Грант Аракелян

Об основаниях фундаментальной науки

Предисловие.
Часть I. Структура научного знания. Основания математики

Содержание

Предисловие

Часть I.
Структура научного знания. Основания математики

Шкала Вселенной и иерархия научного знания

Обобщение понятия числа

Метаматематика

Часть II.
Основания физической теории

Связь между физической теорией и философией

Фундаментальная физическая теория

Физические величины и математический аппарат

Физическая математика. О критерии математической красоты

Физические величины и математический аппарат (продолжение)

Часть III.
Исследования по основаниям науки

Карл Поппер о демаркации научного знания

Смена научных теорий по Томасу Куну

Исследования других авторов

Литература

Предисловие

Человек разумный (homo sapiens, представитель семейства гоминид отряда приматов) всегда задавался вопросами, на которые нет однозначных ответов. Каков окружающий нас мир, что лежит в его основе, кто им управляет, возник ли он по естественным причинам или в соответствии с божественным замыслом? Существует ли высший разум, сверхъестественное начало, бог, творец, демиург? Кто мы сами, откуда взялись, куда идём, каков смысл нашего существования? Одиноки ли мы во Вселенной, или же есть и другие разумные существа, для которых мы, возможно, всего лишь ничтожные твари на второстепенной планете? Ответы на подобные вопросы, какими бы спорными и неубедительными они ни были, могут быть получены только путём рефлексии над повседневным эмпирическим опытом, как результат умозрения, полёта творческой фантазии, теоретического осмысления существующих реалий.

Постановка и решение мировоззренческих вопросов, затрагивающих глубинную основу нашего бытия, производится посредством целостных представлений об окружающем мире, универсальных мифологических, религиозных философских или научных моделей, призванных объяснить всё и вся в доступной обозрению области. Такой подход присущ мыслителям разных эпох и стран, но особенно характерен для золотого века античной греческой цивилизации. Рассуждая, например, о платоновской теории эйдосов, учении о бессмертии души, натурфилософии, космологии, математике, политике, этике,

эстетике и т. д, следует ясно отдавать себе отчёт в том, что в мировосприятии Платона это не изолированные области исследования и умозрения, а существующие в органической связи части единого целого. В наши дни нелегко уловить связь, допустим, между математикой и учением о бессмертии души, укладываемых в шкатулку одной концепции, поскольку научным прогрессом мышление современного человека изгнано из мировоззренческого «рая», где каждая область знания существовала не сама по себе, не как самодостаточная дисциплина, а как органически вписываемый в общую картину мира элемент всеединой системы.

Сказанное о целостном восприятии мира и системном единстве познания, естественно, относится и к другим мыслителями эпохи расцвета греческой цивилизации, начиная, вероятно, с Фалеса, но особенно Пифагора и пифагорейцев, оказавших немалое влияние на Платона и последующее развитие научного знания. Пифагорейцы больше известны как математики, занимавшиеся исследованиями в области арифметики и геометрии, однако такое понимание является неполным и односторонним. В современных понятиях основанный Пифагором в Великой Греции (Южная Италия) союз был одновременно философским орденом, религиозной общиной мистического толка со своим учением, обрядами и моральным кодексом, математической ассоциацией со склонностью к числовой магии, научным сообществом космологов и астрономов, политической партией, выражающей преимущественно интересы греческой аристократии, музыкальной школой с явно выраженным теоретическим уклоном, наконец, замкнутым элитарным клубом античных интеллектуалов. И всё это, как говорится, в одном флаконе.

С высоты наших знаний и свойственного некоторым современным авторам высокомерно-скептического отношения к достижениям древнего мира подобное единство представляется сегодня как показатель неразвитости знания, находящегося в начальной стадии своего становления. Неверие в возможности древних приводят к возникновению таких фантомных идей, как, скажем, приписывание строительства египетских пирамид мифической расе атлантов или даже инопланетянам. И вообще, все самые удивительные достижения далёких времён принадлежат, оказывается, не отсталым аборигенам прошлого, а когда-то населяющим якобы землю и бесследно исчезнувшим высшим расам, либо пришельцам из космоса.

