А.П. Стахов

От «Золотого Сечения» к «Металлическим Пропорциям».
Генезис великого математического открытия от Евклида к новым математическим константам и новым гиперболическим моделям Природы.

Аннотация

Настоящая статья написана в развитие работ [1-4, 11-13] по созданию новых гиперболических моделей Природы. Главная идея статьи – показать, что «Золотая Пропорция» и «Металлические Пропорции» являются важнейшими математическими константами Природы, которые выражают «скрытую гармонию» Мироздания, создаваемого Высшим Разумом. Эти константы порождают *гиперболические m-функции Фибоначчи и Люка,* которые могут стать основой для нового этапа в развитии теоретического естествознания, суть которого состоит в использовании новых гиперболических функций в качестве новых гиперболических моделей Природы.

В геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем».
Иоганн Кеплер

Что может быть важнее, чем наука и религия? Наука дает нам знание, а религия раскрывает смысл существования. То, что эти две величайшие ценности часто находятся в конфликте - это парадокс. Я не устаю спрашивать себя: как образованные люди могут быть настолько слепы, чтобы не видеть, что наука всего лишь изучает то, что создал Бог.
Майкл Геллер
Лауреат Премии Темплона-2008

1. Золотое Сечение. От Евклида к гиперболическим функциям Фибоначчи и Люка

1.1. ***Евклидово определение «Золотого Сечения».*** Как известно, знаменитая математическая задача «о делении отрезка в крайнем и среднем отношении», широко известная в современной науке под названием «золотое сечение», пришла к нам из «Начал» Евклида. В Книге II своих «Начал» Евклид сформулировал предложение II.11, которое является исторически первым определением «золотого сечения». Это определение уместно назвать *Евклидовым определением.*

Теорема II.11 (Евклидово определение «Золотого Сечеия»). *Данную* *прямую AB=a разделить точкой C на две неравные части AC=b и CB=c (AC>CB) так, чтобы прямоугольник, заключенный между прямой AB и меньшим отрезком CB, был равен квадрату, построенному на большем отрезке AC.*

От Теоремы II.11 «классические математики» отмахиваются как от назойливой мухи. Мало ли что могло взбрести в голову Евклиду? К сожалению, математики отмахиваются и от того факта, что XIII-я, то есть заключительная Книга «Начал» посвящена Теории правильных многогранников, которые в «Космологии Платона» выражали гармонию Мироздания и поэтому были названы «Платоновыми телами». А если учесть, что «додекаэдр» нельзя геометрически сконструировать без «золотого сечения», то становится ясным, зачем Евклид ввел эту задачу в Книге II. Но в греческой математике был математик-мыслитель, который сделал весьма необычные выводы из указанного факта. Речь идет о **Прокле Диадохе**, одном из наиболее блестящих греческих комментаторов Евклида. По мнению Прокла, Евклид «создавал «Начала» не с целью изложения геометрии как таковой, а чтобы дать полную систематизированную теорию построения пяти «Платоновых тел», попутно осветив некоторые новейшие достижения математики. Таким образом, «гипотеза Прокла» позволяет высказать предположение, что хорошо известные в античной науке **"Пифагорейская доктрина о числовой гармонии Мироздания»** и **«Космология Платона»,** основанная на правильных многогранниках, были воплощены в величайшем математическом сочинении греческой математики, «Началах» Евклида. С этой точки зрения **мы можем рассматривать «Начала» Евклида как первую попытку создать “Математическую теорию Гармонии», что было главной идеей греческой науки.**

Евклидова задача о «Золотом Сечении» демонстрируется с помощью Рис. 1.

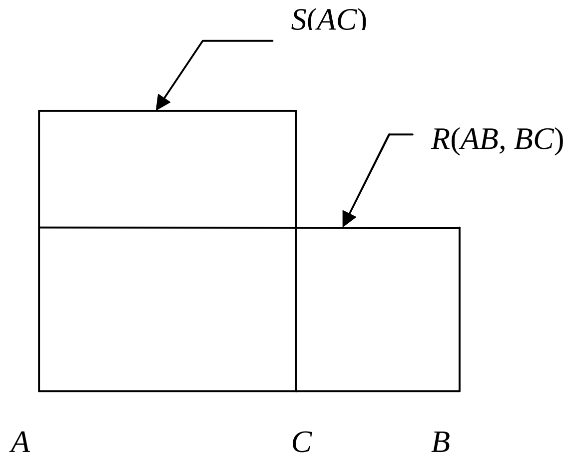

Рисунок 1. Задача о делении отрезка в крайнем и среднем отношении

Согласно Теореме II.11 точка *C* на отрезке *AB* должна быть выбрана таким образом, чтобы

$$S(AC)=R(AB,BC), \qquad (1)$$

где $S(AC)$ – площадь квадрата со стороной AC, а $R(AB,BC)$ – площадь прямоугольника со сторонами AB и BC.

