

Деление пополам и золотая пропорция. Часть 21.

Физические задачи: электромагнетизм

Что такое сила тока? –

Это когда ума нет, а есть тока сила.

Существует распространенное суждение, что золотое сечение (ЗС) вносит в процессы гармонию. При этом чаще всего сосредотачивают внимание на понятии красоты. Хотя и весьма субъективно.

Представляется, это не главное. – Как некий бантик на надгробной плите.

Так, живые системы, структурированные на основе ЗС, могут быть сверх-устойчивыми, а значит, смертными. Совершая постоянную работу против уравнивания с окружающей средой, со временем они достигают внутреннего равновесия-совершенства. А за ним прекращение развития-движения и последующий прах.

То есть идеальное золотое сечение – достижение внутренней полной гармонии ... в сторону кончины. Почему и основано на медленно сходящейся непрерывной (цепной) дроби, являясь одним из самых "плохо" приближаемых иррациональных чисел.

Биологические процессы просто обязаны держаться несколько поодаль от затягивающего "поля" ЗС, которое "заглатывает" их как черная дыра.

Иначе наступает конец динамизму и развитию. А в итоге застывшие бранные останки.

Нечто похожее проявляется и в физических (неживых) системах. Только в них устойчивым является равновесное состояние, которое подвержено воздействию различных шумов и возмущений.

Отсюда идеальное золотое сечение в физике проявляется не так уж часто.

Но это скорее плюс в пользу ЗС, а не минус. Больше реальное достоинство, чем мнимый недостаток, и говорит о его чрезвычайной значимости. Появляться только в нужном месте, в нужный час, а не как вздумается. – Значит, так устроено природой!

III. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

3.1. Электростатическая потенциальная энергия.

Электрические заряды взаимодействуют друг с другом и с электрическим полем.

Любое взаимодействие описывается потенциальной энергией, которая для двух точечных электрических зарядов рассчитывается по формуле [31]:

$$U = k \frac{q_1 q_2}{R}, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon},$$

где R – расстояние между зарядами, $\epsilon_0 \approx 10^{-9}/(36\pi) \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная вакуума, ϵ – диэлектрическая проницаемость среды.

Обратим внимание на отсутствие модулей у зарядов. – Для разноименных зарядов энергия взаимодействия имеет отрицательное значение.

В приведенном выражении все величины входят симметрично, то есть безразлично, в какой последовательности собиралась система. Эта энергия не зависит от процесса, а лишь от состояния системы. То есть потенциальная энергия – это функция состояния системы. Нулевое значение берется при бесконечном удалении зарядов друг от друга.

Заметим также, что имеет место энергия системы или энергия взаимодействия, поэтому бессмысленно говорить, что какая-то часть этой энергии принадлежит одному из зарядов.

Собственная энергия каждого точечного заряда здесь не учитывается.

Потенциальная энергия системы точечных зарядов равна сумме потенциальных энергий всех парных взаимодействий. В частности, для трех зарядов она составляет

$$U = k \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right).$$

Рассмотри систему из трех разноименных равных по модулю коллинеарных зарядов (рис. 3.1) на одной прямой и определим их геометрическое расположение, при котором потенциальная электростатическая энергия системы равна нулю $U = 0$:

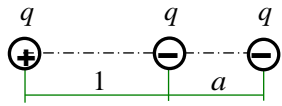


Рис. 3.1. Система разноименных зарядов

$$-\frac{1}{1} - \frac{1}{1+a} + \frac{1}{a} = 0 \rightarrow a^2 + a - 1 = 0.$$

$$\boxed{a = \phi, \quad 1 + a = \Phi},$$

где $\Phi = \phi^{-1} = (1 + \sqrt{5})/2$ – константа золотого сечения.

3.2. Взаимодействие точечного заряда и проводящей сферы.

Для расчета электростатического поля зарядов, расположенных вблизи проводящих сред с различными электрическими свойствами, применим метод <зеркальных> изображений – искусственный метод, позволяющий без громоздких вычислений находить распределение полей для симметричных задач.

Существующее поле в исследуемой области можно заменить адекватным полем двух точечных зарядов разного знака, отразив имеющийся заряд в сфере, как в зеркале.

Решение состоит в подборе фиктивных зарядов, совместное поле которых с реальными зарядами обеспечивает граничные условия, например потенциал на границе.

Поскольку внутри области заряды не изменились, найденное поле удовлетворяет уравнению Пуассона. По теореме единственности в электростатике других решений нет.

