С.Л. Василенко, д.т.н.

АНАЛИТИКА «ЗОЛОТЫХ» ПРОПОРЦИЙ

Концепция «золотых» пропорций как структурного и функционального отношения целого и его частей находит отражение в природе, искусстве, технике и др.

В математическом аспекте их описание сводится к набору чисел, задающих желаемые или выявляемые взаимосвязи между отдельными составляющими.

По сути, это одна из задач структурного анализа объекта, либо его синтеза в виде объединения обнаруженных закономерностей, дающих целостное представление.

Целью настоящей работы является исследование обобщенных «золотых» сечений, получение новых знаний в этой области и интерпретация полученных результатов.

Статья рассчитана на читателя, который уже имеет общие представления по данному вопросу или может с ними познакомиться из другой литературы.

Сразу отметим, что изучаемые наборы «золотых» чисел не являются новыми, и в той или иной мере представлены в работах ряда авторов (А. Стахов, М. Газале, Н. Косинов В. Шпинадель, А. Татаренко и др.).

Однако, на наш взгляд, в них отражены лишь отдельные частные случаи либо недостаточно полно раскрыта общая картина на формализованном уровне.

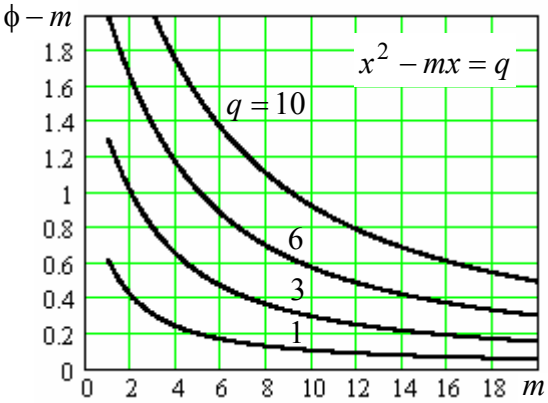

Рис. 1. Примерные зависимости mq–«золотых» пропорций

Итак, рассматривается квадратное уравнение с положительными коэффициентами m, q

$$x^2 - mx - q = 0.$$

Его положительный действительный корень равен $\phi = \phi(m,q) = \dfrac{m+\widehat{m}}{2} > 0$, $\widehat{m} = \sqrt{m^2 + 4q}$ (рис. 1), то есть $\phi^2 - m\cdot\phi - q = 0$, откуда следует

$$m = \phi - \frac{q}{\phi}, \qquad \widehat{m} = \phi + \frac{q}{\phi}, \qquad \frac{m}{\phi} + \frac{q}{\phi^2} = 1,$$

$$\phi = \sqrt{q + m\phi} \approx \sqrt{q + m\cdot\sqrt{q + m\cdot\sqrt{q + m\cdot\sqrt{q + \ldots}}}}\ ,$$

$$\phi^n = m\phi^{n-1} + q\phi^{n-2} \text{ для любого } n.$$

Равенство $m = q = 1$ соответствует классической «золотой» пропорции $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$.

Рассмотрим свойства сечений на примере геометрического сопоставления частей линейного отрезка (рис. 2).

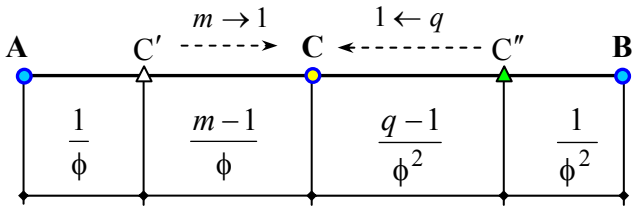

Рис. 2. Деление отрезка AB обобщенным «золотым» сечением: $m \ge 1$, $q \ge 1$

$\boldsymbol{q \ge 1, m = 1}$**.** Отрезок AB единичной длины делится точкой C на две в общем случае неравные части AC и CB (с дополнительной точкой C″) так, чтобы выполнялись следующие пропорции:

$$\phi = \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB/q} = \frac{AC}{C''B} \qquad \text{или} \qquad \phi = \frac{AC + CB}{AC} = 1 + \frac{1}{\frac{AC}{CB}} = 1 + \frac{q}{\phi}.$$

Переходя от геометрической толкования к некоторому абстрактному объекту, можно сформулировать свойство пропорции при $q \geq \mathbf{1}$:

ц е л о е так относится к его бóльшей части, как последняя относится к меньшей части, уменьшенной в q раз, или как увеличенная в q раз бóльшая часть относится к меньшей.

Характерно, что в этом случае (по сравнению с обычным «золотым» сечением) для сохранения пропорции сама по себе бóльшая часть тоже уменьшается, то есть *бóльшего фактически становится меньше*!

Нечто подобное просматривается, например, в политике, при соотношении сил действующей власти и нарастающей оппозиции, которая, находясь в меньшинстве, де-факто может оказывать на жизнь общества все бóльшее влияние, смещая «золотую середину» в свою пользу.

Отрезок AC уменьшается, а точка C все больше «расплывается» в отрезок CC'' – зону, занимаемую оппозицией.

В этом и состоит одно их физических толкований обобщения «золотой» пропорции за счет изменения параметра q – свободного члена уравнения (1).

$\boldsymbol{m \geq 1, q = 1}$**.** Деление исходного отрезка $AB = 1$ точкой C осуществляется на две неравные части AC и CB (с дополнительной точкой C') в таких отношениях:

$$\phi = \frac{AB}{AC/m} = \frac{AC/m}{CB} = \frac{AC'}{CB} \qquad \text{или} \qquad \phi = \frac{AC + CB}{AC/m} = m + \frac{1}{\frac{AC/m}{CB}} = m + \frac{1}{\phi}.$$

Или ц е л о е так относится к уменьшенной в m раз его большей части, как последняя относится к меньшей части, или как бóльший компонент относится к меньшему, увеличенному в m раз.

