С.Л. Василенко

Интегральные π-золотые модели пятого порядка

Возомнив, что знает всё, как свои пять пальцев,
по любому поводу вставлял свои пять копеек,
только выглядело это пятым колесом в телеге...
(по мотивам народных пословиц)

Под знаком пи-бесконечности

Люди «все на одно лицо: два глаза, в середине – нос, а под ним рот» (Шалтай-Болтай, Алиса в Зазеркалье). Только одни родились под знаком Водолея, другие ... боготворят числа.

Воистину, неисчерпаем иллюзорный мир чисел, гениально придуманных человеком.

Они образуют кровеносную систему пышного дерева математики.

Каждое число по-своему особенное. Но среди них редкими алмазами сияют действительно уникальные "особи-индивиды". Мы не оговорились, ибо они во многом напоминают базовые единицы различных форм жизни.

Среди них – вездесущее число "пи". Такое впечатление, что оно присутствует повсюду, проявляя себя в разных научных областях и возникая самым неожиданным образом, как чертенок из табакерки.

О нём написано много разноплановых книг, в том числе и научно-популярных [1–3].

Число "пи" (от греч. периметр, периферия, окружность) в евклидовом однородном и симметричном пространстве отражает его изотропные или одинаковые свойства по любому направлению так, что отношение длины произвольной окружности к её диаметру неизменно.

В более общем псевдоевклидовом пространстве, в частности пространстве Минковского, роль окружностей на плоскости играют гиперболы, и такое понятие как «число пи» не определено в принципе. За ненадобностью. Хотя может использоваться в качестве вспомогательной константы. Да и вообще пифагорова концепция о самостоятельности чисел сентиментальна и явно преувеличена, ибо это абсолютно абстрактные математические объекты, которых нет в природе. Также как и литеры-буквы.

Магия чисел часто завораживает, но она безобидна и бессмысленна.

Вследствие трансцендентности, число π обычно выражается через ряды (бесконечные суммы), интегралы, пределы, бесконечные произведения или бесконечные дроби. То есть бесконечность – его отличительный, постоянно сопровождающий признак, необходимый атрибут и крест, который пожизненно нести. Во Вселенной просто не хватит места, чтобы его воспроизвести, не говоря уже о других, например мега-гигантских числах. – В русской транскрипции это примерно "дофига", но ещё больше.

Нет такого умопостигаемого хранилища, где можно поместить хотя бы одно подобное число-величину. Разве что представить условной точкой на числовой оси.

Одним словом, абстракция. – В наших головах и мире идей. Хотя вещь, безусловно, полезная и служит удобным инструментарием. В пи-бесконечности нет ничего пугающего. Но где-то там, в глубине души, всё равно тлеет неудовлетворенность от незавершенности-незаконченности процесса. – «Ложечки-то нашлись, а вот осадок остался».

Каждая расчетная формула по-своему красива и отличается эффективностью за счет неодинаковой сходимости.

Например, 25 итераций рекурсивного алгоритма дают 45 млн десятичных знаков:

$$(a_0 \quad b_0 \quad t_0 \quad p_0) = \left(1 \quad 1/\sqrt{2} \quad 1/4 \quad 1\right);$$

$$(a_{n+1} \quad b_{n+1} \quad t_{n+1} \quad p_{n+1}) = \left(\frac{a_n + b_n}{2} \quad \sqrt{a_n b_n} \quad t_n - p_n(a_n - a_{n+1}) \quad 2p_n\right), \qquad \frac{(a_n + b_n)^2}{4t_n} \to \pi .$$

К слову, для тех же межгалактических расчетов достаточно всего 16 знаков, которые дают погрешность вычислений миллиардных расстояний в несколько сантиметров.

Таким образом, главная особенность числа π – это сопутствующая ему бесконечность.

Не случайно великое множество разнотипных интегралов содержат в своем решении данную константу, как спутник-талисман. То есть бесконечно-интегральное суммирование по определению создает подоснову для весьма вероятного π-проявления.

Числу π можно придать аббревиатуру ПИ – параметр интегральный (переводной коэффициент), – при суммировании и объединении, при переходе от прямой линии к окружности, от куба – к шару и т.п.

Кроме того, число "пи" искусственным образом стало связующим звеном между прямоугольной и угловой системами координат. От длины окружности 2π единичного радиуса ввели эквивалентность $2\pi \leftrightarrow 360^{o}$ благодаря удобной 60-ричной системе счисления.

Могло быть и 180 градусов, но 360 – ближе к количеству земных дней в году.

А число 60 возникло 4 тыс. лет назад в Вавилоне с целью упрощения счета на бытовом уровне: 12 делилось на 2, 3, 4 и 6. – Для полного счастья добавили пятерку: 12 × 5 = 60.

О бедной пятерке замолвите слово...

Вращательная и радиальная, лучевая и аксиальная, поворотная, – как только не изощряются в названии симметрии. В кристаллографии – осевая симметрия n-го порядка, дающая совмещение фигуры с самой собой при повороте вокруг оси на $360/n$ градусов.

- 5 – неприкосновенное число (НЧ), то есть натуральное число, которое не может быть выражено в виде суммы всех собственных делителей любого целого положительного числа, в том числе самого НЧ;
- 5 – единственное нечетное число и всех НЧ;
- не существует НЧ, за исключением 5, равных простому числу плюс 3.

На основе корня из пяти $\sqrt{5} = \phi + \Phi$ индийский математик Рамануджан вывел ряд интересных форм с использованием непрерывных (цепных) дробей [4], например:

$$4\int_0^\infty \frac{xe^{-x\sqrt{5}}}{\cosh x}dx = \frac{1}{1+}\,\frac{1^2}{1+}\,\frac{1^2}{1+}\,\frac{2^2}{1+}\,\frac{2^2}{1+}\,\frac{3^2}{1+}\,\frac{3^2}{1+}\cdots \approx 0{,}5683;$$

$$\frac{1}{1+}\,\frac{e^{-2\pi}}{1+}\,\frac{e^{-4\pi}}{1+}\,\frac{e^{-6\pi}}{1+}\cdots = e^{2\pi/5}\left(\sqrt{\Phi\sqrt{5}} - \Phi\right) \approx 0{,}9981.$$

Математические основания

По мере всё более глубокого погружения (с красивым украинским переводом – занýрення) в интегральную тему [5], обратили внимание на несколько интегралов, которые особенным образом высвечивают золотое сечение и одновременно связаны с числом π.

Решили выделить их отдельно, ибо «игра стоит свеч», а итоговые результаты, на наш взгляд, оправдывают поиски и ожидания.

Даже один такой интеграл стоит потраченных сил и времени на остальные.