В условиях существования тысяч научных дисциплин, когда нет единства даже в рамках одной фундаментальной области знания и когда, например, учёные, работающие в разных областях физики, говорят на разных научных языках и не понимают друг друга, немудрено относиться к античной концепция единства знания как к красивой сказке, возможной лишь на ранних этапах человеческой цивилизации. Однако не всё так просто. Наряду с пусть не всегда чётким отделением мифологии от религии, религии от философии, философии от науки, науки от натурфилософии, мистики и оккультизма и выделением исследований об обществе и человеке в отдельную сферу «гуманитарных наук» всегда существовала тенденция к объединению отдельных дисциплин, неистребимое стремление к поиску общего начала и систем универсальной значимости. Словом, налицо медленная, с неимоверными трудностями и, как правило, ограниченная по охвату попытка интеграции в противовес неудержимой дифференциации знания. Образно говоря, с одной стороны – стремительный полёт стрижа у поверхности, с другой – неторопливое парение орла на больших высотах. Параллельно существуют наука и рефлексия над наукой, строящееся здание и невидимый фундамент, на котором оно возводится и о котором обитатели дома могут и не знать или иметь лишь смутные представления. Можно продолжить ряд аналогий, призванных хотя бы в грубом приближении показать коренное отличие конкретного научного знания от оснований науки.

Часть I.
Структура научного знания. Основания математики

Принято различать три основных уровня научного познания: эмпирический, теоретический и метатеоретический. ***Эмпирическое познание*** *(греч.* εμπειρία *– опыт) связано с чувственным восприятием окружающего мира, с опытом отдельной личности и опытом, передаваемым из поколения в поколение. Основным инструментом эмпирического познания в науке являются наблюдение и эксперимент, включая лабораторные исследования методом проб и ошибок, с помощью которых выявляются связи и отношения между исследуемыми явлениями и величинами. В физических науках промежуточным звеном между эмпирией и теорией служат содержащие, как правило, ряд эмпирических параметров полуэмпирические теории, устанавливающие аналитические связи между физическими величинами на основе не столько общих принципов, сколько экспериментальных данных.*

Теоретическое познание *(греч.* θεωρία *– рассмотрение, исследование) представляет собой более высокий уровень научного осмысления действительности. Теория – это система научных понятий, принципов и правил, обобщающая специфическим образом практический опыт, представляющая те или иные абстрактные идеи в виде целостной структуры или отражающая какие-то стороны существующей реальности. Наиболее зрелыми и совершенными, с точки зрения структуры и строгости выводов, являются теории математики и физики, к которым предъявляется ряд достаточно жёстких требований, необходимых для возведения гипотетического построения в ранг научной теории. В формальной математике это прежде всего непротиворечивость и полнота теории, разрешимость её формул, независимость системы аксиом, В физической теории на первом месте соответствие экспериментальным данным и предсказание новых явлений и фактов.*

Предметом научного исследования может быть и сама теория. Теория какой-то другой теории это ***Метатеория*** *(от греч.* μετά *– после и* θεωρία*), изучающая теорию-объект посредством своего метаязыка. Предметом анализа метатеории служат структура, свойства, методы и приёмы исследования теории-объекта, её основные понятия и принципы. В узком смысле метатеория относится к логике (металогика) и математике (метаматематика), изучая при этом методами математической логики синтаксис – структурные и дедуктивные особенности и семантику – содержательные интерпретации различных исчислений и формальных систем, таких как исчисления высказываний и предикатов, системы формальной математики. Особое внимание здесь уделяется правилам образования и преобразования формализованной системы, вопросам, касающимся доказательств. В широком же смысле метатеория – важнейший инструмент исследований по основаниям науки, выполняющий, помимо прочего, и методологическую функцию по отношению к исследуемой теории или научной области.*

Шкала Вселенной и иерархия научного знания

Конкретное обсуждение проблемы оснований науки начнём с русифицированной нами, широко известной, хотя и дискуссионной (как и любая другая) схемы, на которой представлены шкала размеров Вселенной, главнейшие отрасти науки и их иерархия, см. [54].

