# Расширенная геометрия золотого сечения

*С.Л. Василенко*

Контакт с автором: texvater@rambler.ru

---

Представлены варианты геометрических построений золотой пропорции. В их основе лежат треугольники, квадрат, линейные сегменты, комбинации окружностей и др.

---

**Оглавление**



*Творчество заразительно. Передай другому!*
А. Эйнштейн

## Вступление

Вдохновение особо благоприятно для различных видов творческой деятельности.

Происходит глубокая сосредоточенность духовных сил человека на объекте созидания.

Их сопровождают эмоциональный подъем, радость создания.

Труд становится исключительно продуктивным и нацеленным на результат.

Вместе с тем его эффективность во много раз возрастает с возникновением различных образов ассоциативного ряда.

Шутки ради, как в одном анекдоте, когда одному персонажу во всём виделся женский бюст. Глядя на облака, горы, волны и даже ... будильник с его тиканьем "тик-так".

Хотя в каждой шутке есть только доля шутки.

Не случайно А. Пушкин проводил параллели между поэзией и геометрией: «Вдохновение нужно в поэзии, как и в геометрии» ("О статьях Кюхельбекера").

Иногда утверждают, что самые лучшие геометрические фигуры – женские. Среди них окружность, трапеция, пирамида... И не только в геометрии.

Вероятно, именно поэтому наиболее экстравагантные из математических терминов имеют также отношение к лучшей половине человечества: функция, производная, дуга, инверсия, медиана, биссектриса, пропорция и др.

Что ни слово, то новый женственный образ…

## Пропорция

Наиболее красивым и многозначным термином женского рода, пожалуй, является математическая пропорция. Как равенство разнообразных отношений. Почти как 90 : 60 : 90.

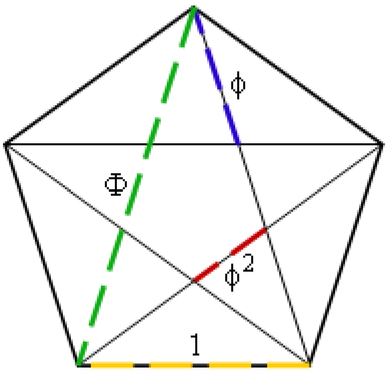
Особое место по праву занимает золотая пропорция. – С её удивительной формой равновесия, синтеза и созидания [1]:

*целое так относится к своей части как она к собственному отклонению от целого*.

Понятие целого здесь представлено широко и не обязательно соотносится с прямолинейным отрезком или геометрией вообще.

В общем случае деление целого на две неравные части допускает бесконечное множество соотношений между целым и одной из его частей, а также между самими частями целого. Но только в единственной вариации эти отношения могут быть равными.

Данный случай представляет собой золотое сечение – высшее проявление структурного и функционального единения целого и его частей.




Широко распространенное представление золотой пропорции (золотого сечения) долгое время сводилось к общеизвестному делению прямолинейного отрезка с помощью его достройки до прямоугольного треугольника с соотношением катетов $1:2$.

Ну, и конечно, традиционный равносторонний пятиугольник или звезда-пентаграмма, сплошь усеянная золотыми числами:

$$\Phi = \phi^{-1} = (1 + \sqrt{5}) / 2.$$

Со временем появились новые оригинальные геометрические построения.

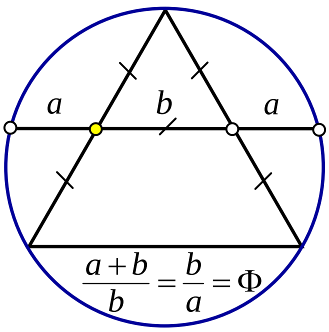
Некоторые из них проанализированы в публикациях [2–4].

Они позволяют шире представить себе "золотоносную" геометрию, хотя, конечно, не охватывают всевозможные находки исследователей.

Целью настоящей работы является упорядочение-обзор наиболее ярких представителей множества "золотых" построений с добавлением новых интерпретаций и оригинальных формообразований.

## Равносторонний треугольник

Д. Одом дал удивительно простую конструкцию золотого отношения с использованием равностороннего треугольника [5].