Попытка № 1. В финале-2023 ежегодных соревнований MIT (Cambridge) по интегрированию на скорость (в пределах 4 минут) предлагался определенный интеграл [6]

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}\, dx}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

Обобщим его для произвольной степени $0<a<1$, а потом перейдем к пятому порядку:

$$I(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{tg}^a x\,dx}{(\sin x+\cos x)^2}=\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{tg}^a x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}\frac{dx}{\cos^2 x}=\left|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg} x\\ dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{array}\right|=\int_0^{\infty}\frac{t^a\,dt}{(1+t)^2}=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{t^{(1+a)-1}\,dt}{(1+t)^{(1+a)+(1-a)}}=\mathrm{B}(1+a,1-a)=\frac{\Gamma(1+a)\cdot\Gamma(1-a)}{\Gamma(2)}=\frac{a\,\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a)}{1}=\frac{\pi a}{\sin \pi a},$$

где $\mathrm{B}(x,y)$ – бета-функция, которая обладает рядом полезных свойств и связана с гамма-функцией $\Gamma(z)=\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{-t}dt=\left|x=e^{-t}\right|=\int_0^1(-\ln x)^{z-1}dx$ с её отличительным рекуррентным уравнением $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ и формулой дополнения Эйлера $\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z)=\pi/\sin \pi z$:

$$\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(y,x)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}\,dt}{(t+1)^{x+y}}=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\,d\theta=\frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \qquad (1)$$

Остается подставить значение параметра a. Нас интересует пятый порядок, то есть золотые интегралы, обусловленные значением синуса для аргумента, кратного 18 градусам:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{tg}^{1/5}x\,dx}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{\pi/5}{\sin \pi/5}=\frac{\pi}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{2-\phi}}=\frac{\pi}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{2-\phi}}\approx 1{,}0690; \qquad (2)$$

$$I\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{\pi}{5}\cdot\Phi\approx 1{,}0166; \qquad I\left(\frac{3}{10}\right)=\frac{\pi}{5}\cdot 3\phi\approx 1{,}1650; \qquad I\left(\frac{7}{10}\right)=\frac{\pi}{5}\cdot 7\phi\approx 2{,}7183.$$

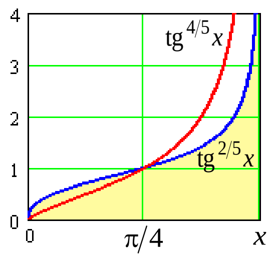
В соотношении (2) величина $q=\dfrac{2}{\sqrt{2-\phi}}=\sqrt{2\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)}\approx 1{,}7013$ имеет, в частности, такие геометрические интерпретации:

- большая диагональ золотого ромба с единичной стороной;
- длина большей стороны золотого прямоугольника, вписанного в единичную окружность;
- $\dfrac{q}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2-\phi}}=\dfrac{1}{2\sin \pi/5}=\left|\dfrac{\sin(\operatorname{arctg}\Phi)}{\sin(\operatorname{arcctg}\phi)}\right|=\left|\dfrac{\cos(\operatorname{arctg}\phi)}{\cos(\operatorname{arcctg}\Phi)}\right|\approx 0{,}85065$ – радиус описанной окружности правильного пятиугольника с единичной стороной;
- $q+1$ – радиус наименьшего круга, в который можно упаковать 5 единичных кругов, q – расстояние между центрами большого круга и каждого единичного круга.

Несобственный интеграл от степени тангенса (в чистом виде) также имеет связь с константой золотого сечения $\Phi=\phi^{-1}$:

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{tg}^a x\,dx=\int_0^{\pi/2}\sin^{2\frac{1+a}{2}-1}x\cos^{2\frac{1-a}{2}-1}x\,dx=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1+a}{2},\frac{1-a}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\sec\frac{\pi a}{2};$$

$$\left\|\ \Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin \pi z}=\left|z=\frac{1}{2}+\omega\right|\ \Rightarrow\ \Gamma\left(\frac{1}{2}+\omega\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\omega\right)=\frac{\pi}{\sin(\pi/2+\omega)}=\pi\cdot\sec\pi\omega\ \right\|$$



$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{tg}^{2/5} x\, dx = \pi\phi \approx 1{,}9416$$

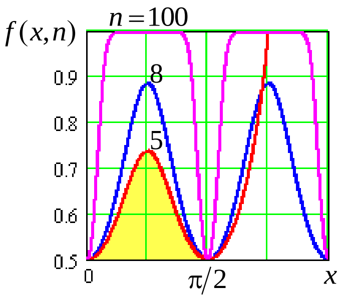
$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{tg}^{4/5} x\, dx = \pi\Phi \approx 5{,}0832$$

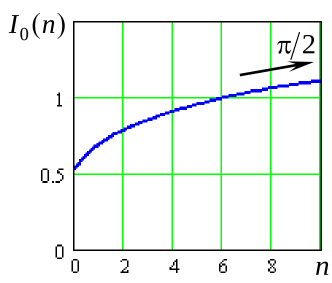
Попытка № 2. Проведем небольшое исследование интегралов вида

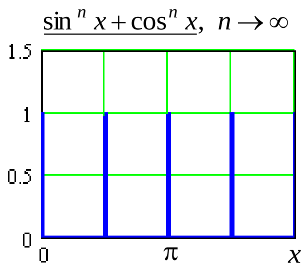
$$I_0(n) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^n x + \cos^n x}, \quad I_1(n) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin^n x + \cos^n x}$$

на предмет возможного появления в них золотого сечения (ЗС) в увязке с целыми положительными степенями n в подынтегральных функциях.

Расчеты приведены в приложении. На рисунке отображено изменение интеграла $I_0(n)$ и подынтегральной функции $f(x,n)$, которая при $n \to \infty$ вырождается в периодическую единично-импульсную функцию.







Для четных значений n интегралы равны числу π, умноженному на весовые (поправочные) коэффициенты, величины которых представлены в таблице.

Весовые коэффициенты к числу π в определенных интегралах $I_0(n), I_1(n)$

n	2	4	6	8	10
$I_0(n)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{\sqrt{10-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{5}$
$I_1(n)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{12}}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	$\frac{7\sqrt{3}}{36}$	$\sqrt{\frac{1+2\sqrt{34}}{102}}$

Некоторые "проблески" золотого сечения наблюдаются в связи с наличием квадратного корня из десяти.

Но, мягко говоря, вялые и потому не очень убедительные.

К слову, значение $\sqrt{10} \approx 3{,}162$ индуистский математик 7-го века Брахмагупта использовал в качестве значения числа "пи".

Поскольку $\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, то соблюдается абсолютное совпадение цифр:

$$\sqrt{10} = 3{,}162277660\ldots \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}3162277660\ldots = 1/\sqrt{10}.$$

Пятый порядок (n = 5) в чистом виде дает сложную зависимость от Φ:

$$I_0(5)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^5 x+\cos^5 x}=\frac{4\sqrt{2}}{5}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{2\sqrt{\phi^3}}{5}\ln\left(\Phi+\sqrt{\Phi}\right)+\frac{4\sqrt{\Phi^3}}{5}\operatorname{arctg}\sqrt{\Phi^3}\approx 2{,}6326\,.$$

В то же время его удвоение ($n = 10$) с переходом на четные степени приводит к отменному результату:

$$I_0(10)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^{10} x+\cos^{10} x}=(\phi+\Phi)\pi=\sqrt{5}\,\pi\approx 7{,}0248\,.$$

Корень из пяти равен $\sqrt{5}=2\Phi-1=\Phi+\phi=2\cdot(\cos\pi/5+\cos 2\pi/5)$.

Привлекательна и более общая форма с числами Фибоначчи F_n

$$\Phi^r=\frac{F_{n-1}\Phi^{r-1}}{\Phi^{n-1}-F_n}\quad\Rightarrow\quad\sqrt[r]{\frac{F_{n-1}\Phi^{r-1}}{\Phi^{n-1}-F_n}}+\sqrt[r]{\frac{\Phi^{n-1}-F_n}{F_{n-1}\Phi^{r-1}}}=\sqrt{5}\,,$$

которая следует из известного равенства $\Phi^n=F_n\Phi+F_{n-1}$, доказываемого по индукции.