Равенство (1) можно записать в виде:

$$AB\times CB = (AC)^2 \qquad (2)$$

1.2. *«Золотое Сечение» (современное определение).* А теперь разделим обе части равенства (2) вначале на CB, а затем на AC. В результате получим следующую пропорцию:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CB} \qquad (3)$$

И тогда мы получаем еще одно определение рассматривемой задачи, которое наиболее широко известно в современной науке .

Современное определение «Золотого Сечения». *Разделить отрезок на две неравные части в такой пропорции, чтобы отношение большей части к меньшей равнялось бы отношению всего отрезка к большей части.*

Эта задача демонстрируется с помощью Рис. 2.

Рисунок 2. Золотое Сечение

1.3. *Золотая Пропорция и ее «магические свойства».* Если обозначить через x пропорцию (3), и учесть, что $AB=AC+CB$, то выражение (3) можно представить в виде:

$$x=\frac{AB}{AC}=\frac{AC+CB}{AC}=1+\frac{1}{\frac{AC}{CB}}=1+\frac{1}{x}, \qquad (4)$$

откуда вытекает следующее квадратное уравнение:

$$x^2=x+1. \qquad (5)$$

Положительный корень квадратного уравнения (5) имеет следующий вид:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \qquad (6)$$

Это и есть знаменитая «золотая пропорция», которая в течение нескольких тысячелетий волновала ученых, мыслителей, философов, художников и архитекторов, начиная с Пифагора, Платона, Евклида, Леонардо да Винчи, Луки Пачоли, Иоганна Кеплера и заканчивая Алексеем Лосевым, Павлом Флоренским, Сергеем Эйзенштейном и Аланом Тьюрингом. Иррациональное число (6), которое выражает пропорцию «золотого сечения», имеет и другие названия: *золотое число, божественная пропорция* и т.д.

«Золотая пропорция» (6) обладает многими «магическими» свойствами. Рассмотрим некоторые из них. Прежде всего – это представления «золотой пропорции» в «радикалах»

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}} \qquad (7)$$

и в виде «цепной дроби»

$$\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}} \qquad (8)$$

Из алгебраического уравнения (5) непосредственно вытекает еще одно замечательное алгебраическое свойство «золотой пропорции»:

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = \Phi \times \Phi^{n-1}, \qquad (9)$$

где $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$. Выражение (9) содержит в себе два замечательных свойства «золотой пропорции» - свойство «аддитивности» ($\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$) и свойство «мультипликативности» ($\Phi^n = \Phi \times \Phi^{n-1}$). Долгое время считалось, что «золотая пропорция» является единственным действительным числом, обладающим подобным свойством.

1.4. ***Числа Фибоначчи и Люка.*** Как известно, алгебраическое уравнение (5) тесно связано с двумя рекуррентными числовыми последовательностями – *числами Фибоначчи* F_n, задаваемыми рекуррентным соотношением:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; \quad F_0=0,\ F_1=1, \qquad (10)$$

и *числами Люка* L_n, задаваемыми рекуррентным соотношением:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}; \quad L_0=2,\ F_1=1, \qquad (11)$$

где $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$.

Ниже приведена таблица чисел Фибоначчи и Люка, расширенных в сторону отрицательных значений индекса n.

Числа Фибоначчи и Люка

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
F_{-n}	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21	34
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	78
L_{-n}	2	-1	3	-4	7	-11	18	-29	47	-78

Как следует из таблицы, при расширении чисел Фибоначчи и Люка в сторону отрицательных значений n мы получаем две последовательности F_n и L_n, простирающиеся от - ∞ и +∞. Нетрудно заметить, что эти последовательности являются «симметричными» относительно чисел Фибоначчи и Люка с нулевыми индексами $F_0=0$ и $L_0=2$; при этом надо учесть, что все числа Фибоначчи F_n и F_{-n} с четными индексами ($n=2k$) противоположны по знаку, то есть, $F_{2k}=-F_{-2k}$, в то время как для чисел Люка – все наоборот, то есть все числа Люка с нечетными индексами ($n=2k+1$) противоположны по знаку, то есть, $L_{2k+1}=-L_{-2k-1}$.