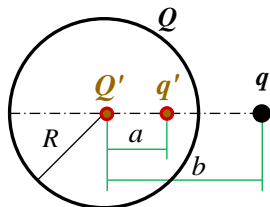


Рис. 3.2. Точечный заряд q и заряженная сфера Q : q', Q' – заряды-изображения

По сути дела метод изображений подгоняет потенциал под граничные условия адекватно задаче о точечных зарядах, у которой конфигурация поля в интересующей нас области пространства была бы той же.

Итак, точечный заряд q находится вблизи на расстоянии $b > R$ от центра изолированного (незаземленного) сферического проводника радиусом R и суммарным зарядом Q (рис. 3.2).

На основе закона Кулона и принцип суперпозиции полей суммарная сила взаимодействия F (притяжения-отталкивания) зарядов и потенциал сферы ϕ соответственно составляют:

$$F = k \left(\frac{qQ}{b^2} + \frac{q^2 R}{b^3} - \frac{q^2 b R}{(b^2 - R^2)^2} \right), \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon};$$

$$\phi = k \left(\frac{Q}{R} + \frac{q}{b} \right) = k \frac{Q'}{R}, \quad Q' = Q + q \frac{R}{b}.$$

Необходимые граничные условия в поле обеспечиваются за счет расположения двух фиктивных зарядов изображения: $q' = -qR/b$ – внутри оболочки и Q' – в центре сферы.

В частном случае равных зарядов $q = Q$ и нулевой силы $F = 0$ приходим к алгебраическому уравнению 5-й степени

$$x^5 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 = (x^3 + x^2 - 1)(x^2 - x - 1) = 0, \quad x = b/R > 1.$$

Поскольку $x^3 + x^2 - 1 > 0$, то $x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x = \Phi$.

Таким образом, сила взаимодействия между зарядом и сферой равна нулю, если точечный заряд $q = Q$ помещен на расстоянии $b = \Phi \cdot R$.

При этом потенциал сферы увеличивается в Φ раз: $Q' = Q \cdot \Phi$.

3.3. Сопротивление электрической цепи.

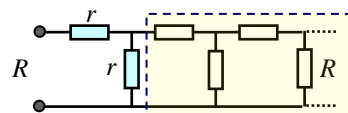
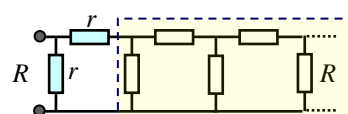
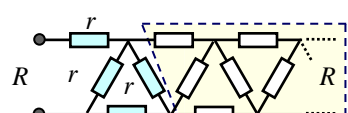
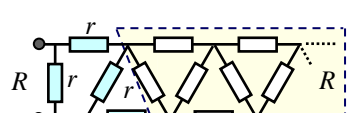
Рассмотрим однородные электрические цепи, состоящие из бесконечного числа одинаковых резисторов сопротивлением r каждый (рис. 3.3).

Схемы самоподобны, поэтому золотое сечение просто напрашивается. – Проверим.

Для определения эквивалентного сопротивления, равного сопротивлению всей цепи, традиционно выделяется общая ячейка (секция), которая бесконечно повторяется.

Поскольку цепь неограниченна, то удаление или прибавление такой ячейки не меняет общее сопротивление цепи: если R – сопротивление всей цепи, то сопротивление бесконечной цепочки без удаленной ячейки также равно R . – По аналогии с представлением золотой константы в виде бесконечной непрерывной (цепной) дроби.

Из законов последовательного и параллельного соединения проводников следует:

	$R = r + \frac{rR}{r + R}, \quad R^2 - rR - r^2 = 0,$	$R = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} r = \Phi \cdot r$
	$R = \frac{r(r + R)}{2r + R}, \quad R^2 + rR - r^2 = 0,$	$R = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} r = \phi \cdot r$
	$R = \frac{3r^2 + 5rR}{2r + 3R}, \quad R^2 - rR - r^2 = 0,$	$R = \Phi \cdot r$
	$R = \frac{3r^2 + 2rR}{5r + 3R}, \quad R^2 + rR - r^2 = 0,$	$R = \phi \cdot r$

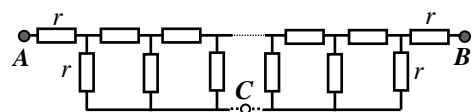


Рис. 3.3. Золотое сечение в электрических цепях с бесконечным числом резисторов

На большом удалении от клемм A и B данной цепи ток течет только по нижнему проводнику, поэтому её можно сверху разорвать и представить, как совокупность двух последовательных одинаковых цепей AC и CB [32, с. 27–28].

