От "золотого" колодца Лотоса к фибоначчиевому ряду треугольников Кеплера

С.Л. Василенко

Контакт с автором: texvater@rambler.ru

Построена прямоугольная "золотая" трапеция, как вариант колодца Лотоса. Составлены соответствующие фибоначчиевы ряды-последовательности геометрических фигур.

Последовательность не возникает из ничего,
не исчезает и не остается бесследной...

Вступление

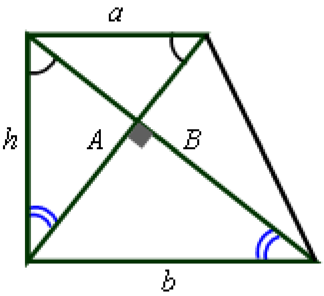
В работе [1] была предложена несложная задача, которая имеет прямую аналогию-интерпретацию в терминологии "колодца Лотоса" с его диаметром, скрещивающейся парой тростинок и уровнем живительной воды.

Решение достаточно простое и приводит, на наш взгляд, к любопытному результату. Как раз для коллаборации АТ (по В. Белянину), где разные часто с противоположными взглядами люди иногда способны организовать совместную деятельность типа "мозгового штурма". С их настроем и взаимодействием для обмена знаниями, обучения, достижения общей цели и взаимного согласия. Что невольно становится заметным дефицитом в стремительном беге нашей жизни.

Решение никто не представил. Возможно, на это повлияло падение интереса в связи с доказательством [1] геометрической неразрешимости задача Лотоса (1, 2, 3)...

Задача трапеции – Лотоса

Задача. Построить прямоугольную трапецию с перпендикулярными диагоналями, одна из которых равна основанию трапеции.



Заметим, что большая диагональ B всегда больше оснований трапеции a, b. Поэтому второе условие относится только к меньшей диагонали A, которая больше меньшего основания и может быть равной только большему основанию b.

То есть второе условие задачи равнозначно $A = b$.

Другая интерпретация задачи: построить "колодец Лотоса", в котором тростинки образуют прямой угол, а одна из них равна проекции другой на вертикаль.

Отметим на чертеже равные углы, образованные взаимно перпендикулярными лучами (сторонами).

Из равенства углов следует подобие прямоугольных треугольников со сторонами (a, h, A) и (b, h, B) и соответствующая пропорция $a/h = h/b$ или $h^2 = a{\cdot}b = A^2 - a^2 = b^2 - a^2$.

Итак, $ab = b^2 - a^2$ или $1 = b/a - a/b$. Обозначив $b/a = x$, приходим к квадратному уравнению $x^2 - x - 1 = 0$ с решением $x = \Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ – константа золотого сечения.

Таким образом, в исходной задаче основания трапеции составляют "золотое отношение" Φ. Данное свойство дает очевидную подсказку для геометрических построений.

Геометрическое решение задачи (рис. 1).

Проводим дугу единичным радиусом с центром вначале прямоугольных координат.

Любым приемлемым способом делим единичный отрезок золотым сечением.

Из точки золотого сечения $\phi = \Phi^{-1}$ восстанавливаем перпендикуляр до пересечения с дугой, и далее проводим горизонталь. Достраиваем трапецию и проводим диагонали.

Согласно построению меньшая диагональ равна большему основанию 1.
Тогда высота трапеции $\sqrt{\phi}$ и большая диагональ $\sqrt{\Phi}$.

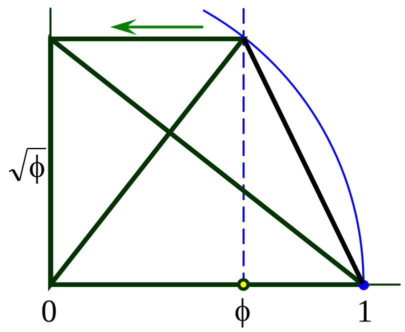


Рис. 1. Построение прямоугольной трапеции с перпендикулярными диагоналями, одна из которых равна основанию

Путем изменения масштаба данная задача легко приводится к любым параметрам относительно длин оснований и/или диагоналей геометрической фигуры.

