Мартыненко Г. Я.

«Подобно многим другим практикам от математики, я одно время забавлялся с числами Фибоначчи»
Мидхад Газале. От фараонов до фракталов

Малые зерна Фибоначчи, взращенные на даче

Вниманию читателя предлагается фрагментарный, не очень связный текст, посвященный последовательностям Фибоначчи. Эпизоды этого текста родились в период моей острой увлеченности комбинаторными свойствами чисел Фибоначчи весной и летом 2008 г. Тогда я, утомленный строительными работами, находил отдохновение в фибоначчиевых забавах. С одной стороны я черпал в них вдохновение, необходимое для поддержания трудового ажиотажа, а с другой, наслаждался неисчерпаемой чередой свойств, отражающих внутреннее совершенство этих удивительных чисел.

Надеюсь, что свойства, зафиксированные в этих фрагментах, не совсем бесполезны, хотя, наверное, многие из них тривиальны или давным-давно известны. Но дело сделано. Быть может, какой-нибудь из этих кирпичиков придется ко двору в математико-гармоническом строительстве.

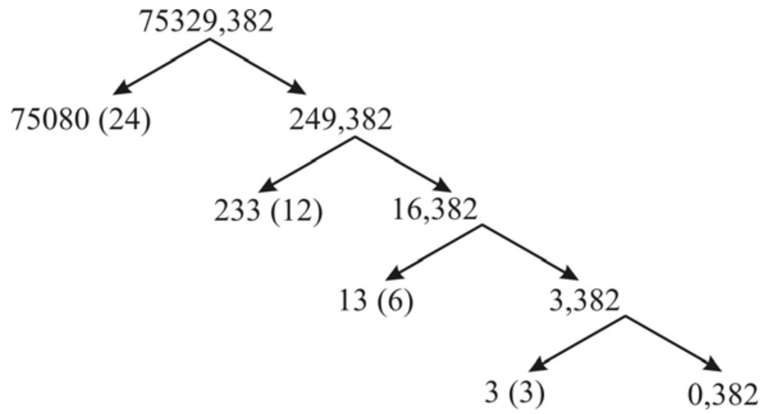
1. Теорема Пифагора для параллельных последовательностей Фибоначчи-Люка

Перед нами – параллельные последовательности Фибоначчи и Люка. Возведем в квадрат каждое из двух контактирующих чисел Люка, а затем извлечем корень из суммы этих квадратов. Результат: числа, очень напоминающие фибоначчиевы. Но это только на первый взгляд. При внимательном разглядывании мы убеждаемся, что по мере возрастания ранга разность между числами эталонной последовательности и вычисленной псевдопоследовательности Фибоначчи все более возрастает. Любопытно при этом, что эти разности в свою очередь образуют псевдопоследовательность Фибоначчи.

n	F_i	L_i		Остаток первого порядка	Остаток второго порядка
1	1	1			
2	2	3			
3	3	4	3,17		
4	5	7	5		
5	8	11	8,062	0,062	
6	13	18	13,04	0,038	
7	21	29	21,09	0,095	
8	34	47	34,13	0,132	
9	55	76	55,23	0,227	
10	89	123	89,36	0,359	
11	144	199	144,59	0,586	
12	233	322	233,94	0,944	
13	377	521	378,53	1,530	
14	610	843	612,47	2,474	
15	988	1364	991,00	3,000	0

16	1598	2207	1603,479	5,479	0,479
17	2586	3571	2594,484	8,483	0,483
18	4184	5778	4197,963	13,963	0,963
19	6770	9349	6792,446	22,446	1,446
20	10954	15127	10990,409	36,409	2,409
21	17724	24476	17782,855	58,855	3,855
22	28678	39603	28773,264	95,264	6,264
23	46402	64079	46556,119	154,119	10,119
24	75080	103682	75329,382	249,382	16,382
			Псевдо-Фибоначчи 1	Псевдо-Фибоначчи 2	Псевдо-Фибоначчи 3

Процесс такого *самоподобного клонирования* на основе остаточного принципа может быть продолжен и далее. Покажем это на примере одного числа с рангом 24 (последняя строка таблицы):



Отметим некоторые свойства этого дерева.

