Золотоносные круговые конструкции: локсодромия, покрытия

С.Л. Василенко

Контакт с автором: texvater@rambler.ru

Рассмотрены закономерности бесконечной локсодромической последовательности касающихся кругов Кокстера, которая восходит ещё к Декарту. Радиусы таких кругов образуют геометрическую прогрессию с отношением $\Phi+\sqrt{\Phi}$ *на основе константы золотого сечения* Φ. *Нечто золотого поля для целующихся кругов. Сочетание чисел* $(\Phi, \sqrt{\Phi})$, *в свою очередь, присуще золотому треугольнику Кеплера. Исследована проблематика покрытия круговой области единичного радиуса* n *одинаковыми кругами.*

Оглавление

Введение в тему 1
Локсодромические круги 2
Целочисленные радиусы 4
Локсодромические сферы 5
Треугольные мотивы 7
Вокруг проблемы о пяти кругах 7
Покрытие единичного круга 8
Дважды два – пять? 11
Литература 11

Хорошему танцору любой круг не тесен

Введение в тему

Феномен золотого сечения (ЗС) в силу своего образования, прежде всего, имеет непосредственное отношение к математическим объектам. К сожалению, авторы-золотоискатели в последние несколько десятилетий перевели этот увлекательнейший предмет исследования в сферу, весьма отдаленную от истинного содержания ЗС.

На ощупь рассекают произведения искусства. Произвольно режут на части архитектурные сооружения. Как заблагорассудится, кромсают музыкальные произведения. Непостижимо реструктуризируют стихотворные формы.

И так далее. И так далее.

Чего только стоит несчастная голова египетской царицы Нефертити, которую некто испестрил сплошной паутиной всевозможных золотых сечений.

Хотя, нужно признать, что её неестественно удлиненно-вытянутая форма голова весьма далека от гармоничных канонов. Почему и прикрыта убором-одеянием.

Мы не собираемся как-то препятствовать такому необычному золотоносному энтузиазму и увлечению, похожему на развлечение.

Уважение к свободе человека выражено в известной пословице: «Вольному – воля, а спасенному – рай». Да и мечтать – полезно. Куда вреднее – не мечтать.

В конечном счете, предпочтения человека – за ним самим. Он ответствен за свой выбор и пожинает плоды этого выбора. А наши желания не всегда производят нужные действия. Как известно, благими побуждениями <намерениями> выложена дорога в ад.

Тем не менее, смысловые нагрузки "золотой лихорадки" просматриваются весьма слабо, что со временем неизбежно приведет к её неизбежному естественному угасанию.

Ибо многое там делается не то чтобы, походя. Но как-то уж всё на глазок и без надлежащего обоснования.

На том же художественном полотне или звездном небосводе можно провести миллиарды разнообразных золотых спиралей с разным шагом. Ну, и что с того?

Кроме того, константа золотого сечения абсолютна в своих уникальных свойствах.

Можно сказать, это фундаментальная мировая константой наивысшего порядка.

Поэтому её проявление в различных структурах также должно быть абсолютным.

Хотя бы с точностью до исчисления радикала √5 в обычных компьютерах.

Иначе нет смысла "городить огород".

Другими словами, золотоносность некоторой конструкции или структуры может быть признана таковой, если константа ЗС фигурирует в ней явно на уровне точных вычислений.

В настоящей работе рассматриваются именно такие математические конфигурации объектов. С подобающей геометрической и алгебраической трактовкой.

Локсодромические круги

В "Божественной комедии" Данте Алигьери ад представляет собой девять кругов. Математики спокойно оперируют с бесконечным множеством кругов. И ничего...

Так, в геометрии известна бесконечная *локсодромическая последовательность касающихся кругов Кокстера*, которая по замыслу восходит ещё к Декарту. В основе термина лежит *локсодрома* (локсодромия) – кривая на поверхности вращения, пересекающая все меридианы под постоянным углом. Или линия постоянного курса.

Круги Кокстера устроены так, что любые четыре последовательных круга взаимно касаются попарно [1, 2].

То есть каждый круг в последовательности касается трех кругов, которые ему предшествуют, а также трех кругов, которые следуют за ним.

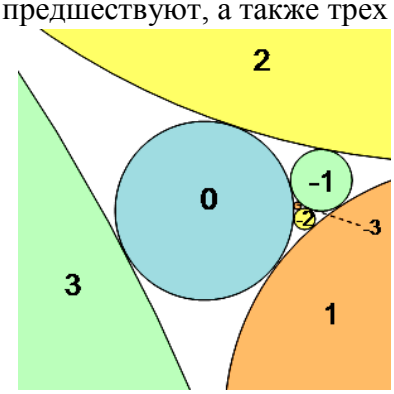


Рис. 1. Демонстрация локсодромических кругов

Например (рис. 1), круг 0 касается как последующих (1, 2, 3), так и предыдущих кругов (–1, –2, –3).

Радиусы кругов образуют геометрическую прогрессию $\ldots R_{-n}, \ldots R_{-1}, R_0, R_1, \ldots, R_n, \ldots$.