Или очень быстро сходящееся произведение на основе чисел Люка L_n

$$\sqrt{5}=\prod_{k\ge 1}\left(1+\frac{2}{L_{2^k}}\right)=\left(1+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{7}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{47}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{2207}\right)\cdots$$

Попытка № 3. Многие сложные или несобственные интегралы находятся проще или только средствами комплексного анализа (интегралы по замкнутым контурам), в частности, с применением теории вычетов. Характерный пример приведен в работе [7] для вычисления несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(ax)}{b^4+x^4}dx$ через сумму вычетов комплексной переменной в особых точках, лежащих в верхней полуплоскости.

Пятый порядок b^5+x^5 в чистом виде, к сожалению, не проходит, поскольку интеграл расходится из-за деления на ноль в точке $x=-b$.

Но можно проследить его проявление для знаменателя $b^{10}+x^{10}$ с использованием классического перехода к функции комплексной переменной z через вычеты res:

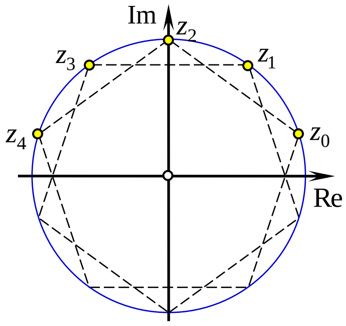
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)\sin(ax)}{Q(x)}dx=\operatorname{Im}\left(2\pi i\sum_{\operatorname{Im}z>0}\operatorname{res}\frac{P(z)e^{iaz}}{Q(x)}\right),$$

где многочлен $Q(x)$ не имеет действительных корней, а его степень больше степени многочлена $P(x)$ хотя бы на 1, то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(ax)}{b^{10}+x^{10}}dx=\operatorname{Im}\left(2\pi i\sum_{\operatorname{Im}z>0}\operatorname{res}\frac{ze^{iaz}}{b^{10}+z^{10}}\right).$$

Особые точки функции $f(z)=\dfrac{ze^{iaz}}{b^{10}+z^{10}}$ – вершины правильного 10-угольника вписанного в окружность радиусом b с центром в начале координат:

$$z^{10}=-b^{10}=b^{10}e^{i(\pi+2\pi k)},\;\; z=be^{i(\pi+2\pi k)/10},\;\; k=0,1,.\,2,3\ldots$$



Выпишем точки, лежащие в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}(z)>0$, в показательной, тригонометрической и алгебраической форме:

$$z_{0,4}=\pm be^{\pm i\pi/10}=b\left(\pm\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}\right)=\frac{b}{2}\left(\pm\sqrt{4-\phi^2}+i\,\phi\right);$$

$$z_{1,3}=\pm be^{\pm 3i\pi/5}=b\left(\pm\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}\right)=\frac{b}{2}\left(\pm\sqrt{4-\Phi^2}+i\,\Phi\right);$$

$$z_2=e^{i/2}=i;\qquad \sqrt{4-\Phi^2}=\sqrt{1+\phi^2},\quad \sqrt{4-\phi^2}=\sqrt{1+\Phi^2}.$$

Имеем полюса 1-го порядка, тогда

$$\operatorname*{res}_{z_k} f(z)=\operatorname*{res}_{z_k}\frac{\varphi(z)}{\psi'(z)}=\frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)}\quad\Rightarrow\quad \operatorname*{res}_{z_k} f(z)=\left.\frac{ze^{iaz}}{10z^9}\right|_{z_k}=\frac{e^{iaz_k}}{10z_k^8}.$$

Подставим особые точки z_k (в числитель алгебраическую форму, в знаменатель – показательную), объединим пары $(z_0,z_4),(z_1,z_3)$ и применим формулу Эйлера $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$. В результате несложных преобразований получаем:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(ax)}{b^{10}+x^{10}}dx=\frac{2\pi}{5b^8}\left[\cos\left(c\sqrt{1+\Phi^2}-\frac{4}{5}\pi\right)e^{-c\phi}+\cos\left(c\sqrt{1+\phi^2}-\frac{2}{5}\pi\right)e^{-c\Phi}+\frac{e^{-2c}}{2}\right],\quad c=\frac{ab}{2}.$$

Возможно, длинновато и не очень эффектно. Зато воочию и во всей широте высвечивается пятый порядок, что впрочем, вполне ожидаемо.

Отдельно о величинах $\sqrt{1+\Phi^2}$ и $\sqrt{1+\phi^2}$:

$\sqrt{1+\Phi^2}=\sqrt{2+\Phi}\approx 1{,}9021$	$\sqrt{1+\phi^2}=\sqrt{2-\phi}\approx 1{,}1756$
$\sec(\operatorname{arctg}\Phi)=2\sin(2\pi/5)=i^{1/5}+i^{-1/5}$	$\sec(\operatorname{arctg}\phi)=2\sin(\pi/5)=i^{3/5}+i^{-3/5}$
В золотом прямоугольнике отношение диагонали к короткой стороне	Диагональ золотого прямоугольника $1\times\phi$
Длина ребра звездчатой пентаграммы, вписанной в единичную окружность	Длина ребра правильного пятиугольника, вписанного в единичную окружность
В правильном десятиугольнике отношение короткой диагонали к стороне	В правильном пятиугольнике отношение стороны к радиусу описанной окружности
Связь с единичной матрицей $\begin{pmatrix}-\Phi^2 & \sqrt{1+\Phi^2}\\ -\sqrt{1+\Phi^2} & 1\end{pmatrix}^5=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	Связь с единичной матрицей $\begin{pmatrix}-\phi^2 & \sqrt{1+\phi^2}\\ -\sqrt{1+\phi^2} & 1\end{pmatrix}^5=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$
$\pm\sqrt{1+\Phi^2}$ – "крайние" корни полинома x^4-5x^2+5	$\pm\sqrt{1+\phi^2}$ – "средние" корни полинома x^4-5x^2+5

Попытка № 4. В одной из песен талантливого российского исполнителя Я.Дронова (псевдоним Shaman) звучат такие слова: «Я русский всему миру назло...».

Довольно неожиданное сравнение, построенное на конфронтации: разозлить весь мир и досадить тем, что ты русский. Даже если продолжить ряд синонимов *назло*, как "вопреки", "наперекор", всё равно присутствует противопоставление. – Назло обычно делают при наличии конфликта и для того, чтобы его усилить. Сравните: «Жди меня, и я вернусь всем смертям назло...» (К.Симонов, 1941), – с вполне уместной художественной антитезой.

Любопытно, но в русском языке отсутствуют антонимы слову *назло*. А если нет противоположного слова, то противоположного действия тоже нет. Невольно ассоциируется дорога с односторонним движением. И это отнюдь не восходящая автострада.

В отличие от политико-патриотической конъюнктуры, математика всегда остается интернациональным и общечеловеческим достоянием, в силу универсальности своих построений. Информационные коммуникации, как правило, используют английский язык, с наибольшим международным общением, а значит и аудиторией.

Порой знакомишься с работами по математической проблематике, и даже не догадываешься, представителем какой страны либо этноса является тот или иной автор.