Разности между двумя номерами соседних уровней *n* этого дерева равны номеру второго, а в висячих левых узлах располагаются соответствующие числа Фибоначчи. Сумма этих чисел плюс остаточное число дают исходное число, из которого началось ветвление.

Частное от деления большего из соседствующих чисел Фибоначчи на меньшее проедставляет собой числа Люка с номером делителя соответствующих чисел Фибоначчи.

2. Дальнодействие Люка

Речь идет о способности последовательности Люка далеко заглядывать вперед, т. е. о его прогностической силе.

n	L_n	
1	1	
2	3	
3	4	3
4	7	
5	11	12
6	18	
7	29	28
8	47	
9	76	77

10	123	
11	199	198

Правило таково: $L_n \cdot L_{n+1} + 1 = L_{2n+1}$ - для нечетного k

$L_n \cdot L_{n+1} - 1 = L_{2n+1}$ - для четного k

Например, $7 \cdot 11 = 77 + 1 = 78$

$11 \cdot 18 = 198 + 1 = 199$

Предсказательная сила произведений Люка простирается весьма далеко. Так, при n = 10 предсказывается 21-й член, равный 15127.

Для других последовательностей, включая классическую последовательность Фибоначчи, это свойство не выполняется.

3. Теорема Пифагора для скользящих пар контактных чисел Фибоначчи

n	F_i	$F^2{}_i$	$F_i^2 + F_{i+1}^2$	$\left(F_i^2 + F_{i+1}^2\right) +$ $\left(F_{i+1}^2 + F_{i+2}^2\right)$			
1	1	1					
2	2	4	5				
3	3	9	13	18			
4	5	25	34	47	65(13)		
5	8	64	89	123	170 (34)	235 (47)	
6	13	169	233	322	445 (89)	615 (123)	850 (34)
7	21	441	610	843	1165(233)	1610 (322)	2125 (89)
8	34	1156	1597	2197	3040 (608)	4205 (841)	
9	55	3025	4181	5778	7975 (1595)	11015 (2203)	
10	89	7931	10956	15137	20915 (4183)	28890 (5778)	
11	144	20736	28667				
			F	*L*	*5F*	*5L*	*25F*

Попарные суммы скользящих чисел Фибоначчи образуют последовательности типа Фибоначчи с пропуском одного члена. Попарные суммы второго порядка образуют ряд Люка с пропуском одного.

Далее образуются аналогичные последовательности Фибоначчи и Люка с кратностью 5: пятикратные, 25-кратные, 125-кратные и т. д.

По диагонали числа Люка и Фибоначчи переплетаются друг с другом, но тоже с пропуском одного члена.

4. Скользящая чехарда сумм

4.1. Фибоначчи

n		Через 1	Через 2	Через 3	Через 4	Через 5	Через 6
1	1						
2	2						
3	3	4					
4	5	7	6				
5	8	11	10	9			
6	13	18	16	15	14		
7	21	39	26	24	23	22	
8	34	47	42	39	37	36	35
9	55	76	68	63	60	58	57
10	89	123	110	102	97	94	92
		L	*F*	*F*	*F-3*	*L*	*F-6*

Во втором столбце суммируем 1+3=4, 2+5=7 и т. д. Затем увеличиваем интервал и действуем так же.

В последней строке приведены имена классически последовательностей, а также обозначения неклассических типов, которые рассматриваются в статье (*Мартыненко Г. Я.* Пространственная типология последовательностей Фибоначчи // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14720, 19.02.2008. (2008*a*) http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/ 02321077_Typology_Fibonacci.pdf.).

4.2. Люка

n		Через 1	Через 2	Через 3	Через 4	Через 5	Через 6
1	1						
2	3						
3	4	5					
4	7	10	8				
5	11	15	14	12			
6	18	25	22	21	19		
7	29	40	36	33	32	30	
8	47	65	58	54	51	49	48
9	76	105	94	87	83	79	78
10	123	170	152	141	134	128	126
11		*5F*	*2L*	*3Л*	*F-8*	*F-9*	*?*