Сдвинув точку C влево, приходим к верхней цепи на рисунке. Значит, $R_{AB} = 2\Phi \cdot r$.

То есть сопротивление бесконечной цепочки соответственно в Φ раз больше или меньше сопротивления r одного резистора.

Последний вариант дает обычное удвоение.

В работе [33] принимаются во внимание также модули отрицательных корней характеристических квадратных уравнений, которым придается смысл выходных сопротивлений в обратном направлении передачи бесконечной цепи.

Обратим внимание на то, что не существует отрицательного сопротивления как физического свойства вещества. Просто отдельные электрические цепи в результате происходящих в них процессов могут вести себя так, как если бы их дифференциальное сопротивление было отрицательным. При этом в таких цепях обязательно находятся источники электрического тока, энергия которых и расходуется на поддержание происходящих в цепях процессов.

Если абсолютная величина r^- элемента меньше суммы r^+ остальных элементов цепи, то его роль сводится к частичной компенсации потерь в цепи. Если же r^- превышает эту сумму, то это означает, что состояние цепи неустойчиво и возможен переход в другое состояние устойчивого равновесия или возникновение колебаний.

r^- – это явление, свойство (эффект) или поведение системы. Отрицательных резисторов не бывает. Элемент электрической цепи с отрицательной движущей силой не потребляет энергию, а отдает её в цепь, то есть является активным элементом.

3.4. Сопротивление бесконечно-проволочной спирали.

Рассмотрим бесконечную спираль, состоящую из одинаковых сегментов – проволочных резисторов сопротивлением $r = 1$ каждый (рис. 3.4) и найдем эквивалентное сопротивление $R = R_{AB_\infty}$ между точками A и B_∞ .

В точке B_1 имеем последовательное соединение двух проводников. К ним параллельно присоединяется другой проводник и последовательно подключается следующий проводник, образуя точку B_2 . И так далее... В результате получаем:

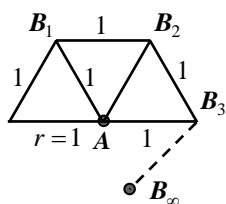


Рис. 3.4. Макет резисторной спирали

$$R_1 = R_{AB_1} = 2, \quad R_2 = R_{AB_2} = \frac{R_1 \cdot 1}{R_1 + 1} + 1 = \frac{5}{3}, \quad R_3 = \frac{R_2 \cdot 1}{R_2 + 1} + 1 = \frac{13}{8},$$

$$R_{n+1} = 1 + \frac{R_n}{R_n + 1} = 1 + \frac{1}{1 + 1/R_n}.$$

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow R = R_{n+1} = R_n, \quad R^2 - R - 1 = 0, \quad \boxed{R = \Phi}.$$

По сути, имеет место представление иррациональной константы золотого сечения Φ в виде непрерывной (цепной) дроби [34], состоящей из одних единиц:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

По мере продвижения по точкам B_n , промежуточные сопротивления $R_n = F_{2n+1}/F_{2n}$ определяются отношениями соседних чисел Фибоначчи.

3.5. Свободные электромагнитные колебания.

В электротехнике хорошо известен колебательный контур – простейшая электрическая цепь, содержащая последовательное или параллельное соединение конденсатора и катушки индуктивности, а также источник электрической энергии.

При отключении от источника в системе происходят свободные электромагнитные колебания с определенными частотами ω , за счет взаимных переходов электрической энергии от заряженного конденсатора в магнитную энергию катушки и обратно.

Несколько усложним схемы (рис. 3.5), соединив два конденсатора и две катушки.

Напряжение на идеальной катушке индуктивности при изменении тока: $U_L = L \frac{dI_L}{dt}$.

Ток через идеальный конденсатор при изменении напряжения: $I_C = C \frac{dU_C}{dt}$.