1.5. ***Формулы Бине и гиперболические функции Фибоначчи и Люка.*** Числа Фибоначчи и Люка связаны с «золотой пропорцией» (6) двумя важными формулами, выведенными в 19-м веке французским математиком Бине:

$$F_n=\frac{\Phi^n-(-1)^n\Phi^{-n}}{\sqrt{5}} \qquad (12)$$

$$L_n=\Phi^n+(-1)^n\Phi^{-n} \qquad (13)$$

Формулы Бине (12) и (13) стали источником для введения нового класса гиперболических функций – *гиперболических функций Фибоначчи и Люка*. Разработка новой теории гиперболических функций, основанных на *формулах Бине*, была выполнена украинскими математиками **Алексеем Стаховым** и **Иваном Ткаченко** в 1993 г. [1]. Дальнейшее развитие эта идея получила в работах **Алексея Стахова** и **Бориса Розина** [2-4], которые ввели так называемые *симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка*:

<u>Симметричный гиперболический синус и косинус Фибоначчи</u>

$$sFs(x)=\frac{\Phi^x-\Phi^{-x}}{\sqrt{5}}; \quad cFs(x)=\frac{\Phi^x+\Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \qquad (14)$$

<u>Симметричный гиперболический синус и косинус Люка</u>

$$sLs(x)=\Phi^x-\Phi^{-x}; \quad cLs(x)=\Phi^x+\Phi^{-x} \qquad (15)$$

1.6.*Филлотаксис и геометрия Боднара.* Явление филлотаксиса широко известно в современной науке. Оно обнаруживается в ботанике в виде плотно-упакванных ботанических объектах таких как сосновые и кедровые шишки, головки подсолнечников, кактусов, ананасов, корзинках цветов и т.д. (Рис. 3). Ботаники учтановили, что на поверхности «филлотаксисных объктов» наблюдаются лево- и право-закрученные спирали, причем отношения этих спиралей задаются с помощью соседних чисел Фибоначчи, которые в пределе стремятся к «золотой пропорции», то есть, $\frac{F_{n+1}}{F_n}:\ \frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13},...\to\tau=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. (16)

Эти «фибоначчиевые отношения» называются *Порядками филлтаксиса*. Порядки филлотаксиса различны для различных растений. Например, для головки подсолнечника можно наблюдать следующие порядки филлотаксиса: 89/55, 144/89 и даже 233/144.

(a) (b) (c)

Рисунок 2. Филлотаксисные структуры: (a) головка подсолнечника; (b) сосоновая шишка; (c) ананас

При изучении явления филлтаксиса всегда возникает вопрос: как фибоначчиевые спирали формируются на поверхности филлотаксисных объектов в процессе их роста? Эта проблема, называемая *«загадкой филлотасиса»*, является одной из наиболее интригующих проблем не только ботаники, но и науки в целом. Суть этой проблемы состоит в том, что в процессе роста ботанического объекта его «порядок филлотаксиса» изменяется, оставаясь при этом «фибоначчиевым» при всех изменениях. Установлено, что в процессе роста «порядки филлтаксиса» изменяются согласно закону:

$$\frac{2}{1}\to\frac{3}{2}\to\frac{5}{3}\to\frac{8}{5}\to\frac{13}{8}\to\frac{21}{13}\to.... \qquad (17)$$

Модификация «порядков филлотаксиса» в соответствии с законм (17) называется *динамической симметрией* [5]. Проблема «динамической симметрии» была блестяще решена украинским исследователем Олегом Боднаром [5]. Используя так называемые *«золотые» гиперболические функции* с основанием $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, Боднар разработал новую геометрическую теорию филлотаксиса. Заметим, что «золотые» гиперболические функции Боднара отличаются от гиперблчских функций Фибоначчи (14) только постоянными коэффициентами. «Геометрия Боднара» является прорывом в развитии «гиперболческих представлений», начатых Николаем Лобачевским в 19-м веке. Важно подчеркнуть, что «геометрия Боднара» подтвердила, что гиперболические функции Фибоначчии Люка (14),(15) не являются «выдумкой математиков». Наоборот, они являются «естественными» функциями, используемыми Природой при создании всех филлотаксисных обхестов, в том числе, сосновых шишек, подсолнухов, анансов и кактусов и других «красивых» ботанических обхектов. Причем эта законмерность –

«закон филлотаксиса» - выполняется в течение всего времени существования живой природы с удивительным пстоянством.

