В поисках математических истин у древних египтян

С.Л. Василенко

Истина – солнце разума...
Л. Вовенарг

Вместо предисловия.

В процессе осмысления-изложения настоящего материала вспомнился один советский анекдот с бородой.

На заре 80-х руководство страны попросило японцев рассчитать на ЭВМ, когда наступит коммунизм? – Получили ответ: «Через пять километров».

Полный ступор и недоумение! Что за километры, откуда, куда? – Попросили пояснить.

Проверяли долго. Включая исходные данные, заложенные в компьютерную программу: отчеты, постановления съездов компартии, решений правительства и проч.

Наконец, дотошные японцы докопались. Вот же у вас черным по белому написано: каждая пятилетка – это шаг к коммунизму. Далее считайте сами...

Коммунизм, ноосферизм и подобные им общественные конструкции – идеальные формации. Либо из области фантастики, либо далеко-далеко за горизонтом.

Теоретически их достижение возможно. Но в виде нескончаемой дороги в дюнах к оазису с неизвестным местонахождением.

Путь к истине ещё дольше. Практически бесконечен.

Язык и мысль ограничены, истина же беспредельна (Л. Вовенарг).

Собственно, сама истина, видимо, состоит именно в движении-пути к ней.

Высшей истинностью обладает то, что является причиной следствий, в свою очередь истинных (Аристотель). – Заколдованный круг без начала и конца...

В то время как проф. А. Стахов порадовал научное сообщество очередным фундаментальным исследованием о Ф- и $Ф^2$-кодах к несбыточному компьютеру Фибоначчи, небольшая, но "въедливая" часть авторского цеха АТ в поисках истины продолжает глубокое погружение в "задачу фараона" или колодец Лотоса.

Мы среди них [1, 2].

Напомним суть... В цилиндрический колодец вдоль его вертикальной плоскости опущены две упругие тростинки длиной 2 и 3 меры. Вверху и в самом низу они касаются боковой поверхности, скрещиваясь над дном колодца на высоте 1 меры – уровне воды. Найти диаметр колодца.

Надо полагать, мера не более современного метра, и погружение в животворящий источник воды относительно безопасно.

Немного геометрии.

В. Говоров небезосновательно сетует [3], что авторы не представили геометрического решения задачи.

Дело в том, что традиционным методом (с помощью циркуля и линейки без делений) "задача фараона" геометрически не разрешима.

Корень кубического уравнения, к которому приводится алгебраическое уравнение четвертой степени, можно найти только аналитически. Построить геометрически его нельзя.

Есть две стези приближения к математической истине.

Первый путь состоит в том, чтобы несколько снизить жесткие требования на чертежные инструменты. В частности, если снять строгое ограничение на линейку и на ней отметить единичную меру, то исходная задача допускает несложное точное решение [1].

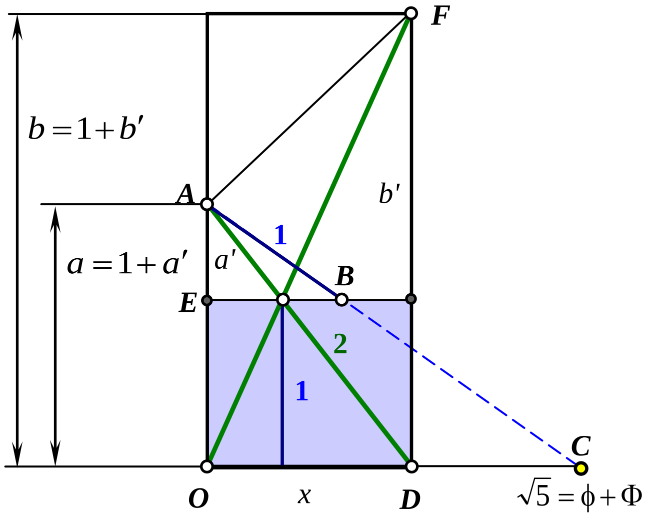
Напомним рисунок (рис. 1). Он же нам понадобится и для идентификации обозначений.

