Благородные числа и благородные сечения

С.Л. Василенко

Контакт с автором: texvater@rambler.ru

Описаны благородные числа, разложение которых в непрерывную или цепную дробь заканчивается бесконечной последовательностью единиц. Рассмотрены сопутствующие вопросы, позволяющие отметить единично-философскую сущность золотого сечения, как единичной монады единичной структуры мироздания и проявления идеального числа в неидеальных системах.

О г л а в л е н и е

Ваше благородие, госпожа Удача...
Б. Окуджава, 1967

Вступление

В русскоязычной литературе мы практически не находим описаний благородных чисел. Как, впрочем, и многое другое. Зато частенько можем вдоволь насладиться другими математико-патриотическими публикациями.

Среди них: «Начала православной арифметики» (В. Говоров), «Основы русской геометрии» (А. Черняев), «Русский проект математики гармонии» (П. Сергиенко) и др.

Упомянутые авторы, как правило, не утруждают себя обоснованной аргументацией выводов. Да и зачем? – Их язык изложения плавный. Стиль повествования близкий к вольному. Устоявшиеся канонические положения принципиально низвергаются. Движение мысли с первых страниц предсказуемо. Обычно против течения.

Ткут себе многоцветные ковры-серпантины...

Без обиняков хочется пожелать попутного ветра и не отвлекаться от важных дел.

Единственный посыл – смягчить пыл-тональность и попытаться привести умонастроения к масштабу почки на огромнейшем древе знаний, корни которого уходят в далекое прошлое разных веков и народов.

Кроме культурно-исторической идеи "русского мира" существует ещё множество иных миров. Не менее интересных и востребованных. В том числе во многих религиях, общественных формациях и науках.

Интернациональная математика здесь вообще вне конкуренции...

Своя рубашка ближе к телу

Истинно русская пословица восходит к временам древнего Рима: "Tunica pallio proprior est". В ней нет ничего предосудительного, ибо она воссоздает-отражает частное (индивидуальное) и общее равновесие.

Возьмем, к примеру, число с разложением в бесконечную цепную (непрерывную) дробь, аналогичную константе золотого сечения (ЗС), за исключением первого числа, равного трем.

Легко показать, что новое число заканчивается бесконечной последовательностью единиц $\overline{1}$ и равно:

$$[3, \overline{1}] = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+}}} = \frac{1+\phi}{4+3\phi}.$$

Как видим, ключевой "монадой" в данном соотношении является константа

$$\phi = \Phi^{-1} = \left(\sqrt{5}-1\right)/2 .$$

В определенном смысле перед нами – золотоносная числовая модель.

Хотя считают так далеко не все.

Так, по Г. Аракеляну [1] «любое изменение в цепной дроби, в частности золотой константы, это попросту переход к другому числу» и не относится к обобщениям ЗС. – Возможно. Дискутировать не будем.

Отметим лишь один принципиальный момент. Изменяя коэффициент p в квадратном уравнении $x^2 - px - 1 = 0$, он сам неуклонно утверждает, якобы это имеет отношение к обобщению ЗС. Более того, во славу данного положения, корни обычного квадратного уравнения он объявляет «золотым семейством» (?).

Наперекор всем учебникам по математике.

Константу Φ в вышеприведенном соотношении мы, конечно, не обобщаем. Это всегда было нашей исходной тезой.

Но однозначно утверждать, что форма $[3, \overline{1}]$ никак не связана с золотым сечением, тоже не получается. Всё бы ничего. Но, оказывается, подобных чисел превеликое множество.

Более того, оно имеет мощность континуума или равномощно (!) множеству всех вещественных чисел. Ни много, ни мало.

Среди них – благородные числа, которые не только действительно существуют, но и занимают важное место в теории чисел.

Частично они освещены в наших работах [2, 3]. Но несколько походя, крупинкой в общей мозаике на золотоносную тему.

Однако они стоят того, чтобы поговорить подробнее.

Заодно обсудить соседствующие вопросы в разных аспектах проблематики обобщения.

Благородные числа

Благородные числа [4; 5, с. 236] определяются как иррациональные числа, разложение которых в непрерывную (цепную) дробь заканчивается бесконечной последовательностью единиц $\overline{1}$:

$$\nu = [0; a_1, a_2, ..., a_n, \overline{1}].$$

Краткое упоминание об этих числах мы находим в замечательной книге корифея фракталов М. Шредера [6, с. 407], где они именуются "благородными сечениями".