1.7. ***Роль гиперболических функций Фибоначчи и Люка и «геометрии Боднара» в развитии современной науки.*** Гиперболические функции Фибоначчи и Люка (14) и (15) вместе с «геометрией Боднара» завершают многотысячелетний период в развитии «золотой пропорции» и «гиперболических представлений». Рассмотрим основные этапы этого развития:

1. **«Золотое Сечение», впервые описанное Евклидом в Книге II его "Начал» (Теорема II.11), является крупнейшим математическим открытием античной науки.** В этой связи уместно вромнить высказывания двух гениев, касающиеся «Золотого Сечения» и его роли в античной науке. Первое высказывание принадлежит Иоганну Кеплера и взято в качестве эпиграфа настоящей статьи. Второе высказывание принадлежит гениальному российскому философу Алексею Лосеву:

"С точки зрения Платона, да и вообще с точки зрения всей античной космологии мир представляет собой некое пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического деления - Золотого Сечения... Их (древних греков – А.С.) систему космических пропорций нередко в литературе изображают как курьезный результат безудержной и дикой фантазии. В такого рода объяснениях сквозит антинаучная беспомощность тех, кто это заявляет. Однако понять данный историко-эстетический феномен можно только в связи с целостным пониманием истории, то есть, используя диалектико-материалистическое представление о культуре и ища ответа в особенностях античного общественного бытия».

Высказывание Кеплера поднимает «золотое сечение» на уровень «Теоремы Пифагора» - одной из важнейших теорем геометрии. И об этом не следует забывать создателям школьных учебников по геометрии. В результате одностороннего подхода к математическому образованию каждый школьник знает «Теорему Пифагора», но имеет весьма смутное представление о «золотом сечении» - втором «сокровище геометрии». Большинство школьных учебников по геометрии восходят к «Началам» Евклида. Но тогда почему в большинстве из них отсутствует упоминание о «золотом сечении», которое впервые описано именно в «Началах» Евклида?

Алексей Лосев указывает на «антинаучную беспомощность» тех, кто пытается принизить роль «золотого сечения» в истории греческой культуры и вообще в истории науки. Таких «исследователей» в последние годы расплодилось довольно много.

2. «Золотая пропорция» отражает «скрытую гармонию» Мироздания, которая выражается в «гиперболическом характере» окружающего нас мира. Эта знаменитое иррациональное число лежит в основе «геометрии Боднара» и гиперболических функций Фибоначчи и Люка – «естественных функций» Природы. **Установление связи «золотой пропорции», чисел Фибоначчи и**

Люка с гиперболическими функциями является одним из важнейших математических открытий, полученных в конце 20-го века.

3. **Гиперболические функции Фибоначчи и Люка завершают тысячелетнюю историю «Золотого Сечения» и поднимают «теорию чисел Фибоначчи» на новый уровень развития.** Это связано с тем фактом, что ряды Фибоначчи и Люка, рассматриваемые в бесконечном диапазоне значений $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$, являются «дискретным» случаем гиперболических функций Фибоначчи и Люка и совпадают с функциями (14), (15) для «дискретных» значений непрерывной переменной $x=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ \ldots$. При этом каждому «дискретному» тождеству для чисел Фибоначчи и Люка соответствует некоторое «непрерывное» тождество для гиперболических функций Фибоначчи и Люка и наоборот. Соответствие между «дискретными» фибоначчиевыми и люковыми тождествами и «непрерывными» тождествами для гиперболических функций Фибоначчи и Люка легко установить, если воспользоваться следующими простыми соотношениями, связывающими числа Фибоначчи и Люка с гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка:

$$F_n = \begin{cases} sFs(n), & для \quad n=2k \\ cFs(n), & для \quad n=2k+1 \end{cases}; \qquad L_n = \begin{cases} cLs(n), & для \quad n=2k \\ sLs(n), & для \quad n=2k+1 \end{cases}. \tag{18}$$

В качестве примера рассмотрим знаменитую «формулу Кассини», которая связывает три соседних числа Фибоначчи:

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}. \tag{19}$$

Для четных и нечетных n ($n=2k$ и $n=2k+1$) формула (19) может быть записана в виде двух формул:

$$F_{2k}^2 - F_{2k-1}F_{2k+1} = -1; \qquad F_{2k+1}^2 - F_{2k}F_{2k+1} = 1 \tag{20}$$

Воспользовавшись соотношениями (18), формулы (20) можно переписать в терминах гиперболических функций Фибоначчи:

$$\left[sFs(2k)\right]^2 - cFs(2k-1)cFs(2k+1) = -1; \qquad \left[cFs(2k+1)\right]^2 - sFs(2k)sFs(2k+1) = 1 \tag{21}$$

Заменяя теперь в формулах (21) дискретную переменную $k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$ на непрерыную переменную x, мы получим два "непрерывных» тождества для гиперболических функций Фибоначчи:

$$\left[sFs(2x)\right]^2 - cFs(2x-1)cFs(2x+1) = -1; \qquad \left[cFs(2x+1)\right]^2 - sFs(2x)sFs(2x+1) = 1 \tag{22}$$

Таким способом можно превратить все фибоначчиевые и люковые тождества в соответствующие «непрерывные» тождества для гиперболических функций Фибоначчи и Люка и наоборот. **Это означает, что современная «теория чисел Фибоначчи» является частным случаем более общей теории гиперболических функций Фибоначчи и Люка.**

2. «Металлические Пропорции» как новые математические константы Природы. От Александра Татаренко, Веры Шпинадель и Мидхата Газале к новым гиперболическим моделям Природы

2.1. ***Металлические пропорции и их свойства.*** Николай Васютинский, один из наиболее глубоко мыслящих специалистов в области «золотого сечения», написал в своей замечательной книге «Золотая пропорция» [6] следующее: *«Из всех пропорций, которыми издавна пользовался человек при создании гармонических произведений, существует одна, единственная и неповторимая, обладающая уникальными свойствами… Целое можно поделить на бесконечное множество неравных частей, но только одно из таких сечений отвечает золотой пропорции … Ведь не напрасно золотую пропорцию считают основным критерием гармонии Природы, а некоторые ученые даже одной из основных ее констант… Эта пропорция знаменует собой как бы вершину эстетических изысканий, некий предел Гармонии Природы**.... ЕДВА ЛИ НАЙДЕТСЯ В МАТЕМАТИКЕ ВТОРОЕ ПОДОБНОЕ ЧИСЛО !».***

Недавно в работах Александра Татаренко [7], Веры Шпинадель [8], Мидхата Газале [9] и Джея Капраффа [9], “*было обнаружено бесконечное множество иррациональных чисел, обладающих той гипнотически завораживающей инвариантностью, какая тысячелетиями восторгала в числе Ф и физиков, и лириков».*

В цитированном выше высказывании Александра Татаренко [9] речь идет о «металлических пропорциях» или «золотых m-пропорциях» [11], которые выражаются с помощью следующей математической формулы:

$$\Phi_m = \frac{\sqrt{4+m^2}+m}{2}. \tag{23}$$

Число (23) является положительным корнем следующего алгебраического уравнения:

$$x^2 - mx - 1 = 0, \tag{24}$$

где m – заданное положительное действительное число. Заметим, что при m=1 уравнение (24) сводится к «уравнению золотой пропорции» (5). При этом «металлическая пропорция» (23) сводится к «золотой пропорции» (6).

«Металлические пропорции» обладают следующими «магическими» свойствами:

$$\Phi_m = \sqrt{1+m\sqrt{1+m\sqrt{1+m\sqrt{\ldots}}}} \tag{25}$$

$$\Phi_m = m + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{m + \ldots}}} \tag{26}$$

$$\Phi_m^n = m\Phi_m^{n-1} + \Phi^{n-2} = \Phi_m \times \Phi_m^{n-1}, \tag{27}$$

Заметим, что при m=1 выражения (25)-(27) сводятся к выражениям (7)-(9), соответственно.