Любая конфигурация из четырех последовательных кругов отвечает "круговой" теореме Декарта (1643) [3, 4]:

если четыре круга взаимно касаются в плоскости, то их кривизны $b_j = 1/R_j$, $j = \overline{1,\ 4}$ соотносятся между собой согласно равенству

$$2\sum b_j^2 = \left(\sum b_j\right)^2.$$

Эту закономерность иногда называют «теоремой целующихся кругов» (URL: wikipedia.org/wiki/Descartes'_theorem).

Вместо понятия кривизны английский радиохимик и лауреат Нобелевской премии «Содди предпочитал более простой термин *изгиб* <bend>, используемый в его поэме "The Kiss Precise" – "точный поцелуй", где есть такие стихи» (in Nature, June 20, 1936) [5, с. 31]:

Четыре круга встретились в поцелуе
И тот, который меньше, тот больше изогнут.
Изгиб – это обратная величина
Для расстояния от центра.
Хотя Евклид молчал об их интригах,
Правило большого пальца теперь не нужно.

Изгиб равен нулю у прямой линии
И отрицателен у вогнутой,
А сумма квадратов четырех изгибов
– Это половина квадрата их суммы.

Таким образом, коэффициент (знаменатель) прогрессии радиусов $v = R_{n+1}/R_n$ и его обратная величина удовлетворяют алгебраическому уравнению [6]

$$2\cdot\left(1+v^2+v^4+v^6\right)=\left(1+v+v^2+v^3\right)^2.$$

Данное уравнение сравнительно легко преобразуется

$$v^6-2v^5-v^4-4v^3-v^2-2v+1 \;=\; \left(v^2+1\right)\cdot\left(v^4-2v^3-2v^2-2v+1\right) =$$
$$=\left(v^2+1\right)\cdot\left[v^2-\left(\sqrt{5}+1\right)v+1\right]\cdot\left[v^2+\left(\sqrt{5}-1\right)v+1\right] \;=\; \left(v^2+1\right)\cdot\left(v^2-2\Phi v+1\right)\cdot\left(v^2+2\phi v+1\right)$$

и приводит к следующим действительным и мнимым корням:

$$\lambda_{1,2}=\pm i;$$

$$\lambda_{3,4} \;=\; \Phi\pm\sqrt{\Phi} \;\approx\; (2{,}890\;\;0{,}346);$$

$$\lambda_{5,6} \;=\; -\phi\pm\sqrt{-\phi} \;\approx\; -0{,}618\pm 0{,}786\,i\,.$$

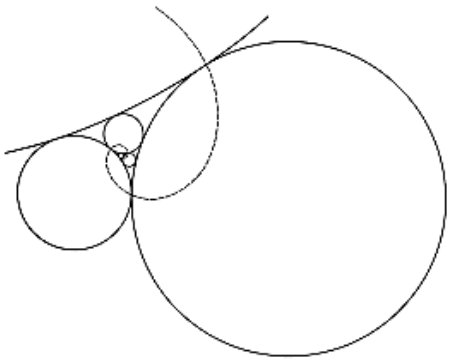
Здесь $\Phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}618$ – константа золотого сечения, $\phi=\Phi^{-1}=\Phi-1$; $i=\sqrt{-1}$.

Как и следовало ожидать, положительные корни взаимно обратимы:

$$\lambda_3\cdot\lambda_4 \;=\; \Phi^2-\Phi \;=\; 1 \quad\Rightarrow\quad \lambda_4=1/\lambda_3\,.$$

Таким образом, радиусы кругов в своей последовательности образуют геометрическую прогрессию с отношением $v=\Phi+\sqrt{\Phi}$ – на основе константы золотого сечения Φ.

Центры окружностей в последовательности лежат на логарифмической (равноугольной) спирали. Как и точки касания.



При обозрении спирали из её центра угол между центрами последовательных кругов составляет

$$\beta=\arccos(-\phi)\frac{180}{\pi}\approx 128{,}17^{\circ}\,.$$

Если косинус угла равен $\cos\beta=-\phi$, то его синус $\sin\beta=\sqrt{\phi}$.

Тогда $e^{i\beta}=-\phi+i\sqrt{\phi}$.

Оказывается, $e^{\pm i\beta}$ – корни уравнения $x^2+2\phi x+1=0$.

Центры кругов лежат на спирали в полярных координатах с радиус-вектором точки $r=e^{\theta\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha}$, где θ – текущий угол отклонения точки от нуля, $\mathrm{ctg}\,\alpha$ – коэффициент, отвечающий за густоту спиральных витков.

Вид из "центра" на локсодромию напоминает улитку. Возникает ощущение, будто смотрим сквозь лист, в глубину, пространство. – Некий бесконечный "винт".

Угол α дается равенством $x=e^{\beta\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha}$, то есть [7]:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\beta}{\ln x} = \frac{\arccos\left(-\Phi^{-1}\right)}{\ln\left(\Phi+\sqrt{\Phi}\right)} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 64{,}62^{\circ}.$$

Напомним, что логарифмическая спираль обладает замечательным свойством восстанавливать свою форму после различных преобразований.