Например, масштабирование относительно малого основания трапеции = 1 (рис. 2).

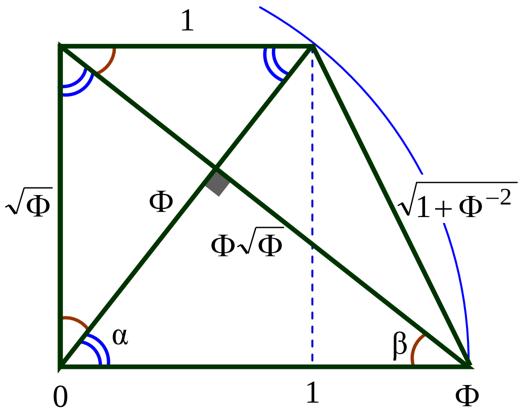


Рис. 2. "Золотая" трапеция
(параметры масштабированы относительно малого основания = 1)

Здесь единичный отрезок легко достраивается до константы золотого сечения Φ.

С центром в начале координат описываем дугу длиной Φ (нижнего основания трапеции). Из точки с абсциссой 1 восстанавливаем перпендикуляр до пересечения с дугой.

Остается только соединить точки до трапеции.

Независимо от масштабирования на обоих рисунках (рис. 1, рис. 2) представлены прямоугольные треугольники Кеплера, образованные общей высотой, основаниями и диагоналями. Они подобны, из чего следует равенство $\alpha + \beta = 90^{\circ}$.

Значит, диагонали трапеции перпендикулярны.

Запишем стороны прямоугольных треугольников (см. рис. 2), образованных сторонами и диагоналями трапеции, в порядке возрастания длин:

$$\left(1,\ \sqrt{\Phi},\ \Phi\right) \quad \text{и} \quad \left(\sqrt{\Phi},\ \Phi,\ \Phi\sqrt{\Phi}\right).$$

Второй из них имеет единичную высоту, опущенную из прямого угла на гипотенузу.

За счет этого произведение катетов численно равно гипотенузе.

Один автор АТ называет его "сакральным мета-треугольником" (имени самого себя).

В действительности, преувеличенная высокопарность и напыщенность.

Ничего сакрального или мета- (греч. *через, сверх*) не просматривается и близко.

Рядовой треугольник Кеплера, – один из бесконечного числа его реализаций.

Если приведенные рисунки развернуть на 90 градусов против часовой стрелки, то получим графическое отображение "колодца Лотоса".

Фибоначчиевы ряды геометрических фигур

В работах [2, 3] представлен фибоначчиевый ряд прямоугольных "золотых" треугольников. В его основе лежит прямоугольный золотой треугольник Кеплера K_0 с фиксированными сторонами $(\dot{a},\ \dot{b},\ \dot{c})=(1,\ \sqrt{\Phi},\ \Phi)$, где $\Phi=\phi^{-1}=(\sqrt{5}+1)/2$ – константа золотой пропорции. Фигура полностью определена тремя условиями: прямой угол, геометрическая прогрессия сторон со знаменателем $\sqrt{\Phi}$ и единичный малый катет $\dot{a}=1$.

Высота, проведенная из прямого угла, делит исходную фигуру так, что она и два образованных треугольника являются подобными. Это позволяет выстроить уникальный геометрический ряд треугольников K_n (рис. 3), где $n=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$ – целые числа нумерации объектов. Геометрические построения несложные.

