А.Н. Шелаев **сведения об авторе**

ИНВАРИАНТЫ, СООТНОШЕНИЯ ГАРМОНИИ И НЕТРИВИАЛЬНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ПРЕДЛАГАЕМОЙ ОБОБЩЁННОЙ ЗАДАЧИ «КОЛОДЕЦ ЛОТОСА»

В данной статье, являющейся развитием работ автора [1,2], найдены нетривиальные соотношения в предлагаемом обобщении исходной задачи «Колодец Лотоса», сформулированной согласно одноимённому рассказу писателя-фантаста А.П. Казанцева в 8–м веке до н. э. Для исходной геометрической фигуры - трапеции был установлен ряд соотношений, в которых сумма длин отрезков (или их комбинаций) численно равна произведению слагаемых. При изменении геометрии вырождение снимается и эти равенства перестают выполняться. Однако в то же время найдены инварианты, сохраняющиеся при возможных изменениях исходной геометрии. Кроме того, обнаружены нетривиальные функции от комбинаций параметров, имеющие экстремумы при исходной геометрии. Одна из таких функций имеет максимум 2-й производной и ноль 3-й производной. В физике 3-я производная равна нулю, напр., при отсутствии изменения ускорения, в математике – при отсутствии изменения кривизны кривой. Установлена связь данной задачи с геометрией фронтальных сечений Великих пирамид Гизы, созданных в 25 веке до н.э. и исследовавшихся в частности, в работах автора статьи [3,4]. Предложены идеи новых проблемных задач-мистификаций, которые можно назвать «Чашами Лотоса», «Пирамидами Сириуса».

Задача о «Колодце Лотоса» обычно формулируется следующим образом. В цилиндрическом колодце находится слой воды высотой h в одну единицу длины. Две тонкие тростинки длиной $L_1 = 3$ и $L_2 = 2$, одними концами упираются в дно колодца, а другими концами опираются на его стены. Тростинки пересекаются на уровне h находящейся в колодце воды и находятся в вертикальной плоскости, проходящей через диаметр дна колодца. В исходной

задаче требуется найти этот диаметр D при данном уровне воды $h = 1$.

В данной статье будем считать, что $h \neq const = 1$, при этом диаметр будет переменной величиной $D = x$ Для решения задачи используем чертёж, показанный на рис. 1. $AC = L_1 = 3$ - первая тростинка, $CD = L_2 = 2$ - вторая тростинка, $KM = h(x)$ - высота уровня воды, $CD = x$ - диаметр колодца.

Кроме того, введём также следующие обозначения $BC = a(x) = \sqrt{2^2 - x^2}$, $AD = b(x) = \sqrt{3^2 - x^2}$, $KC = c(x)$, $KD = d(x)$, $\angle KCM = \alpha(x)$, $\angle KDM = \delta(x)$, $\angle NBF = \beta(x)$, $CM = y(x)$, $BM = z(x)$, при этом $y(x) + z(x) = x$.