Индуктивное и емкостное сопротивления соответственно равны:

$$x_L = \omega L, \quad x_C = -\frac{1}{\omega C}.$$



Рис. 3.5. Электрические схемы:
а) высокочастотная цепь; б) низкочастотная цепь

По второму правилу Кирхгофа алгебраическая сумма напряжений на резистивных элементах в любом замкнутом контуре цепи равна нулю (при отсутствии источников электрической энергии):

$$\text{а) } L \frac{dI_1}{dt} + \frac{q_1 - q_2}{C} + \frac{q_1}{C} = 0, \quad L \frac{dI_2}{dt} - \frac{q_1 - q_2}{C} = 0;$$

$$\begin{cases} (v-2)q_1 + q_2 = 0, \\ (v-1)q_2 + q_1 = 0, \end{cases} \Rightarrow v^2 - 3v - 1 = 0, \quad v = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = (\Phi^2, \phi^2), \quad \text{где } v = \omega^2 \sqrt{LC}.$$

$$\boxed{\omega_1 = \frac{\Phi}{\sqrt{LC}}, \quad \omega_2 = \frac{\phi}{\sqrt{LC}}}.$$

$$\text{б) } L \frac{dI_2}{dt} + \frac{2q_1}{C} = 0, \quad L \frac{d(I_1 - I_2)}{dt} - L \frac{dI_2}{dt} = 0;$$

$$\frac{2q_1}{LC} - \omega^2 q_2 = 0, \quad \omega^2 q_1 - 2\omega^2 q_2 = 0 \rightarrow \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \frac{2}{\sqrt{LC}}.$$

Как видим, золотое сечение наличествует только в высокочастотной цепи.

Вместо заключения.

Подводя промежуточные итоги, хочу напомнить авторам и читателям о пользе конструктивной критики.

В отличие от социальной стигматизации (навешивания ярлыков, предубеждений и т.п.), она способствует поиску точек соприкосновения, объединению усилий и общему созиданию.

Позволяет вырабатывать единые подходы, обогащаться идеями и двигаться вперед.

Война – это всё преходящее (Л.Быков), временное. Золотое сечение – вечно.

Жизнь рассудит, время покажет, бог расставит всё на свои места.

Правосудие присуждает каждому своё (Цицерон).

Справедливость восторжествует! – Fiat iustitia, et pereat mundus. Окей.

To be continued...

Литература:

1. QiLin Xue. The Golden Ratio In High School Physics Problems. – August 8, 2020. – <https://physoly.tech/static/files/golden.pdf>.
2. Василенко С.Л. Центр масс плоских фигур в точках золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15957, 20.06.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/1661-vs.pdf>.
3. Василенко С.Л., Белянин В.С., Радзюкевич А.В. Центры масс однородных тел как аттракторы возвратных последовательностей (Фибоначчи, Трибоначчи ...) // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16023, 30.07.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161684.htm>.
4. Василенко С.Л., Белянин В.С., Радзюкевич А.В. Барисцентры-аттракторы в многомерных пространствах с приложением об эволюции Вселенной // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16061, 05.09.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161696.htm>.
5. David Morin. Introduction to Classical Mechanics with Problems and Solutions. – Harvard University, 2008. – 720 p. – <https://handoutset.com/wp-content/uploads/2022/07/Introduction-to-classical-mechanics-with-problems-and-solutions-David-Morin.pdf>.
6. Василенко С.Л. Деление пополам и золотая пропорция. Ч. 8. Треугольные формы // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28314, 30.01.2023. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165221.htm>.
7. Механика и теория относительности. Задачи и методы их решения: Учеб. пособие / Ю.Н. Колмаков, Ю.А. Пекар, В.А. Семин. – Тула: Тул. гос. ун-т, 2002. – 189 с. – https://cdn.bc-pf.org/resources/physics/problem_sets/TulGU_Mekhanika_i_teoriya_otnositelnosti.pdf.
8. Василенко С.Л. Последовательности кругов, вписанных в параболу, и золотая пропорция // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28133, 26.10.2022. – URL: <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165132.htm>.
9. Taylor J.R. Classical Mechanics. – California: University Science Books, 2005. – 800 p. – <https://neuroself.files.wordpress.com/2020/09/taylor-2005-classical-mechanics.pdf>.
10. Moorman C.M., Goff J.E. Golden ratio in a coupled-oscillator problem // European J. of Physics, 28 (2007), 897-902.
11. Ковалев А.Н. В поисках пятого порядка. – Ridero, 2023. – 398 с.
12. Хаджи П., Михайленко А. Маятник с несколькими грузами. – <http://kvant.mccme.ru/pdf/1998/03/kv0398khadji.pdf>.
13. Василенко С.Л. Разбиение целого на множество аддитивных пропорциональных частей // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22071, 06.05.2016. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162943.htm>.
14. Levien R.V. Double pendulum: An experiment in chaos // American J. of Physics, 61 (11), 1993, 1038-1044. – <http://itl7.elte.hu/~zsolt/Oktatas/Klab/AJP001038.pdf>.
15. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. – В 10 томах. Т. 1: Механика.– 4-е изд., испр. – М: Наука, Физматлит, 1988. — 216 с. – <https://kzf.kpi.ua/wp-content/uploads/2021/09/landau1.pdf>.
16. Малые колебания. 1. Линейные колебания: учеб. пособие / А.С. Ковалев, Е.В. Езерская, З.А. Майзелис, Т.С. Чебанова. – Х.: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2013. – 112 с.
17. Силагадзе З.К. Механика и теория относительности. Задачи семинарских занятий с решениями. – Новосибирск, 2-17. – 260 с.
18. Василенко С.Л. Деление пополам и золотая пропорция. Часть 8. Треугольные формы // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28314, 30.01.2023. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165221.htm>.
19. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т.1. Элементарная теория и задачи: 2-е изд. – М.: Наука, 1965. – 364 с.
20. Borges R.F. The phi code in nature, architecture and engineering // Design and Nature II, M.W. Collins & C.A. Brebbia (Editors), 2004 WIT Press, 401-409. – <https://www.witpress.com/Secure/elibrary/papers/DN04/DN04040FU.pdf>.
21. Саакян А.А. Влияние граничных условий на изгиб и устойчивость прямоугольных