Так, в работе-зарисовке [8], где в комментариях индусы поздравляют автора с рождеством (в Индии все религии равны и гармонично сочетаются друг с другом), приведен такой интеграл $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

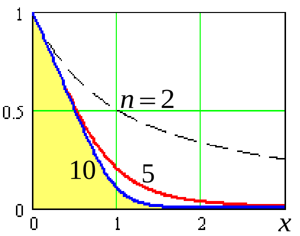
Обобщим этот частный пример для произвольного числа возрастающих степеней, а потом традиционно перейдем к пятому порядку и его удвоению.

В данном случае порядок будем определять не показателем наивысшей степени полинома, а количеством слагаемых в знаменателе подынтегральной функции. Почему так, становится ясным из нижеприведенных преобразований, с использованием одной из равнозначных форм бета-функции $\mathrm{B}(x,y)$ согласно равенству (1) на интервале от 0 до ∞:

$$I(n) = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}} = \int_0^\infty \frac{x-1}{x^n-1}dx = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^n-1} - \int_0^\infty \frac{dx}{x^n-1} = \left| \begin{array}{c} x^2=u,\, x^n=u^{n/2} \\ 2x\,dx=du \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{du}{u^{n/2}-1} - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\left(x^{n/2}+1\right)-\left(x^{n/2}-1\right)}{\left(x^{n/2}+1\right)\left(x^{n/2}-1\right)}dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{du}{u^{n/2}-1} - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{x^{n/2}-1}}_{=0} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{x^{n/2}+1} = \left| \begin{array}{c} x^{n/2}=t,\, x=t^{2/n} \\ dx=\frac{2}{n}t^{2/n-1} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{t^{2/n-1}}{t+1}dt = \int_0^\infty \frac{t^{2/n-1}\,dt}{(t+1)^{2/n+1-2/n}} = \frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{2}{n}, 1-\frac{2}{n}\right) = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right) = \frac{\pi}{n\sin(2\pi/n)}.$$



$$I(5) = \frac{\pi}{5\sin(2\pi/5)} = \frac{2\pi}{5\sqrt{2+\Phi}} \approx 0{,}6607$$

$$I(10) = \frac{\pi}{10\sin(2\pi/10)} = \frac{\pi}{5\sqrt{2-\phi}} \approx 0{,}5345$$

Квадратные корни совпадают с предыдущей задачей. Попытки можно считать удачными. Далее, по аналогии с тяжелой атлетикой, перейдем к завершающему рывку.

Попытка № 5. Рассмотрим две функции (рис. 1) из "безумного" интеграла [9], которые дают одинаковые значения определенных интегралов на интервале $x \in [0, \pi/2]$:

$$f_s(x) = \frac{\sin x}{\sin^5 x + \cos^5 x}, \qquad f_c(x) = \frac{\cos x}{\sin^5 x + \cos^5 x}. \tag{3}$$

Эквивалентная замена $\sin x \leftrightarrow \cos x$ непосредственно следует из особого свойства определенных интегралов или королевского правила – *king's rule*:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x) + f(a+b-x)]dx;$$

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x, \cos x)dx = \int_0^{\pi/2} f[\sin(\pi/2 - x), \cos(\pi/2 - x)]dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x, \sin x)dx.$$

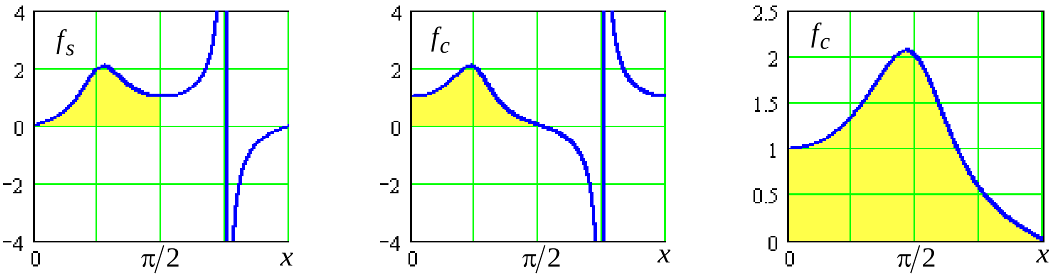


Рис. 1. Исходные тригонометрические функции для интегрирования

Степени в исходных функциях (3) перекликаются с монографией нашего соавтора Андрея Ковалева «В поисках пятого порядка» [10], которая посвящена проявлениям закономерностей золотого сечения и симметрии пятого порядка в различных областях знаний.

Впрочем, чего его искать, поди, не клад, но красивый художественный образ.

Скорее речь идет о выявлении-обнаружении, ибо пятый порядок повсюду и кругом. Нужно только внимательно присмотреться.

Плюс немного фантазии, воображения. Ну, и конечно, везения. Без него никак.

Многие ходят вокруг да около, только госпожа удача улыбается не всем. *C'est la vie*...

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{\sin^5 x + \cos^5 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sin^5 x + \cos^5 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^4 x\,dx}{\mathrm{tg}^5 x + 1} = \left| \begin{matrix} t = \mathrm{tg}^5 x,\ \sec^2 x = 1 + \mathrm{tg}^2 x \\ dt = 5\mathrm{tg}^4 x \sec^2 x\,dx \end{matrix} \right| = \int_0^{\infty} \frac{1 + t^{2/5}}{1+t} \frac{dt}{5t^{4/5}} =$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{\infty} \frac{t^{-4/5}}{1+t}dt + \frac{1}{5}\int_0^{\infty} \frac{t^{-2/5}}{1+t}dt = \frac{1}{5}\int_0^{\infty} \frac{t^{1/5-1}}{1+t}dt + \frac{1}{5}\int_0^{\infty} \frac{t^{3/5-1}}{1+t}dt = \frac{\pi}{5}\left(\frac{1}{\sin \pi/5} + \frac{1}{\sin 3\pi/5}\right) = \tag{4}$$

$$= \frac{\pi}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(\Phi/2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(\phi/2)^2}}\right) = \frac{2\pi}{5\sqrt{5}}\left(\sqrt{1+\Phi^2} + \sqrt{1+\phi^2}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{5}\pi \cdot \frac{\Phi}{\sqrt{1+\phi^2}}}}.$$

Здесь применяется интеграл $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx = \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi m/n)}$ [11], для нахождения которого используется бета-функция $\mathrm{B}(a,b)$ и связанная с ней гамма-функция $\Gamma(z)$ с её формулой дополнения $\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{1+\left(x^m\right)^{n/m}} = \left|\begin{matrix} u = x^m \\ du = mx^{m-1}dx \end{matrix}\right| = \frac{1}{m}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^{n/m}} = \left|\begin{matrix} u^{n/m} = \mathrm{tg}^2\theta,\ u = \mathrm{tg}^{2q}\theta,\ \underline{q = m/n} \\ du = 2q\cdot \mathrm{tg}^{2q-1}\theta \sec^2\theta\, d\theta \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{m}\frac{2m}{n}\int_0^{\pi/2} \mathrm{tg}^{2q-1}\theta\, d\theta = \frac{2}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2q-1}\theta \cos^{1-2q}\theta\, d\theta = \frac{1}{n}\cdot \mathrm{B}(q,\ 1-q) = \frac{1}{n}\cdot\frac{\Gamma(q)\,\Gamma(1-q)}{\Gamma(1)} = \underline{\underline{\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{\sin \pi q}}}.$$

