Еще раз о золотых спиралях

Ковалев Андрей Николаевич

Традиционно золотой спиралью называют только вариант $r = r_0 \cdot \Phi^{\frac{2\beta}{\pi}}$, где β - полярный угол. Название этой спирали проистекает из ее связи с последовательностью вложенных друг в друга золотых прямоугольников с отношением сторон равным числу Фидия (Ф) (см. рисунок 1). Ее близость к спирали Дюрера, который первый вписал в такую последовательность прямоугольников спираль из дуг окружностей, простота построения последней сделали ее очень известной, если не сказать – знаменитой, и повлияли на монополизм в названии. Этот факт соответствует, с одной стороны, распространённости этой иллюстрации, с другой – довлеющего преобладания любителей среди исследователей и популяризаторов темы золотого сечения. Между тем, в природе чаще встречаются другие случаи «золотой» спирали, или даже – только другие и встречаются[1].

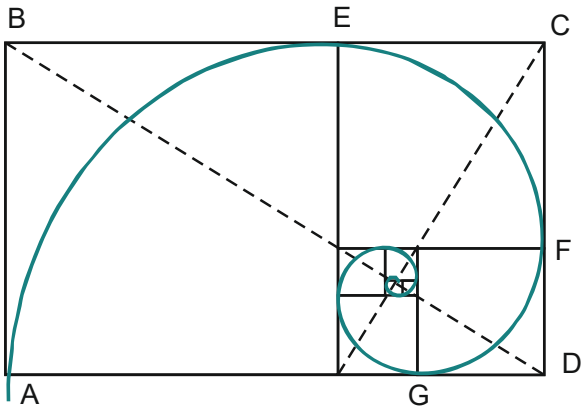

Рисунок 1 Спираль $r = r_0 \cdot \Phi^{\frac{2\beta}{\pi}}$

На рисунке 2 представлено сравнение спирали $r = r_0 \cdot \Phi^{\frac{\beta}{\pi}}$ с разрезом раковины моллюска Nautilus pompilius.[2], Возможно, И.Ш. Шевелев был первым, кто еще в 80-ых годах 20 века указал правильное значение *коэффициента роста* логарифмической спирали для раковины Nautilus pompilius.

Рис.2 Nautilus pompilius, спирали $r = r_0 \cdot \Phi^{\frac{\beta}{\pi}}$

Запишем уравнение логарифмических спиралей, связанных с числом Фидия,

[1] Я не знаю ни одного случая проявления именно этой золотой спирали в природе. Буду рад, если кто-то приведет мне пример, продемонстрировав его верность сравнением со спиралью.

[2] Все приводимые в книге логарифмические спирали построены с использованием графической математической программы и потом перенесены в графическом редакторе на рисунки.

в виде $r = r_0 \cdot \Phi^{m\frac{\beta}{2\pi}}$. На рисунке 3 приведено сравнение спирали при m = 1 и 2 с раковиной улитки и окаменелой раковиной моллюска аммонита[3]. Называть их как-то иначе?.. Или расширить определение золотой спирали хотя бы до варианта целых значений m? Само по себе, это уже расширение представления, утвердившегося благодаря тиражированию красивого построения с последовательным вырезанием в золотом прямоугольнике квадратов с последующим вписыванием спирали, что золотой спиралью считается только случай m = 4.

Рис. 3 Спираль при m = 1 (улитка) и m = 2 (окаменелость, аммонит)

Вторым толчком для написания этой статьи послужило не обнаружение полноценных статей на тему свойств спиралей, связанных с вписанными многоугольниками – никто даже не указывает коэффициент роста спирали, описанной вокруг последовательности из золотых треугольников, как нет и нормальных статей об особых свойствах логарифмических спиралей, связанных с числом Фидия[4].

Свойства золотой спирали, конечно, есть следствие свойств логарифмической спирали. Поэтому есть смысл начать с рассмотрения последней. Но здесь будет уделено внимание только тем свойствам логарифмической спирали, которые дают особые проявления в ее золотом варианте, или позволяют понять принципы построения.

Логарифмическая спираль в полярных координатах описывается уравнением:

---

[3] Расхождение раковины моллюска и золотой спирали при m = 2 как у современных экземпляров, так и у окаменелостей, наблюдается только во внешней области, где, видимо, на профиль начинают влиять дополнительные факторы.

[4] Не нашел я их и на страницах сайта Академии. Если кто укажет мне таковую – буду благодарен.

$$r = r_0 \cdot q^{\frac{\beta}{2\pi}} = r_0 \cdot e^{\frac{\ln(q)\beta}{2\pi}} = r_0 \cdot e^{k\beta}, \qquad (1)$$

где q > 0 – *коэффициент роста* логарифмической спирали, который показывает во сколько раз изменится расстояние от полюса за один оборот. Если q > 1 (вращение против часовой стрелки сопровождается удалением от полюса точки спирали), то такая спираль называется *правой*, в противном случае – *левой*. Если из полюса спирали O провести луч, то длины отрезков от O до точек пересечения луча со спиралью образуют геометрическую прогрессию.