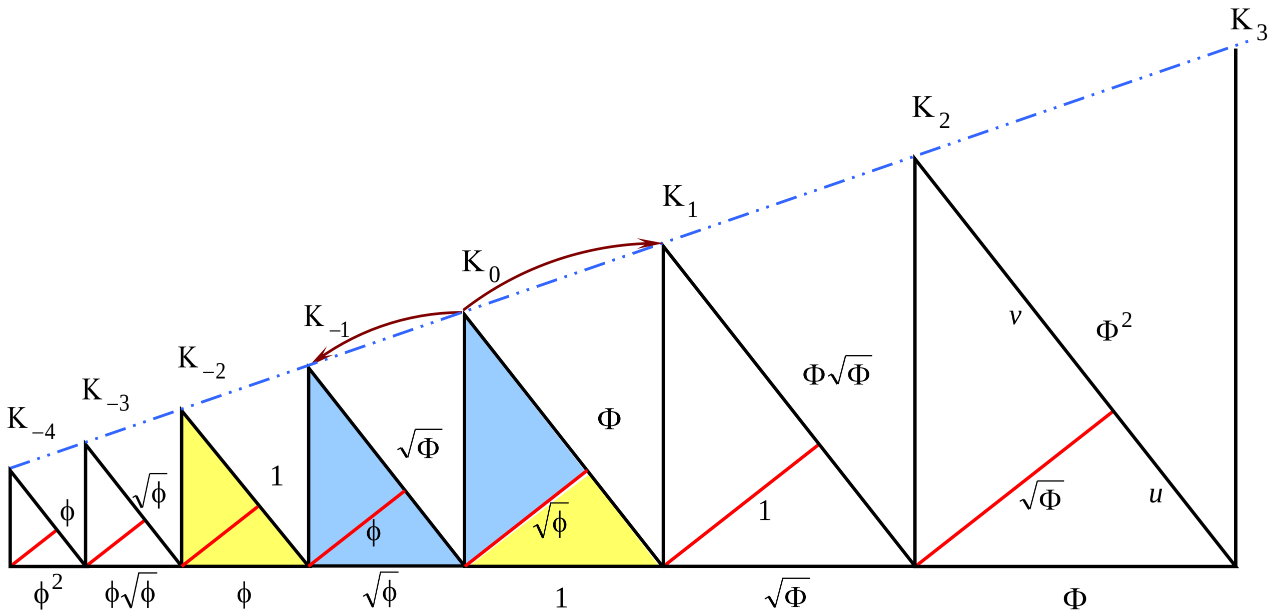


Рис. 3. Основной фибоначчиевый ряд Δ-Кеплера

Больший катет K_n поворотом циркуля переводится влево до пересечения с линией, параллельной исходной гипотенузе, и становится гипотенузой K_{n-1}.

Гипотенуза K_n поворотом циркуля переводится вправо до пересечения с перпендикуляром, становясь большим катетом K_{n+1}. И так далее, в оба направления.

Характерная особенность ряда: каждый последующий треугольник является составленным из двух предшествующих фигур с условной записью:

$$\mathrm{K}_{n+1}=\mathrm{K}_n+\mathrm{K}_{n-1} \quad \text{или} \quad \mathrm{K}_n=\mathrm{K}_{n+1}-\mathrm{K}_{n-1}.$$

Если сложить вместе треугольники K_n и K_{n-1}, то получим плоскую фигуру, равновеликую треугольнику K_{n+1}. То есть одинаковой площади.

В то же время выполняется отношение геометрического среднего $\mathrm{K}_n=\sqrt{\mathrm{K}_{n+1}\cdot\mathrm{K}_{n-1}}$.

Данный геометрический ряд бесконечный. В обе стороны.

Как в направлении безграничного роста-увеличения, так и беспредельного уменьшения.

Сформированное таким образом бесконечное множество треугольников образует четко выраженную геометрически-треугольную последовательность, которую мы назвали фибоначчиевым рядом золотых треугольников Кеплера. По принципу формирования двучленно-аддитивных числовых последовательностей Фибоначчи $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Если идти в направлении увеличения площадей, то меньший катет $\dot{a}$ (больший катет $\dot{b}$, гипотенуза $\dot{c}$) предшествующего треугольника становятся соответственно высотой (меньшим катетом, большим катетом) последующего треугольника:

$$\dot{a}_{n-1} = \dot{h}_n, \qquad \dot{b}_{n-1} = \dot{a}_n, \qquad \dot{c}_{n-1} = \dot{b}_n.$$

Замечательная особенность данного ряда – фрактальность и самоподобие!

Любая ограниченная последовательность треугольников одинаково проявляется и повторяется в большом и малом измерении. Причем в любом месте ряда.

В то же время каждая в отдельности фигура неповторима, – в смысле своих геометрических размеров и формульных соотношений между параметрами.

По мере увеличения чисел Фибоначчи их отношение с каждым шагом всё больше и больше приближается к золотой константе Φ.