пластин. Дис. ... кандидата физ.-мат. наук по спец. 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. – Ереван, 2018. – 103 с. – <https://etd.nla.am/7581/1/DissertaciaFull.pdf>.

22. Василенко С.Л., Ковалев А.Н. Золотые пропорции в арбелосе. Часть 1 // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28420, 07.04.2023. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165291.htm>.

23. Василенко С.Л. Золотая пропорция как ядро генома мироздания // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 12.07.2011. – <http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=30&sm=2> // АТ – М.: Эл. № 77-6567, публ.17099, 13.12.2011. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322080.htm>.

24. Cruz1 N., Olivares M., Villanueva J.R. The golden ratio in Schwarzschild–Kottler black holes // Eur. Phys. J. C 77, 123 (2017). – <https://d-nb.info/1127806769/34>.

25. Sigalotti L., Mejias A. The Golden Mean in Special Relativity // Chaos, Solitons & Fractals, 2006, 30.3, 521-524.

26. Leonardo Di G. Sigalotti, Antonio Mejias. The golden ratio in special relativity // Chaos, Solitons & Fractals. Vol.30, Issue 3, November 2006, 521-524.

27. Hendi S., Sharifzadeh M. Special Relativity and the Golden Mean // J. of Theoretical Physics, 2012, 1, 37-45.

28. Naschie M.S. The Hyperbolic Extension of Sigalotti-Hendi-Sharifzadeh's Golden Triangle of Special Theory of Relativity and the Nature of Dark Energy // J. of Modern Physics, 2013, 4 (03), 354-356. – https://www.scirp.org/pdf/JMP_2013032116194153.pdf.

29. Саврухин А.П. Золотое сечение и элементарные частицы // Лесной вестник, 1, 2003. С. 140-143.

30. Механика и теория относительности. Задачи и методы их решения: Учеб. пособие / Ю.Н. Колмаков, Ю.А. Пекар, В.А. Семин. – Тула: Тул. гос. ун-т, 2002. – 188 с.


31. Бобылев Ю.В. Электричество и магнетизм: Курс лекций. Ч. 1. Электростатика / Ю.В. Бобылёв, В.А. Панин, Р.В. Романов. – 2-е изд., испр. и доп. – Тула: Изд-во ТГПУ, 2016. – 140 с.

32. Задачи московской региональной олимпиады школьников по физике 2006 года. – М.: МЦНМО, 2007. – 56 с. – <https://olympiads.mccme.ru/mfo/20052006/mfo2006.pdf>.

33. Семенюта Н.Ф. К электрической модели золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17110, 16.12.2011. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322085.htm>.

34. Арнольд В.И. Цепные дроби. – М.: Изд-во МЦНМО, 2009. – 40 с. – <https://www.mccme.ru/free-books/mmmf-lectures/book.14-full.pdf>.

35. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник для бакалавров / Л.А. Бессонов. – 12-е изд., исправ. и доп. – М.: Изд-во Юрайт, 2016. – 700 с.

© ВаСиЛенко, 2023 
Украина, Харьков