Основное свойство логарифмической спирали: угол между радиус-вектором, исходящим из полюса, и касательной к спирали – α – постоянен. С этого свойства, найденного Р. Декартом в 1638 году, и начинается история математического исследования логарифмической спирали. Как известно из курса аналитической геометрии, для кривой, заданной в полярных координатах /1/:

$$tg(\alpha) = \frac{r}{r'} = \frac{1}{k} = \frac{2\pi}{lnq}, \qquad (2)$$

где $r' = \frac{dr}{d\beta}$. Для правых спиралей параметр k > 0 и $\alpha < 90^0$, а для левых – k < 0 и $\alpha > 90^0$. При k = ±1 угол между радиус-вектором и касательной равен $\pm 45^0$. Отсюда следует, что спирали $r_1 = r_{10}e^{\beta}$ и $r_2 = r_{20}e^{-\beta}$ пересекаются под прямым углом. Но это очень быстро раскручивающиеся спирали, у которых полярный радиус меняется за один оборот в $e^{2\pi}$ раз, т.е. коэффициент роста больше 535.

Длина части спирали между двумя ее точками с радиус-векторами r_1 и r_2 /1/:

$$l = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\beta = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sqrt{(k)^2 + 1}\, r d\beta = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{(k)^2+1}}{k} dr = \frac{r_2 - r_1}{\cos\alpha} \qquad (3)$$

Поэтому, несмотря на бесконечность числа витков, предшествующих разворачиванию правой спирали до r_0, суммарная их длина конечна и равна:

$$l = \frac{r_0}{\cos\alpha} \qquad (4)$$

Отсюда получается первое следствие для золотой спирали с m = 1: *длина части золотой спирали между двумя последовательными пересечениями ее одним радиус-*

вектором – r_n и r_{n+1} – равна сумме длин двух предшествующих аналогичных витков спирали (между r_{n-2} и r_n), и равна длине всей спирали до промежуточного радиуса r_{n-1} (см. рис. 4, где изображена золотая спираль, m = 1):

$$l = \frac{r_{n+1} - r_n}{\cos\alpha} = \frac{r_{n-1}}{\cos\alpha} = \frac{r_n - r_{n-2}}{\cos\alpha}. \qquad (5)$$

В случае рассмотрения пересечения спирали координатной осью x, от которой начинается отсчет полярного угла:

$$l = \frac{r_{n+1} - r_n}{\cos\alpha} = \frac{r_0(\Phi^{n+1} - \Phi^n)}{\cos\alpha} = \frac{r_0\Phi^{n-1}}{\cos\alpha} \qquad (6)$$

Построим касательную к спирали в точке M до пересечения с прямой, выходящей из центра O и перпендикулярной r_M (см. рис. 5). Из формулы (3) видно, что длина спирали при разворачивании из центра до r_M равна длине отрезка MK.

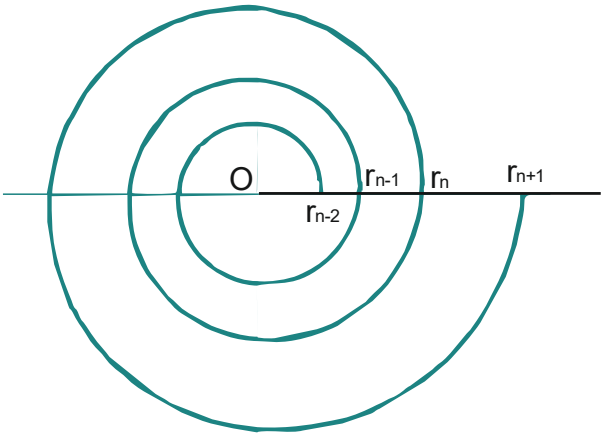

Рис. 4

Площадь, описываемая полярным радиусом от точки L до точки M, равна (см. рис. 5):

$$S_{ML} = \frac{1}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2} r^2\, d\beta = \frac{1}{2k}\int_{r_1}^{r_2} r\, dr = \frac{1}{4}({r_M}^2 - {r_L}^2)\,\mathrm{tg}\,\alpha. \qquad (7)$$

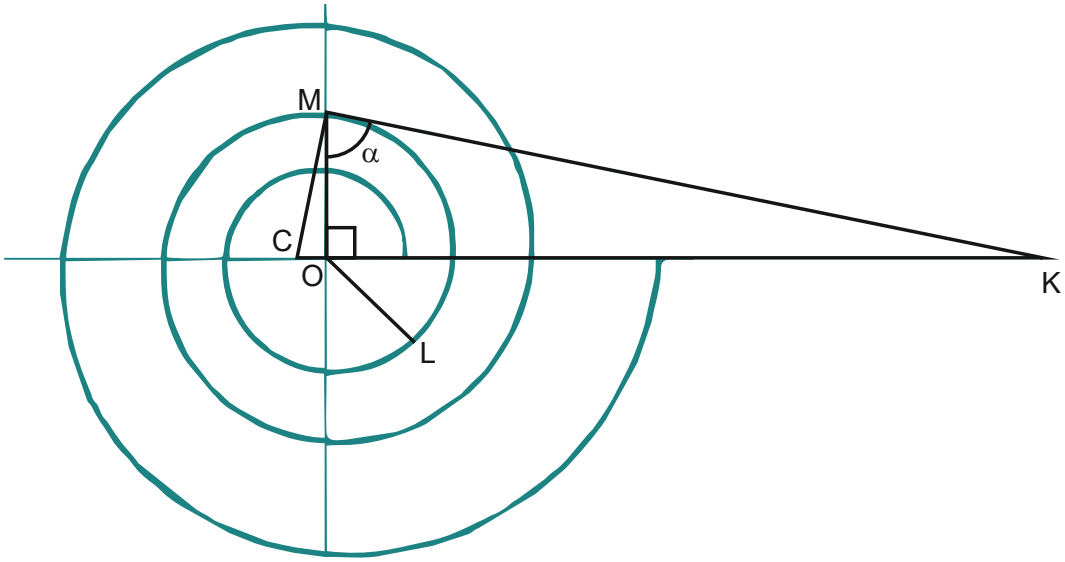

Рис. 5 Площадь сектора, центр и радиус кривизны.