С ростом m отрезок AC увеличивается, причем довольно быстро, и уже при $m \geq 10$ практически занимает все целое.

Здесь можно провести некоторые параллели из жизни. В частности, в биологии – развитие опухолей, когда происходит смещение точки внутреннего равновесия внешне не изменяющегося организма (целого). Или военное завоевание территории другого государства, которое само еще и «подыгрывает» неприятелю.

В общем случае $\boldsymbol{m \geq 1, q \geq 1}$ (рис. 3) имеем

$$\phi = \frac{AB}{AC/m} = \frac{AC/m}{CB/q} = \frac{AC'}{C''B} \qquad \text{или} \qquad \phi = \frac{AC + CB}{AC/m} = m + \frac{1}{\frac{AC/m}{CB}} = m + \frac{q}{\phi}.$$

Отрезок $C'C'' = \frac{m-1}{\phi} + \frac{q-1}{\phi^2}$ при $m, q \to 1$ «стягивается» в точку C, вырождаясь в сечение с числом Ф. Движение точки C'' показано на рис. 8 (см. в конце).

Таким образом, параметр q «отвечает» за пропорциональное уменьшение меньшей ($CB \to C''B = CB/q$) или соответствующее увеличение бóльшей части целого, а параметр m – за уменьшение его бóльшей части ($AC \to AC' = AC/m$) или увеличение меньшей.

Подобные рассуждения могут быть перенесены и на обычные числа, обобщая гармоническую пропорцию, средние члены которой равны, а последний член представляет собой разность между первым и средним: $a : b = b : (a - b)$.

Частный случай $m = 1, q = 2$ с квадратным уравнением $x^2 - x = 2$ и корнем (сечением) $\phi = 2$ (рис. 4) соответствует *двойной дихотомии*: точка C делит отрезок AB пополам, в свою очередь точка C'' делит половину еще на две равные части.

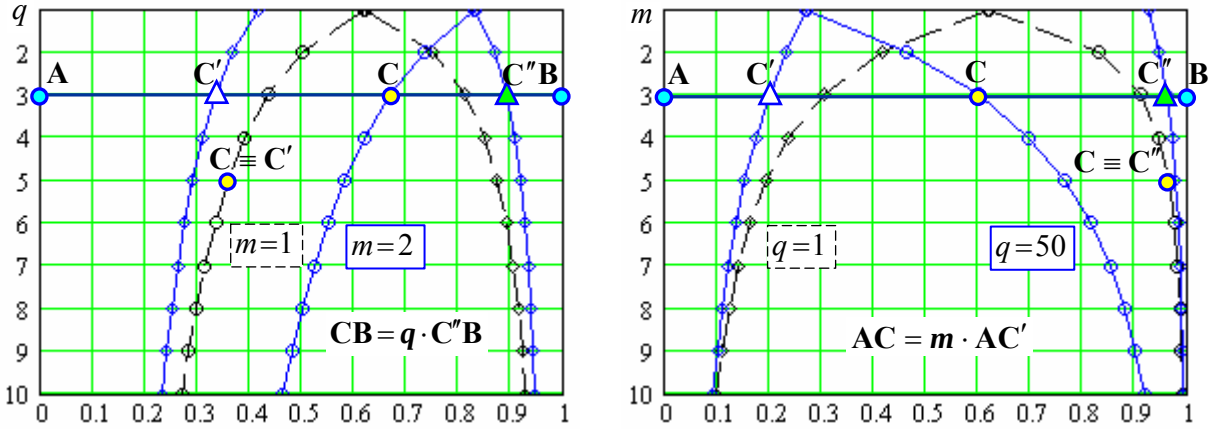

Рис. 3. Иллюстрация обобщенных *mq*-«золотых» сечений

Описанное представление, характеризуемое неизменностью целого (отрезка AB), можно отнести к статическому варианту, когда изменяется только соотношение его внутренних составляющих. На рис. 5 показана динамическая интерпретация обобщенного «золотого» сечения, подразумевающая расширение (внешнее деление) или рост объекта.

