С.Л. Василенко, д.т.н.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ «ЗОЛОТОГО» СЕЧЕНИЯ

В разработках по «золотому» сечению или гармоническим пропорциям большое распространение получили числовые последовательности Фибоначчи F_n и Люка L_n, инвариантные некоторому числу, задающему код этих рядов.

Как известно, существуют две основные формы представления подобных рекуррентных последовательностей чисел:

в неявном виде – посредством рекурсии, задающей член ряда в зависимости от его предшествующих значений, с заданными начальными условиями;

в явном виде – через соотношения, позволяющие вычислять любой член ряда в зависимости от его порядкового номера.

Упомянутые ряды основаны на «золотой» пропорции и для простейшего случая выражаются в явном виде известными формулами Бине

$$F_n = \frac{\Phi^n - (-1)^n \Phi^{-n}}{\sqrt{5}}, \qquad L_n = \Phi^n + (-1)^n \Phi^{-n}, \tag{1}$$

где $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$, которые по своей структуре очень похожи на классические гиперболические функции косинуса и синуса

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{c}\\ \mathrm{s}\end{matrix}\right\rangle \mathrm{h}x = \frac{e^x \pm e^{-x}}{2} \quad ==> \quad \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \tag{2}$$

Это наблюдение натолкнуло А. Стахова с соавторами [1–3] на мысль заменить в формулах (1) дискретную переменную n непрерывным аргументом x, принимающим значения из множества действительных чисел. В результате такой незамысловатой операции появился непрерывный аналог функций F_n, L_n, названый симметрическими гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка [2], который для «металлических» пропорций, описываемых алгебраическим уравнением $x^2 - mx - 1 = 0$, имеет вид [3]:

гиперболический косинус (c +) и синус (s –) Фибоначчи

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{c}\\ \mathrm{s}\end{matrix}\right\rangle F(x) = \left.\begin{matrix}\mathrm{c}\\ \mathrm{s}\end{matrix}\right\rangle L(x)/m' = \frac{\phi^x \pm \phi^{-x}}{m'}, \tag{3}$$

гиперболический косинус (c +) и синус (s –) Люка

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{c}\\ \mathrm{s}\end{matrix}\right\rangle L(x) = \left.\begin{matrix}\mathrm{c}\\ \mathrm{s}\end{matrix}\right\rangle F(x) \cdot m' = \phi^x \pm \phi^{-x}, \tag{4}$$

где $m' = \sqrt{m^2 + 4}$, $\phi = (m + m')/2 > 0$.

Очевидно, что функции $\mathrm{c}F(x), \mathrm{s}F(x)$ и $\mathrm{c}L(x), \mathrm{s}L(x)$ для четных и нечетных n поочередно совпадают с числами F_n, L_n, когда непрерывная переменная x принимает дискретные целочисленные значения. То есть гиперболические функции Фибоначчи и Люка являются обычным распространением формул Бине на непрерывную область.

Анализ формул (3)–(4) позволяет высказать ряд замечаний:

1. Любой косинус в его привычном представлении для нулевого аргумента равен 1. В приведенных же формулах он в одном случае равен $2/m'$, в другом – 2.

2. Известно, что гиперболические функции связаны между собой целым рядом зависимостей, аналогичных соотношениям между тригонометрическими функциями [4, с. 726–727; 5]. Практически ни одно из известных гиперболических уравнений

(см. приложение) для функций (3)–(4) не выполняется без дополнительных преобразований. Естественно, что такой подход имеет мало общего с теорией гиперболических функций.

3. Раздельное введение двух косинусов или двух синусов является избыточным и неоптимальным, «перегружая» полезную идею излишними нововведениями.

4. Развиваемое в последнее время направление по обобщению «золотых» пропорций (те же *p*-сечения упомянутых авторов), подразумевающие появление новых обобщенных «золотых» чисел и инвариантных им последовательностей Фибоначчи и Люка, вообще ставят под сомнение универсальность формул типа (3)–(4) для этих чисел. Вряд ли будет разумно каждому такому ряду сопоставлять свой гиперболический косинус или синус с отдельными формулами, а потом тангенс, котангенс и т.д.

Таким образом, близкие по форме стандартным гиперболическим функциям соотношения (2)–(3) становятся отдаленными от них по содержанию.

А значит, широкое распространение таких функций в науке и на практике становится проблематичным, несмотря на утверждение их основателей, что «открытие имеет революционное (?) значение для развития современной математики и теоретической физики».

По нашему мнению, в результате такого подхода, наоборот, теряется весьма рациональное зерно (а оно действительно есть!) по «насыщению» проблематики «золотого» сечения гиперболичностью, которая естественным образом присуща последовательностям F_n, L_n по определению.

Нисколько ни приуменьшая роли упомянутых авторов в развитии ими весьма плодотворной идеи, все же попытаемся вернуться на исходный рубеж и посмотреть на все еще раз в традициях общепринятых концепций гиперболических функций.

Чем хороша эта теория? Прежде всего, наличием вездесущего числа *e*. Другая особенность – это соответствие тригонометрии с переходом от окружности к гиперболе.

Что есть у нас? Мы имеем не менее замечательное число Φ или его аналог ϕ при том или ином обобщении «золотого» сечения. И хотим распространить на них гиперболичность (или наоборот, их на гиперболичность) с сохранением всех известных признаков, присущих традиционным гиперболическим функциям.

Вывод напрашивается сам собой: попробуем в формулах (2) заменить e на ϕ!

Итак, при дальнейшем изложении материала ниже будем различать: n – дискретная переменная, x – непрерывная переменная, z – комплексное число, $i=\sqrt{-1}$ – мнимая единица, ϕ – число обобщенного «золотого» сечения.