Секториальная площадь, описываемая полярным радиусом при обратном движении от точки М до точки О (бесконечное число кругов) равна половине площади *характеристического треугольника ОМК*:

$$S = \frac{1}{4} {r_M}^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} S_{\Delta OMK} \qquad (8)$$

Площадь одного витка золотой спирали, заключенной между полярными радиусами r_{n-1} и r_n (площадь всей спирали без наложений):

$$S_n = \frac{1}{4} ({r_n}^2 - {r_{n-1}}^2) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\pi}{2m\ln(\Phi)} {r_0}^2 \Phi^{2mn} (1 - \Phi^{-2m}). \qquad (9\ а)$$

При m = 1:

$$S_n = \frac{\pi}{2\ln(\Phi)} r_{n+1} r_{n-2} = \frac{\pi}{2\ln(\Phi)} {r_0}^2 (\Phi^{2n-1}) \qquad (9\ б)$$

Из этой формулы следует, что п*лощадь золотой спирали с m = 1 за один оборот вырастает в Φ^2 раз.*

Радиус кривизны логарифмической спирали будет равен /1/:

$$R = \frac{\left((r')^2 + r^2\right)^{3/2}}{2(r')^2 + r^2 - rr''} = r \frac{\left((k)^2 + 1\right)^{3/2}}{1 + 2k^2 - \frac{r''}{r}} = \frac{r}{sin\alpha}\,. \qquad (10)$$

Если из точки М возвести перпендикуляр к касательной МК, то, как видно из рисунка 5, его пересечение с продолжением отрезка ОК (точка С) даст положение начала радиуса кривизны к точке М.

Один оборот логарифмической спирали очень близок к трем-четырем дугам окружностей различных радиусов, сопряженных общими касательными. И для золотой спирали с m = 4 положение математически вычисленных центров соответствующих четвертей окружностей будет совпадать с положениями точек в методе, предложенным Дюрером (см. рис. 6). В прямоугольнике с соотношением сторон, равном числу Фидия, Дюрер располагает центры окружностей на двух взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через полюс спирали (две пунктирные линии на рисунке), в точках A, B, C, D. Но именно на этих прямых и будут находиться центры кривизны для точек E, F, G, H! Правда, немного ближе к полюсу спирали. А для сопряжения четвертей окружностей по касательным к ним, приходится перенести центры окружностей в точки A, B, C, D. Но реальные точки касания спирали сторон прямоугольника не

находятся в вершинах вписанных квадратов. Более того, если длины сторон прямоугольника – числа, представимые в радикалах, а ось для отсчета полярного угла направлена, например, по AC, то радиус-вектор, тригонометрические функции полярного угла точек касания и расстояния до них от вершин прямоугольника – трансцендентные числа. Т.е. эти точки нельзя получить путем построения с помощью циркуля и линейки. Это следует из того, что тангенс угла поворота спирали есть трансцендентное число, теорем синусов и косинусов и равенства суммы углов треугольника 180^0. Но эти точки так близки к вершинам прямоугольников, как это видно на рисунке 5, что их иногда ошибочно отождествляют. Но, с другой стороны, поскольку расстояния от полюса спирали до вершин, находящихся рядом с точками касания золотой спиралью, образуют геометрическую прогрессию, то существует логарифмическая спираль (с тем же $q = \Phi^4$), на которой они лежат. Но эта спираль будет не касаться сторон золотых прямоугольников, вписанных друг в друга, а пересекать их. Спираль Дюрера аппроксимирует обе спирали, близкие в данном случае, – вписанную и описанную.

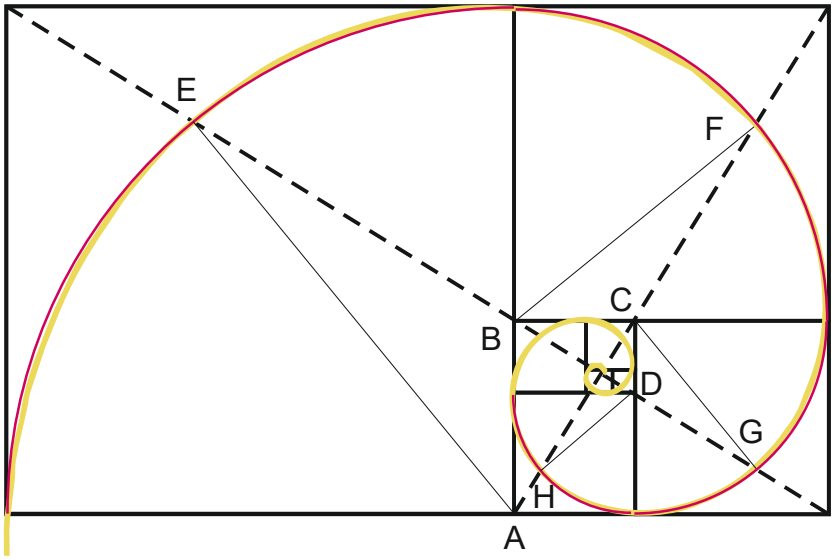

Рис. 6 Сравнение спирали Дюрера (красный цвет) с золотой спиралью при $q = \Phi^4$.