Но никогда её не достигает. Только в пределе.

Фибоначчиевый ряд золотых Δ-Кеплера в данном контексте выглядит полнее и совершеннее: отношение площадей любой пары соседних треугольников всегда и строго равно золотой константе Φ.

Конечно, в общем случае можно выстроить похожий ряд произвольных треугольников с некоторым метрическим коэффициентом пропорциональности k. Отдельно взятые стороны при этом также образуют свои геометрические прогрессии, что хорошо известно из проективной геометрии.

Однако только фибоначчиевый ряд золотых Δ-Кеплера сохраняет геометрическую прогрессию сторон в каждой отдельно взятой геометрической фигуре.

В этом смысле он единственный (в своем роде) и, как целостное образование, является одновременно идеальным фрактальным объектом!

Совмещение сторон треугольников приводит к треугольно-образной спирали (рис. 4).

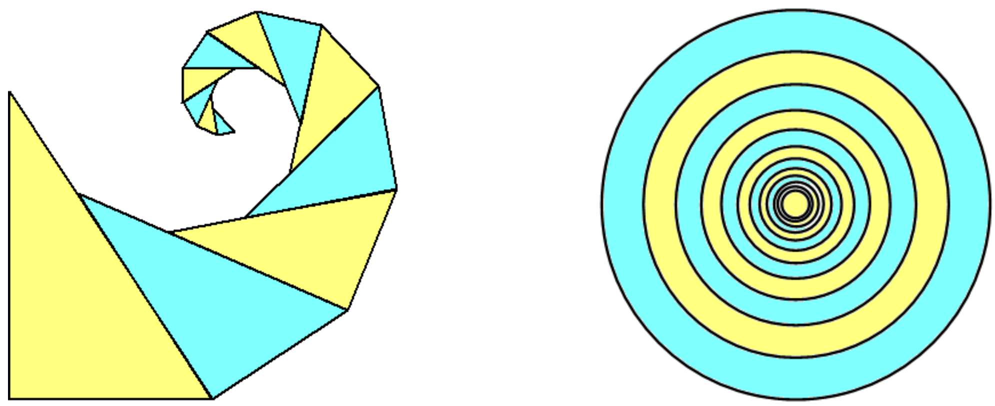


Рис. 4. Треугольно-образная спираль и концентрические окружности,
как символы развития согласно золотой модели Φ^n фибоначчиевого типа

Символом золотого сечения можно также считать круги [4] так, что площадь последующего круга равна сумме площадей двух предыдущих кругов.

Нечто похоже на игровую модель ускоренно расширяющейся "золотой" Вселенной.

Модифицированный фибоначчиевый ряд Δ-Кеплера

Повернутая "золотая" трапеция образует специфический колодец Лотоса с тростинками, пересекающимися под прямым углом. Как часть общей математической задачи (проблемы) с пересекающимися лестницами [5].

Организуя эти трапеции в последовательность, мы приходим к модифицированному фибоначчиевому ряду Δ-Кеплера (рис. 5).

Помимо треугольников в данном ряду хорошо просматриваются прямоугольники с соотношением сторон $1 : \sqrt{\Phi}$. Их площади в ряду соотносятся как $1 : \Phi^2 : \Phi^4 \ldots$