Они играют важную роль в структуре квазикристаллов и квазипериодическом пути-движении к хаосу нелинейных динамических систем. – Научных объектов непостижимой значимости в вопросах формирования и развития многих процессов во Вселенной.

Воистину "божьи числа".

Их прототипом (прародителем) является малая константа золотой или божественной пропорции $\phi = [0; \overline{1}]$, для которой цепная дробь полностью состоит из единиц, кроме нулевого члена или целой части.

Любое благородное число можно записать как

$$\nu = \frac{A_n + \phi A_{n-1}}{B_n + \phi B_{n-1}}, \tag{1}$$

где A_n, B_n – соответственно числитель и знаменатель подходящих рациональных дробей.

Приведем некоторые типичные формы-примеры:

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ldots}}} = [3, 2, \overline{1}] = \frac{2+\phi}{7+3\phi} = \frac{3+2\phi}{10+7\phi} = \frac{5+3\phi}{17+10\phi} = \frac{8+5\phi}{27+17\phi} = \ldots;$$

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\ldots}}} = [2, 3, \overline{1}] = \frac{3+\phi}{7+2\phi} = \frac{4+3\phi}{9+7\phi} = \frac{7+4\phi}{16+9\phi} = \frac{11+7\phi}{25+16\phi} = \ldots;$$

$$[1, 2, \overline{1}] = \frac{2+\phi}{3+\phi}; \qquad [1, k, \overline{1}] = \frac{k+\phi}{k+1+\phi}; \qquad [1, 1, 2, \overline{1}] = \frac{3+\phi}{5+2\phi};$$

$$[k, 2, \overline{1}] = \frac{1+\phi}{k+(k+1)\phi}; \qquad [k, 3, \overline{1}] = \frac{1+2\phi}{k+(2k+1)\phi}; \qquad [k, m-1, \overline{1}] = \frac{1+m\phi}{k+(mk+1)\phi};$$

$$[k, 1, 2, \overline{1}] = \frac{1+2\phi}{k+1+(2k+1)\phi}; \quad [k, 1, 4, \overline{1}] = \frac{1+4\phi}{k+1+(4k+3)\phi}; \quad [k, 1, m, \overline{1}] = \frac{1+m\phi}{k+1+(mk+m-1)\phi};$$

$$[1, 2, 2, \overline{1}] = \frac{5+2\phi}{7+3\phi}; \qquad [2, 2, 2, \overline{1}] = \frac{5+2\phi}{12+5\phi}; \qquad [k, 2, 2, \overline{1}] = \frac{5+2\phi}{5k+2+(2k+1)\phi};$$

$$[k, \overline{1}] = \frac{1+2\phi}{k+2+(2k-1)\phi}; \qquad [3, 3, 3, \overline{1}] = \frac{3+7\phi}{10+23\phi}.$$

Напомним, что цепные дроби дают наиболее универсальный способ представления вещественных чисел. Алгоритм их образования не зависит ни от одной системы счисления и дает такое представление чисел, которое обусловлено исключительно их собственной арифметической природой [7, с. 307].

Запись числа в виде цепной дроби отражает его существенные арифметические свойства, но не признаки, связанные с выбором той или иной системы счисления [8, с. 233].

Такой подход позволяет избавиться от второстепенных, порой спорных, мелочей-деталей и сосредоточить внимание на более важных моментах.

Золото или не золото, вот в чём вопрос

Можно ли называть данные числа условно "золотоносными"? – Вполне. Хотя бы из-за наличия в их записи константы ϕ или корня из пяти. Плюс к этому согласованность и гармония цепных дробей в виде наличия бесконечного непрерывного ряда единиц $\overline{1}$.

Можно ли их именовать «обобщенными золотыми сечениями»? – При желании можно всё. Как говорится, если даже нельзя, но сильно хочется...

Действительно, какие-то параллели-ассоциации просматриваются.

Но строго-понятийная взаимосвязь с золотым сечением всё-таки отсутствует.

Представляется, такое осмысление ближе к терминологическому пониманию (состоянию), если записать любое вещественное число a в виде произведения $a = \Phi \cdot b$, где $b = a\phi$, и провозгласить "генетическую" связь константы a с золотым сечением. К слову, один исследователь *p*-сечений так и делает много десятков лет.

Конечно, многое здесь зависит от взаимной договоренности в кругу научной общественности и формулирования непротиворечивых дефиниций.