Шкала Вселенной и общая структура науки

Согласно данному представлению, наблюдаемая Вселенная расположена в интервале $10^{-15} – 10^{27}$ см, с отношением порядка 10^{42} верхнего предела к нижнему. Данные, полученные на современных ускорителях, позволяют отодвинуть нижний предел на несколько порядков вниз, а теоретическая экстраполяция, связанная с определением границ справедливости неквантовых теорий гравитации, доводит доступную теоретическому анализу минимальную длину до уровня планковской длины $\sim 10^{-33}$ см. Сюда можно добавить, что справедливость теории струн на малых расстояниях, указанная на шкале с вопросительным знаком, относится к разряду не подтверждённых опытными данными произвольных теоретических построений, существование же параллельных с нашей Вселенных является допущением чисто спекулятивного характера.

Однако здесь важно не уточнение границ физической реальности, которое, минуя физическую теорию и эксперимент, возможно, решается посредством анализа размерностей с учётом физического смысла физических величин [2], а наличие общей структуры научного знания, необходимой для понимания обсуждаемой темы. Если взять указанную схему за основу и представить современную науку в виде напоминающей буддийскую пагоду многоуровневой структуры, где каждый новый ярус покоится на предыдущем, то в основании всей конструкции лежат «формальные науки» – логика и опирающаяся на неё математика. Далее идут «физические науки» – физика и химия, которые, наряду со своим логико-математическим базисом, образуют тот сектор современной науки, который обычно и считается фундаментальным в иерархической структуре научного знания. Третий «ярус» в ней заполняет биология как наука о жизни, предшествующая наукам об обществе, представленными социологией и психологией. Наконец, на вершину всей структуры помещены непосредственно связанные с физическими науками астрономия и науки о земле.

Конечно, каждая из ступеней и вообще каждая в отдельности взятая научная теория имеет свою специфику и относительную степень самостоятельности, которая становится всё более эфемерной по мере приближения к границам. Оставаясь в рамках научной теории (или даже целой отрасли знания) крайне затруднительно, чтобы не сказать невозможно, очертить границы её применимости: здесь требуется уже взгляд со стороны, с выходом в научное «Зазеркалье». Приближаясь к границам теории,

мы приближаемся к её основаниям, где правила игры уже не те, что вдали от границ. Это область фундаментальных принципов, общих понятий, концептуальных схем, методологических постулатов, философского осмысления фундамента научного знания. Сам переход от научной теории как таковой к её основаниям в какой-то мере связан с унаследованной от античности идеей единства окружающего мира, существования общей основы всего сущего, которая должна отражаться в обобщённых теоретических моделях её описания. Пути-дороги, ведущие к анализу оснований науки, могут быть разными: создание универсальных теоретических построений путём объединения различных теоретических конструкций в одно целое, поиск единой основы материального мира или базиса научной отрасли, обобщение фундаментальных научных понятий, экспансия физико-математических принципов и понятий в смежные области знания ….

Обобщение понятия числа

Рассмотрим для ясности ряд характерных примеров из математики, а позже из физики – признанной, наряду с логикой, основы фундаментальной науки. Начнём с понятия числа, которое является одним из основным в математике и её многочисленных приложениях.

В самом начале были натуральные числа 1, 2, 3, … как необходимый элемент счёта, используемый ещё в доисторические времена. Известно, что древние греки, включая пифагорейцев, числами считали только натуральные числа, наложив на всё остальное строгое табу, которое оставалось в силе на протяжении многих веков. Хотя расчёты, связанные с фактическим использованием отрицательных чисел, всё же приходилось производить, однако как законный объект математики, не совсем, правда, равноправный с натуральными числами, они появились в Европе только в XIII веке благодаря итальянскому купцу-математику Леонардо Пизанскому (Фибоначчи), который завёз их с Востока. Были также проблемы, возникшие с открытием пифагорейцем Гиппасом из Метапонта (574–522 до н.э.) иррациональных чисел, точнее отрезков, несоизмеримых с отрезком единичной длины то ли квадрата, то ли пентаграммы. В первом случае речь о геометрическом представлении корня квадратного из двух (константа Пифагора), во втором – корня квадратного из пяти (относящегося к константе золотого сечения). Открытие несоизмеримых отрезков подрывало пифагорейский догмат единственности натуральных чисел, в сущности это первый в истории науки кризис оснований математики, требующий её коренного пересмотра. Никакого пересмотра однако не последовало. Несоизмеримые отрезки, тем самым и иррациональные числа, не мудрствуя лукаво строжайше запретили, а «отбившийся от стада» гений-отступник Гиппас, посягнувший своим открытием на святая-святых не подлежащей обсуждению доктрины, подвергся, согласно преданию, суровым гонениям со стороны хранителей чистоты и непорочности пифагорейской математики.