Описанная конструкция названа в честь геометра Дональда Кокстера, который обобщил двумерный случай на последовательности сфер более высоких размерностей [7].

Гарольд Скотт Макдональд Кокстер (или Дональд Кокстер) – выдающийся канадский геометр, 1907–2003. Его часто называют «The man who saved geometry» – человеком, который спас геометрию. В 1959 г. на одной из конференций Ж.Дьедоне (из основателей группы Бурабаки), произнес печально известную фразу "Смерть Треугольникам!" Её подхватило поколение молодых математиков, пытаясь уничтожить геометрию на благо алгебры. Возможно, они добились бы своего, если бы не Дональд Кокстер.

Целочисленные радиусы

Локсодромическую последовательность кругов δ_n, где каждые четыре последовательных круга взаимно касаются, можно сформировать на базе целых значений их радиусов.

Так, целочисленное расстояние между δ_0 и δ_n кругами (или δ_m и δ_{m+n} для любого m) выражается формулой [8, 9]:

$$d_n = 2(d_{n-1} + d_{n-2} + d_{n-3}) - d_{n-4}.$$

Данная рекуррентная форма образует ряд (A045821) [10]: –1, 1, 1, 1, 7, 17, 49, 145, 415, 1201, 3473, 10033, 28999...

Четыре корня характеристического полинома $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1$ всё также равны:

$$\Phi \pm \sqrt{\Phi}, \qquad -\Phi' \pm \sqrt{-\Phi'},$$

где $\Phi' = 1 - \Phi = -\phi$.

Согласно теореме Бернулли (о последовательном приближении корней) предельное отношение соседних членов последовательности d_n сходится к своему аттрактору – наибольшему по модулю корню:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \Phi + \sqrt{\Phi} \approx 2{,}890 .$$

По аналогии с известной формулой Муавра–Бине для чисел Фибоначчи F, представляет безусловный интерес явная формула Кокстера [8] на основе биномиальных коэффициентов C_n^m.

$$d_n = \sum_{k=0}^{\lceil n/2 \rceil} C_n^{2k} \cdot F_{n-k-2} ,$$

где $C_n^m = \binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ – число сочетаний из n по m;

$\lceil \xi \rceil$ – целая часть от величины ξ.

Локсодромические сферы

Рассмотренный плоскостной вариант последовательности касающихся кругов является наиболее простым частным случаем взаимно касающихся $N+2$ гиперсфер в N-мерном Евклидовом пространстве ($N \geq 2$), кривизны которых удовлетворяют общему равенству [7]

$$N\sum b_j^2 = \left(\sum b_j\right)^2, \tag{1}$$

где выполняются суммирования $N+2$ слагаемых.

Произведя вычитание двух равенств с разной начальной индексацией

$$N\left(b_0^2+\ldots+b_{N+1}^2\right)-(b_0+\ldots+b_{N+1})^2=0,$$

$$N\left(b_1^2+\ldots+b_{N+2}^2\right)-(b_1+\ldots+b_{N+2})^2=0,$$

можно избавиться от квадратов

$$(b_0-b_{N+2})(Nb_0+Nb_{N+2}-b_0-2b_1-2b_2-2b_{N+1}-b_{N+2})=0.$$

Приняв $b_0 \neq b_{N+2}$, имеем

$$(N-1)(b_0+b_{N+2})=2(b_1+b_2+\ldots+b_{N+1}).$$

Конечно, любопытно сравнить поведение локсодромических объектов в плоскости и трехмерном пространстве (N = 3).

Численное расстояние между сферами в локсодромической последовательности сфер, в которой каждый пять последовательных сфер имеют взаимные контакты, описывается формулой (после деления на 2 и изменения индексной нумерации):

$$D_n=(D_{n-1}+D_{n-2}+D_{n-3}+D_{n-4})-D_{n-5},$$

образуя ряд (A027674) [10]: –1, 1, 1, 1, 1, 5, 7, 13, 25, 49, 89, 169, 319, 601, 1129, 2129...

Характеристический полином $x^5-x^4-x^3-x^2-x+1$ этого разностного (возвратного) уравнения имеет явный отрицательный корень –1.

Остальные корни для сокращенного полинома $x^4-2x^3+x^2-2x+1$ легко находятся путем деления на x^2 и замены $y=x+x^{-1}$:

$$x^2-2x+1-2x^{-1}+x^{-2} = \left(x^2+x^{-2}\right)-2\left(x+x^{-1}\right)+1 = \left(y^2-2\right)-2y+1 = y^2-2y-1,$$

откуда $y_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$.

