Интегральные кривые непрерывной золотой пропорции

С.Л. Василенко

Контакт с автором: texvater@rambler.ru

Продемонстрировано схождение в одной точке всех отношений золотой непрерывной пропорции и любых разностей между ними. Построены соответствующие интегральные кривые для отношений с их общим узлом пересечения. Исследована их вариабельность на характерных участках. Показано дискретное изменение постоянной интегрирования для разных отношений пропорции. Приведено толкование золотого сечения в живом веществе, как точки абсолютной нежизненной гармонии.

Сначала неизбежно идут: мысль, фантазия, сказка. За ними шествует научный расчет, и уже, в конце концов, исполнение венчает мысль.

К. Циолковский.

Вступление

Сравнивая две работы [1, 2], которые разделяет без малого четверть века, можно заметить общее сходство в подходах к решению задач "золотоносной" направленности.

Во-первых, легко просматривается авторство основной идеи, положенной в основу обоих решений в виде формально-математических операций. Причем ранние построения [1] сводятся к обычному обозначению, – с заменой одних букв-символов другими.

Во-вторых, рассмотрены только отдельные частные решения, которые в представленных вариантах не подлежат дальнейшему обобщению в принципе. Хотя приемлемые варианты существуют, но они остались без внимания.

Мало рассмотреть один эпизод. Для большей убедительности и доказательности модель или алгоритм необходимо проверить на других частных случаях. Но лучше всего предложить метод (способ) решения, пригодный для общих условий.

В частности, наше отношение к «гиперболическим функциям Фибоначчи и Люка» (ГФЛ) с их принципиальной неустранимостью существенных недостатков изложено в ряде статей, например [3–8].

Сама возможность использования непрерывного аргумента в функции Фибоначчи не нова и конструктивно связана ещё с публикациями [9-12] 60-х годов Fibonacci Association. Непрерывная функция Фибоначчи характеризует колебательный режим с переменной амплитудой, которая в свою очередь описывается (моделируется) двумя непрерывными огибающими линиями: верхней и нижней.

Традиционно-классическая теория огибающих, вместо ГФЛ, позволяет на языке математики свободно оперировать не только с функцией Фибоначчи, но и её дальнейшими расширениями в пространстве алгебраических уравнений n-го порядка. В представлении-записи ГФЛ решение априори не обобщается далее формы $x^2 - px - 1 = 0$.

Статья [2] в этом плане более "продвинутая". Во всяком случае, она допускает обобщение и позволяет выйти на любопытные решения.

Постановка задачи

В отличие от [1], небольшую статью И. Ткаченко [2] мы отнесли к серии рационально-удачных примеров развития "золотоносной" тематики нестандартным способом [13]. Хотя к самому научному результату остались вопросы и некоторые претензии.

Ключевая идея Ткаченко о том, что «величина целого не обязательно должна быть постоянной, она изменяется во времени», достойна пристального внимания и обсуждения.

Всегда следует помнить, что любая модель, претендующая на высокий уровень обобщения, должна адекватно отражать максимум частных случаев или ситуаций.

Именно по ним в науке укрепляется доказательная база и обеспечивается апостериорное описание-воспроизводство физических объектов и процессов.

Если обнаруживаются примеры или случаи, выпадающие из общей логики модели, значит, в ней есть изъяны и неучтенности.

Надо продолжать искать. Вносить коррективы...

Четкое и завершенное решение затронутой им проблематики пока не найдено.

По нашему мнению, рассмотрение одного примера с записью золотой пропорции явно недостаточно.

Необходимо исследовать иные альтернативные варианты, применяя тот же подход [2], и уже далее выстраивать логические построения и делать выводы.

Анализ "динамической гармонии"

Основная идея статьи И. Ткаченко [2] сводится к формальному интегрированию обеих частей уравнения золотой пропорции $\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$ относительно x, где $x = x(t)$.

С точностью до константы данная операция приводит к равенству $\ln x = -x - \ln(x-1)$ или $x^2 - x - e^{-x} = 0$.

Конечно, этого мало.

Необходимо обязательно проверить, что нам дает данная операция для других эквивалентных записей золотой пропорции.