Вписывание золотой спирали в последовательность прямоугольников можно произвести не только для случая $q = \Phi^4$. На рисунке 7 приведено вписывание золотой спирали с $q = \Phi^2$ в последовательность прямоугольников, построенных на золотом треугольнике Кеплера BCD ($BC/CD = \sqrt{\Phi}$) – единственном прямоугольном треугольнике, стороны которого образуют геометрическую прогрессию. У прямоугольников CDEF и DEGH и т.д. отношение сторон также равно $\sqrt{\Phi}$. Пунктирные

гипотенузы BD и CE золотых треугольников (диагонали прямоугольников) пересекаются под прямым углом в полюсе спирали, что определяет способ нахождения первой неизвестной точки E. Все остальные неизвестные стороны прямоугольников строятся из точек пересечения найденных сторон с пунктирными гипотенузами. Отметим, что при вписывании логарифмической спирали в прямоугольник, четыре точки касания его сторон лежат на двух взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через полюс спирали. При вписывании спарили в последовательность прямоугольников, как на рис. 6 и 7, все точки касания лежат на одних и тех же двух перпендикулярных прямых (см. рис. 7).

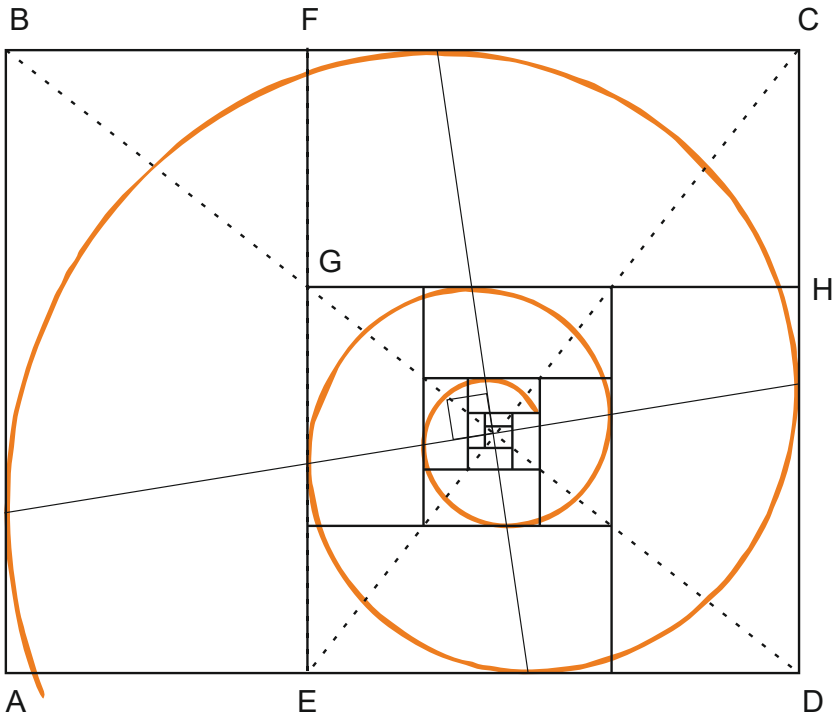

Рис. 7 Спираль с q = Ф^2 и прямоугольники с *a/b* = √Ф.

Но аналогичное вписывание логарифмической спирали в последовательность подобных прямоугольников можно проделать при любом коэффициенте роста q. При этом соотношение сторон прямоугольников будет $q^{0.25}$. Случай q = Ф^4 выделяется только красотой последовательного выделения квадратов.

Можно вписывать логарифмическую спираль и в другие n-угольники. Так на рис. 8 изображены две спирали с q = Ф^3 – вписанная и описывающая последовательность равносторонних треугольников, что тождественно вписыванию (описыванию) в треугольную спираль с углом поворота 120^0 и отношением последовательных сторон равным Ф ($q^{1/3}$) (отмечена красным цветом).

Художники в иллюстрациях, особенно, если они рисуются на бумаге, а не в компьютерной программе, пользуются заменой логарифмической спирали сопряженными дугами окружностей, например, как в случае вписывания спирали в последовательность золотых прямоугольников. Такая замена-аппроксимация сделана для всех спиралей в альбоме, посвященном золотому сечению, венесуэльского иллюстратора Рафаэля Араухо /2/. На рисунке 8 изображены окружности, 120^0 дуги которых аппроксимируют в художественных иллюстрациях эту спираль. Центры этих окружностей совпадают с центрами равносторонних треугольников. Для спирали, изображенной на Рис. 6, положение центров окружностей уже не так легко определить. Обратите внимание, что достаточно один раз разделить сторону равностороннего треугольника золотым сечением, а потом высоты будут автоматически определять (ограничивать) размеры остальных треугольников. Пересечение пунктирных линий, проходящих через вершины, дает положение полюса спиралей.