Окончательно имеем

$$x^5-x^4-x^3-x^2-x+1 = (x+1)\cdot\left[x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+1\right]\cdot\left[x^2+\left(\sqrt{2}-1\right)x+1\right].$$

Сравните с полиномом для кругов:

$$x^4-2x^3-2x^2-2x+1 = \left[x^2-\left(\sqrt{5}+1\right)x+1\right]\cdot\left[x^2+\left(\sqrt{5}-1\right)x+1\right].$$

Итак, все корни уравнения для локсодромической последовательности сфер равны:

$$-1, \quad \lambda\pm\sqrt{\lambda-q'}, \quad \lambda'\pm\sqrt{\lambda'-q'},$$

где $\lambda = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}207$ – положительный корень квадратного уравнения $x^2 - x - q = 0$, $q = \dfrac{1}{4}$ или среднеарифметическое стороны квадрата 1×1 и его диагонали $\sqrt{2}$; $\lambda' = 1 - \lambda$, $q' = 1 - q$.

Предельное отношение соседних членов последовательности D_n сходится к своему аттрактору – наибольшему по модулю корню:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_{n+1}}{D_n} = \lambda + \sqrt{\lambda - q'} = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \approx 1{,}883.$$

Исходя из простого анализа, довольно легко просматривается взаимосвязь форм для кругов и сфер (рис. 2).

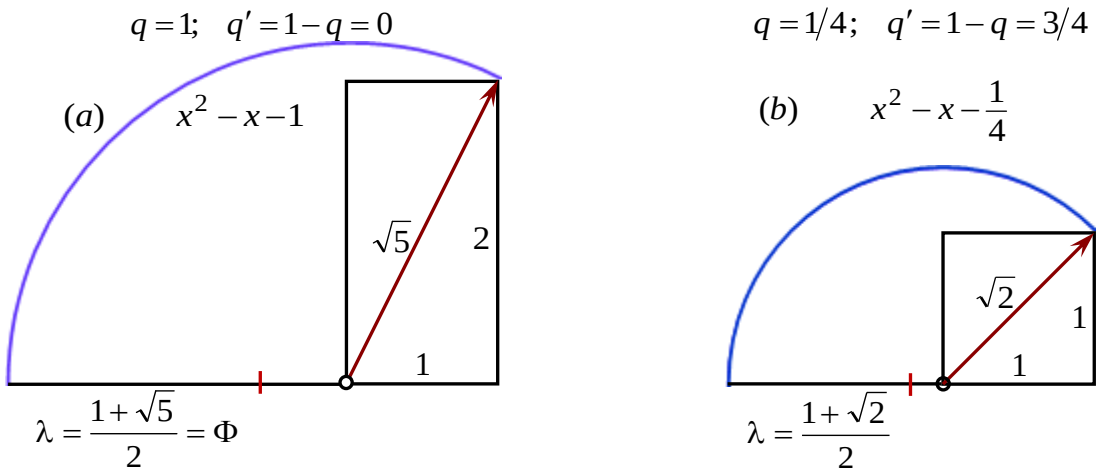


Рис. 2. Построение подосновы λ для аттракторов $\lambda + \sqrt{\lambda - q'}$ численного расстояния между кругами (a) и сферами (b) в их локсодромической последовательности

Построение очень простое.

Сначала радиусом-диагональю фигуры проводится окружность до горизонтали – оси абсцисс.

Затем полученный отрезок (единица плюс радикал) делится пополам.

Только в случае кругов $q = 1,\ q' = 0$.

Соответствующий "золотой" корень $\lambda = \Phi$ численно равен среднеарифметическому меньшей стороны прямоугольника $1:2$ и его диагонали $\sqrt{5}$.

Примечательно, что в полной записи уравнение (1) преобразуется так, что содержит мнимые корни с их представлением через константу золотого сечения:

$$3\left(1+q^2+q^4+q^6+q^8\right) - \left(1+q+q^2+q^3+q^4\right)^2 = 2\left(q^2 - \phi q + 1\right)\left(q^2 + \Phi q + 1\right)\left(x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1\right).$$

Произведение сопряженных комплексных корней триномов $q^2 - \phi q + 1$ и $q^2 + \Phi q + 1$ по теореме Виета равно 1.

То есть своими уникальными свойствами числа золотого сечения как бы понижают степень исходного уравнения, приводя его к более простому виду и выводя на окончательное решение $\lambda + \sqrt{\lambda - q'} \approx 1{,}883$.

Всё это невольно подводит к мысли о глубинном присутствии золотого феномена Ф в локсодромии касающихся кругов и сфер.

Возможно, имеет прикладную часть в иных областях знаний.

Не случайно, Дональд Кокстер – один из немногих профессиональных математиков, который уделяет внимание золотому сечению в своей геометрии [5, с. 236–252].

Треугольные мотивы

Итак, известная в геометрии локсодромическая последовательность касающихся кругов Кокстера в своем строении зиждется на константе золотого сечения. Радиусы последовательных кругов образуют геометрическую прогрессию с отношением $v = \Phi + \sqrt{\Phi}$.

Нечто золотого поля для целующихся <касающихся> кругов.