С учетом известных свойств математической пропорции её золотой аналог "разрастается" в бесконечную непрерывную пропорцию как влево, так и вправо:

$$\ldots = \frac{3x+5}{2x+3} = \frac{2x+3}{x+2} = \frac{x+2}{x+1} = \frac{x+1}{1} = \frac{1}{-x+1} = \frac{-x+1}{2x-1} = \frac{2x-1}{-3x+2} = \ldots . \qquad (1)$$

Отношения специально выстроены в порядке, который позволяет видеть в каждой соседней паре равенство средних элементов между собой.

В целом пара любых отношений составляет золотую пропорцию.

Как функции от x все они, пересекаются в общей узловой точке с координатами (ϕ, Φ), а разность между любой парой – соответственно в точке $(\phi, 0)$ (рис. 1), $\phi = \Phi^{-1} = (\sqrt{5}-1)/2$.

То есть для любых целых значений k, m выполняются равенства:

$$A_k(\phi) = \Phi, \qquad A_k(\phi) - A_m(\phi) = 0 ,$$

где отношение непрерывной пропорции (1) в общем случае выражается формулой:

$$A_k(x) = \frac{F_k x + F_{k+1}}{F_{k-1}x + F_k},$$

а индекс нумерации $k = 0$ соответствует отношению $1/x$.

Числа Фибоначчи F_k не обязательно выстраивать в рекуррентный ряд. Они легко определяются для всех целых значений k, включая отрицательные, по аналитической формуле Бине в явном виде

$$F_k = \frac{\Phi^k - (-\Phi)^{-k}}{\sqrt{5}} .$$

Реализация идеи

Найдем неопределенный интеграл функции $A_k(x)$ с точностью до константы, $k \neq 1$:

$$S_k(x) = \int A_k(x)\,dx = -\frac{F_k}{F_{k-1}}x + \frac{(-1)^k \ln\left|F_{k-1}^2 x + F_{k-1}F_k\right|}{F_{k-1}^2}.$$

При $k = 1$ число Фибоначчи $F_0 = 0$, поэтому данная формула не работает, хотя интеграл существует и равен $S_1(x) = x + x^2/2$.

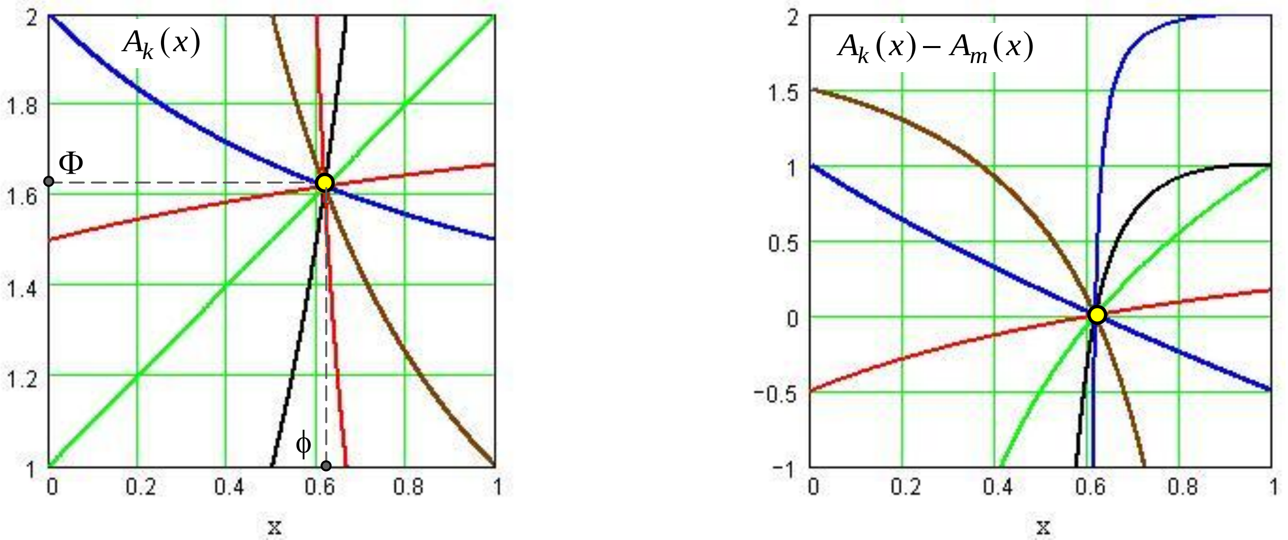

Рис. 1. Золотая непрерывная пропорция:
схождение в одной точке всех отношений и любых разностей между отношениями