5. Восходящие непрерывные дроби

В теории математической гармонии много внимания уделяется непрерывным дробям. Все они имеют нисходящий характер. Предлагаю обратить внимание на одну симпатичную, но скорее всего бесполезную структуру:

$$a+\cfrac{a+\cfrac{a+\cfrac{a+\cfrac{a+\ldots}{b}}{b}}{b}}{b}\to\frac{a}{b-1}$$

Пусть $a=1, b=2$. Тогда

$$1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\ldots}{2}}{2}}{2}}{2}\to 1$$

b a	2	3	4	5
1	1	0,5	0,333	0,25
2	2	1	0,667	0,500
3	3	1,5	1	0,750
4	4	2	1,333	1

6. Милый пустяк

Рассмотрим целые числа повторных корней. Для суммативных подкоренных выражений имеем:

$$\sqrt{1+0\sqrt{1+\ldots}}\to 1$$

$$\sqrt{2+1\sqrt{2+\ldots}}\to 2$$

$$\sqrt{3+2\sqrt{3+\ldots}}\to 3$$

$$\sqrt{4+3\sqrt{4+\ldots}}\to 4$$

$$\sqrt{5+4\sqrt{5+\ldots}}\to 5 \text{ и т.д.}$$

Если мы имеем дело с разностными подкоренными выражениями, то:

$$\sqrt{2-\sqrt{2\ldots}}\to 1$$

$$\sqrt{6-\sqrt{6\ldots}}\to 2$$

$$\sqrt{12-\sqrt{12\ldots}}\to 3$$

$$\sqrt{20-\sqrt{20..}}\to 4$$

$$\sqrt{20-\sqrt{20\ldots}}\to 4 \qquad \sqrt{30-\sqrt{30\ldots}}\to 5$$

То же самое можно сказать и о повторных дробях.

Для них также можно ввести разностные непрерывные дроби.

7. Повторные раликалы Люка и Фибоначчи

Будем брать повторные корни, начиная с первого числа и скользить вдоль обеих последовательностей, на каждом шаге присоединяя по одному числу Люка или Фибоначчи, т. е. будем пользоваться вложенными «матрешечными» структурами вида:

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{1}+1}+2}+3}+5}+8\ldots}$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{1}+3}+4}+7}+11}+18\ldots}$$

Легко убедиться, что в образовавшихся последовательностях

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \sqrt{\varphi} \to 1{,}272$$

$$F_{n+1} \to F_{n-2} + F_{n-5}$$

8. Фибоначчи и тригонометрия

Обратиться к замечательной таблице братьев Цыпкиных (А.Г.Цыпкин, Г.Г.Цыпкин. Математические формулы. М.: Наука, 1985, с. 107).

Аргумент	**Функции**			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$0^{\circ}(0)$	0	1	0	Не определен
$15^{\circ}\left(\frac{\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$18^{\circ}\left(\frac{\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
$30^{\circ}\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$36^{\circ}\left(\frac{\pi}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$45^{\circ}\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$54^{\circ}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$60^{\circ}\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$72^{\circ}\left(\frac{2\pi}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
$75^{\circ}\left(\frac{5\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$90^{\circ}\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	Не определен	0

Таблица изумительная. Она буквально напичкана замечательными числами. Предел гармонии и изящества. Что касается золотого сечения, то золота здесь больше, чем в закромах у Скупого рыцаря.

Обратимся для начала к отношению:

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} = 1{,}618 = \varphi \ .$$

Если мы возьмем отношение синуса 54 градусов к синусу 18 градусов, то получим φ^2.

В дополнение к тому, что синус 18 градусов равен четверти золотого числа, а синус 54 градусов равен половине этого числа, все в совокупности очень мило звучит.

Похожая картина наблюдается для тангенса и котангенса.

Вдохновляет также и то, что таблица буквально кишит стаховскими замечательными числами, не лишенных блеска благородных металлов

В общем вся таблица оказывается довольно вместительным сундуком для поклонников золотого тельца.

Но это еще не все.

Обратимся к синусу 36 и 72 градусов. В формулах этих синусов присутствуют двойные повторные корни в суммативном и разностном вариантах.

При этом:

$$\sqrt{5+\sqrt{5}} = 2{,}69 \text{, а}$$

$$\sqrt{5-\sqrt{5}} = 1{,}662$$

А отношение первого корня ко второму, как мы говорили выше, равно 1,618.

Теперь вычислим многократные повторные корни для этих чисел: получаем, соответственно, два сопряженных числа 2,791 и 1,791, произведение которых равно 5, а среднее геометрическое – корню из 5, т. е. 2,236.