Если через середины двух его сторон провести прямую линию до пересечения с описанной окружностью, то образуемые три точки находятся в золотой пропорции с константами-отношениями:

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \qquad \phi = \Phi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

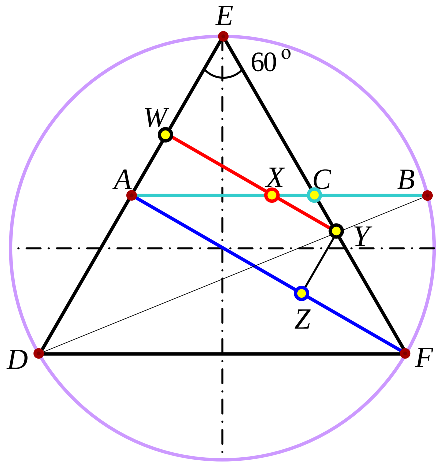
Это свойство использовано, в частности, при построении так называемой «русской матрешки в геометрических образах золотой пропорции» [6].

Действительно, согласно теореме о пересекающихся хордах (произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды) имеем:

$$b \cdot b = (b+a) \cdot a \quad \text{или (разделив на } a^2\text{)} \quad x^2 = x+1,$$

где $x = \frac{b}{a} > 0$, откуда следует $x = \Phi$.

Но это не всё... Несколько добавочных линий (рис. 1), и на базе равностороннего треугольника мы получаем целый набор вариантов золотой пропорции на разных отрезках.




Последовательность построений:

$\Delta EDF,\ \bullet A\,(EA = AD),\ \bullet C\,(EC = CF),$
$AB\,(AC),\ DB,\ YZ \perp AF,\ YW \perp ED.$

$$\Phi = \frac{AC}{CB} = \frac{EY}{YF} = \frac{AZ}{ZF} = \frac{WX}{XY} = \frac{EW}{WA} = \overset{\frown}{EB}\Big/\overset{\frown}{BF}$$

$$\Phi = \frac{AB}{AC} = \frac{EF}{EY} = \frac{AF}{AZ} = \frac{WY}{WX} = \frac{EA}{EW} = \overset{\frown}{EF}\Big/\overset{\frown}{EB}$$

Рис. 1. Формирование множества золотых сечений на основе равностороннего треугольника

Аналогичным образом могут быть выполнены геометрические построения относительно и других серединных точек треугольника (типа $C$).

Этим самым разрушается привычный миф об исключительной "золотоносности" пентаграммы и связанной с ней пятиконечной звезды.

Как видно, равносторонний треугольник способен продуцировать целый букет золотых сечений.

### Египетский треугольник.

Любопытно построение золотого сечения в египетском прямоугольном треугольнике $\Delta ABC$ со сторонами $3-4-5$ [7, с. 43–44][1]. Проведем биссектрису угла $B$ (рис. 2).

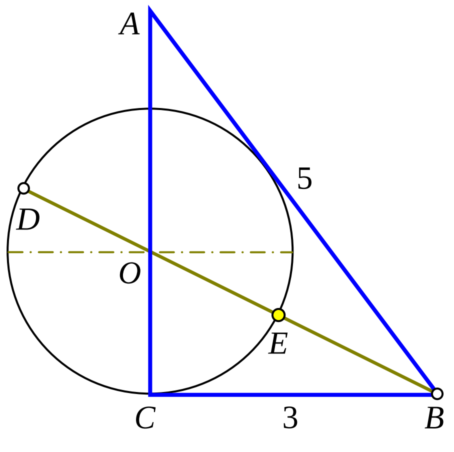



Рис. 2. Золотое сечение на биссектрисе египетского треугольника

Точка $O$ делит катет $AC = 4$ в пропорции:

$$\frac{AO}{OC} = \frac{AB}{CB} = \frac{5}{3} \quad \to \quad AO = \frac{5}{2}, \quad OC = \frac{3}{2}.$$

[1] Golden Ratio and the Egyptian Triangle. – URL: cut-the-knot.org/do_you_know/GoldenRatio345.shtml.