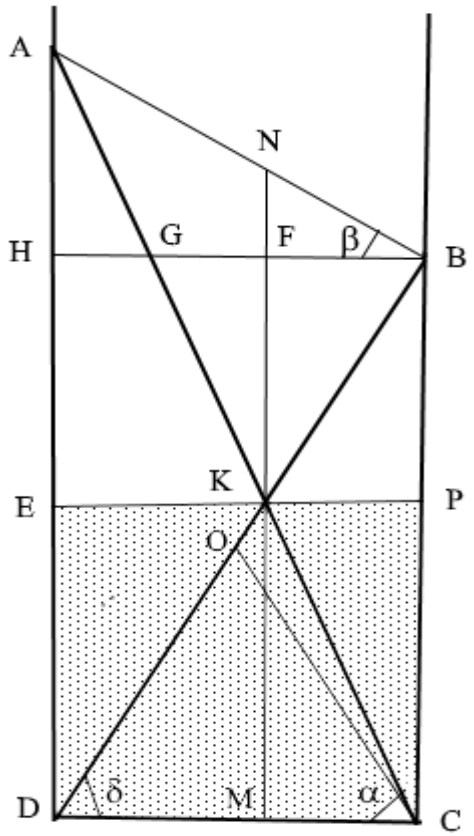

Рис. 1

С учётом того, что $AD \parallel BC$, $ABCD$ - трапеция с прямыми углами при вершинах C, D: $\angle ADC = \angle BCD = 90^o$. При этом длина отрезка MN, параллельного основаниям AD, BC и проходящая через точку пересечения диагоналей AC, BD, определяется средним гармоническим длин оснований:

$$MN = 2BC \cdot AD / (AD + BC) = 2ab / (a + b) = 2, \quad ab = a + b, \quad 1/a + 1/b = 1 \qquad (1),$$

то есть, несмотря на то, что a, b - иррациональные числа, их среднее гармоническое равно целому числу 2, и поэтому произведение чисел a, b равно их сумме, а $NK = MK = h = 1$! Используя же подобие треугольников ACD и KCM, BDC и KDM можно показать, что высота уровня воды

$$h(x) = a(x) \cdot b(x) / [a(x) + b(x)] \qquad (2),$$

Для исходной задачи при $h = 1$ получаем, что $a \cdot b = a + b$ и учёт величины уровня воды не даёт новой информации, уже содержащейся в соотношениях (1).

Используя результаты статьи [2], укажем общие формулы для нахождения любых средних величин, а также то, какими отрезками определяются базовые средние значения двух величин a, b в произвольной трапеции.

В общем случае средние n-го порядка k величин m_p $(1 \le p \le k)$ задаются выражением $M(n, m_p) = [\sum_{p=1}^{k} m_p^n / k]^{1/n}$. Обычно используются 5 средних: гармоническое M_H $(n = -1)$, геометрическое M_G $(n \to 0)$, арифметическое M_A $(n = 1)$, квадратичное M_S $(n = 2)$ и кубичное M_C $(n = 3)$ (M - Mean, H – Harmonic, G – Geometric, A – Arithmetic, S – Square, C – Cubic).

Любая трапеция является геометрической моделью для рассматриваемого нами случая средних двух величин a и b $(a \le b)$ - длин меньшего и большего оснований трапеции (рис. 2). Тогда, как указано в [2], средние a, b равны длинам отрезков, получаемых при пересечении определяемых ниже прямых, параллельных основаниям трапеции, с боковыми сторонами:

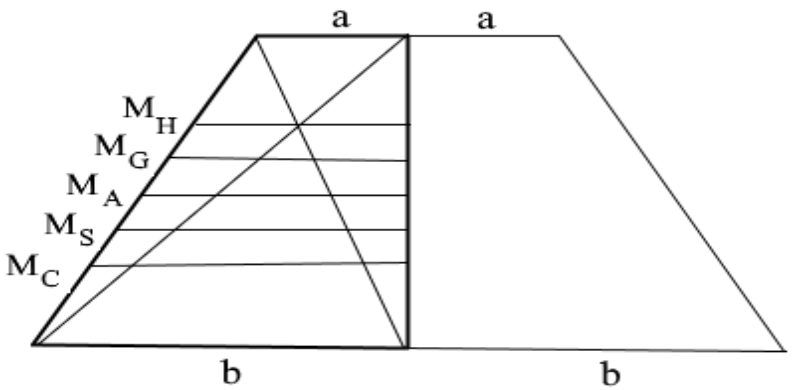

Рис. 2

$M_H = 2/(1/a + 1/b) = 2a \cdot b/(a+b)$ - прямая проходит через точку пересечения диагоналей трапеции; $M_G = \sqrt{a \cdot b}$ - прямая делит трапецию на две подобные трапеции; $M_A = (a+b)/2$ - прямая равно отстоит от оснований трапеции; $M_S = \sqrt{(a^2+b^2)/2}$ - трапеции равны по площади; $M_C = \sqrt[3]{(a^3+b^3)/2}$ - равны объёмы усечённых конусообразных фигур, площади оснований которых равны соответственно $\pi b^2/4$, $\pi M_C^2/4$ и $\pi M_C^2/4$, $\pi a^2/4$, а высоты равны расстояниям отрезка M_C до оснований трапеции.