Для лучшей визуализации приведем некоторые примеры отношений золотой пропорции и соответствующие им неопределенные интегралы (табл. 1).

Таблица 1

Отношения в золотой пропорции и соответствующие интегралы

k	$A_k(x)$	$S_k(x)$
–3	$\frac{2x-1}{-3x+2}$	$-\frac{2}{3}x - \frac{\ln(9x-6)}{9}$
–2	$\frac{-x+1}{2x-1}$	$-\frac{1}{2}x - \frac{\ln(4x-2)}{4}$
–1	$\frac{x}{-x+1}$	$-x - \ln(x-1)$
0	$\frac{1}{x}$	$\ln x$

k	$A_k(x)$	$S_k(x)$
1	$\frac{x+1}{1}$	$x + \frac{x^2}{2}$
2	$\frac{x+2}{x+1}$	$x + \ln(x+1)$
3	$\frac{2x+3}{x+2}$	$2x - \ln(x+2)$
4	$\frac{3x+5}{2x+3}$	$\frac{3}{2}x + \frac{\ln(4x+6)}{4}$

В отличие от сходящегося пучка отношений золотой пропорции (рис. 1), интегральные кривые (рис. 2) больше напоминают беспорядочное расположение-поведение.

О какой-либо закономерности говорить не приходится. Разве что они стремятся к двум прямым линиям при $k \to \infty$ (красная) и $k \to -\infty$ (черная).

Хаотичность особенно наглядно проявляется, если рассматривать различные варианты разности интегральных кривых $S_k(x) - S_m(x)$ для заданных параметров k, m (рис. 3).