Поэтому форму (1) англоязычные ученые исторически нарекли noble number или благородными числами. На наш взгляд, абсолютно точно и корректно.

Вроде, как и связаны они с понятием золотого сечения, из среды благородных металлов. Но, увы, не такие золотые. Как говорится, не та проба. Или наоборот охватывают более широкий пласт чисел, но без необязательного (даже вредного!) терминологического золочения. Благо человеческий язык разнообразен и позволяет оное сделать.

Термин "золотое сечение" давно застолблен за уникальным разбиением целого на две пропорциональные части с математической константой $\Phi = \phi^{-1}$.

Какие-либо обобщения этой константы противоречат здравому смыслу.

Та же форма *p*-сечений или тринома старших степеней известна математикам около полувека (если не больше) и вполне самодостаточна без присоединения "золотых" прилагательных. Хочется как-то выделить, придумывайте новые подходящие термины.

Noble number – тому замечательный пример.

Равно как никто не называет "золотым" алгебраическое уравнение общего вида, которое обязательно (по определению) содержит "золотое" решение в ряде частных случаев, при определенном подборе числовых коэффициентов.

Заметим, без курочки рябы и, уж тем более, русского мата (по В. Говорову), откуда якобы произошла "МАТеМАТика". – Нужно отдать должное интересным фантазиям.

Золотоискателям на заметку

Есть в формообразовании (1) ещё одна, пожалуй, наиболее примечательная изюминка. С поправкой на наше изложение-повествование.

Данная запись не только выражает саму константу ЗС в частном случае $\left[\overline{1}\right] = \dfrac{1+\phi}{2+\phi} = \phi$.

Все остальные числа вида (1) также определяются через константу ЗС.

То есть золотое сечение буквально красной линией пронизывает все эти бесконечные вереницы новых чисел. Казалось бы, бери и называй их «обобщенным золотым семейством» или нанизывай на шампур «золотых чисел».

Во всяком случае, на эту терминологическую линию у них неизмеримо больше "наследственных прав", чем у многочисленных корней обычного квадратного уравнения. Не говоря уже о других триномах, которые в разностной форме воспроизводят числовые последовательности типа аддитивной рекурсии Фибоначчи.

Тем не менее, иностранные авторы подошли к понятийному словообразованию весьма сдержанно и ответственно. В лучших традициях разных математических школ.

Они ввели для чисел (1) новый вполне понятный и удобоваримый термин – "благородные числа".

Корректно. Правильно. Доходчиво и непротиворечиво.

Достойный образец подражания для остальных золотоискателей.

Благородные числа и конформные преобразования

Хорошо известно [9, с. 218], что каждое круговое преобразование (собственное или зеркальное) является дробно-линейным преобразованием вида $\frac{az+b}{cz+d}$.

При $c = 0$ данное преобразование является подобием.

Если $c \neq 0$, то можно выполнить нормировку путем умножения коэффициентов a, b, c, d на некоторое число (если понадобится) так, чтобы эти коэффициенты удовлетворяли равенству $ad - bc = 1$ [10, с. 9].

В результате образуется тождество, в котором фигурирует непрерывная дробь

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{-\frac{1}{c} + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{\frac{d}{c} + z}}}}. \tag{2}$$

Приравняв величину $z = \phi$ и заменив её "цепным" продолжением из одних единиц, выходим на благородные числа.

Например, для набора чисел $(a, b, c, d, z) = (1, 2, 3, 7, \phi)$ имеем

$$\cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \dots}}} = [3, 2, \overline{1}] = \frac{2+\phi}{7+3\phi} = \frac{1}{3} + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{-\frac{1}{3} + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{7}{3} + \phi}}}}.$$

Форма (2) – частный случай автоморфных функций, которые обобщают периодические функции [11].

Заметим, именно с их помощью Пуанкаре решил 22-ю проблему Гильберта в 1907 г.

Как показал один из крупнейших геометров XX века Г. Кокстер (канадский математик британского происхождения) полученная выше "гомография" характеризуется совокупностью операций: параллельного переноса, специальной инволюции Мёбиуса, инверсии, симметрии [9, с. 218].

Именно поэтому, на наш взгляд, обычным явлением в исследовательской практике становится безуспешное нахождение золотого сечения в чистом виде.

Но оно часто присутствует в процессах и явлениях в скрытом незримом виде, включая благородные числа с их возможной интерпретацией через дробно-линейные преобразования.