Очертим окружность $C(O)$.

Согласно свойству степени точки *B* относительно окружности выполняется равенство

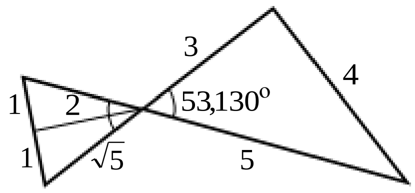
$$BE \cdot BD = BC^2$$

или $(BO - 3/2)\cdot(BO + 3/2) = 9$, откуда $BO = 3\sqrt{5}/2$.

Окончательно получаем золотое сечение на биссектрисе угла *B*:

$$\frac{DE}{BE} = \frac{3}{3\left(\sqrt{5}-1\right)/2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi .$$

Крайне занимательно совместное рассмотрение равнобедренно треугольника с высотой равной основанию и египетского треугольника.




У первого из них боковая сторона равна корню из пяти – прямому прародителю золотого сечения.

Но наиболее примечательный момент состоит в абсолютной стыковке фигур через равенство острых углов:

$$2\cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \operatorname{arcctg}\frac{4}{3} = 0{,}9273 \xrightarrow{180/\pi} 53{,}130^{\circ} .$$

## Квадрат

Если одну из сторон квадрата разделить пополам, то можно образовать прямоугольный треугольник с соотношением сторон $1:2$.

На этой подоснове легко образуются разные варианты золотой пропорции (рис. 3).

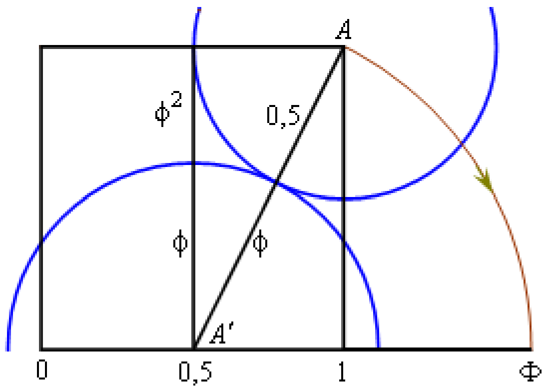



Рис. 3. Варианты золотой пропорции в квадрате

Например, соединяем середину единичного $1\times 1$ квадрата $A'$ с противоположной вершиной $A$ и поворотом полученного отрезка длиной $\sqrt{1+0{,}5^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ фиксируем на горизонтали золотую константу $\Phi = \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1}{2}$.

Вокруг вершины *A* проводим окружность радиусом 0,5. Она отсекает на отрезке $AA'$ малую золотую константу $\phi = \dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1}{2}$.

Поворотом вокруг $A'$ можно восстановить $\phi$-отрезок на вертикали: $\phi + \phi^2 = 1$.

В итоге мы построили отрезки, численно равные малой и большой золотой константе.

Заметим, что в традиционной задаче деления отрезка золотым сечением его большая часть равна $\phi$ и имеет размерность исходного целого. Но вот константа $\Phi$ не имеет метрики и определяется как отношение большей части к меньшей. То есть, само сечение мы проводим, а геометрически представить величину $\Phi$ не можем.

В этом контексте гораздо выгоднее выглядит геометрическое представление золотых констант в задачах синтеза [1], где $\Phi$ становится числом роста и приумножения.

Константа $\Phi$ приобретает четкую метрику и содержательный геометрический смысл как новый увеличенный отрезок. Или новое увеличенное (подросшее) целое в результате увеличения исходного единичного отрезка на величину приращения $\phi$. В тех же единицах, что исходный отрезок 1 и добавка к нему $\phi$.

Другими словами, все величины в равенстве $1+\phi=\Phi$ имеют одинаковую метрику.

Очень важное методологическое расширение!

Теперь у нас золотое число $\Phi$ – «новая созидательная единица», образуемая из обычной единицы 1 в золотой пропорции. Это наглядно видно на чертеже (см. рис. 3).