В основу исследований положим полученное в работе [6] обобщение формул Бине для чисел Фибоначии F_n и Люка L_n:

$$F_n = \frac{\phi^n - (-q)^n \phi^{-n}}{\breve{m}} = \frac{\phi^n - (m-\phi)^n}{\breve{m}} = \frac{1}{\breve{m}}\left[\left(\frac{m+\breve{m}}{2}\right)^n - \left(\frac{m-\breve{m}}{2}\right)^n\right], \tag{5}$$

$$L_n = \phi^n + (-q)^n \phi^{-n} = \phi^n + (m-\phi)^n = \left(\frac{m+\breve{m}}{2}\right)^n + \left(\frac{m-\breve{m}}{2}\right)^n. \tag{6}$$

Они адекватны обобщенному «золотому» сечению, которое характеризуется квадратным уравнением $x^2 - mx - q = 0$ с положительными коэффициентами m, q и действительным корнем $\phi = \phi(m,q) = \frac{m+\breve{m}}{2} > 0$, где $\breve{m} = \sqrt{m^2 + 4q} = \phi + \frac{q}{\phi}$.

«Золотые» гиперболические функции (ЗГФ) зададим соотношениями

$$\left.{c \atop s}\right\rangle h_\phi x = \frac{\phi^x \pm \phi^{-x}}{2} \quad \text{или} \quad \mathrm{ch}_\phi x = \frac{\phi^x + \phi^{-x}}{2}, \quad \mathrm{sh}_\phi x = \frac{\phi^x - \phi^{-x}}{2}. \tag{7}$$

Эти функции определены и непрерывны на всей числовой оси (рис. 1).

Функция косинуса $\mathrm{ch}_\phi x$ – четная, $\mathrm{ch}_\phi x \equiv \mathrm{ch}_\phi(-x)$, убывающая в интервале (–∞; 0) и возрастающая на промежутке (0; +∞). Точка (0; 1) является минимумом этой функции.

Функция синуса $\mathrm{sh}_\phi x$ – нечетная, $\mathrm{sh}_\phi x \equiv -\mathrm{sh}_\phi(-x)$ и строго возрастает на всей числовой оси.

Согласно общим правилам четыре дополнительные ЗГФ (тангенс – th, котангенс – cth, секанс – sech и косеканс – cosech) определяются как

$$\mathrm{th}_\phi x = \mathrm{sh}_\phi x / \mathrm{ch}_\phi x, \quad \mathrm{cth}_\phi x = \mathrm{ch}_\phi x / \mathrm{sh}_\phi x,$$

$$\mathrm{sech}_\phi x = 1/\mathrm{ch}_\phi x, \quad \mathrm{cosech}_\phi x = 1/\mathrm{sh}_\phi x.$$

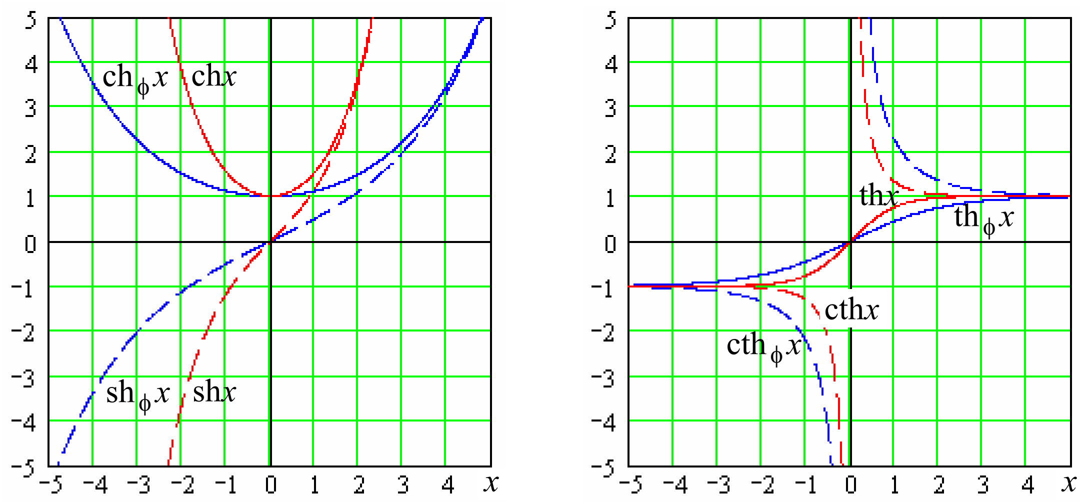

Рис. 1. Графики обычных и «золотых» (с индексом $_\phi$) гиперболических функций для действительного аргумента, $m = q = 1$

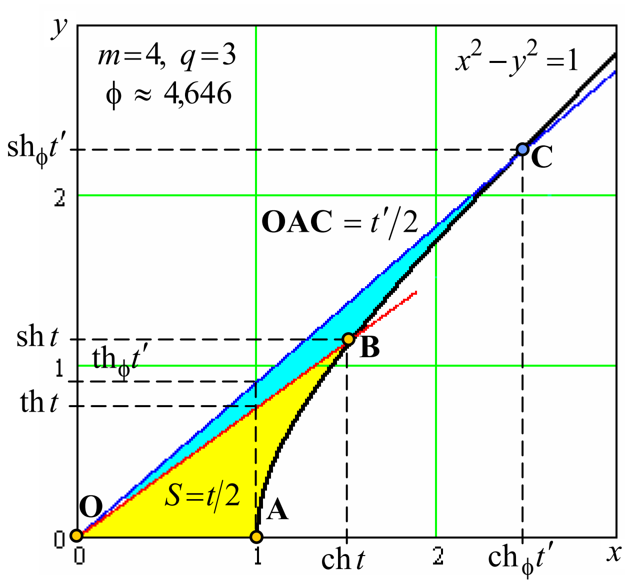

Рис. 2. Геометрическое сопоставление гиперболических функций

Тангенс $\mathrm{th}_\phi x$ определен на всей числовой оси, котангенс $\mathrm{cth}_\phi x$ – при всех $x \neq 0$, $\lim\limits_{x\to\pm 0} \mathrm{cth}_\phi x = \pm\infty$. Обе функции непрерывны на всей области x, нечетны и имеют горизонтальные асимптоты

$$y = -1 \big/ {x \to -\infty}, \quad y = 1 \big/ {x \to +\infty}.$$

Геометрически гиперболические функции получаются из рассмотрения равнобочной единичной гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ (рис. 2), которую можно задать параметрическими уравнениями $x = \mathrm{ch}\, t$, $y = \mathrm{sh}\, t$. Аргумент t называется гиперболическим углом (между радиусами OA и OB гиперболы) и равен удвоенной площади сектора OAB, ограниченного этими радиусами и дугой AB гиперболы.