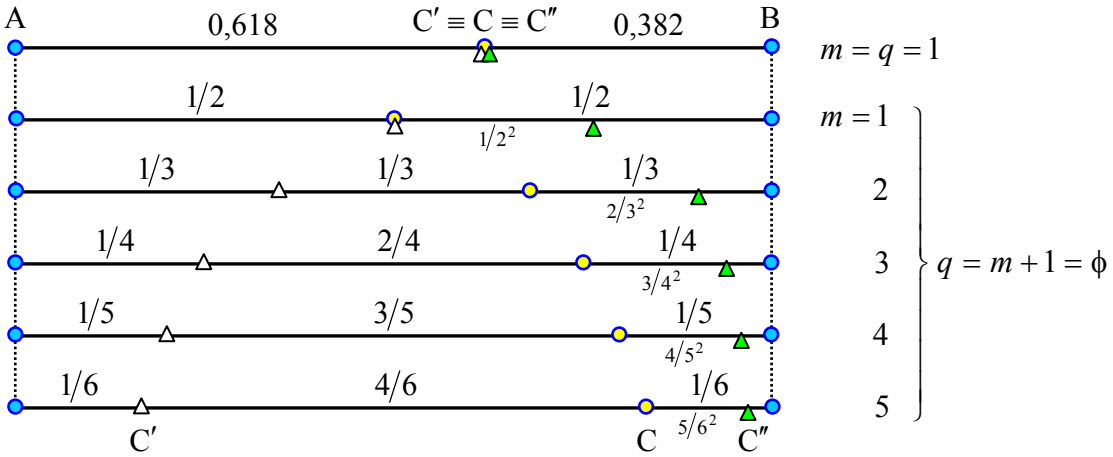

Рис. 4. Частные случаи деления отрезка обобщенным «золотым» сечением

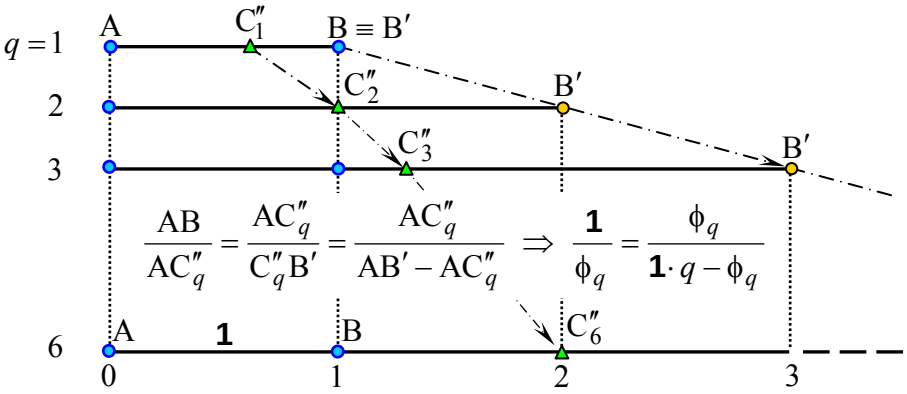

Рис. 5. Динамическая интерпретация обобщенного «золотого» сечения

На наш взгляд, такое понимание открывает новое и чрезвычайно важное направление в изучении свойств «золотого» сечения, поскольку до сих пор исследования в этой области в основном ограничивались статическими или установившимися условиями.

Известные приложения в части размножения кроликов, вращения планет, биоритмики, живописи и пр. в этом контексте не в счет, поскольку, так или иначе, оперируют с неизменностью заложенных в них механизмов или параметров.

В этом смысле изучение процессов с изменяющимися во времени параметрами обобщенных «золотых» сечений может привести к весьма полезным теоретическим и практическим результатам. Но это задача будущих научных изысканий.

Числа Фибоначчи и Люка. Рассматривая равенство $\phi^n = m\phi^{n-1} + q\phi^{n-2}$, справедливое для всех n, вполне логично перейти от переменной величины ϕ^n к соответствующим числовым инвариантам, структурно-подобным данному уравнению.

Так, задаваясь целочисленными значениями величин m и q, мы приходим к обобщенным mq-числам Фибоначчи $F = F(m,q,n)$ и Люка $F = F(m,q,n)$.

Для заданных натуральных чисел $n \geq 2$ ряды генерируются в виде последовательности целых чисел с помощью рекуррентных соотношений:

$$F_n = mF_{n-1} + qF_{n-2}, \qquad L_n = mL_{n-1} + qL_{n-2} \tag{1}$$

при начальных условиях $F_0 = 0, F_1 = 1$ и $L_0 = 2, L_1 = m$.

Отметим, что выбор начальных условий в общем случае может быть произвольным. Наше предпочтение основано на том, что первые два числа Фибоначчи являются традиционными, а исходно-образующие значения ряда Люка вытекают из свойств корней $x_1, x_2 = \dfrac{m \pm \widehat{m}}{2}$ квадратного уравнения $x^2 - mx - q = 0$: $x_1^0 + x_2^0 = 2,\ x_1^1 + x_2^1 = m$.

Обобщение формулы Бине.

а) Используя подход в работе [1, с. 62], методом математической индукции можно доказать, что разностное уравнение $F_n = mF_{n-1} + qF_{n-2} = (\phi - q/\phi)F_{n-1} + qF_{n-2}$ допускает решение $F_n = A \cdot \left[\phi^n - (-q/\phi)^n\right]$, дающее $F_0 = 0$. С учетом начального условия $F_1 = 1$ получим $F_1 = A \cdot [\phi - (-q/\phi)] = 1$, откуда находим $A = [\phi + q/\phi]^{-1} = 1/\widehat{m}$ или $(-q/\phi = m - \phi)$

$$F_n = \frac{\phi^n - (-q)^n \phi^{-n}}{\widehat{m}} = \frac{\phi^n - (m-\phi)^n}{\widehat{m}} = \frac{1}{\widehat{m}}\left[\left(\frac{m+\widehat{m}}{2}\right)^n - \left(\frac{m-\widehat{m}}{2}\right)^n\right]. \tag{2}$$

Аналогичным образом выводится аналитическая формула для чисел Люка

$$L_n = \phi^n + (-q)^n \phi^{-n} = \phi^n + (m-\phi)^n = \left(\frac{m+\widehat{m}}{2}\right)^n + \left(\frac{m-\widehat{m}}{2}\right)^n. \tag{3}$$

Рассматривая корни исходного квадратного уравнения $x_{1,2} = (m \pm \widehat{m})/2$, бóльший из которых равен $x_2 = \phi = (m + \widehat{m})/2$, выражения (2)–(3) можно представить в ином виде:

$$\widehat{m}F_n = x_2^n - x_1^n, \qquad L_n = x_2^n + x_1^n,$$

то есть числа Люка и умноженные на $\widehat{m}$ числа Фибоначчи с порядковым номером n – есть не что иное, как соответственно сумма и разность n-х степеней корней квадратного уравнения.

Соотношения (2)–(3) являются обобщением известной формулы Бине для классического «золотого» сечения ($m = q = 1$, $\widehat{m} = \sqrt{5}$) и Газале [1] ($q = 1$, $\widehat{m} = \sqrt{m^2 + 4}$).

В отличие от (1), где числа определяются рекуррентно, то есть индуктивно по мере нарастания номера, формулы (2)–(3) позволяют вычислять числа непосредственно как функцию от их номера.

б) Докажем формулу (2) несколько иным путем, а именно на основе метода производящих функций, позволяющего решать линейные рекуррентные уравнения с определением общего члена числовой последовательности в явном виде. Идея метода производящих функций (ПФ) состоит в том, что рекуррентное соотношение для числовой последовательности переписывают как уравнение для ПФ, это уравнение решают и по найденной ПФ получают зависимость общего члена последовательности от ее номера.