Название «металлические пропорции» было введено аргентинским математиком Верой Шпинадель [8]. Если принять в (23) m=1, 2, 3, 4, то мы получим следующие математические константы, для которых Вера Шпинадель придумала специальные названия:

$$\begin{aligned}
&\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left(\text{Золотая Пропорция}, m=1\right);\\
&\Phi_2 = 1+\sqrt{2} \left(\text{Серебряная Пропорция}, m=2\right);\\
&\Phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \left(\text{Бронзовая Пропорция}, m=3\right);\\
&\Phi_4 = 2+\sqrt{5} \left(\text{Медная Пропорция}, m=4\right).
\end{aligned} \tag{28}$$

Далее у Веры Шпинадель не хватило «металлов» для названий других пропорций типа (23), и мы приведем выражения для некоторых из них без специальных названий:

$$\Phi_5 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}; \quad \Phi_6 = 3+2\sqrt{10}; \quad \Phi_7 = \frac{7+2\sqrt{14}}{2}; \quad \Phi_8 = 4+\sqrt{17}. \tag{29}$$

2.2. *Обобщение Евклидовой задачи о делении отрезка в крайнем и среднем отношении (задача о «металлических сечениях»).* А теперь вновь возвратимся к «Началам» Евклида и сформулируем зазачу о «металлических сечениях» на «языке Евклида».

Задача о «металлличеcких сечениях». *Зададимся положительным действительным числом $m>0$ и разделим отрезок AB на две неравные части - отрезок mAC и и отрезок CB - в такой пропорции, чтобы отношение отрезка AB к отрезку AC равнялось бы отношению отрезка AC к отрезку CB, то есть,*

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} \tag{30}$$

Таким образом, существенное отличие «задачи о «металлических сечениях» от классического «золотого сечения» состоит в том, что в данном случае, составляя пропорцию (30), мы берем не отношение отрезка к большему отрезку, как это принято в классической задаче о «золотом сечении», а только к его части AC, которая в m раз меньше отрезка mAC. Если принять пропорцию (30) равной x и учесть, что AB связано с AC и CB соотношением:

$$AB = mAC + CB, \tag{31}$$

то пропорцию (30) можно записать в виде:

$$x = \frac{AB}{AC} = \frac{mAC + CB}{AC} = m + \frac{1}{\frac{AC}{CB}} = m + \frac{1}{x}, \tag{32}$$

откуда непосредственно вытекает уравнение (24), задающее «металлические пропорции» (23).

Ясно, что при m=1 эта задача совпадает с «золотым сечением». При остальных значениях m>0 мы имеем бесконечное количество новых вариантов этой знаменитой задачи, которые приводят нас к «Металлическим Пропорциям».

2.3. ***Обобщенные m-числа Фибоначчи и Люка и формулы Газале.*** Как показано в [11], алгебраическое уравнение (24) является «характеристическим уравнением» для двух классов рекуррентных числовых последовательностей – *обобщенных m-чисел Фибоначчи и Люка* $F_m(n)$ и $L_m(n)$, которые при заданном m выражаются через «металлические пропорции» (23) следующим образом:

$$F_m(n) = \frac{\Phi_m^n - (-1)^n \Phi_m^{-n}}{\sqrt{4+m^2}} \qquad L_m(n) = \Phi_m^n + (-1)^n \Phi_m^{-n}. \tag{33}$$

Эти формулы называются *формулами Газале* в честь египетского математика Мидхата Газале, который впервые ввел эти формулы [9].

2.4. ***Гиперболические m-функции Фибоначчи и Люка.*** Следующим новым математическим результатом является введение *гиперболических m-функций Фибоначчи и Люка*, основанных на формулах Газале [12]:

<u>Гиперболический m-синус Фибоначчи</u>

$$sF_m(x) = \frac{\Phi_m^x - \Phi_m^{-x}}{\sqrt{4+m^2}} \tag{34}$$

<u>Гиперболический m-косинус Фибоначчи</u>

$$cF_m(x) = \frac{\Phi_m^x + \Phi_m^{-x}}{\sqrt{4+m^2}} \tag{35}$$

<u>Гиперболический m-синус Люка</u>

$$sL_m(x) = \Phi_m^x - \Phi_m^{-x} \tag{36}$$

<u>Гиперболический m-косинус Люка</u>

$$cL_m(x) = \Phi_m^x + \Phi_m^{-x} \tag{37}$$

Детально роль этих функций в развитии современной науке обсуждается в работе [11]. Эти функции представляют собой модели новых гиперболических миров Природы и могут привести к переосмысливанию гиперболической геометрии и всего теоретического естествознания.

2.5. ***Сравниетельная таблица.*** Уместно привести следующую сравнительную таблицу, которая задает взаимосвязь между «Золотой Пропорцией» и «Металлическими Пропорциями» как новыми математическими константами Природы.