Аналогичным образом эта же гипербола для ЗГФ задается параметрическими уравнениями $x = \mathrm{ch}_\phi t'$, $y = \mathrm{sh}_\phi t'$ с гиперболическим углом t' между радиусами ОА и ОС, который равен удвоенной площади сектора ОАС, ограниченного этими радиусами и дугой АС гиперболы.

То есть термин «гиперболический» означает, что равенства $x = \mathrm{ch}t$, $y = \mathrm{sh}t$ задают равнобочную гиперболу $x^2 - y^2 = 1$ подобно тому как равенства $x = \cos t$, $x = \sin t$ задают окружность $x^2 + y^2 = 1$. Другими словами, если тригонометрические синус и косинус являются координатами точки на окружности, то гиперболические синус и косинус – координатами точки на гиперболе. Все это в равной степени относится и к ЗГФ.

Такое представление «золотых» гиперболических функций имеет ряд достоинств:

1. Не нужно применять отдельное нормирование, в частности, автоматически по определению выполняется соотношение $\mathrm{ch}_\phi 0 = 1$.

2. Полностью сохраняются внешняя и содержательная похожесть на обычные гиперболические функции, и что самое главное – соответствующие формулы и тождества (см. приложение) без каких-либо дополнительных преобразований или переводных коэффициентов.

3. Теряя некоторые важнейшие свойства функции e^x, в частности, ее уникальность в интегрально-дифференциальных преобразованиях, взамен приобретаем новые, не менее интересные качества, связанные с неповторимостью «золотых» пропорций и их рекуррентными свойствами в целочисленных аргументах.

Таким образом, ЗГФ обладают всеми свойствами обычных гиперболических функций и одновременно дополнительными, только им присущими признаками, которые обусловлены особенностями обобщенных «золотых» пропорций.

И если число e уникально, например, с точки зрения интегрирования и дифференцирования, то число ϕ – по своим редкостным рекуррентным свойствам.

Взаимосвязь между обычными и «золотыми» гиперболическими функциями.

Учитывая свойство логарифмов $a^{\log_a b} = b$, можно представить $\phi^x = \left(e^{\ln\phi}\right)^x = e^{x\ln\phi}$ и $e^x = \left(\phi^{\log_\phi e}\right)^x = \phi^{x\log_\phi e}$, а значит «золотые» и обычные гиперболические функции связаны между собой простыми соотношениями:

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{s}\\ \mathrm{c}\end{matrix}\right\rangle \mathrm{h}_\phi x = \left.\begin{matrix}\mathrm{s}\\ \mathrm{c}\end{matrix}\right\rangle \mathrm{h}(x\cdot\ln\phi) \quad \text{или} \quad \mathrm{sh}_\phi x = \mathrm{sh}(x\cdot\ln\phi), \quad \mathrm{ch}_\phi x = \mathrm{ch}(x\cdot\ln\phi);$$

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{s}\\ \mathrm{c}\end{matrix}\right\rangle \mathrm{h}x = \left.\begin{matrix}\mathrm{s}\\ \mathrm{c}\end{matrix}\right\rangle \mathrm{h}_\phi\left(x\cdot\log_\phi e\right) \quad \text{или} \quad \mathrm{sh}x = \mathrm{sh}_\phi\left(x\cdot\log_\phi e\right), \quad \mathrm{ch}x = \mathrm{ch}_\phi\left(x\cdot\log_\phi e\right).$$

Подобно обычным гиперболическим функциям, ЗГФ можно также выразить через тригонометрические функции с масштабированием комплексного аргумента $z' = z\ln\phi$:

$$\left\{\begin{array}{lll} e^{\pm iz} = \cos z \pm i\sin z & ==> & \phi^{\pm iz} = \cos z' \pm i\sin z'; \\ e^{\pm z} = \mathrm{ch}\, z \pm \mathrm{sh}\, z & ==> & \phi^{\pm z} = \mathrm{ch}_\phi z \pm \mathrm{sh}_\phi z; \\ \mathrm{ch}\, z = \cos iz & ==> & \mathrm{ch}_\phi z = \cos iz'; \\ \mathrm{sh}\, z = -i\sin iz & ==> & \mathrm{sh}_\phi z = -i\sin iz'; \\ \mathrm{th}\, z = -i\,\mathrm{tg}\, iz & ==> & \mathrm{th}_\phi z = -i\,\mathrm{tg}\, iz'; \end{array}\right. \tag{8}$$

$$\text{cth}\, z = i\,\text{ctg}\, iz \qquad ==> \qquad \text{cth}_{\phi} z = i\,\text{ctg}\, iz'.$$

Первое соотношение в частном случае при $z = \pi$ приводит к знаменитому равенству русского математика Эйлера $e^{i\pi} + 1 = 0$, которое интересно тем, что связывает пять «основных» математических констант: $0,\ 1,\ i,\ e$ и π.

Переходя к обобщенному золотому сечению, получаем аналогичную фору, которая к данной совокупности констант добавляет также число ϕ

$$\phi^{i\frac{\pi}{\ln\phi}} + 1 = 0,$$

и, например, для числа Φ запишется как $\Phi^{2,078\cdot i\pi} + 1 = 0$.