Итак, рассмотрим ПФ в виде степенного ряда $F(z)=\sum_n F'_n z^n$, где z –формальная переменная (символ) ряда, F'_n – сдвинутые (для удобства представления) на единицу влево числа Фибоначчи ($F'_0=1, F'_1=m$ и т.д.), играющие роль коэффициентов исследуемого ряда.

Заметим, что $F(z)$ обозначает не сумму ряда для данного значения z, а сам формальный (перечисляемый) ряд. То есть нас не интересует вопрос о его сходимости, и $F(z)$ является просто сокращенной записью формального выражения в правой части [4].

Выделим в ПФ два первых слагаемых, а в остальные подставим выражение $F'_n = mF'_{n-1}+qF'_{n-2}$:

$$F(z)=1+mz+\sum_{n=2}^{\infty}(mF'_{n-1}+qF'_{n-2})z^n=1+\left(mz+mz\sum_{n=2}^{\infty}F'_{n-1}z^{n-1}\right)+qz^2\sum_{n=2}^{\infty}F'_{n-2}z^{n-2}=$$

$$=1+mz\sum_{n=1}^{\infty}F'_{n-1}z^{n-1}+qz^2\sum_{n=1}^{\infty}F'_{n-1}z^{n-1}=1+\left(mz+qz^2\right)F(z),$$

откуда находим $F(z)=\left(1-mz-qz^2\right)^{-1}$.

Далее выполним разложение $1-mz-qz^2=(1-az)(1-bz)$, где $m=a+b$ и $q=-ab$ или $a=\phi=\dfrac{m+\widehat{m}}{2}$, $b=\dfrac{-q}{\phi}=\dfrac{m-\widehat{m}}{2}$, $a-b=\widehat{m}$, $\widehat{m}=\sqrt{m^2+4q}$.

Преобразуем ПФ в виде простейших дробей (методом неопределенных коэффициентов для тождественных преобразований) с последующим использованием формулы для суммы $\sum_n r^n=\dfrac{1}{1-r}$ бесконечно убывающей геометрической прогрессии (со знаменателями r, равными az и bz, которые в виду формальности параметра z могут быть приняты <1):

$$F(z)=\frac{1}{1-mz-qz^2}=\frac{1}{(1-az)(1-bz)}=\frac{1}{a-b}\left(a\cdot\frac{1}{1-az}-b\cdot\frac{1}{1-bz}\right)=\sum_n\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}z^n.$$

Сравнивая полученную формулу ПФ с ее первоначальной формой и возвращаясь к исходной последовательности Фибоначчи F_n $(n+1\to n)$, приходим к решению рекуррентного уравнения (1) в явном виде (2).

Таким образом, вся информация о числах Фибоначчи содержится в его производящей функции $F(z)=\left(1-mz-qz^2\right)^{-1}$.

В этом легко убедиться, разделив единицу на трехчлен $1-mz-qz^2$.

Пусть $\left(1-mz-qz^2\right)\left(F'_0+F'_1z+F'_2z^2+...\right)=1+0\cdot z+0\cdot z^2+...$.

Тогда раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем

$$1\cdot F_0' = 1 \quad\Rightarrow\quad F_0' = 1;$$
$$1\cdot F_1' - mF_0' = 0 \quad\Rightarrow\quad F_1' = m;$$
$$1\cdot F_2' - mF_1' - qF_0' = 0 \quad\Rightarrow\quad F_2' = m^2 + q;$$
$$1\cdot F_3' - mF_2' - qF_1' = 0 \quad\Rightarrow\quad F_3' = m^3 + 2mq \text{ и т.д.}$$

Этот же результат можно получить, деля многочлены (1 и $1 - mz - qz^2$) «уголком».

В этом случае коэффициенты ПФ также однозначно дают последовательность чисел Фибоначчи.

Подобные выкладки могут быть выполнены и для решения рекуррентного уравнения, описывающего последовательность чисел Люка, с использованием производящей функции

$$L(z) = 2 + mz + \sum_{n=2}^{\infty}(mL_{n-1} + qL_{n-2})z^n = 2 + mz + mz\sum_{n=2}^{\infty}L_{n-1}z^{n-1} + qz^2\sum_{n=2}^{\infty}L_{n-2}z^{n-2} =$$

$$= 2 - mz + mz\sum_{n=1}^{\infty}L_{n-1}z^{n-1} + qz^2\sum_{n=1}^{\infty}L_{n-1}z^{n-1} = 2 - mz + \left(mz + qz^2\right)L(z) =$$

$$= \frac{2 - mz}{1 - mz - qz^2} = \frac{2 - mz}{(1 - az)(1 - bz)} = \left(\frac{1}{1 - az} + \frac{1}{1 - bz}\right) = \sum_n \left(a^n + b^n\right)z^n$$

и равенств $mzL_0z^0 = 2mz$, $a + b = m$.

Взаимосвязь чисел Фибоначчи и Люка. По индукции можно доказать соотношение

$$L_n = F_{n+1} + qF_{n-1}, \tag{4}$$

что с учетом (1) равносильно $L_n = 2F_{n+1} - mF_n = mF_n + 2qF_{n-1}$.

При $n = 1, 2$ имеем: $L_1 = m + q\cdot 0 = m$, $L_2 = \left(m^2 + q\right) + q\cdot 1 = m^2 + 2q$.

Пусть уравнение (4) справедливо для некоторого $n \ge 2$. При $n + 1$ получаем

$$L_{n+1} = mL_n + qL_{n-1} = m(F_{n+1} + qF_{n-1}) + q(F_n + qF_{n-2}) =$$
$$= (mF_{n+1} + qF_n) + q(mF_{n-1} + qF_{n-2}) = F_{n+2} + qF_n.$$

Этим индуктивный переход обоснован, и соотношение (4) доказано для любого n.