Итак, результат интегрирования $\frac{2}{5}\pi\cdot\frac{\Phi}{\sqrt{1+\phi^2}}$ состоит из двух сомножителей, которые непосредственно связаны с характерными углами правильного пятиугольника (рис. 2):

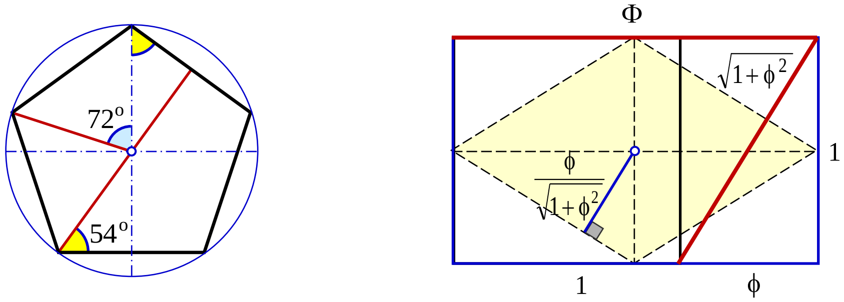


Рис. 2. Иллюстрация связи определенного интеграла с характерными параметрами правильного пятиугольника и золотого прямоугольника

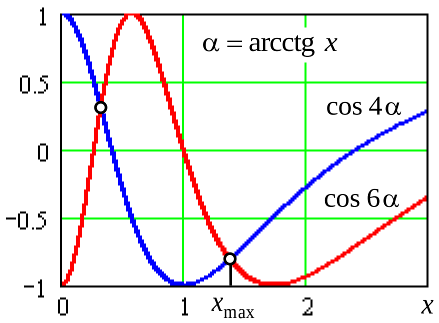
– $2\pi/5 \to 72^\circ$ – центральный угол (в радианах) правильного пятиугольника;

– параметр $p = \frac{\Phi}{\sqrt{1+\phi^2}} = \frac{\Phi^2}{\sqrt{1+\Phi^2}} = \sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}} = \mathrm{tg}\,\frac{3\pi}{10} = \mathrm{tg}\,54^\circ \approx 1{,}3764$.

Кроме того, величина p имеет другие проявления [12]:

- отношение отрезков в золотом прямоугольнике: большей стороны – к диагонали меньшего прямоугольника после отрезания от исходного единичного квадрата;
- наибольшее положительное решение тригонометрического уравнения

$$\cos\left(4\ \mathrm{arctg}\ x^{-1}\right) = \cos\left(6\ \mathrm{arctg}\ x^{-1}\right);$$



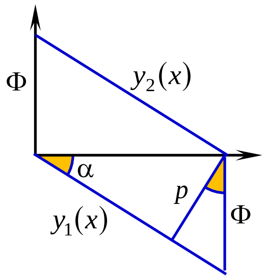
$\alpha = \mathrm{arctg}\ x^{-1} \ \to\ \cos 6\alpha - \cos 4\alpha = -2\sin\alpha\,\sin 5\alpha = 0;$

$\sin 5\alpha = 0,\ \ \alpha = \frac{\pi n}{5};$

$x^{-1} = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{5},\quad x_{\max} = \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{5} = \sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}.$

$x^{-1} = \mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{5},\quad x = \mathrm{ctg}\,\frac{2\pi}{5} = \sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$

- предельное значение расстояния между линиями $y_1(x)$ и $y_2(x)$:



$$\begin{vmatrix} F_n x + F_{n+1} y_1 = 0\,, \\ F_n x + F_{n+1} y_2 = F_{n+2} \end{vmatrix} \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} y_1 = -F_n x / F_{n+1} = -\phi x\,, \\ y_2 = (F_{n+2} - F_n x)/F_{n+1} = \Phi - \phi x \end{vmatrix}$$

F_n – числа Фибоначчи

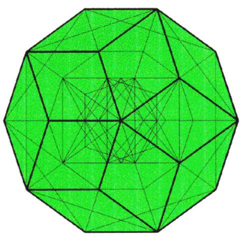
$$\operatorname{tg} \alpha = |-\phi| = \frac{\sqrt{\Phi^2 - p^2}}{p} \;\to\; p = \frac{\Phi}{\sqrt{1+\phi^2}}\,;$$

- радиус сферы, которая вписана в выпуклый ромботриаконтаэдр или ромбический 30-гранник с единичной длиной ребра, касаясь всех его граней.

На последнем многограннике остановимся подробнее.

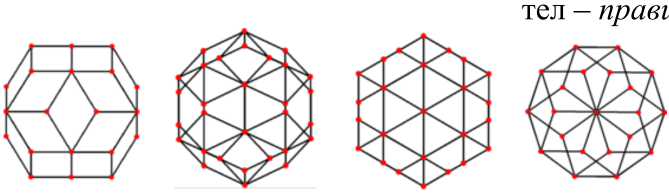
Ромбический 30-гранник

Общие сведения. Ромбический триаконтаэдр (префикс триаконта- означает 30, -эдр – грань) имеет замкнутую выпуклую поверхность, составленную из 30 одинаковых золотых ромбов, диагонали которых находятся в отношении золотого сечения 1:Φ [13].



Относится к одному из 13 полуправильных каталоновых тел (двойственных архимедовым): имеет конгруэнтные грани, переводимые друг в друга сдвигом, вращением или отражением, равные двухгранные углы и правильные многогранные углы.

Если грани каталоновых тел – *одинаковые неправильные* многоугольники, то грани архимедовых тел – *правильные неодинаковые* многоугольники.



Триаконтаэдр обладает четырьмя положениями симметрии: два с центром в вершинах и по одному в середине грани и в середине ребра.

Принято считать, что ромбический триаконтаэдр открыл Иоганн Кеплер.

Во всяком случае, именно так он его называет в своей знаменитой книге *Harmonices Mundi* – «Гармония мира» (1619). Хотя у него были предшественники (рис. 3), а сам он не определил, какие именно ромбы годятся для построения.

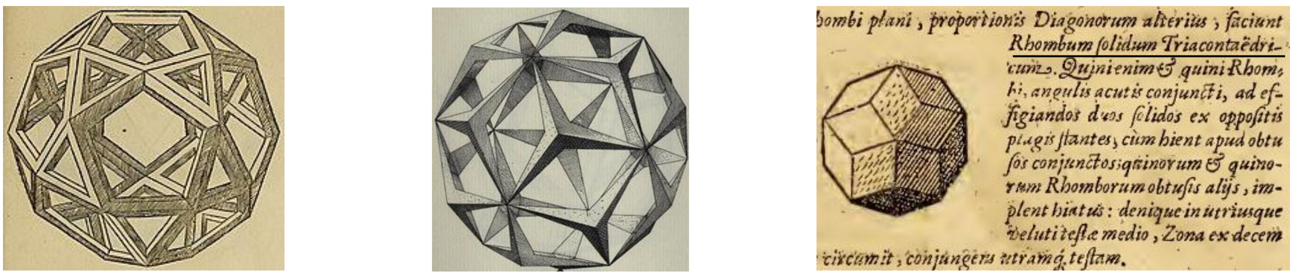


Рис. 3. Двойственные многогранники: икосододекаэдр (а) и ромбический триаконтаэдр (б, в) в работах авторов Нового времени:

а) Leonardo da Vinci, published in *Divina proportione*, Luca Pacioli, 1509;

б) Wenzel Jamnitzer, *Perspectiva Corporum Regularium*, 1568;

в) Johannes Kepler, *The Harmony of the World*, 1619.