Аналогично M_C через равенство псевдо n-мерных объёмов можно ввести средние $M_n = \sqrt[n]{(c^n+d^n)/2}$ и для всех n. При этом $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = b$, $\lim\limits_{n\to-\infty} M_n = a$.

Укажем также, что в приведённых ниже соотношениях для базовых средних двух величин

$$M_H = 2c \cdot d/(a+b) \le M_G = \sqrt{a \cdot b} \le M_A = (a+b)/2 \le$$

$$\le M_S = \sqrt{(a^2+b^2)/2} \le M_C = \sqrt[3]{(a^3+b^3)/2} \qquad (3),$$

а все средние оказываются равными при $b = a$, когда трапеция превращается в прямоугольник.

С учётом написанного выше при $h = 1$ помимо соотношений (1) были получены и другие нетривиальные точные соотношения гармонии, прежде всего, по средне гармоническим величинам. При этом для детального анализа данной задачи были введены следующие 4 параметра:

$$q_1(x) = a(x)/b(x), \quad q_2(x) = (c(x)/3)/(b(x)/2), \quad q_3(x) = y(x)/z(x)$$

$$q_4(x) = [a(x)-1] \cdot b(x)/[b(x)-1] \cdot a(x) \qquad (4)$$

При $h = 1$, как показали расчёты и полученные графические зависимости, приведённые на рис. 3, эти параметры «вырождаются», т.е. все они становятся равными одному значению $q \approx 0{,}576\,128\,710\,976$.

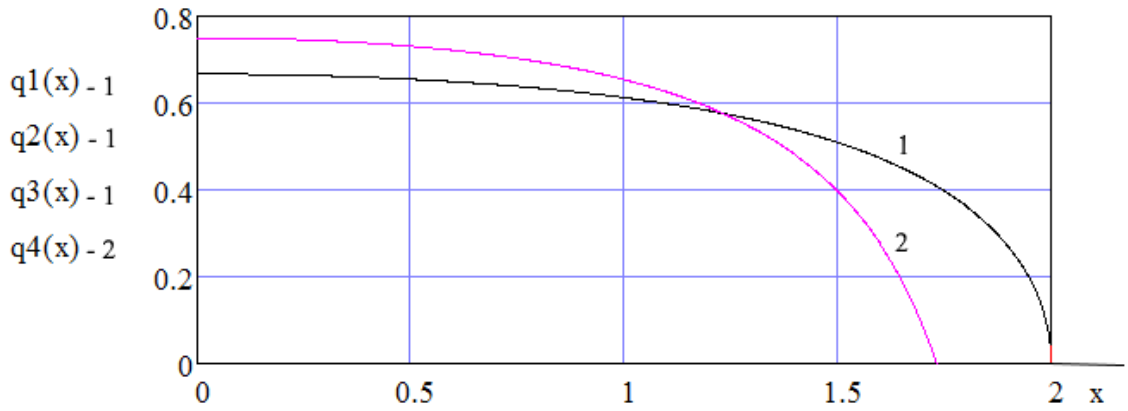

Рис. 3

Для исходной геометрии с учётом (1), равенства $b^2 - a^2 = 5$ найдены следующие комбинационные соотношения:

$$2 = 2(3/c)\cdot(2/d)/(3/c + 2/d) = 2,\ (3/c)\cdot(2/d) = 3/c + 2/d,\ c/3 + d/2 = 1 \quad (5)$$

$$[(a/(a-1)]\cdot[b/(b-1)] = a/(a-1) + b/(b-1) = 2 + q + 1/q \quad (6),$$

$$a/(a-1) = 1/q + 1, \quad b/(b-1) = 1 + q, \quad (a-1)/a + (b-1)/b = 1 \quad (7),$$