## Равносторонний треугольник и квадрат

Ещё одно комбинированное построение (рис. 4). Здесь осуществляется переход от равностороннего треугольника (с длиной стороны = 1) к квадрату, и далее через поворот его диагонали $\sqrt{2}$ к золотому сечению отрезка $AB$ [8].

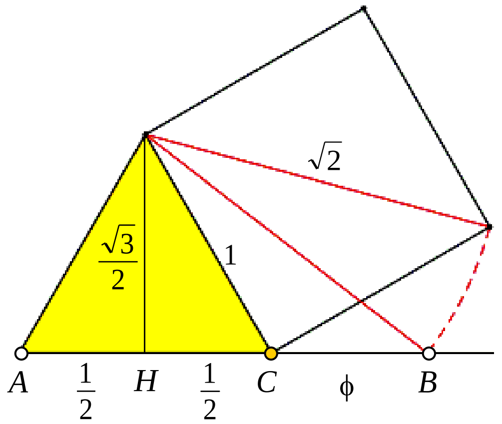



Рис. 4. Золотая пропорция в симбиозе треугольника и квадрата

По теореме Пифагора имеем:

$$HB = \sqrt{2-\frac{3}{2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Отсюда следует:

$$AB = AH + HB = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} = \Phi,$$

$$CB = HB - HC = \frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2} = \phi.$$

Таким образом, $C$ – точка золотого сечения отрезка $AB$: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{CB} = \Phi$.

## Три линейных сегмента

Сравнительно недавно предложен изящный путь исполнения золотой пропорции с тремя равными сегментами, их серединами и парой перпендикулярных линий [9].

Без потери общности рассуждений примем для удобства рассуждений длину исходного отрезка, равной 2.

Один конец второго сегмента движется по первому вертикальному сегменту до его середины, а второй край – по горизонтали.

Затем точно также один конец третьего сегмента движется по второму сегменту до его середины (рис. 5).

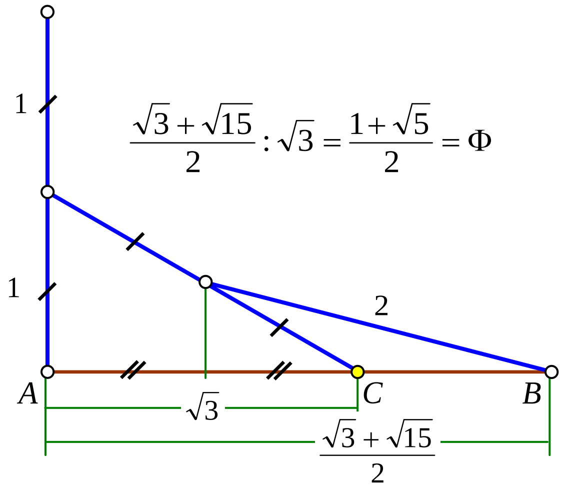



Рис. 5. "Трёх-сегментное" золотое сечение

В итоге на горизонтали образуется золотое сечение.

Все построения и расчеты наглядно представлены на чертеже.

## Две пары окружностей

Любопытный способ отображения золотого сечения представлен в работе [10] на основе двух одинаковых пар концентрических окружностей (рис. 6), в скобках фигурируют центры:

$$O'(O),\quad O(O'),\quad F'(O),\quad F(O').$$

Примем для определенности радиус меньшей окружности равным $OO' = 2$.

Тогда

$$AC = 2CD = 2\sqrt{2^2 - 1^2} = 2\sqrt{3};$$

$$AB = AD + BD = \sqrt{3} + \sqrt{4^2 - 1^2} = \left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{3}.$$

Отсюда вытекает золотое отношение:

$$\frac{AB}{AC} = \Phi.$$

Примем в качестве переменной расстояние $x = OD/r$ в долях от радиуса $r$.

При удалении окружностей друг от друга площадь их общего (удвоенного) сегмента по отношению к площади круга равна $S(x) = \dfrac{\theta - \sin\theta}{\pi}$, где $\theta = 2\arccos x$ – угол сектора $COA$.

В частности, $S(0.25) \approx 0.685$, $S(0.5) \approx 0.391$.