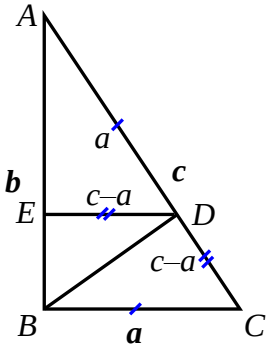


Рис. 3. "Золотой" треугольник Кеплера

Сочетание двух чисел $(\Phi, \sqrt{\Phi})$, в свою очередь имеет необычное проявление в треугольной тематике [11].

Так, к "золотоносному аттрактору", имеющему более выраженную преемственно-онтологическую связь с ЗС, можно отнести прямоугольный "золотой" треугольник, описанный в работе [12] на языке пропорций: гипотенуза c так относится к меньшему катету a, как этот катет относится к его дополнению $c-a$ до гипотенузы (рис. 3).

Из подобия треугольников ΔABC и ΔABD вытекает еще одна альтернативная пропорция: больший катет (высота) b "золотого" треугольника является средним геометрическим между его гипотенузой c и меньшим катетом a.

В литературе по пирамидам его называют Δ Кеплера или Δ Прайса [13].

Это единственный прямоугольный треугольник, стороны которого образуют геометрическую пропорцию $c:b = b:a$ и вытекающую из этого геометрическую прогрессию сторон $a:b:c = 1:\sqrt{\Phi}:\Phi$ [14].

Вокруг проблемы о пяти кругах

Симметрия пятого порядка стала визитной карточкой золотой пропорции, а теперь и квазикристаллов [15, 16] с их Нобелевской премией по химии за 2011 год.

На это опосредованно указывает и численное значение золотой константы $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$, обусловленной иррациональным корнем из пяти.

Прямая линия, проходящая через точки перегиба кварта-полинома четвертой степени, образует три конечных отрезка с золотыми пропорциями [17]. Но уже общее алгебраическое уравнение пятого порядка теряет подобную гармоничность и, по всей видимости, именно из-за этого неразрешимо в радикалах согласно теореме Абеля–Руффини.

Возможно, продолжая подобный "пятизвездочный ряд", в математике прижилась ещё одна задача, именуемая как проблема пяти кругов [18, 19].

Она соотносится с общей теорией покрытия поверхностей и имеет непосредственное отношение к золотоносной проблематике.

Покрытие (cover) в математике – это семейство множеств, объединение которых содержит данное множество.

Замощение (tessellation) – разбиение (на блоки или части) без каких-либо накладок и пробелов.

Задачи на планиметрические разрезания, разбиения, покрытия и замощения становятся предметом изучения уже в старших классах школы [20].

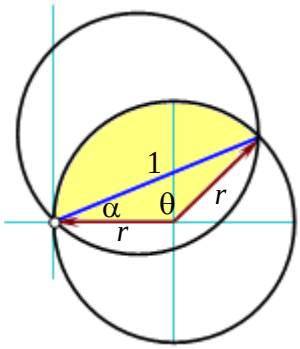
Сегодня трудно сказать однозначно, почему проблема пяти кругов возникла именно в увязке с пятью геометрическими фигурами.

С таким же успехом и не менее интересно смотрятся варианты, в которых присутствует произвольное число n кругов.

Поэтому вполне рационально сразу рассматривать решение задачи в общем случае. Тем более что оно не сложное.

Покрытие единичного круга

Итак, требуется найти r – минимальный радиус n одинаковых кругов, расположенных симметрично относительно фиксированного центра и покрывающих круговую область единичного радиуса.



Очевидно, что в такой постановке центры n кругов размещаются в вершинах правильного n-угольника.

Радиус покрываемого круга будет равен расстоянию от центра до точки пересечения двух соседних окружностей.

Угол α как половина центрального угла правильного n-угольника равен π/n.

Соответственно угол $\theta = \pi - 2\pi/n$ (см. рисунок)

Тогда единичный радиус окружности покрытия равен ширине кругового сегмента и составляет $1 = 2r\sin\frac{\theta}{2}$.

Откуда находим искомый радиус n кругов

$$r_n = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{n-2}{n}\right). \qquad (1)$$

Например, для 3, 4, 5 и 6-угольников углы $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{n-2}{n}$ составляют 30, 45, 54, 60 градусов, а радиусы соответственно 1, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\phi = \Phi^{-1}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

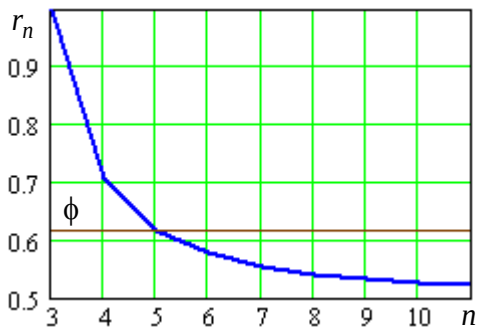


Рис. 4. Радиусы n одинаковых кругов, покрывающих круговую область единичного радиуса

Центры окружностей располагаются в точках

$$x_j = r\cos\varphi, \qquad y_j = r\sin\varphi,$$

где $\varphi = 2\pi\frac{j-1}{n}$, $j = \overline{1, n}$.