$$q = a/b = (a-1)(b-1)/ab = (c/3)/(d/2) = c\cdot\cos\alpha/d\cdot\cos\delta = tg\delta/tg\alpha \quad (8),$$

$$a = 2/d, \quad b = 3/c, \quad b\cdot c/a\cdot d = 3/2, \quad (c/3)\cdot(d/2) = 1/(a+b) \quad (9),$$

$$b - a = 5/(b+a) = 5cd/6, \quad d\cdot(2-d)/c\cdot(3-c) = 1 - (\sqrt{5}/3)^2 \quad (10),$$

$$(a-1)^2 + [\sqrt{5}(a-1)/a]^2 = 1, \quad 1/(b-1)^2 + (\sqrt{5}/b)^2 = 1 \quad (11),$$

$$(1+q)\cdot(1+1/q) = (1+q) + (1+1/q), \quad q^2 + [\sqrt{5}/(1+1/q)]^2 = 1 \quad (12)$$

При этом прежде всего отметим, что в полученных выражениях числа 2, 3, 5 точно выражаются через симметричные константы золотого сечения ϕ, Φ:

$$\phi = (-1+\sqrt{5})/2,\ \Phi = (1+\sqrt{5})/2,\ 2 = \phi\cdot\Phi + \Phi\cdot\phi,\ 3 = \phi^2 + \Phi^2,\ 5 = (\phi+\Phi)^2 \quad (13)$$

Исходя из найденных соотношений (1)-(12) были получены следующие алгебраические уравнения для основных отрезков на рис.1 при $h = 1$:

$$D^8 - 22D^6 + 163D^4 - 454D^2 + 385 = 0 \qquad (14),$$

$$a^4 - 2a^3 + 5a^2 - 10a + 5 = 0 \qquad (15),$$

$$b^4 - 2b^3 - 5b^2 + 10b - 5 = 0 \qquad (16),$$

$$80\,c^4 - 480c^3 + 720c^2 + 864c - 1296 = 0 \qquad (17),$$

$$5d^4 - 20d^3 + 20d^2 - 16d + 16 = 0 \qquad (18)$$

Однако решить эти уравнения древние жрецы вряд ли могли, поскольку, во-первых, как показал в 1824 г. выдающийся математик Н. Абель корни алгебраических уравнений 5-й и высших степеней не выражаются в общем случае через радикалы. Во-вторых, хотя уравнение (14) для неизвестной D^2 сводится к уравнению 4-й степени, но и формулы для корней уравнений 3-й и 4-й степени были впервые опубликованы Д. Кардано в трактате «Великое искусство» также в новое время в 1545 г.

Если предположить, что среди жрецов были выдающиеся счётчики, такие как гениальный индийский математик Сравасу Рамунаджан (1887-1920), который даже без калькулятора получал сложнейшие и изумительные по красоте числовые соотношения, то можно предположить, что жрецы могли получить соотношения, которые были получены в данной статье из общих интуитивных соображений.

При этом мной использовалась следующая идея. Искомая величина диаметра x должна получаться с помощью некоторых красивых функций $F(a(x), b(x)) = x$ или $G(c(x), d(x)) = x$ поскольку в найденные соотношения (1)-(12) переменные $a(x), b(x)$ и $c(x), d(x)$ входят красивым симметричным образом. И эта идея принесла плоды !