Со временем иррациональные числа были, конечно, узаконены, образуя вместе с натуральными, положительными, рациональными, отрицательными и трансцендентными величинами континуум действительных (вещественных) чисел. Позже, заполнение лакун в математике, связанных с появлением корней из отрицательных величин при решении алгебраических уравнений, привело к введению мнимых и комплексных чисел, частными случаями которых являются числа всех остальных типов. Почти каждое, по сути вынужденное, расширение изначального множества натуральных чисел сопровождалось серьёзными потрясениями в сообществе математиков, не желавших признавать новые объекты равноправными конструктами математической теории, о чём, кстати, свидетельствуют и названия, даваемые новым числовым величинам. Сегодня комплексные числа, теория функций комплексного переменного – не просто дополнение и обобщение теории действительных переменных, а более продвинутый стиль мышления, новое понимание оснований математики, рикошетом – и теоретического естествознания. А вся многовековая история с расширениями и обобщениями числовых множеств может считаться классическим примером серии последовательных модификаций в основаниях математики, обусловленных изменениями в понимании фундаментального понятия числа. В свою очередь это приводило к серьёзным трансформациям уже в основаниях опирающихся на математический базис физических наук.

Следует добавить, что процесс обобщения понятия числа комплексными числами теоретически исчерпан, поскольку любая попытка их дальнейшего обобщения (гиперкомплексные числа, в частности кватернионы, числа Кэли, Клиффорда – Липшица, p-адические числа и т.д.) возможна лишь ценой отказа от основополагающих признаков чисел всех разновидностей – от натуральных до комплексных. Другими словами, если под числами понимать объекты, обладающие вполне определённой совокупностью свойств, включая коммутативность сложения и умножения, операцию деления, то универсум отвечающих этим требованиям объектов целиком формируется и заполняется комплексными числами типа $x + iy$, где x, y – произвольные действительные числа, i – мнимая единица.

Содержательные толкования множества комплексных чисел могут быть разными, но все они связаны с размерностью 2: точки на двумерной плоскости, векторы двухмерного пространства, матрицы второго порядка. Если же взять, например, частный случай гиперкомплексных чисел – кватернионы, то есть числа типа $x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$ которые формально отличаются от комплексных чисел тем, что у них три вместо одной комплексные единицы с соответствующими соотношениями для циклической перестановки мнимых единиц i, j, k, то оказывается, что закон коммутативности умножения для кватернионов не выполняется. Объекты, для которых выполняется фундаментальный закон коммутативности, и объекты, для которых этот закон не выполняется, трудно считать членами одного семейства величин. Следовательно, переход от размерности 2 к размерности 4, которому геометрически соответствует переход от двумерной плоскости к четырёхмерному пространству, не означает заполнения и расширения множества комплексных чисел родственными им по общим признакам объектами нового рода, поскольку это сопровождается разрушением основ самой системы постулатов числовой математики. Для других размерностей, число которых, конечно, не ограничено, отличия оказываются ещё более глубокими. Так, для размерностей 3, 5 и выше нельзя построить даже систему, аналогичную кватернионам.

В этом смысле других чисел, помимо комплексных, нет, а все остальные «числа» – объекты другого рода, то есть с существенно другим набором основных свойств. Иногда это положение, известное благодаря исследованиям Вейерштрасса, Фробениуса, Пирса и других, облекается в сходную форму: невозможно какое-либо расширение понятия комплексного числа за пределами системы комплексных чисел без отказа от каких-то фундаментальных свойств числа. На примере числа можно утверждать, что любое обобщение фундаментальных понятий в математике, сопровождаемое порой весьма существенным пересмотром её оснований, имеет свои пределы, определяемые изначально постулируемой совокупностью свойств, характерной и обязательной для всех членов данного семейства величин.