Из (1), (4) следует расчетная формула чисел Фибоначчи через числа Люка

$$F_n = \frac{mL_n + 2qL_{n-1}}{m_2} = \frac{2L_{n+1} - mL_n}{m_2} = \frac{L_{n+1} + qL_{n-1}}{m_2}, \tag{5}$$

где $m_2 = \widehat{m}^2 = m^2 + 4q$.

В частности, при $q = d(m + d)$ получаем: $\phi = m + d$, $d = q/\phi = 1, 2, 3, \ldots$ (табл. 1),

$$F_n = \frac{(m + d)^n - (-d)^n}{m + 2d}, \qquad L_n = (m + 2d)F_n + 2(-d)^n = (m + d)^n + (-d)^n.$$

Согласно (4) при $q = 1$ ряд Люка образуется простым сложением чисел Фибоначчи, расположенных через одно. Аналогично ряд Фибоначчи получается из (5) путем сложения через одно чисел Люка, деленных на величину $m^2 + 4$.

Перемножив формулы (2) и (3), получаем $F_{2n} = F_nL_n$, то есть числа Люка могут быть также получены последовательным делением чисел Фибоначчи $L_n = F_{2n}/F_n$.

Таблица 1

Примерные рекуррентные зависимости L_n, F_n

m	$d = q/\phi$	q	$\widetilde{m} = m + 2d$	$\phi = m + d$	L_n	F_n
1	1	2	3	2	$2^n + (-1)^n$	$[2^n - (-1)^n]/3$
1	2	6	5	3	$3^n + (-2)^n$	$[3^n - (-2)^n]/5$
1	3	12	7	4	$4^n + (-3)^n$	$[4^n - (-3)^n]/7$
2	1	3	4	3	$3^n + (-1)^n$	$[3^n - (-1)^n]/4$
2	2	8	6	4	$4^n + (-2)^n$	$[4^n - (-2)^n]/6$
2	3	15	8	5	$5^n + (-3)^n$	$[5^n - (-3)^n]/8$
3	1	4	5	4	$4^n + (-1)^n$	$[4^n - (-1)^n]/5$
3	2	10	7	5	$5^n + (-2)^n$	$[5^n - (-2)^n]/7$
3	3	18	9	6	$6^n + (-3)^n$	$[6^n - (-3)^n]/9$

Другие полезные формулы. С учетом равенства $m = \phi - q/\phi$ из (1) также следует, что при любом $n \geq 1$

$$\phi = \frac{qF_n + \phi F_{n+1}}{qF_{n-1} + \phi F_n}, \qquad \phi = \frac{qL_n + \phi L_{n+1}}{qL_{n-1} + \phi L_n}.$$

С учетом равенства $\widehat{m} = \phi + q/\phi$ из (2)–(3) вытекают важные дополнительные утверждения

$$\phi^n = \phi F_n + qF_{n-1}, \qquad \widehat{m}\phi^n = \phi L_n + qL_{n-1}, \qquad 2\phi^n = \widehat{m}F_n + L_n,$$

откуда следуют очевидные соотношения

$$\sqrt[n]{qF_{n-1} + F_n \cdot \sqrt[n]{qF_{n-1} + F_n \cdot \sqrt[n]{qF_{n-1} + \ldots}}} \to \phi,$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\widehat{m}}} \cdot \sqrt[n]{qL_{n-1} + L_n \cdot \sqrt[n]{qL_{n-1} + L_n \cdot \sqrt[n]{qL_{n-1} + \ldots}}} \to \phi,$$

а также

$$L_{2n} = L_n^2 - 2(-q)^n = (\widehat{m}F_n)^2 + 2(-q)^n. \tag{6}$$

Заметим, что тождество $2\phi^n = \widehat{m}F_n + L_n$ непосредственно получается в результате суммирования чисел F_n, L_n в их представлении через n-е степени корней $x_{1,2}$ квадратного уравнения (см. сразу после (3)).

Выведем теперь формулы для квадратов чисел F_n^2, L_n^2.

Для этого с использованием равенств (2), (3), (6) и $m_2 = \widehat{m}^2 = (\phi + q/\phi)^2$ сначала вычислим произведения

$$F_{n-1}F_{n+1}=\frac{\left[\phi^{2n}+(-q/\phi)^{2n}\right]-(-q)^{n-1}\left(\phi^2+q^2/\phi^2\right)}{m_2}=\frac{L_{2n}-(-q)^{n-1}(m_2-2q)}{m_2}=$$

$$=\frac{m_2F_n^2+2(-q)^n-(-q)^{n-1}(m_2-2q)}{m_2}=F_n^2-(-q)^{n-1}\ ,$$

$$L_{n-1}L_{n+1}=\left[\phi^{2n}+(-q/\phi)^{2n}\right]+(-q)^{n-1}\left(\phi^2+q^2/\phi^2\right)=L_{2n}+(-q)^n(m_2-2q)=$$

$$=L_n^2-2(-q)^n+(-q)^{n-1}(m_2-2q)=L_n^2+m_2(-q)^{n-1}\ .$$

Отсюда находим

$$F_n^2=F_{n-1}F_{n+1}+(-q)^{n-1},\qquad L_n^2=L_{n-1}L_{n+1}-m_2(-q)^{n-1}. \tag{7}$$

То есть квадрат n-го числа Фибоначчи отличается от произведения предыдущего и последующего членов ряда на величину $(-q)^{n-1}$.

Соотношения (7) связывают три рядом стоящих члена последовательностей F_n, L_n и являются расширением формулы Кассини для обобщенных «золотых» сечений на случай $m, q \ge 1$.