Отличительные свойства триаконтаэдра.

1) Ромбический триаконтаэдр особенный, поскольку является одним из девяти выпуклых многогранников с транзитивными ребрами, остальные – пять Платоновых тел, кубооктаэдр (8_3+6_4), икосододекаэдр (20_3+12_5) и ромбический додекаэдр (12 ромбов с диагоналями $1:\sqrt{2}$). Многогранник является реберно-транзитивным (изотоксальным), если его симметрии действуют транзитивно на его ребрах, то есть имеется только один тип ребра: для двух ребер существует перемещение, вращение и /или отражение, которое перемещает одно ребро к другому, оставляя область, занятую объектом, неизменной.

2) Ромбический триаконтаэдр отличается тем, что охватывает в себе все пять (!) Платоновых тел – правильных многогранников в трехмерном евклидовом пространстве:

- вершины ромбовидного тела включают расположение 10 тетраэдров, 5 кубов, икосаэдра и додекаэдра;
- в центрах граней находятся вершины 5 октаэдров.

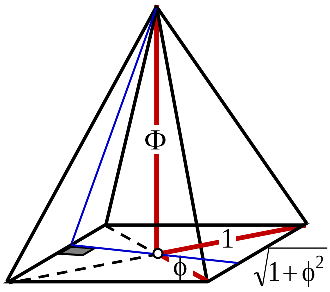
Короткие диагонали граней триаконтаэдра дают ребра додекаэдра, а длинные диагонали – ребра икосаэдра

Сборка. Ромботриконтаэдр можно разрезать-расчленить на:

20 золотых ромбоэдра: 10 острых и 10 тупых – это многогранники с шестью конгруэнтными ромбовидными золотыми гранями;

30 золотых ромбических пирамид, вершины которых проецируется в центр ромба.

Полудиагонали ромба с единичной стороной и высота пирамиды равны:



$$\frac{d_1}{2}=\frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\frac{\phi}{\sqrt{1+\phi^2}}\approx 0{,}5257;$$

$$\frac{d_2}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\phi^2}}\approx 0{,}8507;$$

$$p=\frac{\Phi}{\sqrt{1+\phi^2}}\approx 1{,}3764.$$

Высота пирамиды равна сумме полудиагоналей основания $(\Phi=1+\phi)$ и одновременно составляет с ними золотую пропорцию $\Phi:1 = 1:\phi$.

Противоположные боковые грани пирамиды сходятся под углом $2\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{\phi^2}{\sqrt{1+\phi^2}}=36^{\circ}$.

Пирамида Хеопса "отдыхает".

Это свойство положено в основу соединения ромбов Кеплером (рис. 4): собираются две чаши (створки раковины) в виде выпуклой пятиугольной звезды, дополненной ещё пятью ромбами, а между ними вставляется кольцо из десяти ромбов: $36\times 10=360^{\circ}$.

Двойственность. Дуальные (двойственные) многогранники имеют одинаковое количество ребер, при этом каждой грани (вершине) исходного многогранника соответствует вершина (грань) двойственного. Триаконтаэдр двойственен икосододекаэдру [14] (икосо – 20, додека – 12, эдр – грань). – Это "квазиправильный" многогранник (архимедово тело) с 32 правильными гранями (20_3 +12_5): 20 треугольников + 12 пятиугольников.

Если длина рёбер $a=1$, то радиус описанной сферы, проходящей через все его вершины равен константе золотого сечения $R=\Phi$.

Икосододекаэдр с длиной ребра $a = 2$ можно расположить в центре декартовой системы координат так, что координаты его вершин являются всевозможными циклическими перестановками наборов чисел $(0,\ 0,\ \pm 2\Phi)$, $(\pm 1,\ \pm\Phi,\ \pm\Phi^2)$.

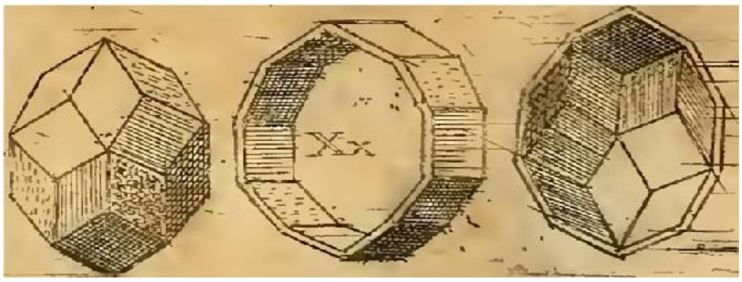


Рис. 4. Сборка триаконтаэдра (И.Кеплер, Гармония мира, 1619)

Замощение (паркет) – разбиение плоскости на многоугольники и/или пространства на многогранники без пробелов и наслоений.

Параллелоэдр – выпуклый многогранник, параллельным переносом которого можно покрыть евклидово пространство без пустот между собой.

В трехмерном пространстве существует ровно пять топологических типов параллелоэдров (Е.Федоров): куб, шестиугольная призма, ромбододекаэдр, удлиненный додекаэдр и усеченный октаэдр. Триаконтаэдра среди них нет.

Но аналогично плоским непериодическим мозаикам Р.Пенроуза с встроенными пятиугольными звездами, триаконтаэдры часто встречаются в пространственно-апериодических мозаиках Р.Амманна.

Физики обнаружили реальные квазикристаллы, имеющие формы триаконтаэдра.

Не случайно, открытый Кеплером правильный ромбический многогранник – триаконтаэдр по праву стал одним из символов современной кристаллографии.

Основные итоги.

Сдается, мы нащупали ещё одно замечательное проявление интегралов.

Помимо классического восстановления функции по её производной или нахождения площади под кривой, формульные выражения определенных интегралов могут иметь вполне реальные интерпретации-толкования в других разделах математики, в частности, геометрии.

Интегралы (2), (4) – характерные тому примеры.

Переплетаясь между собой, периодические волновые функции синусов и косинусов при интегрировании могут удивительным образом формировать-воспроизводить числовые значения параметров различных геометрических фигур, плоскостных и пространственных. Насыщать их новым и конкретным "физическим" содержанием, придавая дополнительный смысл-трактовку.

По сути, интеграл (4) сконцентрировал (сфокусировал) Платоновы тела посредством совокупности вершин и ребер триаконтаэдра с его особенной структурой на основе золотой пропорции. Только этот факт уже свидетельствует о фундаментальности золотого сечения.

Напомним, что Платоновы тела являются транзитивными по вершинам (изо<u>гон</u>альны), ребрам (изо<u>токс</u>альны) и граням (изо<u>эдр</u>альны).

Еще Теэтэт Афинский (3 век до н.э.) математически доказал, что правильных многогранников ровно пять! Ни больше и не меньше. – Своеобразный маркер окружающего нас трехмерного пространства. Не считая его искривлений.

Заслуживающая внимания разновидность гармонии в математике. – С главными "виновниками": π и Φ.

Вместо заключения.

Что казалось невозможным,
Стало вдруг легко и просто,
Прошагав путем несложным
Интегрального прироста.

Или как говорят у нас в народе: доро́гой пять, а прямо (навпростець) десять.

К слову, обратили внимание на обозначения в работе [14] $\phi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \Phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ – малое и большое золотое отношение.