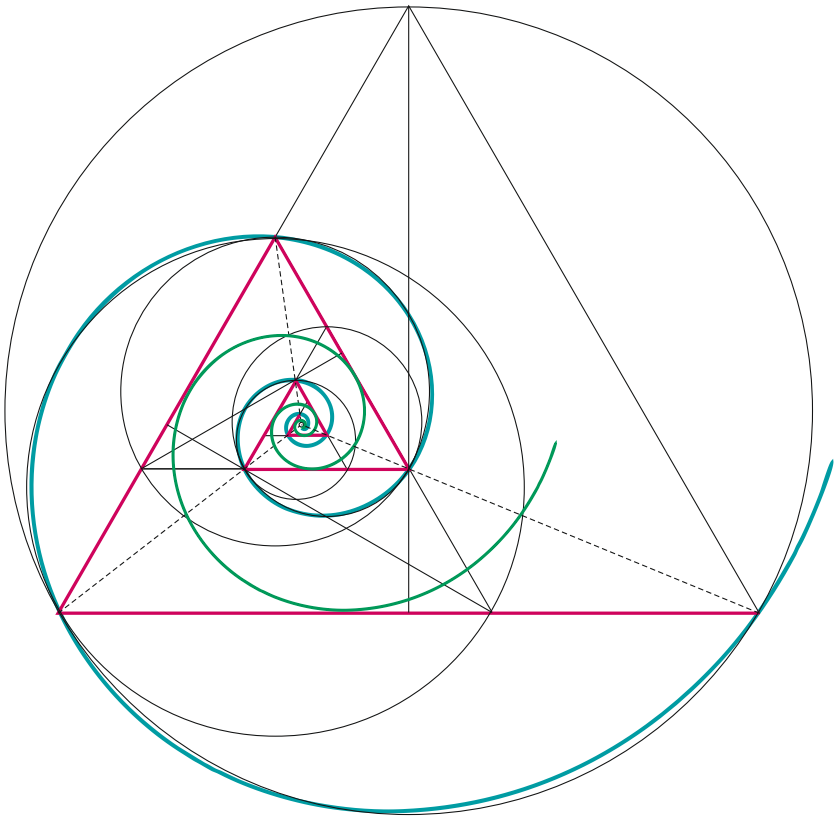

Рис. 8. Спираль с q = Φ^3 и равносторонние треугольники.

Допустим, мы взяли золотой равнобедренный треугольник (с углом при вершине в 36^0 и отношением сторон равном Ф) и на его правой боковой стороне, как на основании, построили еще один такой же (но в Ф раз больший) золотой треугольник. При этом основание первого треугольника стало частью боковой стороны второго, и он

оказался внутри последнего. Повторили эту процедуру несколько раз, всякий раз вращаясь в одну сторону.[5] И теперь мы хотим вписать все эти треугольники в логарифмическую спираль, так чтобы все их вершины лежали на ней, или наоборот – вписать в них спираль. Возникает вопрос: какой коэффициент роста должен быть у таких спиралей? Приведенные примеры уже дают возможность высказать гипотезу. Пусть треугольник ABC вписан в спираль так, что точки A, B и C последовательно лежат на спирали и она не пересекает стороны AB и BC. Тогда: *Если отношение длины BC к AC треугольника равно* $\boldsymbol{a}$*, а угол поворота стороны BC относительно AB равен* $\boldsymbol{\gamma}$*, то существует спираль с коэффициентом роста* $\boldsymbol{q = a^{c}}$*, где* $\boldsymbol{c = 360^{0}/\gamma}$*, проходящая через все три вершины треугольника.* Доказательство этого утверждение будет приведено ниже.

Для золотого треугольника угол поворота равен 108^0 и c = 10/3. На рисунке 9 представлено соответствующее построение для золотых треугольников (спирали золотого и зеленого цветов). Для лучшей видимости закономерностей добавлены высоты и некоторые медианы треугольников. Последние – пунктирные и проходят через полюс спиралей. Отметим, что построенные высоты, проходящие через вершины при основании меньших треугольников, не касаются в них спирали – это иллюзия. Точки O_1 – O_4 – центры дуг, аппроксимирующих спираль в иллюстрациях, а сами дуги изображены голубым цветом.