Квазиблагородные числа

Отдельный класс образуют [12] квази- или почти благородные действительные числа $0 < v < 1$. Их непрерывная дробь является периодической, а периодическая последовательность термов состоит из совокупности $p - 1$ единиц с последующим целым числом $n > 1$:

$$v_{p,n} = \left[0, \overline{\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{p-1}, n} \right] = \left[0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{p-1}, n, v_{p,n}^{-1} \right].$$

Переходя к более наглядному формульному виду, получаем

$$v_{p,n} = \frac{n}{2}\left(\sqrt{1+4\frac{nF_{p-1}+F_{p-2}}{n^2F_p}}-1\right), \tag{3}$$

где F_p – числа Фибоначчи.

Например, частные случаи дают:

$$v_{p,2} = \sqrt{\frac{F_{p+2}}{F_p}}-1; \qquad v_{p,3} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{4F_{2p}}{F_p^2}+9}-3\right).$$

Для фиксированного *n* с увеличением количества единиц *p* подкоренное выражение в (3) с учетом свойств чисел Фибоначчи всё быстрее приближается к квадрату числа 1 + 2ϕ/*n*, в результате чего квазиблагородные числа стремятся к константе золотого сечения $\phi = \Phi - 1$.

Представляется, именно по схожим схемам происходят те или иные приближения процессов к некому аттрактору-положению, условно называемому золотым сечением.

Слово "условно" здесь применено специально. Ибо состояние, которое классически именуется ЗС, в процессах может не существовать. То есть отсутствует привычное целое и его две аддитивно-составные части. Но присутствует их косвенная характеристика или отражение, выражаемые квазиблагородными числами отвлеченной природы.

Преломление мыслей через призму благородных чисел

1) Рассматривая благородные числа, с их представлением в виде бесконечной цепной дроби и выражением посредством константы золотого сечения, просто нельзя не упомянуть подобные отношения, вытекающие из непрерывной дроби Роджерса-Рамануджана.

Последняя де-факто является функцией, имея множество частных проявлений, в зависимости от выбранного аргумента.

Запишем только два выражения [13], несколько изменив форму записи:

$$\cfrac{e^{-\frac{2\pi}{5}}}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cfrac{e^{-6\pi}}{1+\cfrac{e^{-8\pi}}{1+\ddots}}}}} = \sqrt{1+\Phi^2}-\Phi; \qquad \cfrac{e^{-\frac{\pi}{5}}}{1-\cfrac{e^{-\pi}}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1-\cfrac{e^{-3\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1-\ddots}}}}} = \sqrt{1+\phi^2}-\phi.$$

Замечательное единение фундаментальных констант математики и природы (Φ, e, π).

В основе их единства лежит бесконечная цепная дробь! Только в такой или подобной форме между ними существует абсолютная и строгая аналитическая связь.

Никакие другие ухищрения, включая "конечномерные" формулы, здесь бессильны.

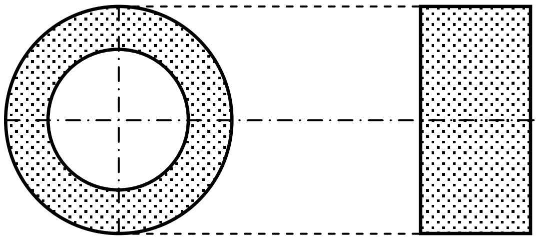
Поиски их тщетны! С напрасной тратой времени. Уж лучше изобретать велосипед...

2) Базовые тождества для золотой константы $\Phi = \phi^{-1}$: $\Phi^2 - \Phi = 1$; $\phi^2 + \phi = 1$ позволяют по-новому взглянуть на их геометрическую интерпретацию.

Так, произведение констант πΦ (площадь прямоугольника $\pi \times \Phi$) численно равно площади кольца, образованного двумя концентрическими окружностями радиусами Φ и 1.

Произведение констант πϕ (площадь прямоугольника $\pi \times \phi$) численно равно площади кольца, образованного двумя концентрическими окружностями радиусами 1 и ϕ.

Число π (площадь круга единичного радиуса) равно площади кольца, образованного двумя концентрическими окружностями радиусами Ф и $\sqrt{\Phi}$. И так далее...



Размышлизмы

Какой общий настрой создают благородные числа? – Не нужно быть семи пядей во лбу, чтобы не заметить удивительное единение-сочетание совокупности единиц и золотой константы.