В такой связке $\left(\phi, \Phi=\phi^{-1}\right)$ данные обозначения впервые стали использоваться в наших исследованиях.

Наиболее отчетливо они "прозвучали" в статье [15] 2009 года, и с тех пор неизменно сопровождают работы по "золотой" тематике.

Ранее подобные написания (φ, Φ) применял А.Савин [16].

Помнится, незабвенный профессор А.Стахов тогда культивировал написание этих констант через малопонятную литеру "тау" $\left(\tau^{-1}, \tau\right)$ [17, с. 26-28], которая так и не прижилась.

Похоже на то, что представители американского математического сообщества порой не гнушаются заглянуть на сайт АТ или его ретрансляции на других веб-ресурсах. – Окей!

Приложение

Нахождение определенных интегралов вида

$$I_0(n)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^n x+\cos^n x}, \quad I_1(n)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin^n x+\cos^n x}.$$

Напрашивается применение бета функции. Однако подходящей замены переменной найти не удалось. Поэтому ограничимся частными решениями.

1) Четные степени *n*. Для четных значений n применяется подстановка $t=\operatorname{tg} x$ с последующей оригинальной заменой $u=t-t^{-1}$, позволяющей существенно упростить выкладки. Можно также предварительно преобразовать знаменатель с использованием синуса двойного угла.

$$I_0(2)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}\approx 1{,}5708;$$

$$I_0(4)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}=\left|\begin{matrix} t=\operatorname{tg} x & \\ dx=\frac{dt}{1+t^2} & \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{2\,dt}{t^2+2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\infty}=\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\approx 2{,}2214;$$

$$1)\ \ I_0(6)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x-\left(\sin^2 2x\right)/4}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1-\frac{3}{4}\sin^2 x}=|t=\operatorname{tg} x|=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{4\,dt}{t^2+4}=4\,\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\bigg|_0^{\infty}=2\,\frac{\pi}{2}=\pi\,;$$

$$2)\ \ I_0(6)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}=\int_0^{\infty}\frac{t^2+1}{t^4-t^2+1}dt=\int_0^{\infty}\frac{1+t^{-2}}{t^2-1+t^{-2}}dt=\int_0^{\infty}\frac{1+t^{-2}}{\left(t-t^{-1}\right)^2+1}dt=$$

$$=\left|\begin{array}{c}u=t-t^{-1}\\ du=\left(1+t^{-2}\right)dt\end{array}\right|=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{u^2+1}=\operatorname{arctg} u\big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}=\pi\,;$$

$$1)\ \ I_0(8)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^8 x+\cos^8 x}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\frac{1}{8}\sin^4 x-\sin^2 x+1}=\int_0^{\infty}\frac{t^2+1}{\frac{t^4}{8}+t^2+1}dt=\frac{\pi}{2}\sqrt{10-\sqrt{2}}\,;$$

$$2)\ \ I_0(8)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^8 x+\cos^8 x}=\int_0^{\infty}\frac{\left(t^2+1\right)^3dt}{t^8+1}=\int_0^{\infty}\frac{\left(t^2+1\right)^3dt}{\left(t^4+1\right)^2-2t^4}=\int_0^{\infty}\frac{\left[\left(t-t^{-1}\right)^2+4\right]\left(1+t^{-2}\right)dt}{\left[\left(t-t^{-1}\right)^2+2\right]^2-2}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(u^2+4\right)du}{\left(u^2+2\right)^2-2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}-\frac{b}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{b}\right)\bigg|_{-\infty}^{\infty}+\frac{\sqrt{2}}{b}\operatorname{arctg}\frac{u}{b}-\frac{\sqrt{2}}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}\bigg|_{-\infty}^{\infty}=$$

$$\left\|\ (a,b)=\sqrt{2\pm\sqrt{2}},\quad ab=\sqrt{2},\quad a-b=ab^2=b\sqrt{2}\ \right\|$$

$$=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)+\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{b}-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}(a-b)+\pi(a-b)=\frac{\pi}{2}(a-b)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+2\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\frac{a-b}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2}\sqrt{10-\sqrt{2}}\approx 4{,}6027;$$

$$I_0(10)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^{10} x+\cos^{10} x}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\frac{5}{16}\sin^4 x-\frac{5}{4}\sin^2 x+1}=\left|\begin{array}{c}t=\operatorname{tg}\,x\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\quad \sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}\end{array}\right|=$$

$$=16\int_0^{\infty}\frac{\left(1+t^2\right)du}{t^4+12t^2+16}=\sqrt{5}\pi\,;$$

$$I_0(10)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^{10} x+\cos^{10} x}=\int_0^{\infty}\frac{2\left(t^2+1\right)^3}{t^{10}+1}=\int_0^{\infty}\frac{2\left(t^2+1\right)^3}{\left(t^5+1\right)^2-2t^5}=\sqrt{5}\pi\,.$$

***

$$I_1(2)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin^2 x+\cos^2 x}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2}=\frac{\pi}{4}\approx 0{,}78540\,;$$

$$I_1(4)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin^4 x+\cos^4 x}=\left|\begin{array}{c}\dfrac{\times\ \sec^4 x}{}\\ \sec^2 x=\operatorname{tg}^2 x+1\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{(\operatorname{tg}^2 x+1)\sec^2 x}{\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^2 x+1}dx=\left|\begin{array}{c}t=\operatorname{tg}\,x\\ dt=\sec^2 x\,dx\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{t^2+1}{t^4+t^2+1}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1+t^{-2}}{\left(t-t^{-1}\right)^2+3}dt=\left|\begin{array}{c}u=t-t^{-1}\\ du=\left(1+t^{-2}\right)dt\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{u^2+3}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{3}}\right)_{-\infty}^{\infty}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{12}}\approx 0{,}9069\,;$$

$$I_1(6)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin^6 x+\cos^6 x}=\int_0^{\infty}\frac{t^2+1}{2t^4+t^2+2}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\left(1+t^{-2}\right)dt}{\left(t-t^{-1}\right)^2+5/2}=\left|\begin{array}{c}u=t-t^{-1}\\ du=\left(1+t^{-2}\right)dt\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{u^2+5/2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}u\right)_{-\infty}^{\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{10}}\approx 0{,}9935\,;$$

$$I_1(8)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\left(t^2+1\right)^3 dt}{\left(t^4+t^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\left[\left(t-t^{-1}\right)^2+3+1\right]\left(1+t^{-2}\right)dt}{\left[\left(t-t^{-1}\right)^2+3\right]^2}=\left|\begin{array}{c}u=t-t^{-1}\\ du=\left(1+t^{-2}\right)dt\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{u^2+3}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{\left(u^2+3\right)^2}\;=\;\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\frac{\pi\sqrt{3}}{18}\right)=\pi\frac{7\sqrt{3}}{36}\approx 1{,}0580\,;$$

$$I_1(10)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin^{10} x+\cos^{10} x}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\frac{5}{16}\sin^4 x-\frac{5}{4}\sin^2 x+2}=\sqrt{\frac{1+2\sqrt{34}}{3\cdot 34}}\;\pi\,.$$

2) Нечетные степени *n*.