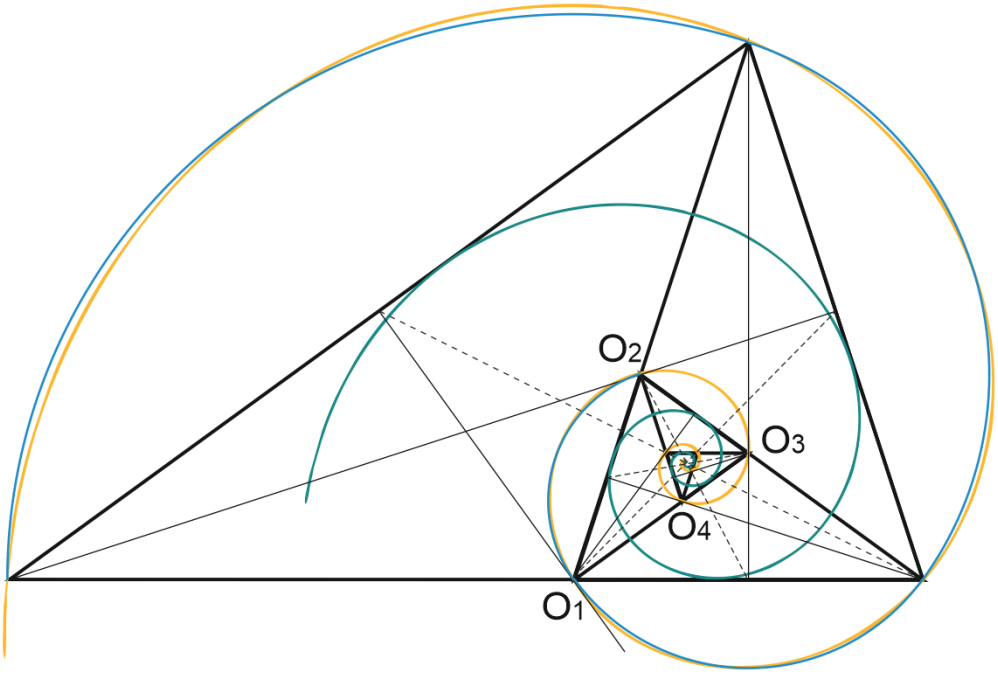

Рис. 9 Равнобедренные золотые треугольники и спирали с q = $\Phi^{10/3}$.

[5] Эту процедуру можно было вести в противоположную сторону, строя последовательно из вершин при основании биссектрисы.

Правило определения коэффициента роста спирали верно для любых треугольников. На рисунке 10 приведена последовательность прямоугольных треугольников Кеплера, образующая прямоугольную спираль, вписанную в логарифмическую спираль с $q = \Phi^2$.

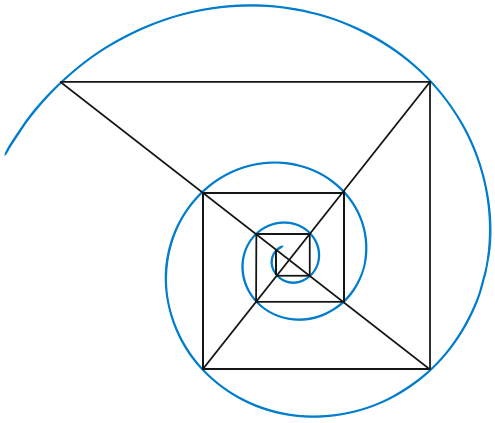

Рис. 10 Треугольники Кеплера, вписанные в спираль с $q = \Phi^2$.

Правило соотношения характеристик n-угольников и логарифмических спиралей можно использовать не только для n = 3. В общем случае *a* – отношение длин последовательных сторон n-угольника, а γ – угол поворота. Если взять последовательность правильных пятиугольников, с отношением сторон, равным Ф, вписать их друг в друга, меняя вершину вписывания против часовой стрелки, то такую конструкцию можно сопрячь со спиралью при $q = \Phi^5$. На рисунке 11 приведено соответствующее построение. Приведены диагонали пятиугольника, демонстрирующие как взаимные отношения пятиугольников, так и положение полюса спирали (на пересечении двух диагоналей любого из пятиугольников).

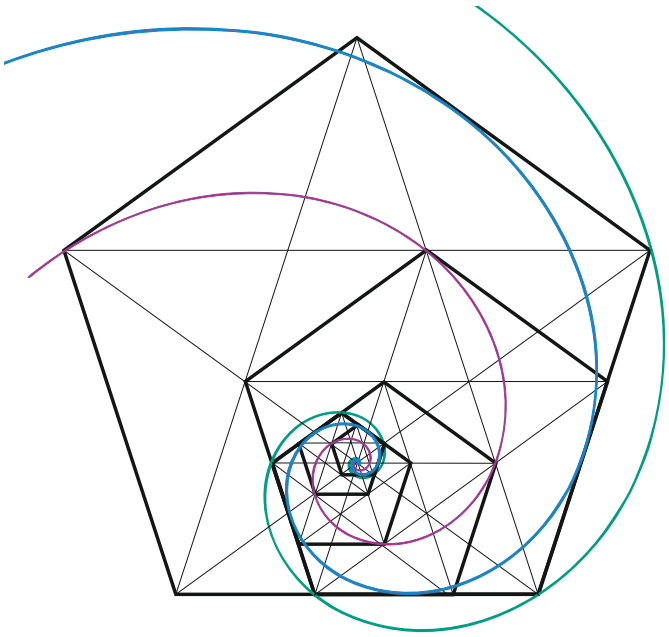

Рис. 11 Пятиугольники и спирали с $q = \Phi^5$.