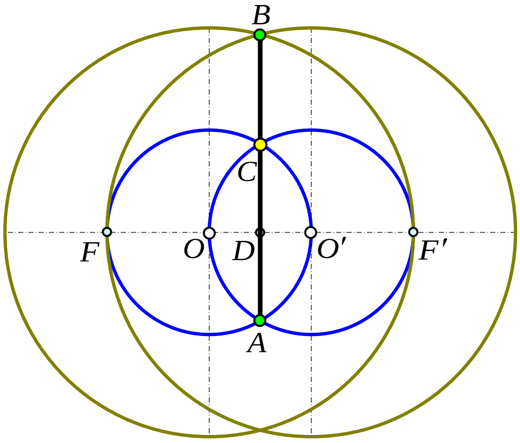



Рис. 6. Золотая пропорция в структуре двух пар окружностей

## Три окружности

Далее из той же серии, но 5-шаговое деление отрезка в золотом отношении [11] с использованием трех окружностей (рис. 7).

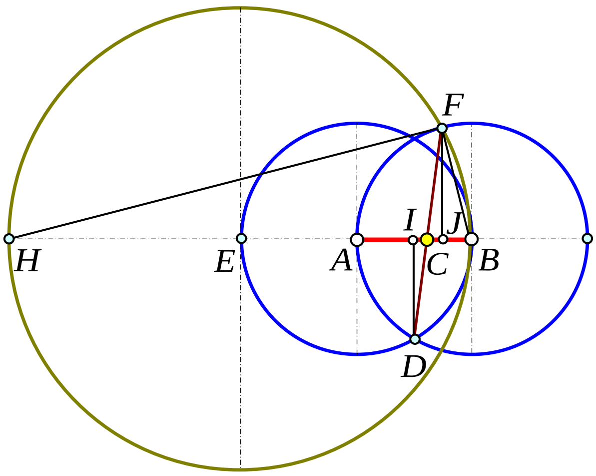



Рис. 7. Золотая пропорция в структуре трёх окружностей

Продолжим исходный отрезок $AB$ влево.

Очертим три окружности $A(B)$, $B(A)$ и $B(F)$.

Проведем линию $FD$.

Точка пересечения $C$ – золотое сечение заданного отрезка $AB$.

*Доказательство*. Без потери общности рассуждений примем исходный отрезок равным единице $AB = 1$ и проведем к нему перпендикуляры $DI$ и $FJ$.

Тогда $BF = 1$, $BH = 4$.

Поскольку $(BF)^2 = BH{\cdot}BJ$, то $BJ = 1/4$, а значит, $IJ = 1/2 - 1/4 = 1/4$.

По теореме Пифагора

$$BF = \sqrt{1^2 - (1/4)^2} = \sqrt{15}/4.$$

Из подобия треугольников имеем пропорцию $\dfrac{IC}{CJ} = \dfrac{ID}{JF} = \dfrac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{15}/4} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Отсюда следует:

$$IC = CJ \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{4} - IC\right)\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-2}{2} \quad \text{и} \quad AC = \frac{1}{2} + IC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi.$$

Довольно неочевидный и многозвенный вывод, в результате которого образуется золотая пропорция.

## Три одинаковые окружности

К. Хофстеттер предложил аналогичную конструкцию "ржавого компаса" на основе трех одинаковых окружностей [12].

Построение подобно предыдущим, за исключением последнего шага.

Для отрезка $AB = 1$ проводим окружности $A(B)$ и $B(A)$ (рис. 8). Соединяем точки их пересечения линией $XZ$, которая делит заданный отрезок пополам в точке $M$.

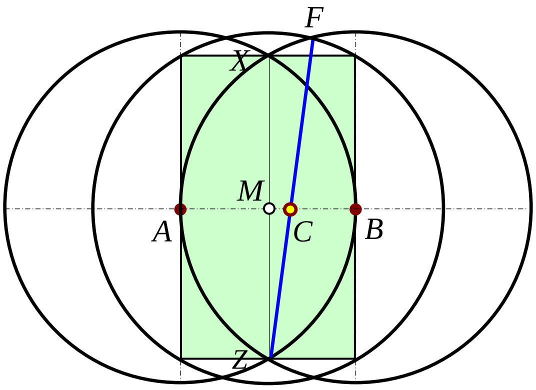



Рис. 8. Золотое сечение через три одинаковые окружности

Вокруг этой точки проводим окружность единичным радиусом $AB$, которая пересекается с окружностью $A(B)$ в точке $F$.