Формулы Эйлера, устанавливающие связь между тригонометрическими функциями и экспонентой (показательной функции через гиперболические функции), также сохраняются, соответственно приобретая вид ($z'' = z/\ln\phi$):

$$\cos z = \text{ch}\, iz \qquad ==> \qquad \cos z' = \text{ch}_{\phi} iz \qquad \text{или} \qquad \cos z = \text{ch}_{\phi} iz'';$$

$$\sin z = -i\,\text{sh}\, iz \qquad ==> \qquad \sin z' = -i\,\text{sh}_{\phi} iz \qquad \text{или} \qquad \sin z = -i\,\text{sh}_{\phi} iz'';$$

$$\text{tg}\, z = -i\,\text{th}\, iz \qquad ==> \qquad \text{tg}\, z' = -i\,\text{th}_{\phi} iz \qquad \text{или} \qquad \text{tg}\, z = -i\,\text{th}_{\phi} iz'';$$

$$\text{ctg}\, z = i\,\text{cth}\, iz \qquad ==> \qquad \text{ctg}\, z' = i\,\text{cth}_{\phi} iz \qquad \text{или} \qquad \text{ctg}\, z = i\,\text{cth}_{\phi} iz'';$$

$$\text{sh}\, z = -i\,\text{ch}\left(z + i\frac{\pi}{2}\right) \qquad ==> \qquad \text{sh}_{\phi} z = -i\,\text{ch}_{\phi}\left(z + i\frac{\pi}{2\cdot\ln\phi}\right).$$

Отметим, что присутствие переводного коэффициента $\ln\phi$ нисколько не снижает эффективности предложенного подхода, поскольку во всех формулах он одинаков, а его форма не теряет универсальности при переходе к разным обобщенным «золотым» числам ϕ, отражающим те или иные свойства гармонических пропорций.

Используя для целых n формулу Муавра $(\cos z + i\sin z)^n = \cos nz + i\sin nz$ [4, с. 33] и приведенные формулы для косинуса и синуса аргумента, можно также записать еще одно тождество для ЗГФ (в дополнение к приложению)

$$\left[\text{ch}_{\phi}(iz) + \text{sh}_{\phi}(iz)\right]^n = \text{ch}_{\phi}(inz) + \text{sh}_{\phi}(inz).$$

Наконец, как и для любой показательной функции верно тождество:

$$\phi^{\pm ix} = e^{\pm ix\ln\phi} = \cos(x') \pm i\sin(x').$$

Разложение ЗГФ в степенны́е ряды

Принимая во внимание формулу взаимосвязи $\phi^x = e^{x\ln\phi} = e^{x'}$ и разложения в ряд Маклорена (степенной ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$) обычных гиперболических функций [4, с. 729], имеем:

$$\phi^x = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(x')^j}{j\,!}, \qquad \text{sh}_{\phi} x = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(x')^{2j+1}}{(2j+1)\,!}, \qquad \text{ch}_{\phi} x = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(x')^{2j}}{(2j)\,!},$$

где $\xi\,!$ – знак факториала произвольного целого числа $\xi \geq 0;\ 0! = 1! = 1$.

Условие $q = 1, m \geq 1$

Данное ограничение существенно упрощает математические выкладки, поскольку в этом случае выражения (2) и (5)–(6) становятся практически инвариантными.

Сопоставление соотношений (5)–(7) для дискретных n приводит нас к простым формулам взаимосвязи ЗГФ с числами Фибоначчи F_n и Люка L_n:

$$L_n = \begin{cases} 2\mathrm{ch}_\phi n = \mathrm{c}L(n), & n = 2k, \\ 2\mathrm{sh}_\phi n = \mathrm{s}L(n), & n = 2k+1, \end{cases} \qquad F_n = \begin{cases} 2(\mathrm{sh}_\phi n)/m = \mathrm{s}F(n), & n = 2k, \\ 2(\mathrm{ch}_\phi n)/m = \mathrm{c}F(n), & n = 2k+1, \end{cases} \tag{9}$$

где k – числа натурального ряда, такие, что $2k$ – четное, $2k+1$ – нечетное.

Как следует из приведенных формул (9), гиперболические симметрические функции Фибоначчи $\mathrm{s}F(x), \mathrm{c}F(x)$ и Люка $\mathrm{s}L(x), \mathrm{c}L(x)$ – есть не что иное, как сами числа Фибоначчи и Люка, тождественно равные данным функциям в дискретные моменты. То есть функции А. Стахова – это те же числа по формулам (1) с простой заменой n на x.

Мы же пошли по пути не сохранения идентичности чисел и гиперболических функций Фибоначчи и Люка, что и так очевидно при переходе от n к x и не дает дополнительной информации, а в направлении сбережения всех наработанных свойств самих гиперболических функций с приданием дополнительных дискретных особенностей. И если нам необходимо из них «выудить» упомянутые числовые последовательности, то они автоматически вытекают из простых синхронизующих формул (9).

В этом заключается принципиальная новизна и квинтэссенция излагаемого подхода.

Применяя формулы (9) к известным соотношениям, описывающим свойства числовых рекуррентных последовательностей Фибоначчи и Люка [6], и переходя от дискретного параметра n к комплексным числам z, можно получить целый арсенал дополнительных тождеств (табл. 1).

Новые соотношения присущи исключительно «золотым» гиперболическим функциям. Это наш новый запас знаний о гиперболичности, который мы приобрели, заплатив за это ни много, ни мало частичной потерей замечательных свойств числа e.

И каков же главный результат, или к чему вся эта перетасовка чисел ϕ и e?

Рассмотрение тождеств в табл. 1 позволяет сформулировать основополагающий вывод: «золотые» гиперболические функции обладают одновременно непрерывными и дискретными свойствами. То есть в одной модели мы теперь имеем параллельное и единовременное проявление непрерывности и целочисленной дискретности.

Поскольку, так или иначе, мы начали с числа e, то уместно вспомнить о замечательных открытиях Эйлера, в частности, методе производящих функций.

Его идея гениально проста: для выявлений свойств рекуррентных уравнений через степенные полиномы переходят в непрерывную область, выполняют преобразования, подключая мощный аппарат математического анализа, и снова возвращаются к исходным дискретным рядам, но уже с новыми полезными результатами.

И если рассматривать два главнейших направления в математике, а именно по изучению непрерывных и дискретных объектов, между которыми существует множество связей, то все же это разные направления, – каждый со своей спецификой.

Однако в объективной действительности не существует отдельно дискретного (не смешивать с перечисляемыми объектами) и непрерывного миров.