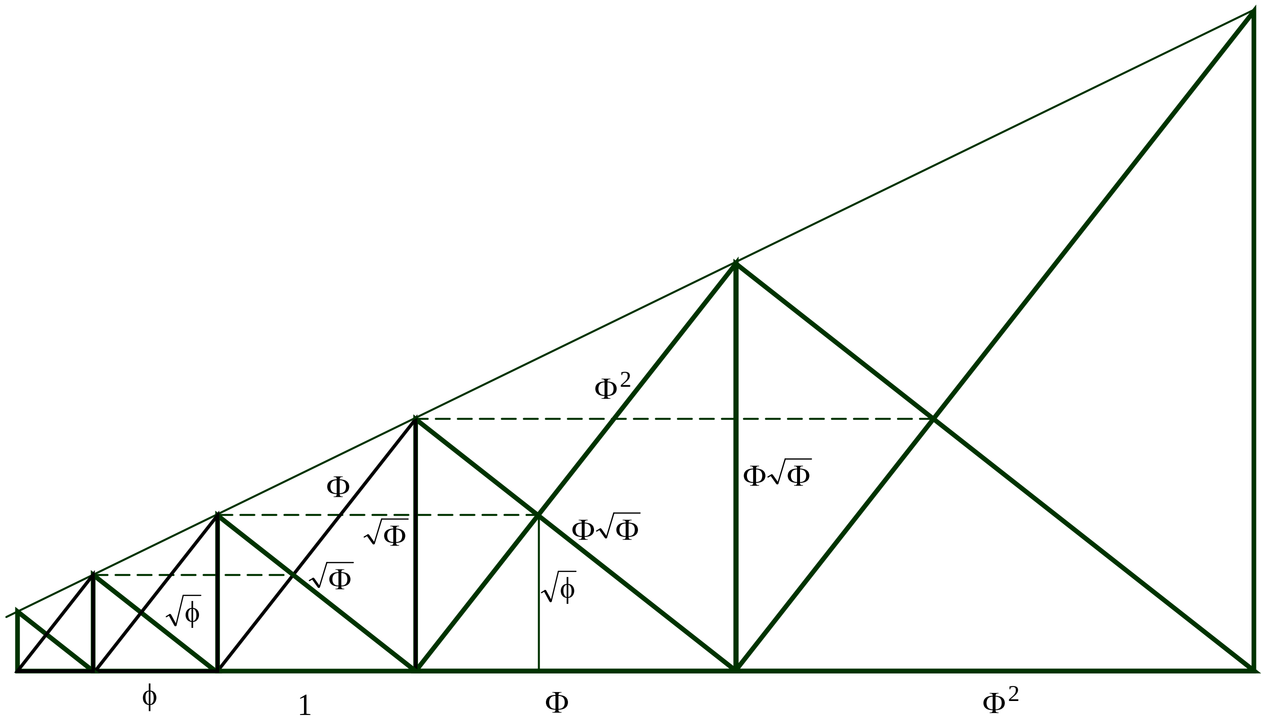


Рис. 5. Модифицированный фибоначчиевый ряд Δ-Кеплера

В основном фибоначчиевом ряде треугольников Кеплера (см. рис. 3) угол наклона касательной к вершинам треугольников составляет $\operatorname{arctg}\left(\Phi - \sqrt{\Phi}\right) \cdot 180/\pi \approx 19{,}1^{\circ}$.

Можно сказать, ничем не примечательный угол.

В модифицированном фибоначчиевом ряде (см. рис. 5) угол наклона касательной к вершинам треугольников равен $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\Phi} - \sqrt{\phi}\right) \cdot 180/\pi \approx 25{,}9^{\circ}$.

Этот угол уже более интересен. Он близок к углу $\operatorname{arctg}(0{,}5) \approx 26{,}6^{\circ}$.

По гипотезе А. Васильева [6] лазы пирамид первоначально служили наклонной плоскостью для транспортировки строительных блоков. Как простым механизмом для перемещения тяжелых предметов вверх без их непосредственного поднятия.

Для затаскивания тяжелых грузов этот угол близок к оптимальному [7, с. 46].

Двойной угол равен 2α = 52.

Конечно, это совпадение, но число 52 имеет любопытные интерпретации [8]:

- количество полных недель в земном году;
- значительное число в календаре майя;
- количество белых клавиш у большинства современных фортепиано;
- число карт в стандартной колоде, не считая джокеров;
- количество типографических букв в английском (латинском) алфавите и т.д.

Небольшой понятийный ликбез

1) Пропорция с одинаковыми средними членами вида $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$ в математике называется непрерывной или геометрической. Иногда пропорцию записывают как $c : b : a$.

Три элемента образуют геометрическую прогрессию.

Если принять дополнительное условие $c = a + b$, то приходим к золотой пропорции. Она связывает уже две величины и может быть разрешена через их отношение.

Обозначив $b/a = x$, получаем квадратное уравнение $x^2 - x - 1 = 0$ с положительным корнем $x = \Phi$.