Метаматематика

Безудержная страсть к обобщениям сыграла недобрую шутку с его творцами, адептами и канторами (от лат. *cantor* – певец), но одновременно послужила толчком для появления метаматематики – специфической области исследований по основаниям математики. В конце 19 века окончательно оформилось *Mengenlehre*, позже названное *наивной теорией множеств*, созданное переехавшем в детстве с семьёй из Санкт-Петербурга в Германию математиком Георгом Кантором. В теории Кантора натуральные числа обобщаются посредством новых математических конструктов – ординальных и кардинальных трансфинитных чисел. Кантор доказал, что действительных чисел больше, чем натуральных (теорема Кантора) и ввёл понятие мощности кардинального числа. Все «кардиналы» выстроились в возрастающий по мощности бесконечный ряд $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, …, $\aleph_{\square}$, … где алеф-нуль $\aleph_0$ – кардинальное число счётного множества натуральных чисел, $\aleph_1$ – континуума действительных чисел и так далее. Все алефы, для которых была установлена такая же иерархия, как и для натуральных чисел, это актуально бесконечные множества, рассматриваемые как некая данность, как математические объекты, допускающие формальные манипуляции по определённым правилам. Был отброшен

аристотелевский принцип *infinitum actu non datur* (актуально бесконечного нет), считавшийся до Кантора общепринятым в научном сообществе.

Теория Кантора претендовала на роль фундамента всей математики, ключевым понятием которой стало признаваться не число, а *множество*, определяемое самим Кантором как *объединение в единое целое различаемых объектов нашей интуиции или мысли, называемых элементами множества* [52], или, в несколько другой редакции, как *единое имя для совокупности всех объектов, обладающих данным свойством*. Теория множеств подверглась резкой критике со стороны таких известных математиков как А. Пуанкаре, который назвал идеи Кантора «тяжелой болезнью», поразившей математику, Л. Кронекер, обвинившего своего бывшего ученика в шарлатанстве, отступничестве и растлении молодежи, Г. Вейль, Л. Брауэр, Г. Шварц, а с философских позиций против теории множеств выступил Л. Витгенштейн. Но нашлись у Кантора и могучие защитники, в том числе ведущий, наряду с Пуанкаре, математик первой половины XX века Д. Гильберт, заявивший, что «Никто не изгонит нас из рая, который основал Кантор» [63], на что Витгенштейн откликнулся ироничной фразой; «Если кто-то воспринимает это как рай для математиков, почему кто-то другой не воспримет это как шутку?» [65].

Светлая мечта исследователей многих поколений: подвести под математику надёжный, несокрушимый фундамент, ставящий по большому счёту точку в поисках оснований «царицы наук», казалось, была близка к окончательной реализации. Предполагалось редуцировать к теории множеств все остальные математические теории, выразить основные понятия математики через теоретико-множественные термины. Однако шутки с актуальной бесконечностью ни к чему хорошему никогда не приводят. Триумфальное восхождение с помощью «кардиналов» на платоновские небеса математических *идей*, где в принципе допустимы любые математические абстракции, у Кантора не получилось. Алеф-обобщение натуральных чисел с треском провалилось: в канторовском раю завелись черти в виде парадоксов (антиномий) Бурали-Форти (1897 г.), самого Кантора (1899 г.), Рассела–Цермело (1901 г.), предложенного Расселом шутливого «парадокса Тристрама Шенди» (1917 г.) и некоторых других. По словам Пуанкаре, «Нет актуальной бесконечности. Канторианцы забыли это и впали в противоречие» [42, с. 400].