В итоге из «воздуха» были получены следующие изящные аппроксимации

искомого диаметра $D \approx 1,231185\,723\,779$ с точностью в 4 и 7 значащих цифр:

$$D_{4a,b}(x) = 1/a(x) + 1/b(x) + [1/a(x)]\cdot[1/a(x)], \qquad D_{4a,b}(D) \approx 1,231\,918\,279$$

$$D_{4c,d}(x) = c(x)/3 + d(x)/2 + c(x)\cdot d(x)/(2\cdot 3), \qquad D_{4c,d}(D) \approx 1,231\,918\,279$$

$$D_{7a,b}(x) = 1 + [a(x)/b(x) + b(x)/a(x)]/(2\cdot 5), \qquad D_{7a,b}(D) \approx 1,231\,185\,196$$

$$D_{7c,d}(x) = 1 + [2c(x)/3d(x) + 3d(x)/2c(x)]/(2\cdot 5), \qquad D_{7c,d}(D) \approx 1,231\,185\,196$$

Графики указанных аппроксимирующих функций показаны на рис. 4.

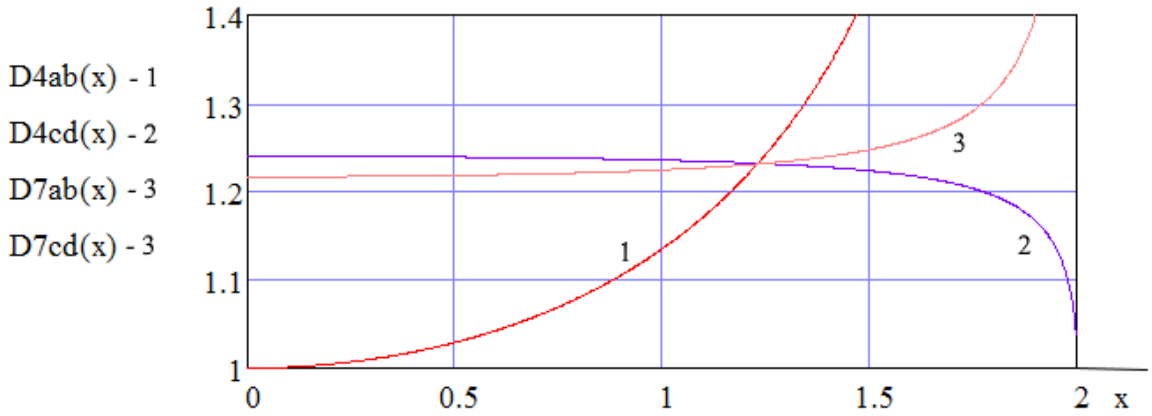

Рис. 4

Следует подчеркнуть, что, функции $D_{7a,b}(x)$ и $D_{7c,d}(x)$ (кривые 3 на рис.4) совпадают ! И, главное, графики всех аппроксимирующих функций пересекаются при x с высокой точностью равных диаметру колодца D !!

Анализ обобщённой задачи при произвольных значениях диаметра x позволил также установить ряд инвариантных комбинаций параметров, равных постоянному значению при всех допустимых x, в том числе:

$$Inv1 = a(x)\cdot z(x)/b(x)\cdot y(x) \equiv 1, \qquad Inv2 = c(x)/3 + d(x)/2 \equiv 1 \qquad (19),$$

$$Inv3 = c(x)\cdot z(x)/d(x)\cdot y(x) \equiv 3/2, \qquad Inv4 = b(x)\cdot c(x)/a(x)\cdot d(x) \equiv 3/2 \qquad (20)$$

В связи с обнаружением инвариантов для придания функциям $D_{7a,b}(x)$ и $D_{7c,d}(x)$ «совершенно гармоничного» вида число 1 в них можно заменить на любой из инвариантов (19), а числа 2, 3, 5 на их изящные выражения (13) через

константы золотого сечения ϕ, Φ.

Особый интерес представляло нахождение функций, имеющих экстремум при $x \approx D$. И такие функции были найдены.

В качестве примера на рис. 5 показан график функции, имеющей минимум и, соответственно, ноль 1-й производной при $x \approx D$.