Но это число равно половине произведения двойных повторных корней.

Таким образом, мы связали двойные повторные корни с многократно-повторными, а также и с выражениями корней квадратного уравнения, ибо корень квадратного уравнения:

$$x^2 + x - 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{21}-1}{2} = 1{,}791,$$

а корень квадратного уравнения

$$x^2 - x - 5 = 0$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{21}+1}{2} = 2{,}791.$$

Обращает на себя внимание то, что в обеих уравнениях в роли свободного члена опять выступает замечательное число 5.

9. Золотые логарифмы Фибоначчи

Определим модули перехода от десятичных инуральных логарифмов к логарифмам по основанию золотого числа $\varphi = 1{,}618$.

Пусть $\varphi^x = 10$, тогда $x \cdot \lg_{10}\varphi = \lg 10 = 1$

Следовательно, модуль перехода от десятичных логарифмов к золотым будет равен $x = \dfrac{1}{0{,}209} = 4{,}7842$.

Аналогичным образом может быть получен и модуль перехода от натуральных логарифмов к золотым. Он оказался равным 2,0782.

В принципе может быть построена таблица золотых логарифмов и антилогарифмов. Приведем иллюстративный фрагмент:

n	Золотые логарифмы *n* $\lg_{\varphi} n$	*n*	Золотые логарифмы *n* $\lg_{\varphi} n$
1	0	8	4,3206
1,618	1	9	4,5653
2	1,4402	10	4,7842
2,618	2	20	6,2244
3	2,2826	30	7,0668
4	2,8804	40	7,6646
5	3,3440	50	8,1282
6	3,7231	76	8,9982
7	4,0431	100	9,5684

Поскольку последовательность Люка с хорошим приближением моделируется с помощью показательной функции вида $L(n) = \varphi^{n}$, то в логарифмической шкале эта функция превращается в арифметическую прогрессию, в пределе устремляющуюся к целочисленным значениям последовательности Люка. Ниже приведены значения чисел Люка и их логарифмы.

n	Числа Люка	Золотые логарифмы чисел Люка	*n*	Числа Люка	Золотые логарифмы чисел Люка
1	1	0	11	199	10,998
2	3	2,283	12	322	11,998
3	4	2,880	13	521	13,000
4	7	4,043	14	843	14,000
5	11	4,982	15	1364	15,000
6	18	6,005	16	2207	16,000
7	29	6,996	17	3571	
8	47	8,000	18	5778	
9	76	8,998	19	9349	
10	123	10,000	20	15127	

Члены остальных последовательностей Фибоначчи умножаются (или делятся) на соответствующий коэффициент. Например, золотые логарифмы чисел Фибоначчи могут быть получены путем деления соответствующих чисел Люка на 1,382 (дополнение золотого числа до 3).

10. О двух элементарных связях между последовательностями Фибоначчи и Люка

10.1. Суммативная связь

Не стоит никакого труда заметить, что последовательные суммы удвоеного и следующего за ним числа Фибоначчи образуют последовательность Люка:

$$2Fn + F_{n+1} = L_n$$

n	F_n	F_{n+1}	L_n
1	1	2	
2	2	4	4
3	3	6	7
4	5	10	11
5	8	16	18
6	13	26	29
7	21	42	47
8	34	68	76
9	55	110	123
10	89	198	199
11	144	288	322

10.2. Мультипликативная связь

Нетрудно также сообразить, что произведения однопорядковых чисел Фибоначчи и Люка образуют изящную последовательность, в которой

$$F_{n+1} = \frac{1}{\varphi}\sum_{1}^{n} F_i \,, \quad \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi^2$$

n	F_i	L_i	$F_i \cdot L_i$	$\sum F_i \cdot L_i$
1	1	1	1	1
2	2	3	6	7
3	3	4	12	19
4	5	7	35	54
5	8	11	88	142
6	13	18	234	376
7	21	29	609	985
8	34	47	1598	2583
9	55	76	4180	6763
10	89	123	10947	17710
11	144	199	28656	46366
12	233	322	75026	

Например, для *n=12* 75026 составляет равно 46366, умноженному на 0,618, а отношении 75026 к 28656 равно 2,618.