Положим $\psi_n = F_{n+1}/F_n$, $\dot{\psi}_n = L_{n+1}/L_n$. С учетом формул (2), (3) находим

$$(\psi_n,\dot{\psi}_n)=\frac{\phi^{n+1}\mp(-q/\phi)^{n+1}}{\phi^n\mp(-q/\phi)^n}=\phi\frac{\phi^n\mp(-q)^{n+1}/\phi^{n+2}}{\phi^n\mp(-q)^n/\phi^n}=\phi\frac{1\mp(-q)^{n+1}/\phi^{2(n+1)}}{1\mp(-q)^n/\phi^{2n}}=\phi\frac{1\mp A_{n+1}}{1\mp A_n},$$

где $A_n=(-q)^n/\phi^{2n}=(-\mu)^n$ – быстросходящаяся к нулю последовательность, поскольку для любых $m,q>0$: $\quad \eta=\dfrac{q}{\phi^2}=\dfrac{1}{1+m\dfrac{m+\sqrt{m^2+4q}}{2q}}=1-\dfrac{2}{1+\sqrt{1+\dfrac{4q}{m^2}}}<1.$

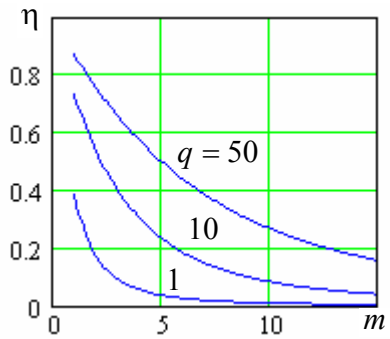

Рис. 6. Графики изменения параметра сходимости μ

Следовательно, отношение соседних членов последовательностей F_n, L_n для больши́х величин n конвенгирует к числу обобщенного «золотого» сечения ϕ: $(\psi_n,\dot{\psi}_n)\to\phi=\phi(m,q)$.

Причем сходимость существенно улучшается с ростом коэффициента m и наоборот несколько уменьшается при увеличении свободного члена q (рис. 6).

Перемена знаков величины η не влияет на скорость сходимости.

Очевидно, что и для любого конечного целого числа k справедливо соотношение

$$\left(\frac{F_{n+k}}{F_n},\frac{L_{n+k}}{L_n}\right)\to\phi^k.$$

Таким образом, можно утверждать, что рассматриваемые «золотые» сечения являются числовыми инвариантами чисел Люка и Фибоначчи.

Операции с пределами специально не употреблялись, чтобы не создавать иллюзию необходимости выполнения большого количества вычислений, в виду того, что сходимость очень быстрая.

Рассматривая три последовательных возрастающих числа рядов (1), можно обратить внимание на очевидный вывод:

параметр m «подтягивает» большее значение, а коэффициент q меньшее.

Это согласуется с геометрическим представлением «золотых» сечений (рис. 2–5), хотя там соотношение между большими и меньшими долями несколько сложнее, так как они рассматриваются в рамках одного целого с обусловленным их взаимным влиянием и не выходят за рамки этого целого.

В свою очередь

$$\psi_n - \frac{q}{\psi_n} = \frac{F_{n+1}^2 - qF_n^2}{F_nF_{n+1}} = \frac{F_nF_{n+2} + (-q)^n - qF_n^2}{F_nF_{n+1}} =$$

$$= \frac{F_n(F_{n+2} - qF_n) + (-q)^n}{F_nF_{n+1}} = \frac{F_n(mF_{n+1}) + (-q)^n}{F_nF_{n+1}} = m + \frac{(-q)^n}{F_nF_{n+1}}.$$

Аналогичным образом

$$\dot{\psi}_n - \frac{q}{\dot{\psi}_n} = \frac{L_{n+1}^2 - qL_n^2}{L_nL_{n+1}} = \frac{L_nL_{n+2} - m_2(-q)^n - qL_n^2}{L_nL_{n+1}} =$$

$$= \frac{L_n(L_{n+2} - qL_n) - m_2(-q)^n}{L_nL_{n+1}} = \frac{L_n(mL_{n+1}) - m_2(-q)^n}{L_nL_{n+1}} = m - \frac{(-q)^n}{L_nL_{n+1}}m_2 .$$

То есть при больших значениях n: $\psi_n - \frac{q}{\psi_n} \to m$, $\dot{\psi}_n - \frac{q}{\dot{\psi}_n} \to m$.

Комбинаторика. В отличие от рекурсивного представления функций (1), обобщенные mq-числа Фибоначчи и Люка можно выразить также в явном виде средствами комбинаторики через биномиальные коэффициенты $C_n^{\,i} = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$, где $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ – факториал от n с условным принятием $0! = 1$.

В частности, применяя формулу бинома Ньютона для действительных чисел $a, b \in (-\infty,+\infty)$: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^{\,i} a^{n-i} b^i$, уравнения (2)–(3) после некоторых преобразований приобретают вид

$$F_n = 2^{1-n}\sum_{j=0}^{n_1} m^{n-1-2j}(m+4q)^j C_n^{2j+1}, \qquad L_n = 2^{1-n}\sum_{j=0}^{n_2} m^{n-2j}(m+4q)^j C_n^{2j},$$

где $n_1 = [(n-1)/2]$, $n_2 = [n/2]$, $[\xi] = \mathrm{trunc}(\xi)$ – целая часть ξ (наибольшее целое число, не превосходящее ξ).

Представляет интерес использование другого подхода, изложенного в работе [1, с. 66] для $q = 1$, который обобщим на случай $q > 1$.

Определим полином $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n_2} C_{n-j}^{\,j} x^j$. При малых n: $P_0(x) = P_1(x) = 1$.

С учетом известного свойства [3, с. 745] биномиальных коэффициентов $\binom{n+1}{j+1}=\binom{n}{j+1}+\binom{n}{j}$ выполняется равенство $P_{n+1}(x)=P_n(x)+x\cdot P_{n-1}(x)$, что позволяет записать соотношение для чисел Фибоначчи $F_{n+1}=m^n P_n(r)$, $r=qm^{-2}$, которое сравнительно легко обосновывается методом математической индукции.