Мир един. Но когда его анализируем, разбивая на составляющие, мы искусственно создаем абстрактные, реально несуществующие оболочки, которые тем не мене образуют базу для процесса познания.

Наш же главный результат – это своеобразный мостик между непрерывностью и дискретностью (табл. 2). Только мы по нему не бегаем туда сюда, как в вышеназванном методе производящих функций. Он – сама суть, изначально заложенная в предложенном способе построения «золотых» гиперболических функций и органически ему присущая.

Обобщение на случай $q \geq 1, m \geq 1$

Форма ЗГФ не меняется и остается в прежнем виде (7) для основных функций, а значит и производных от них, поскольку влияние параметра q (свободного члена квадратного уравнения) уже заложено в коде ϕ «золотого» сечения.

Так что с гиперболичностью все в порядке.

Таблица 1

Рекуррентные и комбинаторные свойства «золотых» гиперболических функций, $q = 1$, $m \geq 1$ (z – комплексное число, в том числе и целое n)

Тождества для чисел Фибоначчи и Люка	Тождества для гиперболических функций обобщенных «золотых» сечений
$F_n = mF_{n-1} + F_{n-2}$ $L_n = mL_{n-1} + L_{n-2}$	$\mathrm{sh}_\phi z = m \cdot \mathrm{ch}_\phi(z-1) + \mathrm{sh}_\phi(z-2)$ $\mathrm{ch}_\phi z = m \cdot \mathrm{sh}_\phi(z-1) + \mathrm{ch}_\phi(z-2)$
$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ $F_n = (L_{n+1} + L_{n-1})/\hat{m}^2$	$\mathrm{ch}_\phi z = [\mathrm{ch}_\phi(z+1) + \mathrm{ch}_\phi(z-1)]/\hat{m}$ $\mathrm{sh}_\phi z = [\mathrm{sh}_\phi(z+1) + \mathrm{sh}_\phi(z-1)]/\hat{m}$
$\phi^n = \phi F_n + F_{n-1}$ $\phi^n = \phi L_n + L_{n-1}/\hat{m}$	$\mathrm{sh}_\phi z + \mathrm{ch}_\phi z = 2[\phi \cdot \mathrm{sh}_\phi z + \mathrm{ch}_\phi(z-1)]/\hat{m}$ $\mathrm{sh}_\phi z + \mathrm{ch}_\phi z = 2[\phi \cdot \mathrm{ch}_\phi z + \mathrm{sh}_\phi(z-1)]/\hat{m}$
$L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n = (\hat{m}F_n)^2 + 2(-1)^n$	$\mathrm{ch}_\phi(2z) = 2\,\mathrm{ch}_\phi^2 z - 1 = 2\,\mathrm{sh}_\phi^2 z + 1$ [1]
$F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1}$ $L_n^2 = L_{n-1}L_{n+1} - \hat{m}^2(-1)^{n-1}$	$\mathrm{sh}_\phi^2 z = \mathrm{ch}_\phi(z+1) \cdot \mathrm{ch}_\phi(z-1) - \dfrac{m^2}{4} - 1$ $\mathrm{ch}_\phi^2 z = \mathrm{sh}_\phi(z+1) \cdot \mathrm{sh}_\phi(z-1) + \dfrac{m^2}{4} + 1$
$\Psi_n - \dfrac{1}{\Psi_n} \to m$	$\Psi\mathrm{h}_\phi n - \dfrac{1}{\Psi\mathrm{h}_\phi n} \to m$
$\Psi_n \to \phi$	$\Psi\mathrm{h}_\phi n \to \phi$
$\sum\limits_{j=0}^{n-1} L_j = \dfrac{\phi^n - 1}{\phi - 1} + \dfrac{(m-\phi)^n - 1}{(m-\phi) - 1}$	$2\sum\limits_{j=0}^{n-1}[\mathrm{ch}_\phi(2j) + \mathrm{sh}_\phi(2j+1)] = \dfrac{\phi^{2n} - 1}{\phi - 1} + \dfrac{(m-\phi)^{2n} - 1}{(m-\phi) - 1}$
$F_{2n+1} = \sum\limits_{j=0}^{n} m^{2i} C_{n+j}^{2j}$	$\mathrm{ch}_\phi(2n+1) = \dfrac{\hat{m}}{2}\sum\limits_{j=0}^{n} m^{2j} C_{n+j}^{2j}$
$F_{2n} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m^{2i+1} C_{n+1}^{2i+1}$	$\mathrm{sh}_\phi(2n) = \dfrac{\hat{m}}{2}\sum\limits_{i=0}^{n-1} m^{2j+1} C_{n+j}^{2j+1}$
$\Psi_n = \left\{\dfrac{F_{n+1}}{F_n}, \dfrac{L_{n+1}}{L_n}\right\}$, $\quad \Psi h_\phi x = \left\{\dfrac{\mathrm{sh}_\phi(x+1)}{\mathrm{sh}_\phi x}, \dfrac{\mathrm{ch}_\phi(x+1)}{\mathrm{ch}_\phi x}, \dfrac{\mathrm{sh}_\phi(x+1)}{\mathrm{ch}_\phi x}, \dfrac{\mathrm{ch}_\phi(x+1)}{\mathrm{sh}_\phi x}\right\}$	

Примечание. [1] – данная формула есть в приложении.

Не все становится очевидным лишь при переходе от ЗГФ к числам Фибоначчи и Люка, поскольку сомножитель $(-q)^n$ формулах (5)–(6) не имеет своего адекватного представительства в «золотых» гиперболических функциях (7), в результате чего получаем такие уравнения

$$L_n = 2\mathrm{ch}_{\phi} n + \phi^{-n}\left[(-q)^n - 1\right] = 2\mathrm{sh}_{\phi} n + \phi^{-n}\left[(-q)^n + 1\right], \qquad (10)$$

$$\breve{m}F_n = 2\mathrm{ch}_{\phi} n - \phi^{-n}\left[(-q)^n + 1\right] = 2\mathrm{sh}_{\phi} n - \phi^{-n}\left[(-q)^n - 1\right], \qquad (11)$$

которые отличаются от (9) наличием дополнительных слагаемых.