В частности, **круг единичного радиуса покрывается пятью одинаковыми окружностями, радиус которых равен малой константе золотого сечения**

$$r_5 = \phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}6180.$$

Золотое сечение возникает в связи с регулярным пятиугольником.

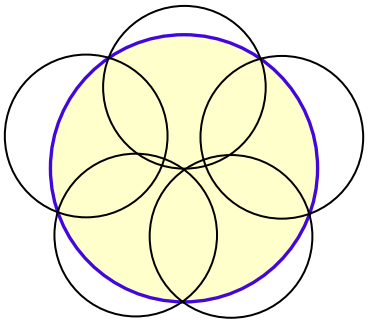
С увеличением количества окружностей n их радиус стремится к 0,5 (рис. 4 – 5).

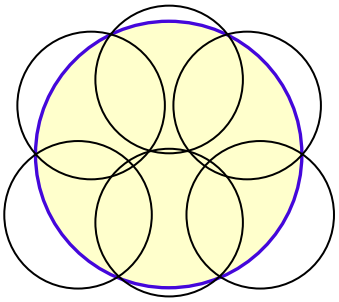
Примечателен один момент.

Если опустить требование о симметричном расположении малых окружностей относительно центра, то задача приобретает иное решение.

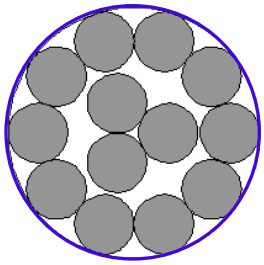
Так, минимальный радиус для пяти кругов может быть немного уменьшен 0,609383... (*Neville*, 1915) [21] за счет более растянутого совмещения фигур.

Аналогично шесть кругов располагаются иным образом с радиусом $r \approx 1{,}798$ (*K.Bezdek*, 1979).



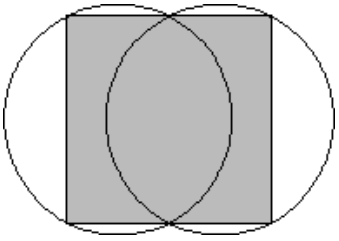


Описанная задача на покрытие не является единственной в своей области, когда воочию проявляется константа золотого сечения [22].



Например, рисунок (слева) показывает, как 13 единичных кругов пакуются внутри минимально возможного круга [23] радиусом $r = 2 + \sqrt{5} = \Phi^3$.

Другой рисунок (справа) отображает два единичных круга, которые покрывают наибольший квадрат стороной



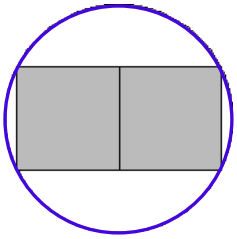
$$s = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\Phi + \phi}.$$

Подобные конструкции наблюдаются и при пакетировании квадратов с единичной стороной внутри круга с наименьшим радиусом r (см. рис. 5).

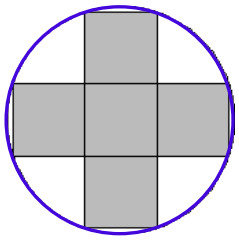
Исходя из основной формулы (1), симметрично расположенные круги всегда имеют радиус > 0,5.

При несимметричном их расположении данное свойство уже не очевидно.

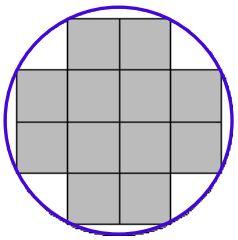
Тем не менее, в отдельных случаях допустимо указать такой предел.



$$r = \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\Phi + \phi}{2}$$



$$r = \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\Phi + \phi}{\sqrt{2}}$$



$$r = \sqrt{5} = \Phi + \phi$$

Пример [24]. Пусть круг радиуса 1 покрыт семью одинаковыми кругами.

Покажем, что их радиус не меньше ½.

Предположим, что диаметр кругов меньше 1. Тогда круг, закрывший центр исходного круга, не "достанет" до его окружности. Значит, эта окружность покрыта не более чем 6 кругами. Каждый из кругов покрывает некоторую дугу окружности, длина наибольшей из этих дуг не меньше $^1/_6$ длины окружности. Диаметр круга, покрывающего эту дугу, не меньше длины соответствующей хорды, то есть не меньше 1.

Возникает противоречие.

Следовательно, радиус покрывающих семи кругов не меньше ½.