Причем эта уникальная связь наглядно проявляется лишь в непрерывных (цепных) дробях. С далеко идущими толкованиями и интерпретациями. Немного поразмыслим…

Начиная обычный натуральный счет, рано или поздно мы обязательно выходим на золотую (божественную) пропорцию с её отношением, равным золотой константе.

Весь окружающий мир, так или иначе, соткан из единиц. Единицы везде.

Следовательно, повсюду незримо присутствует число Ф.

Но, возможно, всё как раз наоборот.

Мы часто склонны менять местами причину и следствие. Как в дилемме "курица–яйцо".

Та же поговорка немецкого математика Л. Кронекера «бог создал целые числа» в действительности является зеркальным отражением глазами человека.

Сдается, так оно и есть.

Зачем, спрашивается, Ему "париться и выписывать" всю тьму целых чисел?

"Я есмь Альфа и Омега", – гласит библия устами откровения Иоанна Богослова (апокалипсис). Так придумал-транспонировал человек, создав алфавит и письменность.

Богу то это зачем? – Он писатель-создатель, а не читатель.

Бог создал число Ф. На основе собственного единичного абсолюта.

А далее просто запустил некий "часовой" механизм. Остальное образовалось само собой, включая натуральные числа и многое-многое другое.

Некоторые мысли и положения на эту тему изложены в нашей работе [14]. Не будем повторяться. Отметим только единично-философскую сущность золотого сечения, из которой следует, что число ЗС – единичная монада единичной структуры мироздания.

Только феномен Ф способен скомпилировать абсолютную единицу через саму единицу. Как проявление идеального числа в неидеальных системах.

Более того, образный термин "золотое сечение" с его божественной окраской Луки Пачоли возник не случайно. В своем обозначении *Au* золото буквально охватывает весь алфавит «от А до Я». Буквенное сочетание начинается на *A* и заканчивается на *u* так, что остальные буквы латинского алфавита (v, w, x, y, z) в двойных записях других химических элементов не используются.

То есть своей записью золото охватывает-подытоживает всю систему таблицы Менделеева из наиболее вероятного количества $2{\cdot}5{\cdot}12 = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5 = 5!$ элементов. Не считая гипотетические суперактиноиды с атомными номерами 121 и выше.

Представляется, "генетическая" связь единичной монады и константы золотого сечения достойна отдельного и обстоятельного изучения-исследования.

Повсеместно-незримое присутствие благородных и квазиблагородных чисел создает благоприятный фон и дает надежду на позитивное разрешение данной проблематики.

Осталось дело за малым...

Литература:

1. Аракелян Г. О мировой гармонии, теории золотого сечения и её обобщениях // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17064, 06.12.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322065.htm.
2. Василенко С.Л. Реструктуризация золотого сечения: от частного к общему // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17556, 03.07.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161975.htm.
3. Василенко С.Л. "Фантомы" золотого сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 01.07.2012. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=77&sm=2.
4. Weisstein E.W. Noble Number. From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – URL: mathworld.wolfram.com/NobleNumber.html.
5. Hardy G.H., Wright E.M. An Introduction to the Theory of Numbers: 5th ed. – Oxford, England: Clarendon Press, 1979. – 433 p.
6. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы: Пер. с англ. – Ижевск: НИЦ "РХД", 2001. – 528 с.
7. Александров П.С. Энциклопедия элементарной математики. В 5 т. Т. 1. Арифметика. – М.: ГИТТЛ, 1951. – 448 с.
8. Виленкин Н.Я., Гутер Р.С., Шварцбурд С.И. и др. Алгебра: учеб. пособ. – М.: Просвещение, 1972. – 303 с.
9. Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию: Пер. с англ. – М.: Наука, 1966. – 648 с. – http://eek.diary.ru/p165970944.htm.
10. Форд Л.Р. Автоморфные функции: Пер. с англ. – М.–Л.: ГТТИ, 1936.
11. Сильвестров В.В. Автоморфные функции – обобщение периодических функций // Соросовский образовательный журнал. – 2000. – № 3. – С. 124-127.
12. Weisstein E.W. Near Noble Number. From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – URL: mathworld.wolfram.com/NearNobleNumber.html.
13. Василенко С.Л. Базовые соотношения между фундаментальными константами // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17327, 20.02.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161934.htm.
14. Василенко С.Л. Золотая пропорция как ядро генома мироздания // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 12.07.2011. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=30&sm=2 // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 13.07.2011. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11214.html // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17099, 13.12.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322080.htm.

д.т.н., Украина, Харьков