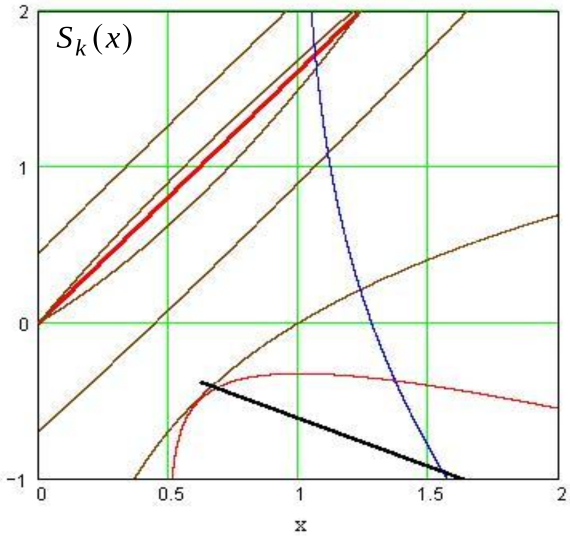

Рис. 2. Интегральные кривые для отношений золотой непрерывной пропорции

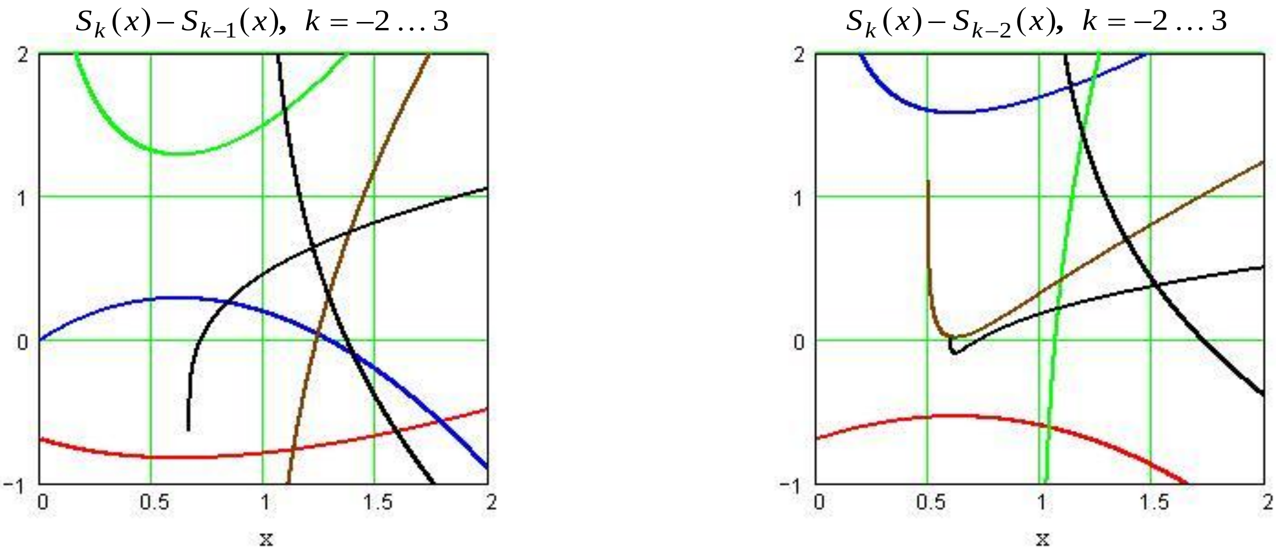

Рис. 3. Разности некоторых интегральных кривых

Итак, бесконечная непрерывная золотая пропорция (1) повсюду имеет одно решение $x = \phi$. Интегральные кривые линии (функции от x) путем подбора постоянных интегрирования можно также привести к одной узловой точке.

При этом постоянная интегрирования становится дискретной функцией от индексного параметра k и выражается формулой $C(k) = \Phi - S_k(\phi)$.

Скорректированные на константу интегральные кривые определяются равенством

$$\tilde{S}_k(x) = S_k(x) + \Phi - S_k(\phi).$$

Теперь все они пересекаются в одной узловой точке (ϕ, Φ) так, что $\tilde{S}_k(\phi) = \Phi$ (рис. 4).

На графике жирными прямыми линиями выделены такие предельные функции (линии):

- красная $k \to \infty$;
- черная $k = 2n \to -\infty$, четные значения;
- синяя $k = 2n+1 \to -\infty$, нечетные значения.

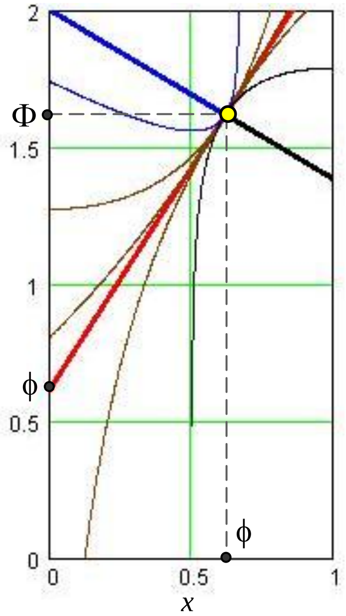

Рис. 4. Схождение в одной точке всех скорректированных интегральных кривых $\tilde{S}_k(\phi)$

Углы наклона красной и синей /черной/ линии к оси абсцисс соответственно равны: $\operatorname{arctg}\Phi \approx 58{,}3$ и $\operatorname{arctg}\phi \approx 31{,}7$ градусов. То есть они пересекаются под прямым углом.

Узел пересечения-взаимодействия интегральных кривых не обязательно поднимать над осью абсцисс.

Вполне допустимо расположить его непосредственно на оси. При этом формула для скорректированных кривых даже упрощается

$$\tilde{S}_k(x) = S_k(x) - S_k(\phi).$$

Любопытным является поведение функции $S_k(x)$ в двух характерных точках $x = 0$ и $x = \phi$ (рис. 5).