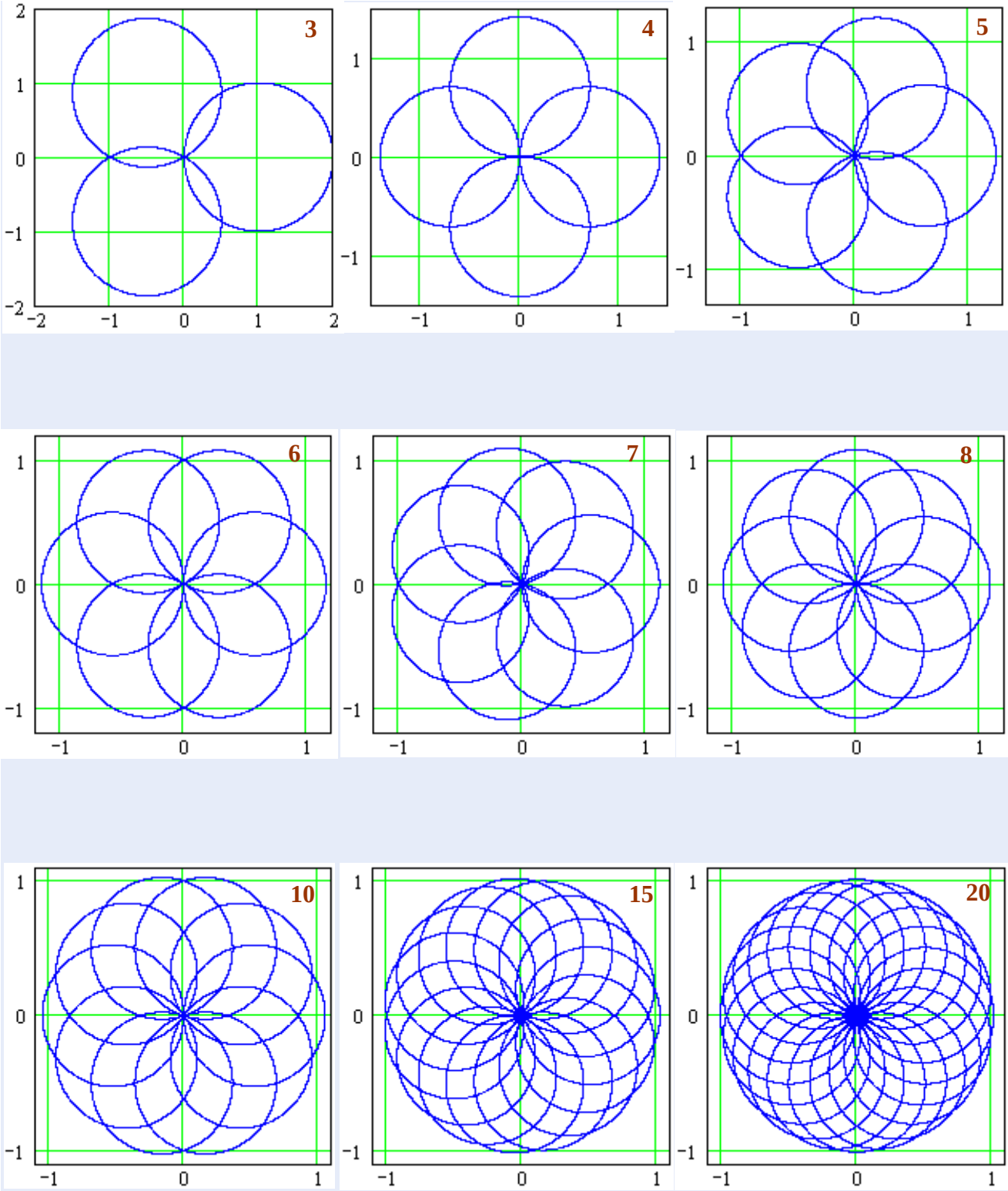
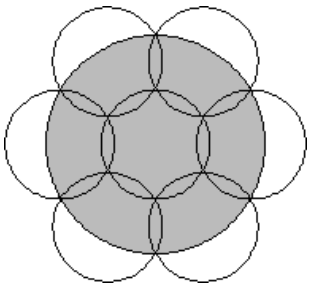


Рис. 5. Система n равных кругов, расположенных симметрично относительно центра и покрывающих круговую область единичного радиуса



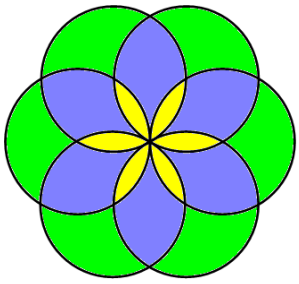
Примечательно, что семь кругов имеют радиус [21], в точности равный $r(7) = 0{,}5$.

Один круг в фокусе композиции и шесть кругов с их центрами в вершинах правильного шестиугольника.

Дальнейшее увеличение числа кругов приводит к радиусам, которые меньше 0,5:

$$r(8) \approx 0{,}437; \quad r(9) \approx 0{,}422; \quad r(10) \approx 0{,}398.$$

Рисунки с покрывающими кругами при их наложении образуют красивые орнаменты, которые используются зодчестве.



Так, одну из красивых аранжировок из шести кругов нашли в древнеегипетском храме Osiris (*Rawles*, 1997).

Похожие образцы появляются в итальянском искусстве XIII в. (*Wolfram*, 2002).

Здесь круги составляют симметрию шестого порядка, формируя восхитительный образ совмещенных кругов и линз различной расцветки [25].