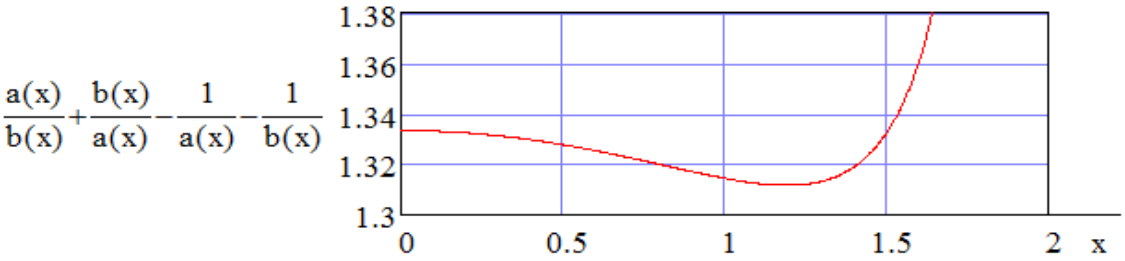

Рис. 5

На рис. 6 показан график функции, у которой обращается в ноль 3-я производная при $x \approx D$, как это показано на рис. 7 .

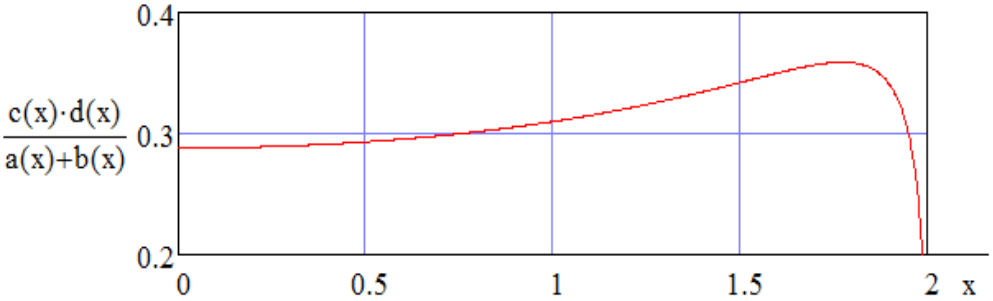

Рис. 6

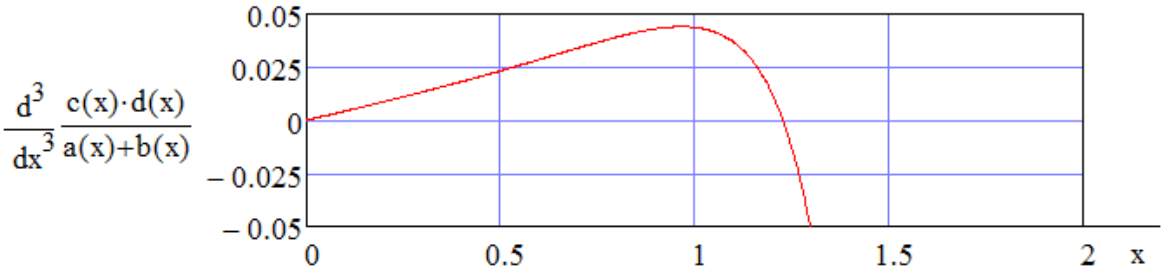

Рис. 7

Укажем, что в физике 3-я производная равна нулю, напр., при отсутствии изменения ускорения, в математике – при отсутствии изменения кривизны кривой.

Отметим также, что максимум функции $c(x)\cdot d(x)/[a(x)+b(x)]$ (см. рис. 6) реализуется при x, близких ко 2-му действительному корню уравнения (14): $D_2 \simeq 1{,}873163554$.

Наконец, укажем, что тригонометрические функции от базовых углов $\alpha \approx 65{,}770\,334\,344^{o}$, $\delta \approx 52{,}004\,988\,671^{o}$ в исходной задаче (см.рис.1) связаны следующими точными соотношениями:

$$\cos\alpha / \cos\delta = 2/3, \qquad \mathrm{tg}\delta / \mathrm{tg}\alpha = q \qquad (21),$$

при этом интригующим совпадением явилось то. что угол δ с высокой относительной точностью $\sim 10^{-3}$ оказался близким к углам наклона боковых граней Великих пирамид Гизы – Хеопса, Менкаура и Хефрена (так, для пирамиды Хеопса этот угол примерно равен $\mathrm{arctg}\sqrt{\Phi} \approx 51{,}827\,292\,372^{o}$) [3,4]. Причём, как принято сейчас считать, эти пирамиды были построены примерно 2500 лет до н.э., т.е. на почти 17 веков раньше формулировки задачи «Колодец Лотоса» египетскими жрецами.