Если взять треугольник ABC, и на его стороне AB построить подобный изначальному треугольник $A_1B_4C_1$ так, что $A_1C_1 = AB$ (точка B совпадает с C_1), и продолжить эту процедуру, то точка $A=A_1=\ldots$ будет выступать полюсом

логарифмической спирали, проходящей через все вершины C_k, т.к. *повороту радиуса-вектора AC_k на один и тот же угол A будет соответствовать его увеличение в одно и то же число раз.* Действительно, для k-того треугольника можно записать ($A_kB_k = r_k$):

$$r_k = \frac{r_{k-1}\sin C}{\sin(A+C)} = \frac{r_{k-1}}{\cos A + \sin A \cdot \operatorname{ctg} C} = r_{k-1}e^{kA}\ .$$

Откуда, прологарифмировав и воспользовавшись (2), получаем коэффициент роста спирали для заданного треугольника:

$$q = \left(\frac{|AC_1|}{|AC|}\right)^{\frac{2\pi}{A}} = (\cos A + \sin A \cdot \operatorname{ctg} C)^{-\frac{2\pi}{A}} \qquad (11)$$

Если взять, например, треугольник Кеплера при построении такой конструкции из подобных треугольников, у которого $\cos A = \varphi$ и $\operatorname{ctg} C = 0$, то получим уравнение описывающей спирали:

$$r = r_0 \Phi^{\frac{\beta}{\arccos(\varphi)}} \qquad (12)$$

Соответствующее построение приведено на рис. 12.

Расчета q по (11) соответствует введенному выше правилу определения q для полностью вписанного треугольника, поскольку угол A будет равен углу поворота γ (см. рис. 12), и $\frac{|AC_1|}{|AC|} = \frac{|C_2C_1|}{|C_1C|}$. Т.е. его верность доказывает гипотезу-правило для частного случая, когда стороны AB и BC *полностью вписанного* треугольника видны из полюса спирали под одним углом.

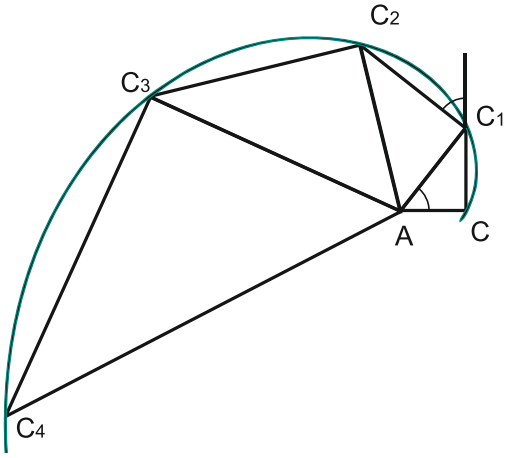

Рис. 12 Треугольники Кеплера

Но все рассмотренные выше примеры удовлетворяют этому условию – подобные вписанные треугольники, имеющие общие стороны, видны из полюса под одним углом. Это приводит к теореме.

Теорема. *Если четыре точки A, B, C и D, лежащие в одной плоскости, являются вершинами двух подобных, но не равных, треугольников с общей стороной BC, причем ∠ABC = ∠BCD, то существует логарифмическая спираль, проходящая через эти*

четыре точки и не пересекающая сторон AB, BC и CD, и эти три отрезка видны из полюса спирали под одним углом.[6]

Доказательство проведем в два этапа. 1) Пусть дан уголок ABC. Существует только одна точка O, из которой отрезки AB и BC видны под одним углом, и треугольники OAB и OBC – подобны.

Доказательство. Из центров отрезков AB и BC проведем перпендикуляр к ним и выберем на них точки O_1 и O_2, с которых отрезки видны под углом 2γ, где γ - угол поворота отрезка BC относительно AB (см. рисунок 13). Проведем окружности с центрами в точках O_1 и O_2 с радиусами O_1A и O_2B – $\omega 1$ и $\omega 2$. Их пересечение даст точку O. Согласно построению отрезки AB и BC видны из точки O под одним углом γ. Т.к. $\gamma + \angle CBO + \angle OBA = 180^0$, то $\angle CBO = \angle BAO$ и треугольники OAB и OBC – подобны.

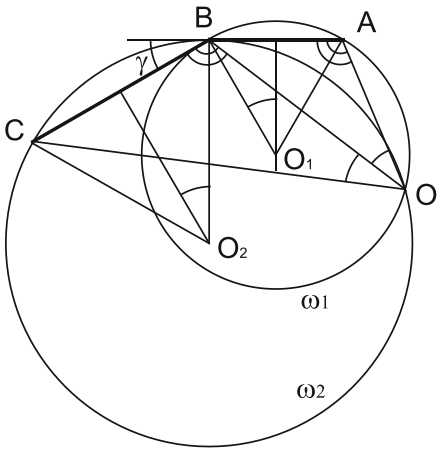

Рисунок 13

2) Построим на отрезке BC треугольник BCD, подобный Δ ABC, как это сделано на рисунке 14. Т.к. ∠ DCB = ∠ CBA и ∠ OCB = ∠ OBA, то ∠ DCO = ∠ CBO. OA/OB = AB/BC = AC/BD, откуда → Δ OAC ~ Δ OBD. Тогда ∠ BOD = ∠ AOC и ∠ COD = γ. Все три отрезка AB, BC и CD видны из точки O под одним углом и треугольники AOB, BOC и COD подобны. Тогда длины отрезков OA, OB, OC и OD образуют геометрическую прогрессию, значит они лежат на одной логарифмической спирали с полюсом O.