Золотая Пропорция (m=1)	Металлические Пропорции (m>0)
$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\Phi_m=\frac{\sqrt{4+m^2}+m}{2}$
$\Phi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}}$	$\Phi_m=\sqrt{1+m\sqrt{1+m\sqrt{1+m\sqrt{\ldots}}}}$
$\Phi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$	$\Phi_m=m+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\ldots}}}$
$\Phi^n=\Phi^{n-1}+\Phi^{n-2}=\Phi\times\Phi^{n-1}$	$\Phi_m^n=m\Phi_m^{n-1}+\Phi^{n-2}=\Phi_m\times\Phi_m^{n-1}$
$F_n=\frac{\Phi^n-(-1)^n\Phi^{-n}}{\sqrt{5}}$	$F_m(n)=\frac{\Phi_m^n-(-1)^n\Phi_m^{-n}}{\sqrt{4+m^2}}$
$L_n=\Phi^n+(-1)^n\Phi^{-n}$	$L_m(n)=\Phi_m^n+(-1)^n\Phi_m^{-n}$
$sFs(x)=\frac{\Phi^x-\Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$; $cFs(x)=\frac{\Phi^x+\Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$	$sF_m(x)=\frac{\Phi_m^x-\Phi_m^{-x}}{\sqrt{4+m^2}}$; $cF_m(x)=\frac{\Phi_m^x+\Phi_m^{-x}}{\sqrt{4+m^2}}$
$sLs(x)=\Phi^x-\Phi^{-x}$; $cLs(x)=\Phi^x+\Phi^{-x}$	$sL_m(x)=\Phi_m^x-\Phi_m^{-x}$; $cL_m(x)=\Phi_m^x+\Phi_m^{-x}$

Красота этих формул завораживает, что дает основание высказать предположение, что к ним полностью применим «Принцип Математической Красоты» Дирака, а это, в свою очередь, вселяет уверенность, что эти формулы могут стать основой всего теоретического естествознания.

Заключение

Главные выводы настоящей статьи, которая является продолжением и развитим предыдущих работ автора в этом направлении [1-4, 11-15], состоят в следующем:

1. «**Задача о делениии отрезка в крайнем и среднем отношении» (Предложение II.11 “Начал» Евклида) является одним из величайших открытий античной математики,** которое Иоганн Кеплер сравнил с «Теоремой Пифагора». Однако, описав эту задачу, Евклид, повидимому, не осознавал, что речь идет о крупнейшем математическом открытии, которое существенно повлияет на дальнейшее развитие науки и математики. Вводя «золотое сечение» в свои «Начала», Евклид преследовал единственную цель – дать строгую геометрическую теорию «Платоновых Тел», в частности, додекаэдра, главной пропорцией которого является «золотая пропорция».
2. Результатом исследований, опубликованных в работах [11-15], является осознание того факта, что **главное предназначение «золотой пропорции», ее главная роль в развитии науки состоит в том, что она выражает «скрытую гармонию» Мироздания и что эта «скрытая гармония» связана с «гиперболическими представлениями».** Первый шаг в раскрытии такой трактовки «золотой пропорции» был сделан французским

математиком **Jacques Philippe Marie Binet** (1786-1856), который ввел знаменитые **формулы Бине,** связывающие числа Фибоначчи и Люка с «золотой пропорцией». Однако математикам 19-го века не удалось распознать в «формулах Бине» прооообраз нового класса гиперболических функций, основанных на «золотой пропорции». В результате гиперболическая геометрия, возникшая в первой половине 19-го в., около двух столетий развивалась независимо от «золотой пропорции».