Таблица 2

Проявление целочисленных дискретных свойств для непрерывных «золотых» гиперболических функций

(в пределах приведенной точности)

$m = 2,\ q = 1,\ \breve{m} = \sqrt{8} \approx 2{,}83$

	n						
	–3	–2	–1	0	1	2	3
$\mathrm{ch}_{\phi} n$	7,07	3	1,41	1	1,41	3	7,07
$\mathrm{sh}_{\phi} n$	–7	–2,82	–1	0	1	2,82	7
$\mathrm{ch} n$	10,07	3,76	1,54	1	1,54	3,76	10,07
$\mathrm{sh} n$	–10,02	–3,63	–1,18	0	1,18	3,63	10,02
$\mathrm{sh}_{\phi} n = m \cdot \mathrm{ch}_{\phi}(n-1) + \mathrm{sh}_{\phi}(n-2)$	–	–	2·3–7	2·1,41–2,82	2·1–1	2·1,41	2·3+1
$\mathrm{ch}_{\phi} z = \left[\mathrm{ch}_{\phi}(z+1) + \mathrm{ch}_{\phi}(z-1)\right]/\breve{m}$	–	$\frac{7{,}07+1{,}41}{2{,}83}$	$\frac{3+1}{2{,}83}$	$\frac{2\cdot 1{,}41}{2{,}83}$	$\frac{3+1}{2{,}83}$	$\frac{1{,}41+7{,}07}{2{,}83}$	–

Согласно (6) числа Люка L_n представляют собой не что иное, как сумму n-х степеней корней $x_{1,2} = (m \pm \breve{m})/2$ квадратного уравнения $x^2 - mx - q = 0$.

Характерно, что эта сумма $S_n = x_1^2 + x_2^2$, а, следовательно, и числа Люка при $q = 1$ практически симметричны относительно $n = 0$, то есть для нечетных n значения F_n и F_{-n} совпадают, а для четных n они противоположны по знаку, применительно к числам Люка – все наоборот:

$$F_{2k+1} = F_{-2k-1}, \qquad F_{2k} = -F_{-2k},$$

$$L_{2k+1} = -L_{-2k-1}, \qquad L_{2k} = -L_{-2k},$$

где k – натуральное число.

То есть присутствует некоторый смысл оперировать с этими величинами и в области отрицательных степеней n.

При $q > 1$ картина нарушается (рис. 2), и суммы S_n отрицательных степеней n уже не имеют своих зеркальных аналогов на положительной полуоси. И если по ним можно последовательно слева направо рекуррентно воспроизводить все последующие значения, то целыми числами Люка они уже не являются.

Другими словами, их содержательность и ценность уходят на задний план.

В частности, если $q = m + 1$, то корни квадратного уравнения равны $x_1 = -1,\ x_2 = q$, и при перемещении в область отрицательных значений n сумма $S_n = (-1)^n + q^n$ начинает периодически колебаться между значениями $+1$ и -1.

Введем следующие дискретные функции или «расширенные» числа Фибоначчи и Люка

$$F'_n = \frac{\phi^n - (-q)^n \phi^{-|n|}}{\breve{m}}, \qquad L'_n = \phi^n + (-q)^n \phi^{-|n|}. \qquad (12)$$

Данные последовательности чисел отличаются от (5)–(6) наличием абсолютного значения $|n|$, и они полностью совпадают с числами Фибоначчи F_n и Люка L_n в области положительных значений n.

Дискретизация по формулам (12) позволяет нам записать такие соотношения:

$$\begin{cases} L_n = L'_n = 2\mathrm{ch}_\phi n - \breve{m}F'_{-n} = 2\mathrm{sh}_\phi n + L'_{-n}, \\ F_n = F'_n = \dfrac{2\mathrm{ch}_\phi n - L'_{-n}}{\breve{m}} = \dfrac{2\mathrm{sh}_\phi n}{\breve{m}} + F'_{-n}. \end{cases} \tag{13}$$

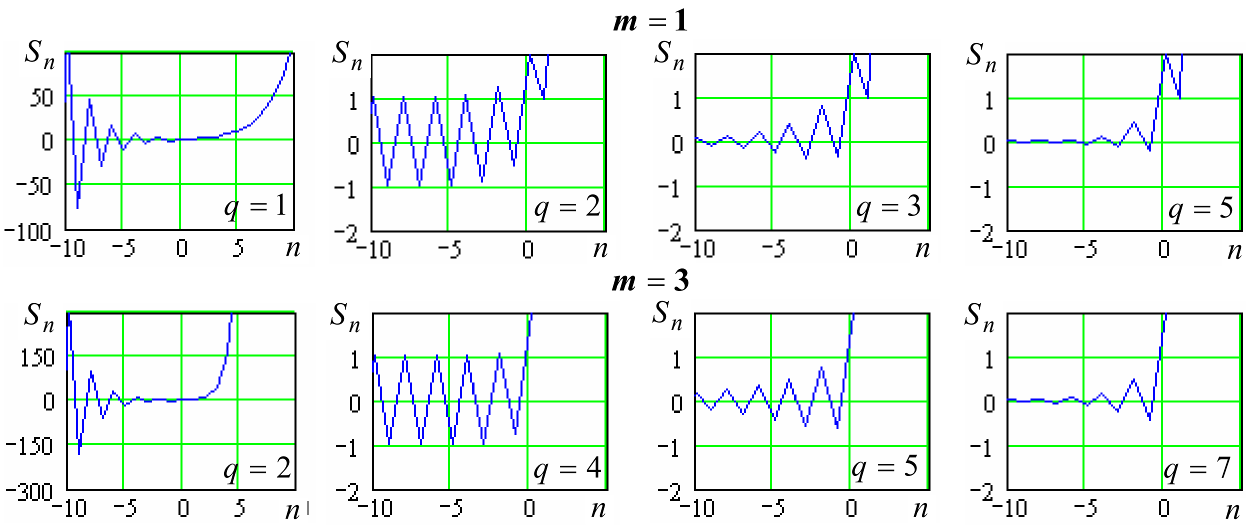

Рис. 2. Примерные графики изменения суммы S_n отрицательных степеней n корней квадратного уравнения общего вида

Они позволяют от гиперболических функций переходить к числам Фибоначчи и Люка, хотя построить дополнительную систему тождественности, подобную табл. 1, сразу не удается.