Простые построения изложены в комментариях.

Конечно, такой способ не является классическим, но весьма к нему близок. Поскольку речь идет не вообще о линейке с делениями, а всего лишь отметке на ней одного отрезка принятой меры. Согласитесь, вещь – довольно естественная, когда речь идет о метрическом определении диаметра, который так или иначе нужно будет сравнивать с принятой мерой.

Где ж ей быть, как ни на линейке!?

Второй путь связан с применением линейки без каких-либо отметин и делений. Но, увы, допускает лишь приближенные решения. Третьего просто не дано.



Любым из возможных способов строим горизонтальный отрезок $OC = \sqrt{5}$.

Параллельно ему на высоте 1 проводим другую горизонталь через точку E.

Отметим на линейке (или на тростинке длиной 3) отрезок с единичной мерой.

Через точку C проведем прямую AC так, чтобы единичный отрезок линейки в точности занял положение $AB = 1$.

С центром в найденной точке A раствором 2 циркуля отмечаем точку D.

Отрезок OD – искомый диаметр колодца.

С центром в точке O раствором 3 циркуля отмечаем точку F на вертикали к точке D.

Задача полностью реконструирована.

Рис. 1. Геометрическое решение задачи фараона с помощью циркуля и линейки с отметкой единичной меры

Немного аналитики.

Профессор А. Шелаев нашел [4] интересные функции одной переменной, которые аппроксимируют значение искомого диаметра D колодца при $x = D$.

В частности, функция $W(x) = 1 + \frac{1}{10}\left[\frac{a(x)}{b(x)} + \frac{b(x)}{a(x)}\right]$ дает значение $W(D) \approx D$ с точностью десятичной дроби до семи первых цифр, $a(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $b(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

Профессор предложил посостязаться в её улучшении с присвоением «звания Магистр-Теург Ордена Математических Магов». – Любопытное и заманчивое предложение.

Однако, немного поразмыслив, мы пришли к такому заключению.

А для чего собственно нужны подобные аппроксимации диаметра Лотоса с многосложным сочетанием функций $a(x), b(x)$, которые в свою очередь непростым образом (в виде радикалов) зависят от x?

Сдается, это напоминает спортивный бег на месте, который не дает движения вперед.

Во-первых, строгое аналитическое решение уже известно [1].

Во-вторых, его сложная аппроксимация ни на йоту не приближает нас к пониманию мудрости античных ученых, которые работали в условиях ограниченного набора математических средств того времени.

В-третьих, чтобы найти приближенное значение диаметра, в качестве аргумента самой функции должен фигурировать искомый диаметр D – иррациональное число. То есть для приближения к истине нужно априори знать саму истину. Почти как у великого Аристотеля.

В таком контексте наилучшая "аппроксимация" имеет вид $W(x) = x$, которая дает идеальное решение $W(D) = D$. Как говорится, не мудрствуя лукаво.

Вместе с тем мы нашли более простую форму с участием функций $a(x), b(x)$:

$$W(x) = \frac{a(x) + b(x) + 8}{10}.$$

Она следует из соотношения

$$\tilde{\boldsymbol{D}} = \mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}'}{\mathbf{10}} \approx \mathbf{1{,}2311852.} \qquad (1)$$

Отклонение $W(D)$ от истинного значения D = 1,2311857... начинается с седьмого знака после запятой. Как и в статье проф. А. Шелаева [4]. Но есть принципиальное отличие.

Для нас важна не функция $W(x)$ с её порочным кругом нахождения приближенного значения диаметра по его истинному значению (?).

Более значимой является простая геометрическая интерпретация равенства (1):

десятая часть суммы проекций "сухих" частей тростинок $a' + b'$ на вертикаль плюс мерная (единичная) проекция их "мокрых частей" позволяет оценить иррациональное значение диаметра D с точность до семи значащих цифр.