В истории математики бесконечность, допустимость использования тех или иных инфинитезимальных методов долгое время была головной болью многих математиков. С понятиями бесконечно малой и большой величин, кстати, связан второй, после обнаружения несоизмеримых отрезков (иррациональных чисел), великий кризис оснований математики. Зенон Элейский (ок. 490 до н. э. – ок. 430 до н. э.) и его последователи открыли ряд парадоксов (апории Зенона), в которых на разные лады развивалась тема невозможности построения конечных величин из бесконечно малых. В современной физике это можно представить как до сих пор не решённую, не вполне адекватно описываемую классическими теориями и не доведённую до конца в квантовой физике проблему непрерывности и дискретности пространства и времени, фактически как противоречие между понятиями непрерывного движения и бесконечного множества. В математике, в отсутствие надёжных методов, инфинитезимальные задачи решались чисто интуитивно, а интуиция может быть как прекрасным поводырём, так и обманчивой иллюзией. Мучительным переживаниям и интуитивной неопределённости был положен конец созданием теории пределов (главным образом Коши, а также Вейерштрасс, Больцано и другие), окончательно, как могло тогда показаться, изгнавшей из теории актуальную и утвердившей в законных правах потенциальную бесконечность, Её можно, например, охарактеризовать словами Гаусса в письме к Шумахеру в 1831 году:

«Я возражаю против использования бесконечных величин как чего-то завершённого, это не допустимо в математике. Бесконечность – это всего лишь речевой оборот, реальное значение которого – предел, к которому неограниченно приближаются определённые отношения, в то время как другим позволено бесконечно увеличиваться».

Увенчавшаяся парадоксами, канторовская игра с бесконечностью как с завершённой данностью породила третий великий кризис оснований математики, привлекший внимание лучших умов

математики и ознаменовавшийся созданием конкурирующих концепций её обоснования. Наивная теория множеств Кантора канула в Лету, появились альтернативные варианты, среди которых наиболее известна аксиоматическая теория множеств Цермело–Френкеля, доработанная Бернайсом и Гёделем. С помощью искусственных ограничений удалось, похоже, избавиться от парадоксов, но проблема обоснования математики тем не менее не была решена.

В сущности, в основе любой концепции обоснования математики лежит идея её унификации – сведения к тому или иному минимальному базису исходных принципов и простейших, далее неразложимых понятий, играющих роль «атомов», первичных объектов математики. «Атомами» теории множества являются множества, а другие программы обоснования математики: логицизма (Фреге, Рассел, Уайтхед, Куайн), формализма (Гильберт, Карнап, Тарский и др.), интуиционизма (Брауэр, Вейль, Гейтинг) хотя заметно отличаются друг от друга, но едины в признании первичности натуральных чисел по отношению ко всем остальным. Общей для всех этих программ является проблема обоснования арифметики натуральных чисел (см., например, [42: 37; 3]). Один из основателей логицизма Рассел вводил натуральный ряд с помощью аксиомы бесконечности, формализм гильбертовского типа вводил его с помощью системы аксиом, в первую очередь аксиомы полной индукции, а у интуиционистов средством материального представления натуральных чисел служат палочки или точки, последовательно наносимые на бумагу.

Известно, что проблему обоснования математики ни одна из программ решить так и не смогла, попытки сведения математики к минимальному базису каких-то исходных понятий, принципов и объектов успехом не увенчались, а холодный душ в виде теорем Гёделя о полноте (1929) и неполноте (1930) формальной арифметики остудил пыл наиболее радикально настроенных формалистов. Этими теоремами доказывается ограниченность всякой формальной системы, в которой определены натуральные числа, операции сложения и умножения. Если такая система формальной арифметики натуральных чисел непротиворечива, то в ней существует невыводимая и неопровержимая формула и в ней невыводима также формула, утверждающая непротиворечивость системы.

Метаматематика как метатеория математики, изучающая её основания, не достигла конечной цели, но, тем не менее, необходима для решений важнейших задач формальных систем математики методами математической логики. Это как бы мостик, соединяющий два нижних фундаментальных яруса в представленной выше схеме научной иерархии. В круг решаемых метаматематикой вопросов входят проблема разрешимости, определение независимости аксиом, непротиворечивости, полноты формальных систем, вопросы, связанные с формальными доказательствами, интерпретации формальных систем, отношения между ними и тому подобное. Фактически именно метаматематика является наиболее фундаментальной и теоретически продвинутой частью исследований по основаниям науки.