Так, при $n=0$ и $n=1$ соответственно имеем: $F_1=m^0P_0(r)=1$, $F_2=m^1P_1(r)=m$.

Исходя из условия (1) допустим, что уравнение истинно при некотором $n+1>0$, и покажем его справедливость для $n+2$.

Действительно

$$F_{n+2}=m\cdot F_{n+1}+q\cdot F_n=m\cdot\left[m^nP_n(r)\right]+q\cdot\left[m^{n-1}P_{n-1}(r)\right]=$$
$$=m^{n+1}\left[P_n(r)+qm^{-2}P_{n-1}(r)\right]=m^{n+1}P_{n+1}(r),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, формула для расчета чисел Фибоначчи приобретает вид:

$$F_{n+1}=\sum_{j=0}^{n_2}m^{n-2j}q^jC_{n-j}^{\,j}\qquad\text{или}\qquad F_n=\sum_{j=0}^{n_1}m^{n-1-2j}q^jC_{n-1-j}^{\,j}\,. \tag{8}$$

Сделав в (8) замену $n\to 2n$, $j\to n-j$, с учетом $\binom{n}{j}=\binom{n}{n-j}$ можно записать

$$F_{2n+1}=\sum_{j=0}^{n}m^{2j}q^{n-j}C_{n+j}^{\,2j}\qquad\text{или}\qquad F_{2n}=\sum_{j=0}^{n-1}m^{2j+1}q^{n-j-1}C_{n+i}^{2j+1}\,.$$

На основе соотношений (4), (8) и свойств биномиальных коэффициентов, «комбинаторное» уравнение для чисел Люка приобретает вид

$$L_n=\sum_{j=0}^{n_2}m^{n-2j}q^j\left(2\cdot C_{n-j}^{\,j}-C_{n-j-1}^{\,j}\right)=\sum_{j=0}^{n_2}m^{n-2j}q^j\left(C_{n-j}^{\,j}+C_{n-j-1}^{\,j-1}\right),\ n>0.$$

где условно принимаются равенства $C_\xi^{\,0}=1,\ C_\xi^{\,-1}=C_\xi^{\,\xi+1}=0$.

Суммы рядов. Используя свойства геометрических прогрессий для степенных зависимостей (со знаменателями прогрессий ϕ и $m-\phi$), при помощи обобщенных формул Бине (2)–(3) можно достаточно просто суммировать ряды F_n, L_n,:

$$\sum_{j=0}^{n-1}L_j=\frac{\phi^n-1}{\phi-1}+\frac{(m-\phi)^n-1}{(m-\phi)-1},\qquad \sum_{j=0}^{n-1}F_j=\frac{1}{\widehat{m}}\left[\frac{\phi^n-1}{\phi-1}-\frac{(m-\phi)^n-1}{(m-\phi)-1}\right].$$

В частности, при $m=1$ после некоторых преобразований получаем

$$\sum_{j=0}^{n}L_j=\frac{L_{n+2}-1}{q},\qquad \sum_{j=0}^{n}F_j=\frac{F_{n+2}-1}{q},$$

или подобные выражения, связывающие числа рядов с суммами предшествующих членов,

$$L_n-q\sum_{j=0}^{n-2}L_j=1,\qquad F_n-q\sum_{j=0}^{n-2}F_j=1.$$

В табл. 2 представлены некоторые частные случаи обобщенных чисел

Таблица 2

Частные случаи обобщенных чисел Фибоначчи и Люка

m	$\phi - m = \frac{\sqrt{m^2+4}-m}{2}$	n										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
							***m*-числа Фибоначчи**					
1	0,6180340	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
2	0,4142136	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2 378
3	0,3027756	0	1	3	10	33	109	360	1 189	3 927	12 970	42 837
4	0,2360680	0	1	4	17	72	305	1 292	5 473	23 184	98 209	416 020
5	0,1925824	0	1	5	26	135	701	3 640	18 901	98 145	509 626	2 646 275
6	0,1622777	0	1	6	37	228	1 405	8 658	53 353	328 776	2 026 009	12 484 830
7	0,1400549	0	1	7	50	357	2 549	18 200	129 949	927 843	6 624 850	47 301 793
8	0,1231056	0	1	8	65	528	4 289	34 840	283 009	2 298 912	18 674 305	151 693 352
							***m*-числа Люка**					
1	0,6180340	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
2	0,4142136	2	2	6	14	34	82	198	478	1 154	2 786	6 726
3	0,3027756	2	3	11	36	119	393	1 298	4 287	14 159	46 764	154 451
4	0,2360680	2	4	18	76	322	1 364	5 778	24 476	103 682	439 204	1 860 498
5	0,1925824	2	5	27	140	727	3 775	19 602	101 785	528 527	2 744 420	14 250 627
6	0,1622777	2	6	38	234	1 442	8 886	54 758	337 434	2 079 362	12 813 606	78 960 998
7	0,1400549	2	7	51	364	2 599	18 557	132 498	946 043	6 754 799	48 229 636	344 362 251
8	0,1231056	2	8	66	536	4 354	35 368	287 298	2 333 752	18 957 314	153 992 264	1 250 895 426

q	$\phi = \frac{\sqrt{1+4q}+1}{2}$	n													
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
								***q*-числа Фибоначчи**							
1	1,6180340	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
2	2	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341	683	1 365	2 731
3	2,3027756	0	1	1	4	7	19	40	97	217	508	1 159	2 683	6 160	14 209
4	2,5615528	0	1	1	5	9	29	65	181	441	1 165	2 929	7 589	19 305	49 661
5	2,7912878	0	1	1	6	11	41	96	301	781	2 286	6 191	17 621	48 576	136 681
6	3	0	1	1	7	13	55	133	463	1 261	4 039	11 605	35 839	105 469	320 503
								***q*-числа Люка**							
1	1,6180340	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521
2	2	2	2	6	10	22	42	86	170	342	682	1 366	2 730	5 462	10 922
3	2,3027756	2	3	9	18	45	99	234	531	1 233	2 826	6 525	15 003	34 578	79 587
4	2,5615528	2	4	12	28	76	188	492	1 244	3 212	8 188	21 036	53 788	137 932	353 084
5	2,7912878	2	5	15	40	115	315	890	2 465	6 915	1 924	53 815	150 015	419 090	1 169 165
6	3	2	6	18	54	162	486	1 458	4 374	13 122	39 366	118 098	354 294	1 062 882	3 188 646