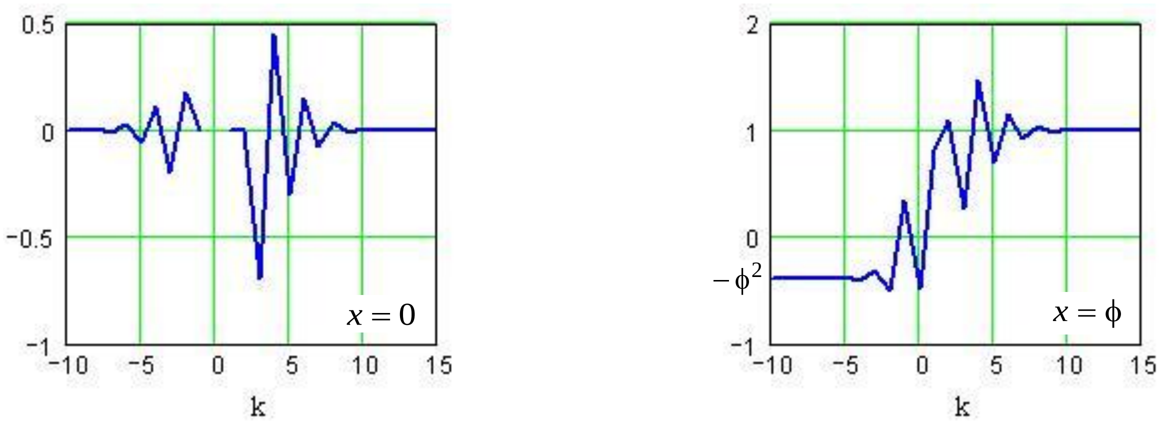

Рис. 5. Дискретное изменение функции $S_k(x)$ в характерных точках

В первом случае функция знакопеременна и стремится к нулю при больших значениях k в обе стороны. Во втором варианте пилообразное изменение начинается и заканчивается на асимптотах $-\phi^2$ и 1.

Соответственно постоянная интегрирования $C(k)$ варьирует также дискретно (рис. 6) от одной асимптоты 2 к другой ϕ. Причем зеркально по отношению к функции $S_k(\phi)$

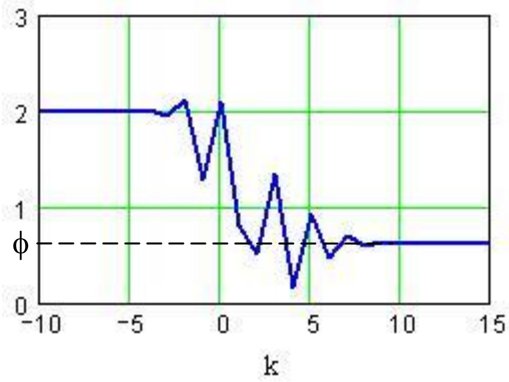

Рис. 6. Дискретное изменение постоянной интегрирования $C(k)$ для разных отношений k непрерывной золотой пропорции

Статика–динамика

Что нам дает формальное интегрирование отношений (1) непрерывной золотой пропорции? – С их последующим сведением к общей узловой точке с координатой, определяемой константой золотого сечения.

Прежде всего, небезынтересно поведение постоянной интегрирования по мере удаления либо приближения к основному "телу" или базису золотой пропорции

$$(x+1):1=1:x.$$

Данная форма принята нами основной, в виду её наиболее экономичного представления. Это единственная запись золотой пропорции, в которой искомый аргумент x фигурирует лишь два раза. Во всех иных случаях – три и более.

Плюс к этому присутствие трех единиц.

В математике неопределенный интеграл исходной функции сам является функцией.

По сути, интеграл восстанавливает первообразную функцию. Точнее их совокупность с точностью до произвольной константы.

С помощью операции интегрирования отношений золотой пропорции (ЗП) мы воспроизводим "природу" первообразных функций, дифференцирование которых приводит к самим отношениям.

В определенном смысле допустимо говорить о путях, по которым динамическая система способна придти или приходит к состоянию возможного динамического равновесия, определяемого константой ЗП.

Первое что бросается в глаза (см. рис. 5, левый) – это высокий уровень колебаний в базовой области ЗП. Форма колебательного процесса свидетельствует о значительной неустойчивости системы.