Поразительно!

Хотя для египетских геометров вполне посильный способ подобного представления в измерительно-вычислительном и описательно-демонстративном плане.

С их умением вычислять и описывать десятую часть меры.

Наш респект профессору за его "погружение в колодец" и выполненные машинные эксперименты. Хотя осталось непонятным, в чём же суть его обобщений в данной задаче?

Возвращаясь к геометрии.

Путем сопоставления подобных треугольников и площадей квадратов, построенных на проекциях "сухих" и "мокрых" частей тростинок, в нашей работе [2] получена простая расчетно-приближенная формула для диаметра колодца

$$\tilde{D} = \sqrt{2^2 - \left(1 + 1/\sqrt{3}\right)^2} \approx 1{,}230. \qquad (2)$$

Она позволяет записать решение через исходные числовые параметры (1 2 3) поставленной задачи, поставив запятую в нужном месте:

$$\boxed{\mathbf{1\ 2\ 3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{1{,}2\,3}}\,.$$

Или на языке древнеегипетской формы аддитивного отображения:

$$1{,}23 \;=\; 1 + \overline{10} + \overline{10} + \overline{100} + \overline{100} + \overline{100}\,.$$

То есть, *одна* мера + *две* десятых меры + *три* сотых меры.

Если в качестве меры принять нынешний метр, то расчетный диаметр 1,230 меньше истинного значения всего лишь на один миллиметр. На такой длине практически не заметно.

Для обозначения десятой и сотой меры египтяне использовали специальные знаки.

Но остается вопрос, могли ли они выполнять соответствующие геометрические построения? – Особенно с учетом квадратного корня из трех и последующего корня из разности чисел.

Сегодня нам многое известно о проявлениях этого корня.

Так, иррациональное число $1/\sqrt{3}$ в формуле (2) является:

- косинусом угла наклона бокового ребра к основанию правильного тетраэдра;
- синусом угла наклона диагонали куба к его основанию.

Древние египтяне не оперировали тригонометрическими функциями, но умели оценивать подобные отношения, о чём свидетельствуют их знания в архитектуре.

Кроме того, квадратный корень $\sqrt{3}$ также есть:

− численное значение площади поверхности правильного тетраэдра (треугольной пирамиды) с единичным ребром;

− тангенс 60° или отношение высоты к половине основания правильного треугольника;

− расстояние между параллельными сторонами правильного шестиугольника с единичными сторонами;

− длина диагонали куба с единичной стороной;

− длина стороны равностороннего треугольника, вписанного в окружность с единичным радиусом.

Соответственно, $1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$ – одна треть тех же величин.

Вполне ожидаемые вещи для зодчих пирамид. По крайней мере, некоторые из них.

Непрерывная (цепная) дробь $1/\sqrt{3}$ содержит повторяющуюся пару параметров (1, 2).

Ещё один штрих. Построим три одинаковые окружности со сдвигом вправо на пол радиуса и нарисуем прямоугольник: основания через точки пересечения окружностей и боковые стороны, как касательные (рис. 2).

Отношение сторон в точности равно $1:\sqrt{3}$.

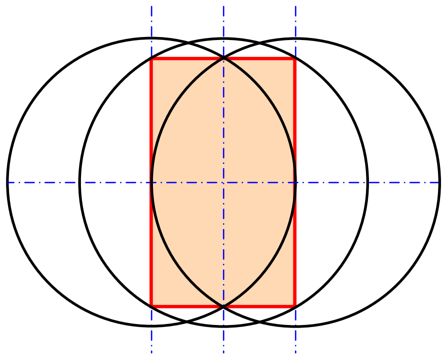


Рис. 2. Демонстрация квадратного корня из трех с помощью трех окружностей

Вернемся снова к формуле (2).

Заменим в ней разность квадратов: $2^2 - \left(1+1/\sqrt{3}\right)^2 = \left(3+1/\sqrt{3}\right)\cdot\left(1-1/\sqrt{3}\right)$.