В отличие от L'_n и F'_n, переменные L'_{-n} и F'_{-n} не являются целочисленными, и поэтому для случая $q > 1$ приходится искать новые обобщающие формы.

Но это дело будущего, когда возникнут необходимые условия, инициируемые практикой или дальнейшим развитием теории.

Хотя может оказаться, что в рассматриваемом аспекте многочлен $x^2 - mx - 1$ является предельным случаем объединения непрерывной гиперболичности и дискретной рекуррентности, поскольку в общем случае числа Люка определяются суммой n-х степеней всех корней алгебраического уравнения, задающего обобщенные «золотые» пропорции, и к соотношениям типа (6) с одним корнем ϕ не приводятся.

Выводы

Анализ полученных результатов позволяет подвести следующие итоги:

1. Введен новый класс гиперболических функций обобщенных «золотых» сечений, названных «золотыми» гиперболическими функциями. В их основу вместо числа e положены числа «золотого» сечения ϕ в его обобщении, адекватном квадратному уравнению.

2. «Золотые» гиперболические функции обладают всеми качественными признаками и соотношениями, присущими обычным гиперболическим функциям. Одновременно они отличаются уникальными рекуррентными свойствами, связывающими

значения функций, отстоящие друг от друга на целочисленные интервалы аргумента, а для комплексного аргумента – на целочисленные значения его действительной части.

Фактически в одной модели органически объединены непрерывность и дискретность, что, надо полагать, является главным постулатом (не аксиомой!?) физического мира.

3. Получены формулы взаимосвязи «золотых» гиперболических функций:

— с тригонометрическими функциями;

— гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка (в интерпретации А. Стахова с соавторами);

— числами Фибоначчи и Люка, инвариантными квадратному уравнению.

Вместо заключения

Без преувеличения можно сказать, что в настоящей работе, по сути, заложены основы важного научного направления – теории «золотых» гиперболических функций, имеющей, по мнению автора, не только академичное, но и практическое значение.

Теряя некоторые весьма полезные свойства числа *e*, гиперболические функции «золотых» сечений с лихвой их компенсируют уникальными свойствами гармонических пропорций. Паритет восстанавливается, но при этом выходим на совершенно иной качественный уровень описания исследуемых процессов, адекватных как гиперболичности, так и гармонической пропорциональности.

Конечно, речь идет не о простой подмене одного числа e другим ϕ.

Хотя и такая незамысловатость уже сама по себе вызывает доверие, принимая во внимание содержательность, внутреннюю красоту этих чисел, их неповторимость и даже благоговение.

Суть лежит гораздо глубже.

Объединяя в себе одновременно свойства непрерывности и целочисленной дискретности, «золотые» гиперболические функции дают еще один ключик к пониманию и описанию мироустройства – разного в отображениях, но единого в своей сущности.

В отличие от традиционного анализа (математического, философского, системного и пр.) «золотые» гиперболические функции имеют налицо все признаки синтеза – именно того, что порой не хватает современным наукам, в том числе и в поисках новых парадигм их дальнейшего развития.

P.S. Как харьковчанин хочу высказать глубокую признательность нашему земляку – профессору А. Стахову за широкую и неутомимую популяризацию плодотворных идей «золотых» пропорций, которые еще долго будут будоражить умы не одного поколения людей.

Литература

1. *Стахов А.П., Ткаченко И.С.* Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи // Доклады Академии наук УССР, 1993. – Т. 208. – № 7. – С. 9–14.

2. *Stakhov A.*, *Rozin B.* On a new class of hyperbolic function. Chaos // Solitons & Fractals, 2004. – № 23(2). – P. 379–389.

3. *Стахов А.П.* От «Золотого Сечения» к «Металлическим Пропорциям». Генезис великого математического открытия от Евклида к новым математическим константам и новым гиперболическим моделям Природы // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567. – Публ.14774 от 16.04.2008.

4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1974. – 832 с.

5. *Янпольский А.Р.* Гиперболические функции. – М.: Физматгиз, 1960. – 196 с.

6. *Василенко С.Л.* Аналитика «золотых» пропорций // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14795 от 12.05.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321085.htm.

Приложение

Основные формулы,
общие для обычных и «золотых» гиперболических функций

Определение «золотых» гиперболических функций

Гиперболический синус (sh_ϕ), косинус (ch_ϕ), тангенс (th_ϕ) и котангенс (cth_ϕ):

$$\mathrm{sh}_\phi x = \frac{\phi^x - \phi^{-x}}{2}; \qquad \mathrm{ch}_\phi x = \frac{\phi^x + \phi^{-x}}{2}; \qquad \mathrm{th}_\phi x = \frac{\mathrm{sh}_\phi x}{\mathrm{ch}_\phi x}; \qquad \mathrm{cth}_\phi x = \frac{\mathrm{ch}_\phi x}{\mathrm{sh}_\phi x},\ x \neq 0.$$

Основные тождества

$$\mathrm{ch}_\phi^2 x - \mathrm{sh}_\phi^2 x = 1, \qquad 1 - \mathrm{th}_\phi^2 x = \mathrm{ch}_\phi^{-2} x,$$

$$1 - \mathrm{cth}_\phi^2 x = \mathrm{sh}_\phi^{-2} x, \qquad \mathrm{cth}_\phi^2 x - 1 = \mathrm{sh}_\phi^{-2} x, \quad x \neq 0.$$

Выражение функций через одну из них

Через $\underline{\mathrm{sh}_\phi x}$: $\quad \mathrm{ch}_\phi x = \sqrt{1 + \mathrm{sh}_\phi^2 x}; \qquad \mathrm{th}_\phi x = \dfrac{\mathrm{sh}_\phi x}{\sqrt{1 + \mathrm{sh}_\phi^2 x}}; \qquad \mathrm{cth}_\phi x = \dfrac{\sqrt{1 + \mathrm{sh}_\phi^2 x}}{\mathrm{sh}_\phi x},\ x \neq 0.$