Дважды два – пять?

Учитывая затронутую проблематику пяти, в заключение приведем один любопытный алгебраический софизм на тему «дважды два – пять».

К числовому равенству $4^2 - 4\cdot 9 = 5^2 - 5\cdot 9$ прибавим $(9/2)^2$:

$$4^2 - 4\cdot 9 + (9/2)^2 = 5^2 - 5\cdot 9 + (9/2)^2.$$

Запишем выражения слева и справа в виде квадратов разности $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

$$(4 - 9/2)^2 = (5 - 9/2)^2.$$

Отсюда следует, что $4 - 9/2 = 5 - 9/2$ или **4 = 5** (?).

Помнится, нечто похожее было и с отрицанием самой возможности формирования кристаллов с симметрией пятого порядка.

Но как показала практика, твердым телам это оказалось под силу.

Наверное, потому, что, образно говоря, пятое колесо в телеге – это ... её руль, как пятая точка опоры у большинства людей. Особенно, если подходящее кресло...

Литература:

1. Gardner M. Mathematical Games: The Diverse Pleasures of Circles that Are Tangent to One Another // Sci. Amer. 240 (Jan. 1979), 18–28.
2. Gardner M. Mathematical Games: How to be a Psychic, Even if You are a Horse or Some Other Animal // Sci. Amer. 240 (May 1979), 18–25.
3. Lagarias J.C., Mallows C.L., Wilks A.R. Beyond the Descartes Circle Theorem // Cornell University Library, 2001. – URL: http://arxiv.org/pdf/math/0101066v1.pdf.
4. Descartes R. Oeuvres de Descartes, Correspondance IV, (C. Adam and P. Tannery, Eds.), Paris: Leopold Cerf 1901, 45–50.
5. Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию: Пер. с англ. – М.: Наука, 1966. – 648 с. – http://eek.diary.ru/p165970944.htm.
6. Coxeter's loxodromic sequence of tangent circles // From Wikipedia, the free encyclopedia. – URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Coxeter%27s_loxodromic_sequence_of_tangent_circles.

7. Coxeter H.S.M. Loxodromic Sequences of Tangent Spheres // Aequationes Math., 1 (1968), 104–121. – URL: http://bookfi.org/md5/6b26c1f46c44727f5ea38eb6df8d48ff.

8. Coxeter H.S.M. The Descartes circle theorem and Fibonacci numbers / Canadian Mathematical Society / 1998 CMS Winter Meeting. – URL: https://cms.math.ca/Events/winter98/w98-abs/node6.html.

9. Coxeter H.S.M. Numerical distances among the circles in a loxodromic sequence, Nieuw Arch. Wisk, 1998, 16, 1–9.

10. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS). – URL: http://oeis.org/.

11. Василенко С.Л. Треугольники и золотые чевианы // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 12.06.2012. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=76&sm=2 / Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17549, 23.06.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161974.htm.

12. Щетников А.И. Золотое сечение, квадратные корни и пропорции пирамид в Гизе // Математ. образование. – 2006. – № 3. – С. 59–71. – URL: nsu.ru/classics/pythagoras/Pyramis.pdf.

13. Василенко С.Л. В поисках математической гармонии мира // АТ. – М., Эл № 77-6567, публ.17347, 06.03.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161940.htm.

14. Василенко С.Л. Пирамидальная золотоносность // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.02.2012. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=64&sm=2 / АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17305, 11.02.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161930.htm.

15. Белянин В.С. Квазикристаллы и золотая пропорция // Наука и жизнь. – 2005. – № 10. – URL: nkj.ru/archive/articles/2102/.

16. Векилов Ю.Х., Черников М.А. Квазикристаллы // Успехи физических наук, **180**:6 (2010), 561–586. – URL: mathnet.ru/links/77dcacfcd48e715bbfc9c980c6b9d887/ufn2220.pdf.

17. Василенко С.Л. Золотые пропорции полинома четвертой степени (кварта-модель) // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 2012. – URL: artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3.

18. Weisstein E.W. Five Disks Problem // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – URL: http://mathworld.wolfram.com/FiveDisksProblem.html.

19. Ball W.W.R., Coxeter H.S.M. The Five-Disc Problem / In Mathematical Recreations and Essays, 13th ed. – New York: Dover, 1987, 97–99.

20. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. 5-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2006. – 640 с.

21. Weisstein E.W. Disk Covering Problem // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – URL: http://mathworld.wolfram.com/DiskCoveringProblem.html.

22. Friedman E. Packing Center. – URL: http://www2.stetson.edu/~efriedma/packing.html.

23. Circles in Circles. – URL: http://www2.stetson.edu/~efriedma/cirincir/.

24. Задачи / Задача 97935. – URL: problems.ru/view_problem_details_new.php?id=97935.

25. Weisstein E.W. Seed of Life // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – URL: mathworld.wolfram.com/SeedofLife.html.

© ВаСиЛенко, д.т.н., 2017
Харьков, Украина