Квадратный корень из данного произведения – есть среднее геометрическое двух отрезков (длин). Для его геометрического построения нужно построить окружность на сумме данных отрезков как на диаметре. Перпендикуляр, восстановленный из точки их соединения до пересечения с окружностью, даст искомую величину.

Итак, строим окружность радиусом короткого прута 2 или диаметром 4 меры (рис. 3).

Путем несложных построений последовательно через диагональ квадрата $\sqrt{2}$ чертим отрезок $\sqrt{3}$ и находим его третью часть, которую отнимаем от 1.

Полученный отрезок длиной $1-\sqrt{3}/3$ откладываем от конца диаметра и проводим перпендикуляр до пересечения с окружностью – он же искомый диаметр $D \approx 1{,}230$.

Есть и другое простое, но более точное приближение с погрешностью $0{,}2$ мм:

$$\tilde{D} = 1+2/\left(5\sqrt{3}\right) = 1+(2/15)\sqrt{3} \approx 1{,}231\,.$$

Именно о геометрическом построении отрезка такой длины говорил В. Говоров [3].

Здесь ещё проще. Например, рисуем прямоугольный треугольник с катетами 1 и $\sqrt{3}$. Его гипотенуза равна 2, острый угол – 30 градусов. На большем катете стандартным образом выделяем $2/15$ части и прибавляем к меньшему катету.

Или в кубе с единичной стороной выделяем на диагонали $\sqrt{3}$ пятую часть, на которой далее отмечаем две три, которые прибавляем к 1. Получаем всё те же 1,231.

И так далее...

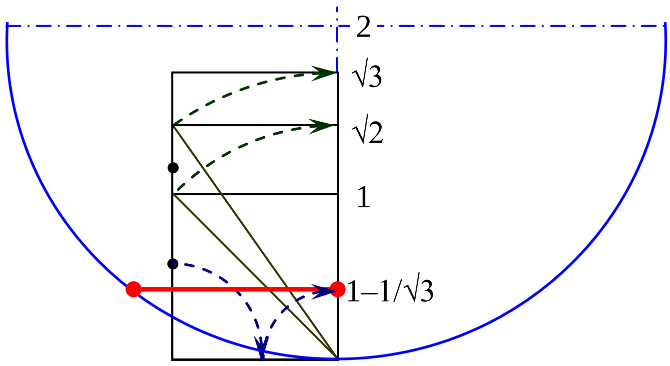


Рис. 3. Примерный способ построения диаметра колодца $D \approx 1{,}230$

Вместо заключения.

Решить "задачу фараона" с изумительной точностью в простом виде (1), если оно было у египтян именно таковым, – выше нашего понимания. Как и уразуметь величие Бога.

Невольно начинаешь уверовать в привнесение знаний пришельцами из Космоса.

Мы долго думали над вопросом, откуда получается такая точность.

Из каких численных отношений-закономерностей она следует.

Или, вероятно, здесь обычное случайное совпадение. – Ответ пока не нашли.

Видимо, он так и останется сокрытым в глубине колодца Лотоса, которого, возможно, никогда и не было. Но, как оказалось, его мифический образ способен будоражить умы наших современников. Своей простотой, изяществом и высоким математическим вкусом.

Aeternae veritates…

Используемые источники:

1. Василенко С.Л. Тест-задача египетских фараонов для колодца Лотоса // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 23457, 07.06.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163321.htm.

2. Василенко С.Л. В отражении воды колодца Лотоса: древние египтяне и наши современники // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 23498, 22.06.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163333.htm.

3. Говоров В.И. И гдѣ нынѣ Возъ? // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 23495, 21.06.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163331.htm.

4. Шелаев А.Н. Инварианты, соотношения гармонии и нетривиальные экстремальные зависимости для предлагаемой обобщенной задачи "Колодец Лотоса" // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 23488, 18.06.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163330.htm.