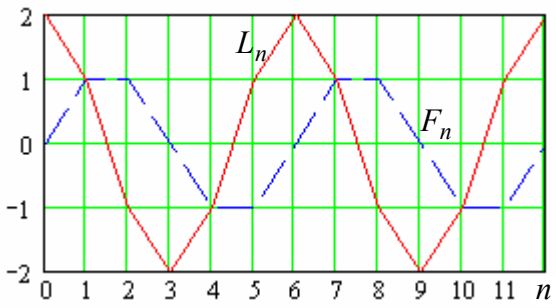

Рис. 7. Графики числовых последовательностей $\psi_n = \{F_n, L_n\} = \psi_{n-1} - \psi_{n-2}$

Заметим, что условие $m, q > 0$ не является строго обязательным при рассмотрении рекуррентных последовательностей. Не менее плодотворные результаты получаются и при отрицательных коэффициентах, например, $q = -1$ (рис. 5). И хотя к «золотым» пропорциям они имеют отдаленное отношение, их исследование представляет самостоятельный интерес.

Например, не трудно заметить, что в данном частном случае целые числа дискретной функции Люка полностью совпадают со значениями непрерывной функции косинуса в точках $L_n = \cos(n\pi/3)$.

Нечто подобное мы наблюдали выше, когда последовательности F_n, L_n (дискретные объекты) сопоставлялись через производящие функции со степенным рядом (непрерывным объектом), подключая к изучению дискретных процессов развитой арсенал средств математического анализа и получая нужные результаты.

Выводы

Подводя краткие итоги, можно сформулировать основные результаты работы:

1. Показана расширенная геометрическая интерпретация обобщенного «золотого» сечения на примере сопоставления частей линейных отрезков. Приведено его динамическое толкование, подразумевающее внешнее деление или рост объекта.
2. Выполнено обобщение формулы Бине для квадратного уравнения общего вида методами математической индукции и производящих функций.
3. Выявлена взаимосвязь чисел Фибоначчи и Люка, инвариантных «золотым» сечениям, с получением для них новых математических соотношений.
4. Дано рекурсивное, комбинаторное и аддитивное представление обобщенных рядов Фибоначчи и Люка.

Вместо заключения

При всей его уникальности классическое «золотое» сечение с числом $\Phi = 1{,}618...$ является лишь частным решением квадратного уравнения, порождающего в общем случае целое семейство гармонических пропорций. По своим характеристикам они близки к свойствам «золотого» сечения и как числовые инварианты или константы приводят к множеству рекуррентных последовательностей Фибоначчи и Люка.

Это не просто математические фантазии.

Как мы уже отмечали, обобщенные «золотые» пропорции органически присущи окружающему миру и могут проявляться в самых разных сферах жизнеустройства и человеческой деятельности: власть – оппозиция, живое – мертвое и т.п.

Подобные параллаксы и аналогии просматриваются во многих других общественно-природных процессах. Их изучение представляется важным в научном и философском аспектах и может стать предметом отдельных разработок.

Литература

1. *Газале М.* Гномон. От фараонов до фракталов: Пер. с англ. – М.: Ин-т компьютер. исслед., 2002. – 272 с. / Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 /.
2. *Стахов А.П.* Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006.
3. *Корн Г.*, *Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1974. – 832 с.
4. *Воронин С.М.*, *Кулагин А.Г.* Метод производящих функций // Квант, 1984. – № 5. – С. 11–15.

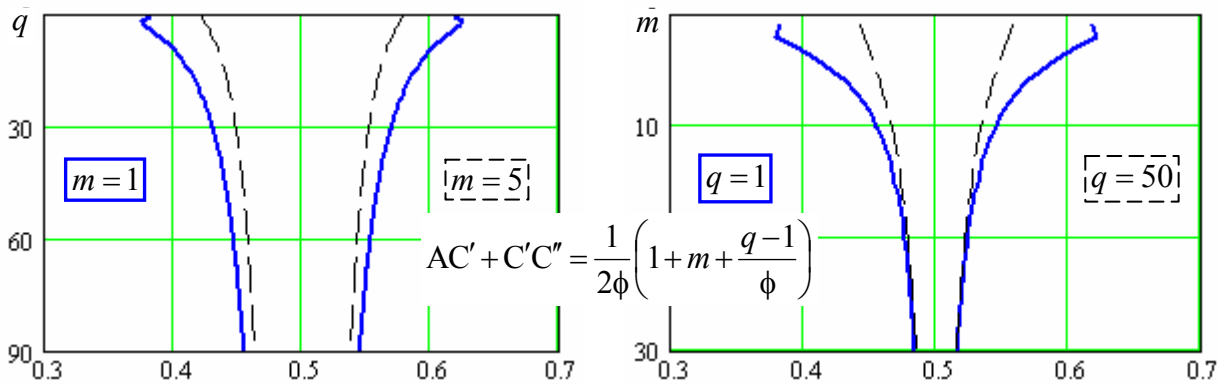

Рис. 8. Движение точки C'' и ее зеркального отображения на единичном отрезке