3. Первый шаг в развитии «гиперболических представлений» был сделан итальянским математиком **Vincent Riccati** (1707-1775), который в 18-м веке ввел *гиперболические функции.* Однако, главный шаг в этом направлении был сделан российским математиком **Николаем Лобачевским** (1792–1856), который в 1827 г. обнародовал созданную им «воображаемую геометрию», основанную на гиперболических функциях. Несмотря на отрицательное отношение к геометрии Лобачевского со стороны официальных математических кругов России того времени (академик М.В. Остроградский), начиная с геометрии Лобачевского, «гиперболические представления» начинают проникать в теоретическое естествознание. Важнейшим шагом в эволюции «гиперболических представлений» является гиперболическая интерпретация специальной теории относительности Эйнштейна, представленная в 1908 г. немецким математиком **Германом Минковским** (1864-1909).
4. Одним из первых ученых, который распространил «гиперболические идеи» на биологию, был украинско-российский ученый-энциклопедист **В.И. Вернадский** (1863-1945). Вернадский высказал предположение, что законы формообразования живой природы должны отличаться от законов формоустройства косных тел, соответствующих евклидовой геометрии. Введение **гиперболических функций Фибоначчи и Люка (Стахов, Ткаченко, Розин [1-4])** и оригинальная геометрическая теория филлотаксиса, разработанная украинским исследователем **Олегом Боднаром** [5], являются прорывом в развитии «гиперболических представлений». **Именно в работах Боднара [5], Стахова, Ткаченко и Розина [1-4], впервые удалось объединить «золотую пропорцию», числа Фибоначчи и Люка с гиперболической геометрией.**
5. **Новая теория гиперболических функций [12], основанная на «металлических пропорциях» и «формулах Газале», является дальнейшим шагом в развитии «золотых» гиперболических представлений.** Можно ожидать, что именно *гиперболические т-функции Фибоначчи и Люка* [12] являются основой для нового этапа в развитии теоретического естествознания, суть которого состоит в использовании новых гиперболических функций в качестве моделей «гиперболических миров» Природы. Начало этого этапа в современной науке дали блестящие работы украинского исследователя Олега Боднара [5].
6. И последний вопрос, который не дает покоя автору много лет, начиная с доклада «The Golden Section and Modern Harmony Mathematics” [14], сделанного автором на 7-й Международной конференции “Числа Фибоначчи и их приложения» (Австрия. Грац, июль 1996). Еще большую

остроту этот вопрос приобрел в процессе написания книги «The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science” [15]. Если «Золотая Пропорция» и «Металлические Пропорции», действительно, являются математическими константами Мироздания, а гиперболические *m*-функции Фибоначчи и Люка, действительно, являются «естественными» функциями Природы, которые существуют независимо от нашего сознания, то возникает вопрос: а кто же, на самом деле, создал эти функции и воплотил их в природные объекты, в частности, в сосновые шишки, кактусы, ананасы, подсолнечники и корзинки цветов, которые существовали в Природе задолго до возникновения “Homo sapiens”? **И не являются ли «золотая» и «металлические» пропорции, как новые математичские константы Природы, и вытекающие из них гиперболические *m*-функции Фибоначчи и Люка косвенным доказательством существования Высшего Разума, который конструирует здание Природы по математическим законам красоты?** И может быть прав польский математик и священник Майкл Геллер, лауреат Премии Темплона-2008 (аналог Нобелевской Премии), когда сказал: «*Я не устаю спрашивать себя: как образованные люди могут быть настолько слепы, чтобы не видеть, что наука всего лишь изучает то, что создал Бог*?»

Литература

1. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии наук УССР, том 208, № 7, 1993 г.
2. Stakhov A, Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals 2004, **23(2):** 379-389.
3. Стахов А.П., Розин Б.Н. Симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка. Number, Time, Relativity. Proceedings of International Scientific Meeting. Moscow, 10 August – 13 August, 2004.
4. Стахов А.П., Розин Б.Н. Новый класс гиперболических функций. Труды Института прогрессивных исследований, вып. 4, Израиль, Арад, 2004 г.
5. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: Изд-во «Свит», 1994.
6. Васютинский Н.А. Золотая пропорция. Изд. «Молодая гвардия», М. 1990.
7. Татаренко А.А. «T_m — принцип» — всемирный закон гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12575, 10.11.2005 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320002.htm
8. Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).
9. Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 (русский перевод, 2002).
10. Kappraff Jay. Beyond Measure. A Guided Tour Through Nature, Myth, and Number. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 2002.

11. Стахов А.П. Металлические Пропорции – новые математические константы Природы. // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14748, 22.03.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321079.htm
12. Стахов А.П. Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm
13. А.П. Стахов, «Математика Гармонии» как новое междисцилинарное направление современной науки // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14729, 08.03.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321078.htm
14. Stakhov A.P. The Golden Section and Modern Harmony Mathematics. Applications of Fibonacci Numbers, Volume 7, 1998.
15. Stakhov A.P. The Harmony Mathematics. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. New Jersey. London. Singapore. Hong Kong: World Scientific (in press)