым аттрактором в виде "золотого" сечения, воссоздавая гармонию как единство, слаженность, согласованность и когерентность.

Автор приносит глубокую благодарность коллективу «Академии Тринитаризма» за представление возможности публикации результатов исследований, что позволяет ученым и специалистам быстро узнавать о разработках своих коллег, обмениваться свежими идеями и новыми замыслами на актуальные темы.

Литература.

1. *Василенко С.Л.* Общее и частное в систематике золотой пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15307, 28.05.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322073.htm.
2. *Стахов А.П.* Математика Гармонии как новое междисциплинарное направление современной науки // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.12371, 19.08.2005. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320001.htm#090.
3. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи: 5-е изд. – М.: Наука, 1984. – 144 с.
4. *Vajda Steven*. Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section: Theory and Applications (Dover Books on Mathematics). – Dover Press, 2008.
5. *Василенко С.Л.* Многофункциональное обобщение «золотого» сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15117 от 23.02.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321097.htm.
6. *Сороко Э.М.* Структурная гармония систем, Минск: Наука и техника, 1984. – 264 с.
7. *Цветков В.Д.* Сердце, золотое сечение и симметрия. – Пущино: ПНЦ РАН, 1997.

8. *Богданов А.А*. Тектология. Всеобщая организация науки. – М.: Экономика, 1989. – Т. 1, 304 с.

Приложение

Примеры частных решений обобщенного уравнения "золотого" сечения

$x^6 = x^5 + x^3 + x + 1$, $\quad V_{n+6} = V_{n+5} + V_{n+3} + V_{n+1} + V_n$,

$$\pm\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \pm i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \pm e^{\pm i\frac{\pi}{3}} = \frac{\pm 1 \ \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

$x^8 = x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$, $\quad V_{n+8} = V_{n+7} + V_{n+5} + V_{n+3} + V_{n+1} + V_n$,

$$\pm\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \pm i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pm e^{\pm i\frac{\pi}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i), \quad \pm i.$$

$x^{10} = x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$, $\quad V_{n+10} = V_{n+9} + V_{n+7} + V_{n+5} + V_{n+3} + V_{n+1} + V_n$,

$$\pm\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \pm i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \pm e^{\pm i\frac{\pi}{5}} = \frac{\pm\sqrt{5} - 1 \ \pm i\sqrt{2}\left(\sqrt{5 - \sqrt{5}}\right)}{4},$$

$$\pm\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \pm i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \pm e^{\pm i\frac{2\pi}{5}} = \frac{\pm\sqrt{5} + 1 \ \pm i\sqrt{2}\left(\sqrt{5 - \sqrt{5}}\right)}{4}.$$

$x^{12} = x^{11} + x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$, $\quad V_{n+12} = V_{n+11} + V_{n+9} + V_{n+7} + V_{n+5} + V_{n+3} + V_{n+1} + V_n$,

$$\pm\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \pm i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \pm e^{\pm i\frac{\pi}{6}} = \frac{\pm\sqrt{2 \pm i2\sqrt{3}}}{2},$$

$$\pm\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) \pm i\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \pm e^{\pm i\frac{\pi}{6}} = \frac{\pm 1 \ \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad \pm i.$$

$x^{14} = x^{13} + x^{11} + x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$,

$V_{n+14} = V_{n+13} + V_{n+11} + V_{n+9} + V_{n+7} + V_{n+5} + V_{n+3} + V_{n+1} + V_n$,

$$\pm\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \pm i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) = \pm e^{\pm i\frac{\pi}{7}} \approx \pm 0{,}9010 \ \pm \ i\,0{,}4339,$$

$$\pm\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \pm i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \pm e^{\pm i\frac{2\pi}{7}} \approx \pm 0{,}6235 \ \pm \ i\,0{,}7818,$$

$$\pm\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) \pm i\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) = \pm e^{\pm i\frac{3\pi}{7}} \approx \pm 0{,}2225 \ \pm i\,0{,}9749.$$

$x^{16} = x^{15} + x^{13} + x^{11} + x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$,

$V_{n+16} = V_{n+15} + V_{n+13} + V_{n+11} + V_{n+9} + V_{n+7} + V_{n+5} + V_{n+3} + V_{n+1} + V_n$,

$$\pm\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \pm i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \pm e^{\pm i\frac{\pi}{8}} \approx \frac{\pm\sqrt{2\sqrt{2}(1 \pm i)}}{2},$$

$$\pm\cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) \pm i\sin\left(\frac{2\pi}{8}\right) = \pm e^{\pm i\frac{2\pi}{8}} \approx \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i),$$

$$\pm\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \pm i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \pm e^{\pm i\frac{3\pi}{8}} \approx \frac{\pm\sqrt{2\sqrt{2}(-1 \pm i)}}{2}, \quad \pm i.$$