Аналог половины фронтального сечения пирамид (см. рис. 2) получается при повороте трапеции $ABCD$ (см. рис. 1) вокруг точки D против часовой стрелки на 90°. При этом у пирамиды Хеопса фронтальное сечение имеет вид именно трапеции, поскольку у этой пирамиды, высота которой должна составлять ≈ 146 м, отсутствует верхняя пирамидальная часть высотой ≈ 10 м .

Продолжение работ [3,4] по анализу геометрии Великих пирамид с учётом результатов, полученных для «Колодца Лотоса» будет выполнено в отдельной статье, посвящённой «Чашам Лотоса» и «Пирамидам Сириуса».

В заключение предлагаю устранить важные недостатки в «трагедийном» рассказе А.П. Казанцева, М.Сиянина [5], в котором новым кандидатам в жрецы давалась одна и та же задача, а нерешивший её погибал.

В «оптимистическом» сценарии нужно будет находить функции, всё более точно аппроксимирующие значения диаметра. При этом каждый новый рекордсмен будет удостоен звания Магистр-Теург Ордена Математических

Магов. Стартовыми функциями будут найденные выше функции $D_{7a,b}(x)$ и $D_{7c,d}(x)$, аппроксимирующие диаметр с точностью в 7 значащих цифр.

Одним из направлением поиска может служить нахождение функций $W(x)$, скомбинированных для начала из 4-х функций $a(x), b(x), c(x), d(x)$ и удовлетворяющих «простым» функциональным уравнениям следующего общего вида: $W(a(x), b(x), c(x), d(x)) = x$ при $x = D$.

Можно использовать также и следующие алгебраическо-геометрические соотношения, полученные в данной статье:

$$(a-1)^2 + [\sqrt{5}(a-1)/a]^2 = 1, \qquad [1/(b-1)]^2 + (\sqrt{5}/b)^2 = 1 \qquad (22),$$

$$q^2 + [\sqrt{5}/(1+1/q)]^2 = 1 \qquad (23)$$

Соотношения (22),(23) описывают прямоугольные треугольники с гипотенузой, равной 1, и катетами, определяемыми через одну из 3-х величин – a, b, q.

Желаю всем кандидатам на звания Магистра-Теурга и Жреца удачи !

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ1

1. *А.Н.Шелаев*. Решение «неразрешимой» задачи египетских жрецов «Колодец Лотоса» без нахождения корней уравнений 8-й и 4-й степени. www.trinitas.ru. Академия тринитаризма, Эл., № 77-6567, публ. 23438, 01.06.2017. – С.1-6.

2. *А.Н. Шелаев*. Обобщённая геометрическая модель золотых сечений и функций средних значений. www.trinitas.ru.Академия тринитаризма, Эл., № 77-6567, публ. 17511, 08.06.2012. – С.1-9.

3. *А.Н. Шелаев*. К раскрытию геометрических и физических тайн Великих пирамид и их возможных аналогов. www.trinitas.ru. Академия тринитаризма, Эл., № 77-6567, публ. 21783, 13.02.201. – С.1-17.

4. *А.Н. Шелаев*. К установлению причин различия геометрических и физических параметров Великих пирамид. www.trinitas.ru. Академия тринитаризма, Эл., № 77-6567, публ. 21962, 07.04.2016. – С.1-14.

5. *А.Казанцев, М.Сиянин*. «Колодец Лотоса». В сб. «На суше и на море», вып. 15, 1975.