Причем максимум "амплитуды" приходится как раз на область, сопряженную с базовым отношением золотой пропорции.

Понятно, что такое динамическое поведение способно трансформироваться в серьезные резонансные проявления с вытекающими губительными последствиями для объекта.

В статике всё выглядит сравнительно просто и наглядно проявляется при геометрической интерпретации, с довольно легким делением отрезка и последующим переходом на построение правильного пятиугольника.

Решение квадратного уравнения $x^2 \pm x - 1 = 0$ также не вызывает затруднений.

Что касается динамики, в смысле характера возможного подхода к точке золотого сечения (ЗС), то многое пока остается невыясненным.

С какой скоростью система подходит к ЗС? С какой стороны, большей или меньшей? – Или одновременно с двух сторон одновременно, с дискретными перескоками.

Достижимо ли вообще ЗС? – Либо оно является только предельной асимптотой, движение к которой бесконечно...

Если ЗС присутствует в живых системах, как тогда задается механизм достижения ЗС? – Либо он существует изначально и априори заложен на уровне генетического кода.

Наиболее вероятно, что золотое сечение выступает как системный центр притяжения. Сама точка ЗС может быть блуждающей по мере развития целостной структуры. Постоянно "перекрашивается" в цвета квази-ЗС. – Не путать с понятием псевдо-ЗС и его искусственными подгонками под желаемый результат во многих публикациях.

То есть время от времени система покидает "золотой" центр и снова к нему возвращается. Одновременно проявляя свойства точек излома и бифуркации.

Чтобы снова не сесть на подводные рифы...

Принципиальной ошибочности в статье [2] нет!

Совершенно не возбраняется выполнить формальное интегрирование обеих частей уравнения ЗС $1/x = x/(1-x)$ относительно аргумента x, что собственно и делает Ткаченко. Грубых ошибок мы также не находим.

На наш взгляд, ему не нужно было акцентировать внимание на форме $x = x(t)$, поскольку интегрирование всё равно осуществляется относительно x. Безошибочно!

А далее, уже удобным способом, можно интерпретировать полученные первообразные функции, в том числе с точки зрения возможной динамики подхода к точке их пересечения.

То есть необязательный в записи параметр времени t сбивает с толку неподготовленного читателя. Конечно, это авторский недочет.

Но кто захочет увидеть-понять главную мысль-идею в общей концепции статьи, тот её отыщет. Кто не захочет, будет под микроскопом выискивать технические погрешности.

Коммуникативная связь в системе «критикующий – критикуемый»

На эту тему существует немало специальной литературы и обзоров. Повторяться нет надобности. Рассмотрим лишь один частный пример в контексте затронутой темы.

Так, на фоне критики статьи [2] с акцентом на "грубые ошибки" (?) проф. А. Шелаев в работе [14] систематизирует свои ранние исследования по геометрической интерпретации золотого сечения на примере отношения длин двух отрезков, точка сопряжения которых движется по окружности.

Для характерных частных случаев приводит красивые примеры.

Однако здесь любопытно другое.

До этого он всегда говорил исключительно о *системной гармонии* в математических и физических объектах, – по одноименному учебному курсу и новому научному направлению, с его же слов. Смотри также авторские проекты № 14-01-00753 и № 17-01-00715.

Теперь же довольно неожиданно речь пошла о *динамической системной гармонии* по прямой аналогии с критикуемой работой.

Но без ссылки на исходный термин. Как бы уже от себя.

По сути, в понятие динамической гармонии (И. Ткаченко), включая эволюционное спирально-циклическое развитие (А. Субетто, Р. Коэн и др.), вставлено дополнительное слово "системной". Хотя, строго говоря, совсем не обязательное уточнение. Даже лишнее.

Оно может подразумеваться по умолчанию либо охарактеризовано (дополнено) в конце: *динамическая гармония* объекта, системы, организации, комплекса и т.п.

В результате становится не ясным, что имеется в виду под «динамической системной гармонией». Часто под этим понимается мелодия как звуковой образ гармонии, отражающий движение целостной системы. Сдается, автор имеет в виду нечто другое.