Линия $FZ$ делит исходный отрезок $AB$ в точке $C$ золотым сечением: $AB/AC = \Phi$.

Следует особо отметить, что количество операций геометрических построений в описанных выше случаях на самом деле небольшое.

Так, проведение окружностей $A(B)$ и $B(A)$ с последующим соединением точек их пересечения де-факто означает деление заданного отрезка $AB$ пополам.

Примечательный момент: стороны зеленого прямоугольника относятся как $1 : \sqrt{3}$.

## Гармония восприятия

А теперь приведем один пример на гармоничность золотого сечения из ранних построений [2].

Очертим три концентрические полуокружности $A(O)$, $A'(O)$, $F(O)$ такие, что $AA' = FO$.

Проведем прямые линии $A$–$B$ и $A'$–$B'$ до пересечения в точках $C$, $C'$ (рис. 9).

Без потери общности рассуждений примем для простоты изложения $AO = 1$.

Прямоугольные треугольники $ACD$ и $A'C'D'$ (с гипотенузами на диаметрах) подобны, если равны отношения катетов (тангенсы углов):

$$\frac{x}{x+(1-2x)}=\frac{x+(1-2x)}{1} \qquad \Rightarrow \qquad x^2-3x+1=0\,.$$

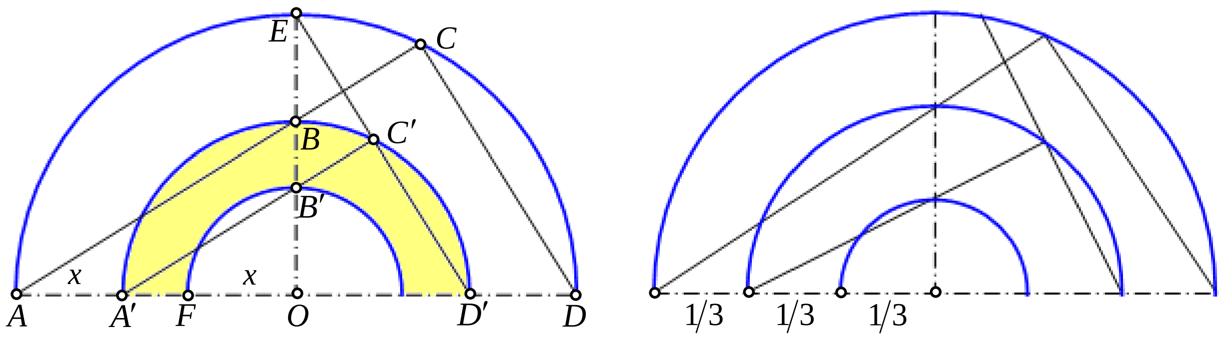



Рис. 9. Иллюстрация разной сходимости образующих отрезков в концентрических окружностях: идеальное сочленение наблюдается лишь при золотой пропорции радиусов

Искомым решением является корень квадратного уравнения, который меньше 1:

$$x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1-\phi = \phi^2.$$

Из подобия треугольников следует параллельность сторон: $AC\,||\,A'C'$, $CD\,||\,C'D'$.

Кроме того, при данных условиях прямоугольные треугольники $\Delta A'C'D'$ и $\Delta EOD'$ с одинаковым острым углом при вершине $D$ также подобны.

Следовательно, точки $E$, $C'$, $D'$ расположены на одной прямой.

Несмотря на, казалось бы, равное наращивание радиусов окружности на одну треть, более компактное и гармоничное образующих отрезков для концентрических окружностей идеальное сочленение наблюдается лишь при золотой пропорции радиусов.