Для нечетных (более неприятных) значений n используем метод замены переменной или стандартную подстановку $t=\operatorname{tg}\,x/2$:

$$I_0(1)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x+\cos x}=\int_0^{1}\frac{2dt}{-t^2+2t+1}=2\int_0^{1}\frac{dt}{2-(t-1)^2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arth}\left.\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right|_0^1=\sqrt{2}\,\operatorname{arth}\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 1{,}2465\,;$$

Для следующих интегралов выполним тригонометрические преобразования:

$$\underline{\sin^3 x+\cos^3 x}=(\sin x+\cos x)\underbrace{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}_{=1}-(\sin x+\cos x)\sin x\cos x=(\sin x+\cos x)\left(1-\frac{\sin 2x}{2}\right);$$

$$\underline{\sin^5 x+\cos^5 x}=\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)\left(\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{=1}\right)-\left(\sin^2 x\cos^3 x+\sin^3 x\cos^2 x\right)=$$

$$=(\sin x+\cos x)\left(1-\frac{\sin 2x}{2}\right)-(\sin x+\cos x)\frac{\sin^2 2x}{4}=(\sin x+\cos x)\left(1-\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin^2 2x}{4}\right).$$

$$I_0(3)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{(\sin x+\cos x)\left(1-\dfrac{\sin 2x}{2}\right)}=\left|\begin{array}{cc} u=x+\pi/4 & \\ du=dx & p=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 2x=-\cos 2u & \end{array}\right|=$$

$$=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{du}{\sqrt{2}\sin u\left(1/2+\cos^2 u\right)}=\left|t=\cos u\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-p}^{p}\frac{dt}{\left(1-t^2\right)\left(1/2+t^2\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{3}\int_{-p}^{p}\left(\frac{1}{1-t^2}+\frac{1}{1/2+t^2}\right)dt=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\operatorname{arth} t+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{2}\,t\right)_{-p}^{p}=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}\operatorname{arth}\frac{1}{\sqrt{2}}+\pi\right)\approx 1{,}8782\,.$$

$$I_0(5)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^5 x+\cos^5 x}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{(\sin x+\cos x)\left(1-\dfrac{\sin 2x}{2}-\dfrac{\sin^2 2x}{4}\right)}=\left|\begin{array}{cc} u=x+\pi/4 & c=\dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ du=dx & \end{array}\right|=$$

$$=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{du}{\sqrt{2}\sin u\left(1+\dfrac{\cos 2u}{2}-\dfrac{\cos^2 2u}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{du}{\sin u\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{(\cos 2u-1)^2}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{du}{\sin u\left(c^2-\sin^4 u\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{du}{\sin u\left(c+\sin^2 u\right)\left(c-\sin^2 u\right)}=\left|\begin{array}{cc} t=\cos u & p=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ dt=-\sin u & \end{array}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-p}^{p}\frac{dt}{\left(1-t^2\right)\left(c+1-t^2\right)\left(c-1+t^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{5}\left(\int_{-p}^{p}\frac{2\,dt}{1-t^2}-\int_{-p}^{p}\frac{dt}{c+1-t^2}+\int_{-p}^{p}\frac{dt}{c-1+t^2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{5}\left[2\operatorname{arth} t-\frac{\operatorname{arth}\left(t/\sqrt{c+1}\right)}{\sqrt{c+1}}+\frac{\operatorname{arctg}\left(t/\sqrt{c-1}\right)}{\sqrt{c-1}}\right]_{-p}^{p}=$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{5}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{2\sqrt{\phi^3}}{5}\ln\left(\Phi+\sqrt{\Phi}\right)+\frac{4\sqrt{\Phi^3}}{5}\operatorname{arctg}\sqrt{\Phi^3}\approx 2{,}6326\,.$$

$\operatorname{arth} z=\tanh^{-1} z=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+z}{1-z}$ – обратный гиперболический тангенс.

***

$$I_1(1)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\left|\begin{array}{ll} t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}, & dt=\dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{x}{2}dx \\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}, & \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right|=\int_0^1\frac{dt}{t+1}=\ln(t+1)_0^1=\ln 2\approx 0{,}6932\,;$$

$$I_1(3)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin^3 x+\cos^3 x}=\int_0^1\frac{\left(t^2+1\right)^2 dt}{3t^4+4t^3+1}=\frac{4}{9}\int_0^1\frac{dt}{3t^2-2t+1}-\frac{4}{9}\int_0^1\frac{dt}{t+1}+\frac{2}{3}\int_0^1\frac{dt}{(t+1)^2}+\frac{1}{3}\int_0^1 dt=$$

$$=\left[\frac{4}{9}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3t-1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{4}{9}\ln(t+1)-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{t+1}\right)+\frac{1}{3}t\right]_0^1=\frac{\sqrt{2}}{9}\pi-\frac{4}{9}\ln 2+\frac{2}{3}\approx 0{,}8523;$$

$$I_1(5)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin^5 x+\cos^5 x}=\int_0^1\frac{\left(t^2+1\right)^4 dt}{5t^8+16t^5+10t^4+1}\approx 0{,}9534.$$

Литература:

1. Жуков А.В. Вездесущее число "пи". – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 216 с.
2. Мир математики: в 40 т. Т.7: Хоакин Наварро. Секреты числа π. Почему неразрешима задача о квадратуре круга / Пер. с исп. – М.: Де Агостини, 2014. – 144 с.
3. Шумихин С., Шумихина А. Число Пи. История длиною в 4000 лет. – М.: Эксмо, 2011. – 192 с.
4. Ramanathan K.G. On the Rogers-Ramanujan continued fraction // Indian Academy of Sciences? 1984, T. 93(2), 67-77.
5. Василенко С.Л. Интегральное исчисление с константой золотого сечения. Части 1–3 // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. №№ 28676 (16.10.2023), 28705 (10.11.2023), 28731 (25.11.2023). – https://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm.
6. Интеграл из финала MIT Integration Bee 2023 / Hmath – 12.03.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=OGn0oG1q3pM.
7. Несобственный интеграл через вычеты ФКП / Hmαth, 05.12.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=dr7IaUNtZ0k.
8. MIT Integration Bee: Bro, Are you joking ? / Mathalysis Word, 09.2023. – https://www.youtube.com/watch?v=fZov2OJl03Q&t=12s.
9. Can you solve this crazy integral / Mathtmatics MI, 16.09.2022. – https://www.youtube.com/watch?v=yL92ML56GEQ.
10. Ковалев А.Н. В поисках пятого порядка. – 2018. – 458 с.
11. Integral (x^(m–1))/(1+x^(n)) / Mathtmatics MI, 06.01.2021. – https://www.youtube.com/watch?v=OnTn3R9_m1Q.
12. Sloane N.J.A. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, A019952. – https://oeis.org/.
13. Weisstein Eric W. Rhombic Triacontahedron / From MathWorld – A Wolfram Web Resource. – https://mathworld.wolfram.com/RhombicTriacontahedron.html.
14. John C. Baez. The Icosidodecahedron / Notices Amer. Math. Soc. 70 (2023), 821-823. – https://arxiv.org/pdf/2309.15774.pdf.
15. Василенко С.Л. Обобщенное уравнение гармонической пропорции. Теория и приложения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15325, 06.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321110.htm.
16. Савин А. Число Фидия – золотое сечение // Квант: – 1997. – № 6. – http://kvant.mccme.ru/pdf/1997/06/kv0697kaleid.pdf.
17. Стахов А., Слученкова А., Щербаков И. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. – СПб.: Питер, 2006. – 320 с.