Тогда, по меньшей мере, необходимы соответствующие разъяснения. Одной математики здесь явно недостаточно.

Вначале статьи он дает установку на динамическую системную гармонию, как «некоторые комбинации базовых параметров системы», например, равные константе золотого сечения $\Phi = \phi^{-1}$ «при изменении во времени некоторых "свободных" параметров системы». Однако в самой модели временной фактор отсутствует [15].

Что конкретно и как изменяется во времени, пока остается загадкой.

Размышлизмы...

Надо полагать, что живые объекты, которым свойственны признаки золотой пропорции, в действительности "опасаются" попасть в область, непосредственно приближенную к точке золотого сечения (ЗС).

Для них это как абсолютный температурный ноль.

Стагнация. Потеря внутрисистемных связей. Ослабление и нарушение структуры.

В конечном счете, новое неизведанное состояние, именуемое смертью. Как полнейшая идиллия или совершенная гармония.

Но оцепеневшая. С мертво-застывшим "выражением лица".

В то же время, находясь невдалеке от точки ЗС, система чувствует себя спокойной, уверенной и жизненной. Она более устойчива и не подвержена факторам, разрывающим связи и структуру живого организма. В прямом и переносном смысле слова.

На наш взгляд, *динамическая гармония Ткаченко* позволяет количественно оценить риск-опасность близкого вовлечения в непосредственную зону ЗС.

С потерей всех степеней свободы и фактическим превращением в "живую мумию".

То, что красиво выглядит в геометрии, вовсе не становится адекватным описанием в живом веществе (по Вернадскому) с его постоянной динамикой, изменением и развитием.

Попадая в непосредственную близость к точке ЗС, как зону абсолютного равновесия, динамика или динамическая гармония живого заканчивается.

Начинается "вечный покой" или "неизменная статика" с её мертвой хваткой, от которой ещё никто не избавлялся и назад не возвращался...

Именно такая картина нам представляется. В движении системы по первообразным функциям (см. рис. 4) к их совместному слиянию-объединению в золотом узле – точке абсолютной нежизненной гармонии. Как в конечном пункте назначения.

Memento mori...

Литература:

1. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи // Доклады Академии наук УССР. – 1993. – Т. 208, № 7. – С. 9-14.

2. Ткаченко И.С. Моделирование динамической гармонии // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.23659, 23.08.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163393.htm.

3. Василенко С.Л. Гиперболические лабиринты на пути к гармонии // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15513, 06.09.2009. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161539.htm.
4. Василенко С.Л. Стилистический ряд индуцированных отклонений. Часть третья // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15565, 29.09.2009. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161550.htm.
5. Василенко С.Л. О бедном квадрате замолвите слово... // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15675, 28.11.2009. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161586.htm.
6. Василенко С.Л. Гиперболические метаморфозы аддитивно-рекуррентных последовательностей // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16255, 27.12.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161750.htm.
7. Василенко С.Л. "Математика гармонии": на распутье // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17151, 28.12.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322104.htm.
8. Василенко С.Л. Золотоискательская болезнь гиперболичности // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.04.2012. – URL: artmatlab.ru/articles.php?sm=2&id=66/.
9. Halsey E. The Fibonacci number Fu where u is not an Integer // The Fibonacci Quarterly, **3.2** (1965), 147–152.
10. Elmore M. Fibonacci Functions // The Fibonacci Quarterly, **5.4** (1967), 371–382.
11. Parker F.D. A Fibonacci Function // The Fibonacci Quarterly, **6.1** (1968), 1–2.
12. Carlitz L. Some Generalized Fibonacci Identities // The Fibonacci Quarterly, **8.3** (1970), 249–254.
13. Василенко С.Л., Кашпур А.Д. "Резиновое" сечение // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.23685, 01.09.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163402.htm.
14. Шелаев А.Н. Обобщенная геометрическая модель золотых сечений, произведений и динамической системной гармонии // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.23738, 16.09.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163418.htm.
15. Василенко С.Л. Ошибка ошибке рознь или как за деревьями не потерять лес // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.23750, 22.09.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163422.htm.

Харьков, Украина