Здесь просматриваются некоторые аналогии с идеальным сочленением чевиан и образующих линий, проходящих через три золотых фокуса треугольника [13].

## Вместо заключения

Как видим, арсенал-копилка золотых построений постоянно пополняется. Среди них есть простые и несколько усложненные варианты. Но дело не в трудоемкости черчения. Сегодня это не проблема. Данные задачи показывают, прежде всего, разнообразие геометрических форм и их сочетаний-комбинаций, приводящих к золотой пропорции

Они могут, в частности, найти отражение в архитектурном проектировании, применяться в исследовательских задачах, использоваться в школьных программах.

Наряду с этим поистине уникальные геометрические, алгебраические и числовые свойства золотого сечения гипотетически могут выступать в роли "застрельщиков" формирования разнообразных природных процессов.

Галилей говорил: «Философия написана в грандиозной книге Вселенной, которая открыта нашему пристальному взгляду. Но понять эту книгу может лишь тот, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она изложена. Написана же она на языке математики».

Как нам представляется, велика вероятность, что в спектакле сотворения мира значительная роль отведена именно золотой пропорции.

Один из таких упрощенных сценариев, например, описан в работе [14], где представлена численно-игровая математическая модель возникновения макрокосмоса "из ничего". В основе модели лежит золотая константа, как ядро генома мироздания.

Как утверждал "железный" стоический С. Хокинг: «Фундаментальная тяга человечества к знанию – достаточное основание для продолжения поисков. И мы не удовольствуемся меньшим, чем полное постижение Вселенной, в которой мы живем» [15, гл. 3].

## Литература:

1. Василенко С.Л., Никитин А.В. От золотого отношения к равновесию, синтезу и созиданию // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 17.01.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=93&sm=2.

2. Василенко С.Л. Золотые самородки в математике // Математические и исторические исследования гармонии... – 30.10.2012. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=91&sm=2.

3. Василенко С.Л. Геометрия золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16409, 05.03.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161806.htm.

4. Bogomolny A. Golden Ratio in Geometry / Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles. – URL: cut-the-knot.org/do_you_know/GoldenRatio.shtml.

5. Odom G., J. van de Craats. Elementary Problem 3007, American Math. Monthly, 90 (1983) 482; solution, 93 (1986) 572.

6. Василенко С.Л. Математические начала гармонии: русская матрешка в геометрических образах гармонической пропорции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15978, 04.07.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161668.htm.

7. Huntley H.E. The Divine Proportion: A Study in Mathematical Beauty. – N.Y., London: Dover, 1970. – 186 p.

8. Bataille M. Another Simple Construction of the Golden Section // *Forum Geometricorum,* **11** (2011), 55. – URL: cut-the-knot.org/do_you_know/MBatailleGoldenRatio.shtml.

9. Niemeyer Jo. A Simple Construction of the Golden Section // Forum Geometricorum, **11** (2011), 53. – URL: cut-the-knot.org/do_you_know/GoldenJo.shtml#Jo.

10. Hofstetter K. A Simple Construction of the Golden Section // Forum Geometricorum, **2** (2002), 65–66. – URL: http://forumgeom.fau.edu/FG2002volume2/FG200208.pdf.

11. Hofstetter K. Another 5-step Division of a Segment in the Golden Section // Forum Geometricorum, **4** (2004), 21–22. – URL: http://forumgeom.fau.edu/FG2004volume4/FG200402.pdf.

12. Hofstetter K. Division of a Segment in the Golden Section with Ruler and Rusty Compass // *Forum Geometricorum,* **5** (2005), 135–136.

13. Василенко С.Л. Треугольники и золотые чевианы // Математические и исторические исследования гармонии... – 12.06.2012. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=76&sm=2 / АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17549, 23.06.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161974.htm.

14. Василенко С.Л. Золотая пропорция как ядро генома мироздания // Математические и исторические исследования гармонии... – 12.07.2011. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=30&sm=2 // Научно-техн. б-ка SciTecLibrary. – 13.07.2011. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11214.html.

15. Хокинг С., Млодинов Л. Кратчайшая история времени. – СПб: Амфора, 2006.