То есть золотая пропорция – частный случай непрерывной (геометрической) прогрессии с отношением Φ. При этом величины $a + b$, b, a образуют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным Φ.

Сумму $a + b$ часто называют <составным> целым, хотя методологически это не верно. Элементы a, b имеют одинаковую меру, но могут иметь разную природу.

Наиболее точное определение золотой пропорции: *сумма двух величин так относится к одной из них, как она – к другой*.

Су четом свойств математической пропорции приемлем другой вариант, через разность: *одна величина так относится к другой, как она – к их разности*.

Как видим, здесь нет ни большего или меньшего, ни целого.

Далее идут разные эквивалентные интерпретации, например:

Сумма (целое) $c = a + b$	Большее b	Меньшее a
Большее $c = a + b$	Среднее b	Меньшее a
Большее b	Меньшее a	Разность $b – a$
Сумма целого и большего $1 + b$	Единичное целое 1	Большее b

2) Подобно золотой пропорции, в качестве дополнительного требования для непрерывной (геометрической) пропорции можно принять условие суммы квадратов $c^2 = a^2 + b^2$, по аналогии с теоремой Пифагора.

Соответствующая пропорция имеет вид $\frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{b^2}{a^2}$ – сумма квадратов двух величин так относится к квадрату одной из них, как он – к квадрату другой.

Решение пропорции дает отношение $\frac{c}{b} = \frac{b}{a} = \sqrt{\Phi}$.

Это и есть прямоугольный "золотой" треугольник Кеплера

Если в линейном случае бралась сумма величин $c = a + b$, то в плоскостном для прямоугольного треугольника участвуют уже квадраты $c^2 = a^2 + b^2$.

Соответственно, в первом случае отношение величин равно Φ, во втором – $\sqrt{\Phi}$.

Далее, в зависимости от назначения конкретных величин, получаем различные варианты-интерпретации прямоугольного треугольника Кеплера, коих насчитывается бесконечное множество. Главное их отличие: отношение сторон равно квадратному корню из константы золотого сечения $\sqrt{\Phi}$.

Стороны треугольника Кеплера равны $(a, b, c) = k \cdot (\sqrt{\phi},\ 1,\ \sqrt{\Phi})$, где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности или масштабирования. Стороны и высота h, опущенная из прямого угла на гипотенузу, образуют непрерывную пропорцию $c : b : a : h$ или геометрическую прогрессию с отношением (знаменателем прогрессии) $\sqrt{\Phi}$.

Высота делит треугольник на два треугольника, которые подобны между собой и исходной фигурой. Отношение их площадей равно Ф. Каждый из них снова можно разделить высотой на два таких же подобных треугольника. И так до бесконечности.

В некотором смысле можно говорить об их фрактальности.

Из равноправного определения площади любого прямоугольного треугольника следует равенство $a \cdot b = c \cdot h$.

При $h = 1$ или $c = 1$ произведение катетов численно равно гипотенузе или высоте. Если один из катетов равен 1, то другой численно равен произведению гипотенузы и высоты.

Конкретно в треугольнике Кеплера разные элементы, к примеру, можно полагать равными единицы и получать конкретные реализации (h, a, b, c)::

$$(\phi\sqrt{\phi},\ \phi,\ \sqrt{\phi},\ 1);$$

$$(\phi,\ \sqrt{\phi},\ 1,\ \sqrt{\Phi});$$

$$(\sqrt{\phi},\ 1,\ \sqrt{\Phi},\ \Phi);$$

$$(1,\ \sqrt{\Phi},\ \Phi,\ \Phi\sqrt{\Phi}).$$

По нашему мнению, суждения двух уважаемых авторов АТ – В. Говорова (о принципиальном различии божественной и золотой пропорции) и П. Сергиенко (о сакральном треугольнике, который де-факто является частным случаем треугольника Кеплера) – слабо аргументированы и выражают исключительно их личностную позицию.

Какое-либо их практическое и теоретическое продолжение под большим сомнением..

Общий посыл «я так хочу, и точка» в научном сообществе звучит не убедительно.

Фибоначчиевы структуры

Введенные нами фибоначчиевы ряды треугольников не одиноки в своем проявлении.