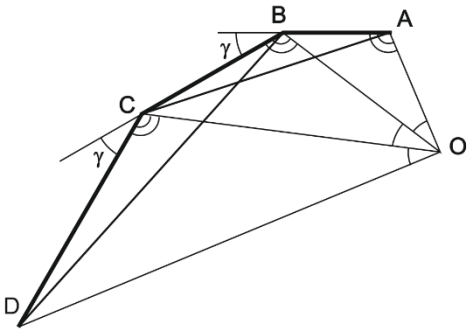

Рисунок 14

Доказанная теорема вместе с выводом (11) являются доказательством верности использованного выше правила определения коэффициента роста спирали. А построение окружностей по рисунку 13 позволяет сразу определить положение полюса спирали.

Из золотых логарифмических спиралей можно строить красивые композиции, удовлетворяющие эстетические требования людей. Так на рисунке 15 приведен «туннель-цветок», сделанный из 10 левых и правых спиралей (один виток) с $q = \Phi^5$,

---

[6] Легко доказать обратное утверждение: *Если на спирали отложить 4 последовательные точки A, B, C и D так, что отрезки AB, BC и CD были видны из полюса под одним углом, то треугольники ABC и BCD – подобны.*

заключенных в круг – почти классический образ для медитаций.[7] Хотя традиционно такие «цветки» делаются двенадцатилепестковыми и вместо спиралей рисуются или отрезки прямых, или дуги окружностей. Но в этих рисунках, если и есть явная отсылка к золотому сечению, то она не поддержана самой конструкцией. В приведенном же случае точки пересечений спиралей, отношения умозрительных радиусов, вписываемые правильные многоугольники – все отсылает к числу Фидия. Так отношение радиусов внешней и внутренней окружностей равно Φ^5. Также приведена простая композиция из пяти правых и левых спиралей (два витка) с $q = \Phi^5$, в которые, как было показано выше, вписываются правильные пятиугольники.

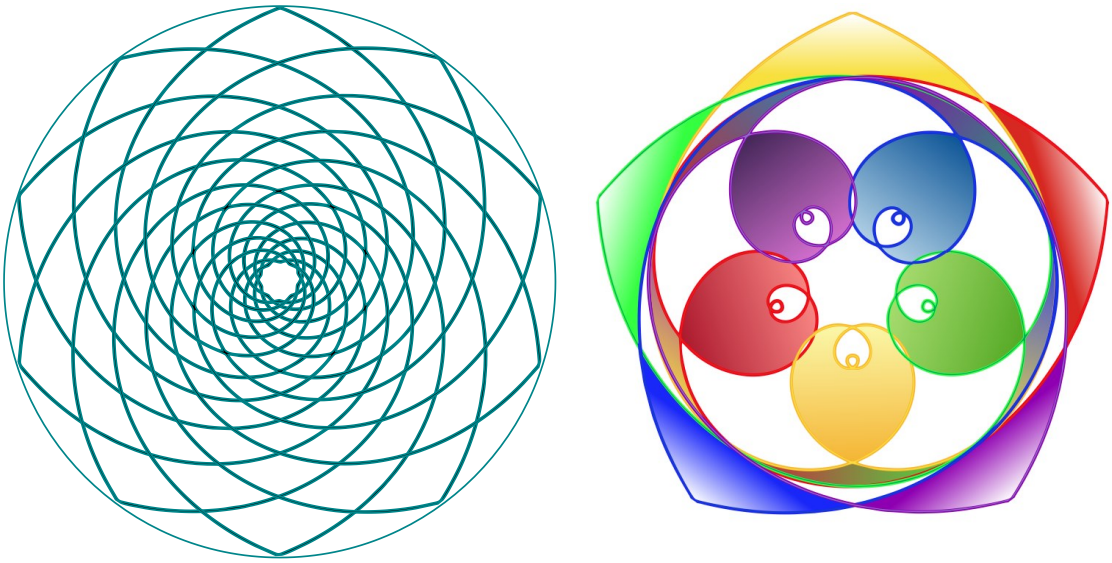

Рис. 15 Две геометрические композиции, сделанный из спиралей с $q = \Phi^5$

Разнообразие таких построений определяется, с одной стороны, силой воображения их создателей, с другой – пониманием, какой коэффициент роста спирали с каким геометрическим построением согласован. И здесь в помощь будет написанное выше. Например, если композицию основывать на золотом равнобедренном треугольнике с углом при вершине в 36^0, то надо воспользоваться спиралями с $q = \Phi^{10/3}$.

Литература

1. Погорелов А.В. Геометрия, М.: Наука, 1983.
2. Rafael Araujo, Golden Ratio Coloring Book, 2016.

[7] Не по такому ли туннелю наши души, как ночные бабочки, полетят после смерти на манящий их свет, самим своим множеством его создавая для одинокой души?..

https://rafaelaraujoart.com/products/golden-ratio-coloring-book

Данная статья является компиляцией из книги «В поисках пятого порядка» с которой можно ознакомиться и приобрести на сайте автора:

http://kovalevandrey.ihostfull.com/Books/Book_1.html

Добавлен формат А5 – цветная версия ч/б книги (ISBN 978-5-4485-3753-0), которую можно будет купить в интернет-магазинах (лучше не ранее августа).

В книге:

сделана замена обозначений F и f на Ф и -φ;

список литературы расширен и заменен на алфавитный;

Изменен порядок подачи материала, в результате чего изменилась и ознакомительная часть;

Добавлены две главы и три приложения.