Через $\underline{\mathrm{ch}_\phi x}$: $\quad \mathrm{sh}_\phi x = \mathrm{sgn} x \cdot \sqrt{\mathrm{ch}_\phi^2 x - 1}; \qquad \mathrm{th}_\phi x = \dfrac{\mathrm{sgn} x \cdot \sqrt{\mathrm{ch}_\phi^2 x - 1}}{\mathrm{ch}_\phi x};$

$$\mathrm{cth}_\phi x = \frac{\mathrm{ch}_\phi x}{\mathrm{sgn} x \cdot \sqrt{\mathrm{ch}_\phi^2 x - 1}},\ x \neq 0.$$

Через $\underline{\mathrm{th}_\phi x}$: $\quad \mathrm{sh}_\phi x = \dfrac{\mathrm{th}_\phi x}{\sqrt{1 - \mathrm{th}_\phi^2 x}}; \qquad \mathrm{ch}_\phi x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{th}_\phi^2 x}}; \qquad \mathrm{cth}_\phi x = \dfrac{1}{\mathrm{th}_\phi x},\ x \neq 0.$

Формулы сложения

$$\mathrm{sh}_\phi(x \pm y) = \mathrm{sh}_\phi x \cdot \mathrm{ch}_\phi y \ \pm\ \mathrm{ch}_\phi x \cdot \mathrm{sh}_\phi y, \qquad \mathrm{ch}_\phi(x \pm y) = \mathrm{ch}_\phi x \cdot \mathrm{ch}_\phi y \ \pm\ \mathrm{sh}_\phi x \cdot \mathrm{sh}_\phi y,$$

$$\mathrm{th}_\phi(x \pm y) = \frac{\mathrm{th}_\phi x \ \pm\ \mathrm{th}_\phi y}{1 \ \pm\ \mathrm{th}_\phi x \cdot \mathrm{th}_\phi y}, \qquad \mathrm{cth}_\phi(x \pm y) = \frac{\mathrm{cth}_\phi x \cdot \mathrm{cth}_\phi y \pm 1}{\mathrm{cth}_\phi y \ \pm\ \mathrm{cth}_\phi x}.$$

Сумма и разность одноименных функций

$$\mathrm{sh}_\phi x \ \pm\ \mathrm{sh}_\phi y = 2\,\mathrm{sh}_\phi \frac{x \pm y}{2} \mathrm{ch}_\phi \frac{x\, \mu\, y}{2}, \qquad \mathrm{ch}_\phi x \ +\ \mathrm{ch}_\phi y = 2\,\mathrm{ch}_\phi \frac{x + y}{2} \mathrm{ch}_\phi \frac{x - y}{2},$$

$$\mathrm{ch}_\phi x \ -\ \mathrm{ch}_\phi y = 2\,\mathrm{sh}_\phi \frac{x + y}{2} \mathrm{sh}_\phi \frac{x - y}{2},$$

$$\mathrm{th}_\phi x \ \pm\ \mathrm{th}_\phi y = \frac{\mathrm{sh}_\phi(x \pm y)}{\mathrm{ch}_\phi x \cdot \mathrm{ch}_\phi y}, \qquad \mathrm{cth}_\phi x \ \pm\ \mathrm{cth}_\phi y = \frac{\mathrm{sh}_\phi(y \pm x)}{\mathrm{sh}_\phi x \cdot \mathrm{sh}_\phi y}.$$

Преобразование произведения функций в сумму

$$2\mathrm{sh}_\phi x \cdot \mathrm{ch}_\phi y = \mathrm{sh}_\phi(x+y) + \mathrm{sh}_\phi(x-y), \qquad 2\mathrm{ch}_\phi x \cdot \mathrm{ch}_\phi y = \mathrm{ch}_\phi(x+y) + \mathrm{ch}_\phi(x-y),$$

$$2\mathrm{sh}_\phi x \cdot \mathrm{sh}_\phi y = \mathrm{ch}_\phi(x+y) - \mathrm{ch}_\phi(x-y), \qquad 2\mathrm{sh}_\phi^2 x = 2\mathrm{ch}_\phi 2x - 1, \quad 2\mathrm{ch}_\phi^2 x = 1 + \mathrm{ch}_\phi 2x.$$

Функции двойного аргумента

$$\mathrm{ch}_\phi 2x = \mathrm{sh}_\phi^2 x + \mathrm{ch}_\phi^2 x = 1 + 2\,\mathrm{sh}_\phi^2 x = 2\,\mathrm{ch}_\phi^2 x - 1,$$

$$\mathrm{sh}_\phi 2x = 2\,\mathrm{sh}_\phi x \cdot \mathrm{ch}_\phi x, \qquad \mathrm{th}_\phi 2x = \frac{2\,\mathrm{th}_\phi x}{1 + \mathrm{th}_\phi^2 x}, \qquad \mathrm{cth}_\phi 2x = \frac{\mathrm{cth}_\phi^2 x + 1}{2\,\mathrm{cth}_\phi x}.$$

Функции половинного аргумента

$$\mathrm{sh}_\phi \frac{x}{2} = \mathrm{sgn}\, x \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{ch}_\phi x - 1}{2}}, \qquad \mathrm{ch}_\phi \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}_\phi x + 1}{2}},$$

$$\mathrm{th}_\phi \frac{x}{2} = \frac{\mathrm{ch}_\phi x - 1}{\mathrm{sh}_\phi x} = \frac{\mathrm{sh}_\phi x}{\mathrm{ch}_\phi x + 1}, \qquad \mathrm{cth}_\phi \frac{x}{2} = \frac{\mathrm{ch}_\phi x + 1}{\mathrm{sh}_\phi x} = \frac{\mathrm{sh}_\phi x}{\mathrm{ch}_\phi x - 1}, \quad x \neq 0.$$