Например, существует понятие "фибоначчиевой кучи" – структуры данных в виде набора деревьев, упорядоченных в соответствии со свойством неубывающей пирамиды. Фибоначчиева пирамида, в частности, описана в фундаментальном труде по разработке и анализу алгоритмов, исследованию структур данных [9, гл. 20].

Фибоначчиева куча представляет собой семейство (набор) корневых деревьев и является реализацией абстрактного типа данных «очередь с приоритетом». Она построена по принципу: «дочерний элемент не превышает своего родителя». При этом элемент-родитель не хранит ссылки на всех своих потомков. Достаточно знать информацию только об одном из них. За счет этого легко выполняются многие операции: добавление нового *insert* или поиск минимального *min* элемента, объединение деревьев *union* и др.

Размышлизмы

Что мы находим в фибоначчиевых рядах треугольников? – Прежде всего, важную закономерность естественного превращения существенной нелинейности в линейность. Обычные числа Фибоначчи возрастают в степенной зависимости. Ряд треугольников геометрически выглядит строго линейным. Под одним углом к линии горизонта.

Здесь важна не столько количественная сторона (мера), сколько качественная.

Не случайно А. Лосев в свое время рассматривал гилетические числа, которые имеют качество, но не выражают количество.

Во многих моделях физического пространства (пространство Минковского и др.) мир представляется состоящим из событий, а не из частиц. При этом ряд последовательных событий допустимо рассматривать как идеальные или гилетические числа А. Лосева (греч. *hyle* вещество), а совокупность этих рядов – как гилетическое пространство [10].

К слову, Цицерон ввел слово *materia* как перевод греческого *hyle*.

Числа Фибоначчи (Люка) формируют нелинейно возрастающую последовательность, близкую к степенной зависимости Φ^n. Фибоначчиевы треугольники образуют линейный ряд. Без начала и конца. Можно сказать равномерно, согласно ходу времени. Теряясь где-то в глубине колодца Лотоса... Составляя некоторый союз «время – вода – пространство». При этом вода как символ жизни, текучести и непрерывности характеризует «чистую *реку воды жизни*, светлую, как кристалл, исходящую от престола Бога и Агнца» (Откр. 22:1).

Таким образом, в фибоначчиевом ряде треугольников нелинейность мирно "уживается" с линейностью. Это, пожалуй, наиболее главное и глубинное качество данного ряда.

Качество, которое нисколько не преуменьшается от бесконечного количества (множества) фрактальных треугольников.

Veritas vincit. – Истина побеждает...

Используемые источники:

1. Василенко С.Л. О мифологии и разрешимости задачи "колодец Лотоса" (crossed ladders) // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 23575, 24.07.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163362.htm.

2. Василенко С.Л. Фибоначчиевый ряд золотых треугольников Кеплера // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22546, 26.09.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163062.htm.

3. Василенко С.Л. "Золотая модель" как синтез прогрессий // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.23168, 20.03.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163242.htm.

4. Сахно В. Диалектика математических констант (Единого). – URL: sahno.trinitas.pro/.

5. Weisstein E.W. Crossed Ladders Problem. From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – URL: mathworld.wolfram.com/CrossedLaddersProblem.html.

6. Васильев А.А. К вопросу об исследовании пирамиды Хеопса: инженерно-технологический аспект // Вопросы истории естествознания и техники. – 1982. – № 4. – С. 87-96.

7. Кашницкий С. Загадки больших пирамид. – М.: ОЛМА-ПРЕС Звездный мир, 2006. – 287 с.

8. Wikipedia contributors. 52 (number). – Wikipedia, The Free Encyclopedia, 4 Sep. 2017. Web. 26 Sep. 2017

9. Алгоритмы: построение и анализ, 3-е изд.: Пер. с англ. / Т.Х. Кормен, И.Л. Чарльз, Л.Р. Рональд, К. Штайн. – М.: ИД "Вильямс", 2013. – 1324 с.

10. Кудрин В.Б. Ряд Фибоначчи – универсальный код Космоса // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.23515, 27.06.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163340.htm.

Харьков, Украина